UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y ACTUARIALES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

MONOGRAFÍA PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

APLICACIONES DE LA TEORÍA ERGÓDICA EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS Y COMBINATORIA ADITIVA

AUTOR

Br. Lesvi Oswaldo Gomez Angulo

TUTORA

M.Sc. Lissette del Carmen Quintero Vargas

León, Nicaragua, Enero de 2023

“A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD”

DEDICATORIA

Dedico este trabajo monográfico con todo mi amor a mi amada madre Flora Antonia Angulo González por toda su confianza, por ser parte indispensable en mi vida, por todo su amor e inconmensurable apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a Dios por la vida, la fuerza, inteligencia y determinación concedida durante toda mi vida, por no abandonarme en ningún momento de mi vida, por ayudarme e iluminarme en la comprensión y elaboración del presente trabajo con el cual finaliza este proceso de formación universitaria.

A mi madre por ser amor en mi vida, por creer en mí, por motivarme y ser mi motivación, por ser mi refugio en los buenos y malos momentos, por apoyarme en todo momento y ser mi impulso para culminar con éxito esta etapa de mi vida, porque sin ella mi vida sería de blanco y negro.

A cada uno de los maestros que fueron parte de mi formación durante el transcurso de la carrera, por sus esfuerzos, amor y pasión con la que cada uno realiza su labor de llevar el pan de la enseñanza a todos sus estudiantes, gracias maestros por haber elegido ser maestro y por haberme enseñado tan bien. Agradezco especialmente al profesor M.Sc. Rafael Espinoza Montenegro por ser un amigo, excelente maestro y persona, por creer en mis capacidades, por su cariño, consejos y apoyo, por motivarme e impulsarme a crecer y pensar en grande, a la profesora M.Sc. Lissette Quintero Vargas por asumir la tutoría de este trabajo monográfico para concluirlo, por sus acertadas recomendaciones, por ser parte de mi formación, por sus palabras de motivación, por ser una excelente maestra, por transmitir con amor el pan del saber que nutre el intelecto de cada uno de sus alumnos, a la profesora Ph.D. Adalila Molina Membreño por todo su apoyo en las diversas gestiones, por su motivación, cariño y confianza hacia mí, por cada uno de sus consejos y buenos deseos, por creer en mi talento y capacidades, al profesor Lic. Mario Zapata Zapata por ser un excelente maestro, por brindar su ayuda, sus conocimientos y motivación para que pueda seguir formandome.

También agradezco al grupo de maestros, encabezados por la profesora Lissette Quintero, que apoyaron en las revisiones finales de este trabajo monográfico, gracias por su valioso tiempo, compromiso y voluntad.

A cada una de las personas que han transitado en mi vida, de las cuales he aprendido valiosas lecciones que me han ayudado en el crecimiento personal y profesional, a aquellas que me han brindado palabras de aliento y de motivación en mis momentos difíciles, a las que han estado en mis momentos de caída, a cada uno de ustedes ¡infinitas gracias!

“Dale un pez a un hombre y comerá hoy. Enséñale a pescar y comerá el resto de su vida”.

Proverbio chino.

RESUMEN

Este escrito monográfico tiene como objetivo presentar las aplicaciones teóricas de la teoría ergódica en sistemas dinámicos discretos y combinatoria aditiva, en específico, en la demostración del lema de Kac en sistemas dinámicos discretos y la prueba desde la perspectiva ergódica del teorema de Szemerédi en combinatoria aditiva, para ello, previamente se reúne toda una base teórica haciendo uso de una metodología con enfoque cualitativo de carácter descriptivo−documental mediante la cual se introducen las nociones y algunas propiedades importantes de espacio topológicos, espacios métricos, espacios normados, topologías débiles en espacios normados, álgebras, medida, integración, recurrencia, transformaciones preservadoras de medida y ergodicidad con lo cual se establece la relación de la teoría ergódica con los sistemas dinámicos discretos y la combinatoria aditiva obteniendo como resultados la demostración del lema de Kac en la cual están involucrados el teorema de recurrencia de Poincaré y el teorema ergódico de Birkhoff, y la prueba del teorema de Szemerédi mediante la construcción de un sistema dinámico medible e invariante al cual es posible aplicar el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg lo cual permite probar la veracidad del teorema.

Palabras claves: **Ergódica, Recurrencia, Sistema dinámico, Lema de Kac, Teorema de Szemerédi.**

ÍNDICE GENERAL

1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS 1

1.1. Contenido de los capítulos . . . 1

1.2. Introducción . . . 3

1.3. Objetivos . . . 7

1.3.1. Objetivo general . . . 7

1.3.2. Objetivos específicos . . . 7

2. MARCO TEÓRICO 8

2.1. Elementos de topología y análisis funcional . . . 8

2.1.1. Espacios topológicos . . . 8

2.1.2. Espacios métricos . . . 23

2.1.3. Espacios normados . . . 27

2.1.4. Topologías débiles en espacios normados . . . 34

2.2. Teoría de la medida e integración . . . 38

2.2.1. Anillo, álgebra y $\sigma-$ álgebra . . . 38

2.2.2. Medida . . . 43

2.2.3. Integración . . . 45

2.3. Teoría ergódica . . . 62

2.3.1. Aplicaciones que preservan medidas . . . 62

2.3.2. Recurrencia y transformaciones inducidas . . . 64

2.3.3. Ergodicidad y teoremas ergódicos importantes . . . 71

2.3.4. Topología débil estrella en $M_1(\Omega)$ y medidas invariantes . . . 85

3. DISEÑO METODOLÓGICO 91

3.1. Tipo de estudio . . . 91

3.2. Fuente de información . . . 91

3.2.1. Fuentes secundaria . . . 91

3.3. Procedimiento de recolección de información . . . 92

3.4. Plan de análisis 93

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN 94

4.1. Aplicaciones de la teoría ergódica 94

4.1.1. Sistemas dinámicos discretos 94

4.1.2. Combinatoria aditiva 105

5. CONCLUSIONES 123

6. RECOMENDACIONES 125

BIBLIOGRAFÍA 126

A. ANEXOS 131

A.1. Enunciados complementarios 131

LISTA DE SÍMBOLOS Y NOTACIÓN

SIMBOLOGÍA	NOTACIÓN	CARACTERIZACIÓN
$\mathbb{R}$	–	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{N}$	–	Conjunto de los números naturales.
α	–	Alfa.
μ	–	Mu.
–	$\mathbb{K}$	Cuerpo escalar de un espacio vectorial.
–	$\overline{\mathbb{R}}$	Conjunto de los reales extendidos.
–	$\mu(A)$	Medida de un conjunto A.
–	$(X, \mathcal{A})$	Espacio medible.
–	$(X, \mathcal{A}, \mu)$	Espacio de medida.
–	$\mathcal{X}_A$	Función característica del conjunto A.

SIMBOLOGÍA	NOTACIÓN	CARACTERIZACIÓN
$-$	n_A	Función de primer retorno de tiempo.
$-$	$L^1(\mu)$	Conjunto de funciones integrables.
$-$	$L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$	Conjunto de funciones integrables de valor real.
$-$	$\overline{d}_B(A)$	Densidad superior de Banach del conjunto A.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS INTRODUCTORIOS

1.1. Contenido de los capítulos

Este trabajo monográfico está inspirado en la belleza y sinigual abstracción de las matemáticas. La investigación está dividida en 8 capítulo. A continuación se presenta una breve descripción sobre el contenido de cada uno de ellos.

El capítulo 1 está formado por tres secciones, en la primera sección se presenta el contenido de los capítulos de la investigación. En la segunda sección se encuentra la introducción en la cual se exponen los antecedentes históricos sobre los orígenes de la teoría ergódica y cómo la búsqueda de las condiciones para la validez de la llamada hipótesis ergódica formalizó matemáticamente esta rama, además se presenta el problema de investigación junto a algunas investigaciones previas a este trabajo las cuales abordan las aplicaciones de la teoría ergódica en sistemas dinámicos discretos y combinatoria aditiva. En la sección final se presentan los objetivos de investigación.

El capítulo 2 está dividido en tres secciones, elementos de topología y análisis funcional, teoría de la medida e integración y teoría ergódica. En la primera sección se introducen los fundamentos sobre espacio topológicos, espacios métricos y espacios normados, así como algunas de sus propiedades a partir de las cuales se pueden definir las topologías débiles en un espacio normado y su dual junto a las ideas de convergencia de sucesiones en estos espacios dotados con dichas topologías. En la segunda sección se exponen enunciados claves como $\sigma-$álgebra, medida, funciones medibles e integral de una función simple y medible. En la tercera sección se plantean conceptos como la invarianza de una transformación, se enuncia el teorema de caracterización para transformaciones invariantes, se definen la recurrencia, las transformaciones inducidas y ergodicidad, y se demuesta el teorema de recurrecia de Poincaré, teorema ergódico maximal y el teorema ergódico de Birkhoff. Finalmente, se define la topología débil estrella del espacio $M_1(\Omega)$ de medidas de probabilidad de Borel, se presentan algunos teoremas sobre la convergencia de sucesiones de medidas en $M_1(\Omega)$ asumiendo que posee la topología débil estrella, se define la aplicación $T_* : M_1(\Omega) \to M_1(\Omega)$ y se prueba que todo punto límite de una sucesión de medidas de probabilidad en $M_1(\Omega)$ es invariante en la topología débil estrella.

El capítulo 3 está dedicado al diseño metodológico, donde se describe el tipo de estudio, las fuentes de información, el procedimiento de recolección de la información y finalmente el plan de análisis sobre la información recolectada.

En el capítulo 4, titulado resultados y discusiones, se exponen las aplicaciones de la teoría ergódica donde con apoyo de los fundamentos previamente expuestos en el capítulo dos y junto a una breve teoría sobre los sistemas dinámicos discretos se demuestra el lema de Kac. Seguidamente, se introducen las definiciones de densidad superior de Banach de un subconjunto de enteros, la transformación shift, la variación de una medida compleja, variación total de una medida compleja, el teorema de representación de Riesz y el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg con los cuales finalmente se demuestra el teorema de Szemerédi desde la perspectiva ergódica.

El capítulo 5 contiene las conclusiones obtenidas al finalizar la investigación. En el capítulo 6 se realizan algunas recomendaciones a los estudiantes sobre otras aplicaciones teóricas de la teoría ergódica que pueden abordarse en futuros trabajos de finalización de estudios.

El capítulos 7 corresponde a las referencias bibliográficas en las cuales se sustenta este estudio y el último capítulo contiene los anexos donde se muestran los enunciados complementarios del marco teórico.

1.2. Introducción

Según (Viana y Oliveira, 2016), en 1971 el físico australiano L. Boltzmann ($1844-1906$) introduce la palabra Ergódica la cual es una concatenación de dos palabras griegas $\epsilon\rho\gamma o\upsilon$ (ergon) que significa trabajo y $o\delta o\sigma$ (odos) que se interpreta como camino; los sistemas que interesaban a Boltzmann y demás fundadores de la teoría cinética de los gases, son los que pueden ser descritos por un flujo Hamiltoniano, representado por la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dq_1}{dt},\ldots,\frac{dq_n}{dt},\frac{dp_1}{dt},\ldots,\frac{dp_n}{dt}\right)=\left(\frac{\partial q_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial q_n}{\partial t},\frac{\partial p_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial p_n}{\partial t}\right)$$

Boltzmann creía que las órbitas típicas de tal flujo cubrían la superficie de energía $H^{-1}(c)$ que las contiene, esta es la hipótesis ergódica[1], la cual era crucial para su formulación de la teoría cinética de gases. La búsqueda por entender si la mayoría de los sistemas Hamiltonianos, especialmente aquellos que aparecen en conexión con la teoría cinética de los gases, son ergódicos o no, fueron los primeros pasos de la teoría ergódica, la cual es el estudio de los sistemas dinámicos dotados de medidas invariantes Viana y Oliveira (2016).

Por otra parte, de acuerdo con (Lacomba, 2000), Henrry Poincaré ($1854-1912$) a finales del siglo XIX con sus trabajos al fusionar el análisis matemático con la geometría, y desarrollar un nuevo punto de vista cualitativo para el estudio de las ecuaciones diferenciales contribuyó también en los inicios de la teoría ergódica.

[1] La hipótesis ergódica planteaba que los promedios de tiempo de cantidades observables a lo largo de órbitas típicas coincidían con sus respectivos promedios de espacio en la superficie de energía.

Sin embargo, desde las perspectiva formal, se considera que el comienzo matemático de la teoría ergódica se dió en los años 1931 y 1932 cuando George David Birkhoff $(1884-1944)$ y John Von Newmann $(1903-1957)$ publicaron documentos de forma individual que contenían versiones ligeramente diferentes de lo que en la actualidad se conoce como el teorema ergódico de Birkhoff y el teorema ergódico de Von Newmann, respectivamente; a pesar que las técnicas utilizadas por Birkhoff y Von Newmann fueron diferentes, ambos llegaron a conclusiones similares (Moore, 2015).

Las pruebas contenidas en estos dos documentos concluyeron notables resultados en mecánica celeste y una visión clave a un problema de 60 años en mecánica estadística, es decir la razón para la cual la hipótesis ergodica es válida; a partir de los documentos publicados por Birkhoff y Von Newmann la teoría ergódica ha prosperado por más de 80 años y cuyas investigaciones subsecuentes en esta rama desde 1932 han ampliado su conexión con la hipótesis central de la mecánica estadística (Moore, 2015).

Cabe mencionar que de acuerdo a (Cárcamo y cols., 1996), otros contribuyentes a la teoría ergódica fueron los matemáticos Frigyes Riesz $(1880-1956)$ de origen húngaro quien presentó un prueba del teorema de Birkhoff más sencilla, el estadounidense Joseph Leo Doob $(1910-2004)$ el cual aplicó el teorema ergódico de Birkhoff a las cadenas de Markov, el matemático ruso Andréi Kolmogórov $(1903-1987)$ quien introdujo el concepto de entropía.

En la actualidad la teoría ergódica ha ampliado su campo de aplicación haciendo conexión con áreas como los sistemas dinámicos los cuales estudian la dinámica de los sistemas en evolución a largo plazo (Brin y Stuck, 2002), este campo tiene sus orígenes en el siglo XIX, un caso interesante son los sistemas a tiempo discreto que en la actualidad son de gran interés ya que mediante ellos es posible modelar muchos fenómenos en diversas áreas (Lacomba, 2000), sin embargo aunque muchos problemas pueden ser estudiados sin complicaciones mediante estos sistemas a tiempo discreto, en algunos casos no sucede lo mismo pues no es posible predecir el comportamiento del sistema cuando las órbitas tienden a ser caóticas por lo cual surge la necesidad de obtener herramientas matemáticas que ayuden a facilitar el estudio de diversos sistemas aún si sus órbitas son caóticas, una de esas herramientas es el Lema de Kac el cual permite conocer el primer tiempo de retorno de un punto de un conjunto A al propio conjunto A con A bajo ciertas condiciones.

También la teoría ergódica tiene relación con la combinatoria aditiva, la cual estudia los subconjuntos de enteros o de otros grupos abelianos de los cuales interesan las propiedades y patrones que pueden expresarse mediante suma y multiplicación (Trevisan, 2009). Un enigmático problema conocido inicialmente como conjetura de Erdös$-$Turan el cual fué propuesto en 1936, garantiza la existencia de progresiones aritméticas de longitud arbitaria en un subconjunto de los enteros si este posee densidad superior positiva de Banach. En 1975, Endre Szemerédi brindó la demostración de la conjetura de Erdös$-$Turan hoy conocida como teorema de Szemerédi (Lugosi y Serra, 2012), sin embargo dicha prueba utiliza métodos puramente pertenecientes a la combinatoria aditiva lo cual hace la prueba en extremo compleja y de gran extensión.

Los casos anteriores son estudiados en la presente monografía mediante el uso de la teoría ergódica a través de la cual se brinda una prueba del lema de Kac así como una demostración más sencilla del teorema de Szemerédi.

A continuación se presentan algunos trabajos sobre la aplicabilidad de la teoría ergódica en la dinámica de sistemas y combinatoria aditiva.

Andrés Vicente Chulluncuy Centeno, de la Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, en su tesis de fin de máster *El teorema de Szemerédi, consecuencias en la distribución de números primos y perspectivas*, (Chulluncuy Centeno, 2014), aborda el teorema de Szemerédi (Teorema 4.1.3) desde distintas perspectivas teóricas, como el análisis de

Fourier para probar el teorema para progresiones aritméticas de longitud tres; usa las normas de Gowers con el objetivo de probar el teorema para progresiones de longitud cuatro y en el caso general hace uso de la teoría ergódica.

Van Amstel de la University of Pretoria, Pretoria, con ayuda del Ph.D. Van Der Walt y Ph.D. M. Messerschmidt, en su tesis de fin de master *An ergodic theoretic approach to Szemerédi's theorem*, (Van Amstel y cols., 2018), estudia el teorema de Szemerédi mediante argumentos teóricos ergódicos, con los cuales muestra que el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg (Teorema 4.1.2) implica el teorema de Szemerédi y seguidamente prueba el recíproco para concluir que los teoremas son equivalentes.

Marina Lizeth Rojas Salazar de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez , México, en su proyecto de investigación *Introducción a la Teoría Ergódica*, (Rojas Salazar, 2018), estudia la dinámica de sistemas y aspectos de la teoría ergódica como la invarianza de una transformación, ergodicidad, recurrencia, además prueba el teorema de recurrencia de Poincaré y el teorema ergódico de Birkhoff con el objetivo de estimar el tiempo de recurrencia de un sistema dinámico discreto.

Mateus Ribeiro de Souza Marra de la Universidade Federal de Uberlândia, junto al Ph.D. Thiago Catalan, en su artículo *Sistemas Dinâmicos: Alguns teoremas clássicos da Teoria Ergódica*, (Marra y cols., 2019), enfoca su trabajo en la demostración de algunos teoremas relevantes de la teoría ergódica y muestra cómo estos junto a los sistemas dinámicos ayudan a resolver problemas en teoría de números.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Mostrar las aplicaciones de la teoría ergódica en sistemas dinámicos discretos y combinatoria aditiva.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Exponer los fundamentos teóricos que respaldan la aplicación de la teoría ergódica en sistemas dinámicos discretos y combinatoria aditiva.

2. Demostrar los principales teoremas ergódicos y algunas propiedades de recurrencia.

3. Probar el lema de Kac utilizando el teorema ergódico de Birkhoff y el teorema de recurrencia de Poincaré.

4. Aplicar el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg en la demostración del teorema de Szemerédi.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Elementos de topología y análisis funcional

2.1.1. Espacios topológicos

Definición 2.1.1 (Topología). *Una topología sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$.*

2. *La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.*

3. *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama espacio topológico.

Definición 2.1.2 (Base de una topología). *Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:*

1. *Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.*

2. *Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones se define la topología generada por $\mathcal{B}$ como sigue: Un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (esto es, es un elemento de $\mathcal{T}$), si *para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathcal{T}$.*

Se debe comprobar que la colección $\mathcal{T}$ generada por la base $\mathcal{B}$ es una topología, es decir verifica las condiciones de la definición 2.1.1. Así, defínase $\mathcal{T}$ como

$$\mathcal{T} = Gen\,\mathcal{B} = \{U \subset X \,:\, \forall x \in U, \exists\, B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}$$

1. Primeramente se debe mostrar que $\emptyset$ y X están en $\mathcal{T}$. Si $U = \emptyset$, trivialmente se satisface que U es abierto, por lo cual $\emptyset \in \mathcal{T}$. De la misma manera $X \in \mathcal{T}$, pues para cada $x \in X$ existirá algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset X$.

2. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de elementos de $\mathcal{T}$. Se mostrará que

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \text{ está en } \mathcal{T}.$$

   Así, dado un punto $x \in U$, entonces existe un índice $\alpha \in J$ tal que $x \in U_\alpha$. Puesto que $U_\alpha \in \mathcal{T}$ es abierto, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_\alpha$, pero $U_\alpha \subset U$, así $x \in B \subset U$, luego de acuerdo a como se ha definido la colección $\mathcal{T}$, el conjunto $U \in \mathcal{T}$, así U es abierto.

3. Resta probar que la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Para ello, primero se exhibira que la intersección de dos elementos cualquiera de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

   Sean U_1, U_2 elementos de $\mathcal{T}$. Sea $x \in U_1 \cap U_2$, y considerando un $B_1 \in \mathcal{B}$ para el cual $x \in B_1 \subset U_1$, y tomando otro conjunto, por ejemplo $B_2 \in \mathcal{B}$ para el cual $x \in B_2 \subset U_2$, entonces por la segunda condición de la definición 2.1.2 existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$, por lo cual $x \in B_3 \subset U_1 \cap U_2$, así $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Ahora, mediante inducción matemática se probará que la intersección de cualquier subcolección finita $U_1, U_2, \cdots, U_n$ de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$. Para $n = 1$ es trivial. Luego, asumiendo como hipótesis inductiva que $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ está en $\mathcal{T}$ se debe mostrar que $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ está en $\mathcal{T}$.

Así, de la hipótesis inductiva se tiene que $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{n-1}$ está en $\mathcal{T}$ y además se sabe que $U_n \in \mathcal{T}$, luego por el hecho anterior se infiere que la intersección de dos elementos cualquiera de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$, así $(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n$ está en $\mathcal{T}$.

Por tanto, se concluye que la colección de conjuntos abiertos generados por $\mathcal{B}$ es, en efecto una topología.

Lema 2.1.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X. Entonces $\mathcal{T}$ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Ver Munkres (2002). □

Definición 2.1.3 (Subbase de una topología)**.** *Una subbase $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se define como la colección $\mathcal{T}$ de todas la uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Sea $\mathcal{S} = \{S_i \subset X \, : \, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = X\}$, es necesario comprobar que la colección $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ definida como

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \, : \, S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

es una topología. Para ellos solo es necesario probar que la colección

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \, : \, S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

es una base. Así, dado un punto $x \in X$ entonces existe algún S_i en $\mathcal{S}$ tal que $x \in S_i$ y en consecuencia a un elemento de $\mathcal{B}$. Por lo cual se cumple la primera condición de la definición 2.1.2.

Para comprobar la segunda condición de la definición 2.1.2, sean $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ tales que

$$B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m \text{ y } B_2 = S_1' \cap S_2' \cap \cdots \cap S_n'$$

Luego, la intersección $B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S_1' \cap S_2' \cap \cdots \cap S_n')$ es también una intersección finita de $\mathcal{S}$, así $B_1 \cap B_2$ está en $\mathcal{B}$, por lo cual $\mathcal{B}$ es una base, luego por lema 2.1.1 se concluye que $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ es una topología generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Si X e Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$. En seguida se dará la definición de topología producto sobre $X \times Y$ y algunas propiedades relacionadas con esta topología.

Definición 2.1.4 (Topología producto)**.** *Sean X e Y espacios topológicos. La topología producto sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es subconjunto abierto de Y.*

A como se ha hecho en las definiciones anteriores, se debe verificar que la colección $\mathcal{B} = \{U \times V\ :\ U \subseteq X,\ V \subseteq Y, \text{ y } U, V \text{ son abiertos}\}$ es una base.

1. La primera condición de base es trivial puesto que $X \times Y$ es un elemento básico.

2. Para verificar la segunda condición se debe mostrar que la intersección de dos elementos básicos cualquiera es un elemento básico, así sean $U_1 \times V_1,\ U_2 \times V_2$ elementos de $\mathcal{B}$ y sea (x, y) un elemento en dicha intersección, luego

$$\begin{aligned}(x,y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in U_1 \times V_1 \text{ y } (x,y) \in U_2 \times V_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in U_1 \text{ y } y \in V_1) \text{ y } (x \in U_2 \text{ y } y \in V_2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \in U_1 \text{ y } x \in U_2) \text{ y } (y \in V_1 \text{ y } y \in V_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in U_1 \cap U_2 \text{ y } y \in V_1 \cap V_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

Por lo cual

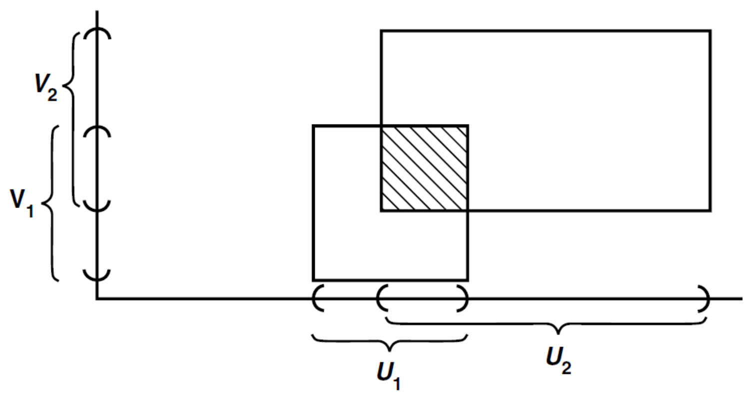
$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

Ahora, puesto que $U_1 \cap U_2$ es abierto en X y $V_1 \cap V_2$ es abierto en Y entonces $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ es un elemento básico.

Así se verifica que $\mathcal{B}$ es una base para la topología producto sobre $X \times Y$.

Observación 2.1.1. *Es importante aclarar que la colección $\mathcal{B}$ no es una topología sobre $X \times Y$, pues por ejemplo la unión de dos rectángulos ilustrados en la figura 2.1 no es un producto cartesiano de dos conjuntos, por lo que no puede estar en $\mathcal{B}$; sin embargo es abierto en $X \times Y$.*

Figura 2.1: Unión de dos rectángulos.



Fuente: Tomada de “Espacios topológicos y funciones continuas”, Topología, J. Munkres, 2 Ed. (p. 99), 2002, Prentice Hall.

Si las topologías para los conjuntos X e Y están dadas por medio de bases, entonces interesa saber cómo está definida la base de la topología producto sobre $X \times Y$, por lo cual se presenta el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B},\, C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

Demostración. Véase Munkres (2002). □

En ciertos casos también es útil definir la topología producto en términos de la subbase.

Definición 2.1.5. *Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por*

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y$$

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan proyecciones de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

Observación 2.1.2. *Es importante destacar que:*

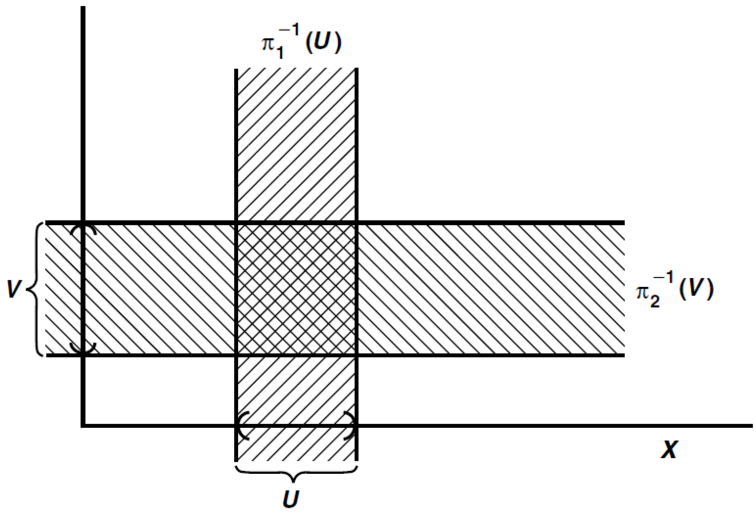
1. *Las aplicaciones π_1 y π_2 son sobreyectivas.*

2. *Si U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es, precisamente, el conjunto $U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$. De modo similar, si V es abierto en Y, ocurre que $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ que también es abierto en $X \times Y$.*

3. $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V$.

La idea ilustrativa de lo expuesto en la observación 2.1.2 puede apreciarse en la figura 2.2.

Figura 2.2: Intersección de $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$.



Fuente: Tomada de “Espacios topológicos y funciones continuas”, Topología, J. Munkres, 2 Ed. (p. 100), 2002, Prentice Hall.

Teorema 2.1.2. *La colección*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \,|\, U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \,|\, V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto sobre $X \times Y$ y $\mathcal{T}'$ la topología generada por $\mathcal{S}$. Se desea mostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Así, dado que cada elemento de la subbase $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{T}$, entonces de acuerdo a como se define la topología generada por la subbase también pertenecen las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$, por lo cual $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Ahora, cada elemento básico $U \times V$ para la topología $\mathcal{T}$ es la intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$ pues se sabe que $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$, por tanto $U \times V \in \mathcal{T}'$, de donde se infiere que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, así se concluye que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\square$

Más adelante se definirá la topología producto con respecto a la subbase para un producto arbitrario de conjuntos.

Definición 2.1.6 (Topología relativa)**.** *Sea X un espacio topológico con topología $\mathcal{T}$. Si Y es un subconjunto de X, la colección*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Es una topología sobre Y, denomida topología del subespacio o topología relativa. Con esta topología, Y se denomina subespacio de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjunto abiertos de X con Y.

Es necesario comprobar que la colección $\mathcal{T}_Y$ es una topología sobre el subconjunto Y.

1. La primera condición es inmediata pues los conjuntos $\emptyset$ y X son abiertos por estar en $\mathcal{T}$, por lo cual $\emptyset = \emptyset \cap Y$ y $Y = Y \cap X$, así $\emptyset$ y Y están en $\mathcal{T}_Y$.

2. Sea $\{U_i \cap Y\}_{i=1}^{n}$ una colección finita de $\mathcal{T}_Y$ donde U_i es abierto en X para todo $i = 1, \cdots, n$, se desea mostrar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) \text{ está en } \mathcal{T}_Y.$$

Para ello, vea que

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) &= (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) \\ &= (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y$$

Ahora, dado que los U_i son abiertos en X para $i = 1, \cdots, n$, es decir $U_i \in \mathcal{T}$ para cada $i = 1, \cdots, n$, entonces su intersección también está en $\mathcal{T}$ por lo cual $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap Y$ es un elementos de $\mathcal{T}_Y$, así $\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap Y)$ está en $\mathcal{T}_Y$.

3. Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de subconjuntos abiertos de X y $\{U_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in J}$ una colección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_Y$. Se desea probar que

$$\bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha \cap Y) \text{ está en } \mathcal{T}_Y.$$

Así, observe que

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha \cap Y) &= (U_1\cap Y)\cup(U_2\cap Y)\cup\cdots\cup(U_{\alpha-1}\cap Y)\cup\cdots\\ &= (U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_{\alpha-1}\cup\cdots)\cap Y\\ &= \left(\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap Y\end{aligned}$$

Ahora, dado que $U_\alpha \in \mathcal{T}$ para cada $\alpha \in J$, entonces $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ está en $\mathcal{T}$, por lo cual $\left(\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap Y$ es un elemento de $\mathcal{T}_Y$, por tanto $\bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap Y)\in\mathcal{T}_Y$.

Así se comprueba que $\mathcal{T}_Y$ es una topología.

Lema 2.1.2. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X. Entonces la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B\cap Y \mid B\in\mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Demostración. La prueba es sencilla, puede encontrarse en Munkres (2002). □

Para el producto cartesiano arbitrario de conjuntos se pueden definir dos topologías, es decir, la topología producto y la topología por cajas, si el producto es finito ambas topologías coinciden, en este trabajo solo se abordará la topología producto. Por otra parte, existe una relación entre la topología de subespacio y las topologías del producto, esta relación se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, entonces la topología producto sobre $A \times B$ coincide con la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}_X$ la topología del conjunto X y $\mathcal{T}_Y$ la topología del conjunto Y. Dado que A y B son subespacios de X e Y respectivamente, entonces por definición 2.1.6, las colecciones $\mathcal{T}_A = \{M \cap A : M \in \mathcal{T}_X\}$ y $\mathcal{T}_B = \{N \cap B : N \in \mathcal{T}_Y\}$ son las topologías de A y B respectivamente.

Por otra parte, sea $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y\}$ una base para la topología producto sobre $X \times Y$. Luego, por lema 2.1.2, el conjunto $(U \times V) \cap (A \times B)$ es un elemento básico genérico para la topología del subespacio sobre $A \times B$. Ahora, dado que

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$

y además $U \cap A \in \mathcal{T}_A$ y $V \cap B \in \mathcal{T}_B$, entonces por definición 2.1.6, $(U \cap A) \times (V \cap B)$ es el elemento básico genérico para la topología producto sobre $A \times B$, por tanto, las bases para la topología de subespacio sobre $A \times B$ y para la topología producto sobre $A \times B$ son idénticas, así ambas topologías son iguales. □

De la definición 2.1.1 se sabe que la topología para un conjunto X está definida respecto a los abiertos de X, sin embargo la colección de subconjuntos cerrados de un espacio topológico X satisfacen propiedades similares a aquellas satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X, el siguiente teorema pone de manifiesto este hecho.

Teorema 2.1.4. *Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ y X son cerrados.*
2. *Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.*
3. *Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.*

Demostración. Sea X un conjunto y $\mathcal{T}$ una topología para X, entonces:

1. La primera condición es inmediata, es decir, X y $\emptyset$ son cerrados pues $X^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = X$ son abiertos por estar en $\mathcal{T}$.

2. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos cerrados. Se debe mostrar que

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \text{ es cerrada.}$$

Así, por definición de conjunto cerrado se debe probar que el complemento de $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ dado por

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \text{ es abierto.}$$

Luego, usando las leyes de De Morgan se tiene que

$$\begin{aligned}
X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha &= X - (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{\alpha-1} \cap \cdots) \\
&= X \cap (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{\alpha-1} \cap \cdots)^c \\
&= X \cap (A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_{\alpha-1}^c \cup \cdots) \\
&= (X \cap A_1^c) \cup (X \cap A_2^c) \cup \cdots \cup (X \cap A_{\alpha-1}^c) \cup \cdots \\
&= (X - A_1) \cup (X - A_2) \cup \cdots \cup (X - A_{\alpha-1}) \cup \cdots \\
&= \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$$

Ahora, puesto que $X - A_\alpha$ es abierto por definición, luego $\bigcup\limits_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$ es la unión arbitraria de conjuntos abiertos, por lo cual es abierto, por tanto $\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ es cerrado.

3. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una colección de conjuntos cerrados. Se debe mostrar que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ es cerrado.}$$

Asi, nuevamente por definición de conjunto cerrado se debe probar que

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ es abierto.}$$

Ahora, por las leyes de De Morgan sabe que

$$\begin{aligned}
X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= X - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= X \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c \\
&= X \cap (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\
&= (X \cap A_1^c) \cap (X \cap A_2^c) \cap \cdots \cap (X \cap A_n^c) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (X \cap A_n^c) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_n)
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_n)$$

Dado que $X - A_i$ es abierto para cada $i = 1, \cdots, n$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n}(X - A_n)$ es la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos, por lo cual es abierto, lo cual implica que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado.

□

El teorema 2.1.4 sugiere que, en lugar de usar conjuntos abiertos, se podría especificar perfectamente una topología sobre un espacio dando una colección de conjuntos cerrados que satisfagan las tres propiedades del teorema 2.1.4. En este caso se puede definir a los conjuntos abiertos como los complementos de los conjuntos cerrados y proceder exactamente como antes.

Definición 2.1.7 (Homeomorfismo)**.** *Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un homeomorfismo.*

Definición 2.1.8. *Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, se define una $J-$upla de elementos de X como una función $x : J \longrightarrow X$. Si α es un elemento de J, se denotará el valor de x en α mediante x_α en lugar de $x(\alpha)$; la cual se llama la $\alpha-$ésima coordenada de x. Y se denotará a la función x mediante el símbolo*

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$$

la cual es su notación upla para un conjunto arbitrario de índices J. Se denota al conjunto de todas las $J-$uplas de elementos de X por X^J.

Definición 2.1.9. *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos indexada y sea $X = \cup_{\alpha \in J} A_\alpha$. El producto cartesiano de esta familia indexada, denotado por*

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

se define como el conjunto de todas las $J-$uplas $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Esto es, el conjunto de todas las funciones

$$x : J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

tales que $x(\alpha) \in A_\alpha$ *para cada* $\alpha \in J$.

Definición 2.1.10 (Proyecciones)**.** *Sea*

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $\beta-$*ésima,*

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta;$$

Se denomina aplicación proyección asociada con el índice β.

Definición 2.1.11. *Se define por* $\mathcal{S}_\beta$ *a la colección*

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \,|\, U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y se denota por $\mathcal{S}$ *a la unión de esas colecciones*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ *se denomina topología producto. En esta topología* $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *se denomina espacio producto.*

Teorema 2.1.5. *Sea* $\{X_i\}_{i \in I}$ *una familia de espacio topológicos y sea* $\{Y_i\}_{i \in I}$ *una familia de conjuntos, de modo que cada* $Y_i \subset X_i$. *Entonces* $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ *es un subconjunto de* $X = \prod_{i \in I} X_i$. *Si se considera a cada* Y_i *como un espacio topológico con la topología relativa, entonces la topología producto en* Y *es la misma que la topología relativa con respecto de* X.

Demostración. Ver Ivorra Castillo (s.f.). □

Definición 2.1.12 (Espacio de Hausdorff)**.** *Un espacio topológico X se denomina espacio de Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.*

Teorema 2.1.6. *Todo conjunto finito con la topología discreta es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea X un conjunto finito y sea $\mathcal{T}$ la topología discreta en X. Sean x, y elementos de X tal que $x \neq y$. suponga que $\{U_n\}$ es una colección de subconjunto abiertos de X que contienen al punto x y $\{V_n\}$ una colección de subconjuntos abiertos de X que contienen a y. Ahora, dado que X es finito, entonces las colecciones $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ son finitas. Luego, por la condición dos de la definición 2.1.1, las intersecciones $\bigcap U_i$ y $\bigcap V_i$ están en $\mathcal{T}$ y puesto que $\bigcap U_i = \{x\}$ y $\bigcap V_i = \{y\}$, entonces se tiene que

$$\left(\bigcap U_i\right) \bigcap \left(\bigcap V_i\right) = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

Por tanto, se concluye que X es un espacio de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.1.7. *a. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.*

b. El producto cartesiano de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

Demostración. a. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea Y un subespacio topológico de X. Considerando punto x e y distintos en Y y suponiendo que U y V son entornos disjuntos en X de x e y, respectivamente; ahora puesto que U y V son abiertos entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son entornos abiertos de x e y en Y, respectivamente, por tanto Y es de Hausdorff.

b. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios de Hausdorff y definiendo los puntos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_\alpha)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_\alpha)$ distintos en el espacio producto $\prod X_\alpha$. Dado que $x \neq y$, entonces existe algún índice β tal que $x_\beta \neq y_\beta$. Ahora, suponiendo que U y V son conjuntos abiertos disjuntos en X_β que contienen a x_β e y_β, respectivamente, entonces los conjuntos $\pi_\beta^{-1}(U)$ y $\pi_\beta^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos en $\prod X_\alpha$ que contienen a x e y, respectivamente, por lo cual se concluye que $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff.

□

Definición 2.1.13. *Un espacio X se dice que es localmente compacto en x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es localmente compacto.*

Definición 2.1.14. *Un subconjunto A de X se dice que es denso en X si $\overline{A} = X$.*

Teorema 2.1.8 (Teorema de Tychonoff)**.** *El producto de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Demostración. Ver Munkres (2002). □

2.1.2. Espacios métricos

Definición 2.1.15 (Distancia)**.** *Dado un conjunto X, una distancia sobre X, es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que a cada par de puntos $x, y \in X$ le asocia un número real $d(x, y)$, que cumple las siguientes condiciones:*

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ *sí, y solo si ,* $x = y$ *(Separación)*
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$ *(Simetría)*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$ *(Desigualdad triangular)*

Definición 2.1.16 (Espacio métrico)**.** *Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una distancia definida en X.*

Definición 2.1.17 (Subespacio métrico)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto de X. Sea la función $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x, y) = d(x, y)$, para cada $x, y \in A$. Entonces d_A es una distancia sobre A, llamada distancia inducida por d. El par (A, d_A) se dice que es un subespacio métrico de X.*

Definición 2.1.18 (Recubrimiento de un conjunto)**.** *Sea X un conjunto y sea $A \subset X$.*

1. *Un cubrimiento o recubrimiento de A es una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X de manera que $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.*
2. *Un subcubrimiento o subrecubrimiento es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ que es también un recubrimiento de A.*
3. *Un recubrimiento es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos.*

Cuando (X, d) es un espacio métrico y cada A_i es un abierto de X, se dice que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de A.

Definición 2.1.19 (Espacio métrico compacto)**.** *Un espacio métrico (X, d) es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.*

Definición 2.1.20 (Subespacio compacto)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Decimos que K es un conjunto compacto en (X, d) si (K, d_K), con la topología relativa, es un espacio compacto. En este caso se dice que (K, d_K) es un subespacio compacto.*

Proposición 2.1.1. *Sea K un subespacio de un espacio métrico (X, d). Entonces K es compacto sí, y solo si para cada familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de abiertos en X tal que $K \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, existe una subfamilia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$.*

Demostración. Para la primera implicación, suponga que K es compacto y sea $K \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ donde $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos del espacio (X, d). Entonces por definición de topología relativa (definición 2.1.6), la familia $\{A_i \cap K\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de K por abiertos de (K, d_K). Dado que este subespacio es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito de modo que

$$\begin{aligned} K &\subset (A_1 \cap K) \cup (A_2 \cap K) \cup \cdots \cup (A_n \cap K) \\ &\subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \end{aligned}$$

Por tanto, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Para la segunda implicación, se mostrará que (K, d_K) es compacto. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en (K, d_K) que cubre a K, luego cada abierto A_i se puede escribir de la forma $A_i = B_i \cap K$ donde B_i es un abierto en (X, d), ahora dado que $B_i \cap K \subset B_i$ para todo $i \in I$, entonces se tiene que $K \subset \bigcup_{i\in I} B_i$. Así, por hipótesis, existe una familia $\{B_i\}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

de donde se infiere que

$$K = (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cap K = \cup_{i=1}^{n}(B_i \cap K) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Por tanto, K es compacto. $\square$

Definición 2.1.21 (Compacidad secuencial)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Se dice que K es secuencialmente compacto si cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en K posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto de K.*

Definición 2.1.22 (Propiedad de Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico; se dice que X tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass o que es compacto por punto límite o por punto de acumulación si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

Teorema 2.1.9 (Heine - Borel - Lebesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y K un subconjunto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a. K es compacto.

b. K tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

c. K es secuencialmente compacto.

Demostración. Consulte Herrero Piñeyro (2010) para la demostración. $\square$

Definición 2.1.23 (Sucesión de Cauchy)**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico y una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$*. Se dice que* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy si dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, si* $m,\ n \geq n_0$*, entonces* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

El enunciado de la definición 2.1.23 afirma que, a partir de un término todos los demás están tan cerca uno del otro como se desee.

Proposición 2.1.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *que converge a* x*, entonces la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* x*.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto x en X. Dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existirá un número natural n_1 tal que para todo $m, n \geq n_1$ se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, puesto que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, entonces existe k_0 tal que si $n_k > n_{k_0}$ se tiene que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, considerando $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ y tomando $n > n_0$ y k tal que $n_k > n_0$ resulta que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x. $\square$

Definición 2.1.24 (Espacio métrico completo)**.** *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente.*

Una consecuencia de la proposición 2.1.2 es el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. *Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.*

Proposición 2.1.3. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Dado que X es un espacio compacto, por teorema 2.1.9, también es secuencialmente compacto, por lo cual existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es convergente, luego por proposición 2.1.2, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y por tanto X es completo. $\square$

Definición 2.1.25 (Embebimiento)**.** *Supongamos que $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es una aplicación continua e inyectiva. La función $\overline{f} : X \to f(X)$, donde $f(X) \subset Y$ tiene la topología inducida obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que $\overline{f}$ es un homeomorfismo de X en $f(X)$, se dice que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es un embebimiento topológico, o simplemente un embebimiento, de X en Y.*

Definición 2.1.26. *Sea X un espacio topológico, se dice que X es metrizable si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X.*

Definición 2.1.27 (Isometría)**.** *Dados dos espacios métricos (X, d) e (Y, d'), se dice que una aplicación biyectiva $f : X \to Y$ es una isometría si conserva la distancia, es decir, $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$ para todo $x_1,\ x_2 \in X$. En este caso decimos que X e Y son espacios isométrico.*

2.1.3. Espacios normados

Definición 2.1.28 (Norma de un espacio vectorial)**.** *Una norma en un espacio vectorial (real o complejo) X es una función de valor real, para la cual el valor de cada $x \in X$ se denota por $\| x \|$ y cumple las siguientes propiedades:*

1. $\| x \| \geq 0$ *para todo* $x \in X$
2. $\| x \| = 0$ *sí, y solo si* $x = 0$
3. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$; $(\alpha \in \mathbb{K},\ x \in X)$
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ $(x, y \in X)$

Definición 2.1.29 (Espacio normado)**.** *Un espacio normado es un espacio vectorial* X *con una norma* $\| \ x \ \|$ *definida en él.*

Naturalmente sobre un mismo espacio vectorial pueden considerarse distintas normas, cada una de ella da lugar a un espacio normado diferente, por lo cual se dice que un espacio normado es un par $(X, \| \cdot \|)$ formado por un espacio vectorial X y una norma, sin embargo por simplicidad casi siempre se dice que X es un espacio normado entendiendo que X es un espacio vectorial en el que está definida una norma concreta.

Definición 2.1.30 (Distancia asociada a la norma)**.** *Dado un espacio normado* $(X, \| \ \|)$*, la aplicación* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in X$$

es una distancia en X *llamada distancia asociada a la norma.*

Todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico con la distancia asociada a su norma.

Definición 2.1.31 (Espacio normado completo)**.** *Un espacio normado es completo si la métrica definida por su norma es completa, es decir si toda sucesión de Cauchy es convergente en la métrica definida por dicha norma.*

Definición 2.1.32 (Espacio de Banach)**.** *Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo.*

En el estudio de los espacios normados son de gran importancia los operadores y funcionales lineales, por lo que en seguida se enuncian estas definiciones así como las de sus normas.

Definición 2.1.33 (Operador)**.** *Un operador es una aplicación definida en espacios vectoriales, en particular en espacios vectoriales normados.*

Definición 2.1.34 (Operador lineal)**.** *Un operador lineal* T *es un operador tal que:*

1. *El dominio $\mathscr{D}(T)$ es un espacio vectorial y el rango $\mathscr{R}(T)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo.*

2. *Para todo $x, y \in \mathscr{D}(T)$ y escalares α,*

   $T(x+y) = Tx + Ty$

   $T(\alpha x) = \alpha Tx$

Definición 2.1.35 (Operador lineal acotado)**.** *Sean X e Y espacios normados y $T : \mathscr{D}(T) \to Y$, donde $\mathscr{D}(T) \subset X$. El operador T se dice acotado si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathscr{D}(T)$*

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \tag{2.1}$$

De la defińción anterior, interesa conocer cuál es el valor más pequeño posible de c tal que (2.1) se conserve para todos los $x \in \mathscr{D}(T)$ diferentes de cero.

Observese que si $c = \|T\|$ entonces la relación en (2.1) se puede escribir como

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

Por lo cual, el valor más pequeño de c está dado por $\|T\|$, llamado norma de T.

Lema 2.1.3 (Norma de un operador)**.** *Sea T el operador lineal acotado dado en la definición 2.1.35, entonces:*

a. $\|T\| = \sup\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \ : \ x \in \mathscr{D}(T) \text{ y } x \neq 0\right\}$ *es la norma de T.*

b. $\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| \ : \ x \in \mathscr{D}(T) \text{ y } \|x\| = 1\right\}$ *es una alternativa para la norma de T.*

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en Kreyszig (1978). □

Existen otras normas, aunque con diferentes estructuras también son alternativas para lo norma de T y además son todas iguales. Esto se exhibe a continuación.

Proposición 2.1.4. *Sean X e Y espacios normados y T el operador lineal acotado dado en la definición 2.1.35. Entonces las normas para el operador T dadas por*

a. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| = 1\}$

b. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| < 1\}$

c. $\|T\| = \sup\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \,:\, x \in \mathscr{D}(T),\ x \neq 0\right\}$

d. $\|T\| = \text{mín}\{M \geq 0 \,:\, \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in \mathscr{D}(T)\}$

son todas iguales.

Demostración. Ver González (2010). □

Definición 2.1.36 (Isomorfismo topológico)**.** *Sean X e Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Si T es biyectiva y su inversa es continua se dice que T es un isomorfismo topológico. Si tal aplicación existe, se dirá que X e Y son topológicamente isomorfos.*

Definición 2.1.37 (Isomorfismo isométrico)**.** *Sean X e Y espacios normados, un operador lineal continuo $T : X \to Y$ se llama isomorfismo isométrico si T es biyectivo y conserva la norma, esto es, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Cuando tal aplicación existe, se dice que X e Y son isométricamente isomorfos.*

Definición 2.1.38 (Funcional)**.** *Un funcional es un operador cuyo rango se encuentra en el cuerpo $\mathbb{R}$ o en el plano complejo $\mathbb{C}$.*

Definición 2.1.39 (Funcional lineal)**.** *Un funcional lineal f es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en el cuerpo escalar $\mathbb{K}$ de X; por tanto,*

$$f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{K}$$

con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si X es real o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X es complejo.

Definición 2.1.40 (Funcional lineal acotado)**.** *Un funcional lineal acotado f es un operador lineal acotado con rango en el cuerpo escalar del espacio normado X donde se encuentra el dominio de f, $\mathscr{D}(f)$, por lo tanto existe un número real c tal que para todo $x \in \mathscr{D}(f)$,*

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{2.2}$$

En la definición anterior, tomando $c = \|f\|$ en 2.2 implica que

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

por lo cual, la norma del funcional f es

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| \,:\, x \in \mathscr{D}(f) \text{ y } \|x\| = 1\}$$

o bien

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} \,:\, x \in \mathscr{D}(f) \text{ y } x \neq 0 \right\}$$

Observación 2.1.3. *La proposición 2.1.4 también es válida para los funcionales lineales acotados.*

Para un espacio normado X puede definirse su dual algebraico y topológico, en este trabajo se estudiará solamente el dual topológico del espacio X.

Definición 2.1.41 (Espacio dual)**.** *Sea X un espacio normado. El conjunto de todos los funcionales lineales acotados en X constituye un espacio normado cuya norma es la dada en la definición 2.1.40, este espacio es llamado espacio dual de X y es denotado por X^*.*

Observación 2.1.4. *La definición anterior es válida si los funciones lineales acotados f poseen cualquiera de sus normas alternativas.*

Teorema 2.1.10. *El espacio dual X^* de un espacio normado X es un espacio de Banach (sin importar si X lo es).*

Demostración. Consulte Kreyszig (1978). □

El teorema de Hahn-Banach es una herramienta importante en el campo de las matemáticas, en específico en análisis funcional, pues permite extender cualquier funcional lineal acotado definido en un subespacio vectorial al espacio vectorial que lo contiene, a pesar de su relevancia en este trabajo no será enunciardo pero se da a conocer el teorema 2.1.11 que se obtiene particularizando la versión analítica del teorema de Hahn-Banach en espacios normados; para un estudio más a fondo sobre la versión analítica y geométrica del teorema de Hahn-Banach puede consultar González (2010) y Kreyszig (1978).

Teorema 2.1.11 (Teorema de extensión equinórmica). *Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.*

Un funcional como f dado en el teorema 2.1.11 se dice que es una extensión de Hahn-Banach o una extensión equinórmica de g en Y.

Corolario 2.1.2. *Si X es un espacio normado, para cada $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. En consecuencia, se tiene la siguiente expresión para la norma de X*

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| \, : \, f \in S_{X^*}\} \text{ para } x \in X \tag{2.3}$$

donde S_{X^*} es la esfera unidad cerrada en X^*.

Demostración. La demostración de este resultado puede verse en González (2010). □

Usando los enunciados y resultados anteriores, se pone de manifiesto la relación entre un espacio normado y su bidual. Se sabe del corolario 2.1.2 que el dual X^* de un espacio normado determina la norma de X, por lo cual la norma en X se puede comparar con la norma dual de X, así

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| \, : \, \|f\| \leq 1\} \text{ para } x \in X \tag{2.4}$$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \, : \, \|x\| \leq 1\} \text{ para } f \in X^* \tag{2.5}$$

De las ecuaciones 2.4 y 2.5 se observa que existe simetría entre ambas, para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar los elementos de X^*, viendolos más como vectores de X^* que como funcionales de X.

Definición 2.1.42 (Bidual)**.** *Si X es un espacio normado, el segundo dual de X es el espacio de Banach $X^{**} = (X^*)^*$, que se llama bidual de X, cuyos elementos sulen representarse de forma genérica por x^{**} y cuya norma está dada por*

$$\|x^{**}\| = \sup\{|x^{**}(x^*)| \, : \, \|x^*\| \leq 1\} = \text{mín}\{m \geq 0 \, : \, |x^{**}(x^*)| \leq m\|x^*\|\}$$

De forma análoga se define el tercer dual $X^{***} = (X^{**})^*$, y duales sucesivos.

A como se mencionó, el espacio normado X está relacionado con su bidual, así pues, para cada $x \in X$ fijo, se puede considerar el funcional de evolución, que se representa por $J(x)$ o también $J_X(x)$ cuando se quiere especificar el espacio X y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evolución en x, esto es

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \; (J(x))(x^*) = x^*(x) \; \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad

$$|(J(x))(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x\|\|x^*\|$$

dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leq \|x\|$. De hecho, se tiene la igualdad, pues por las normas en 2.4 y 2.5 se tiene

$$\|J(x)\| = \sup\{|(J(x))(x^*)| \, : \, \|x^*\| \leq 1\} = \sup\{|x^*(x)| \, : \, \|x^*\| \leq 1\} = \|x\|$$

Por tanto, la aplicación $J : X \to X^{**}$ que evidentemente es lineal, también es isométrica.

Definición 2.1.43 (Inyección canónica)**.** *La inyección canónica de X en su bidual es la aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por*

$$(J(x))(x^*) = x^*(x),\ \forall x^* \in X^*,\ \forall x \in X$$

La inyección canónica J identifica totalmente a X con un subespacio de X^{**}, simbólocamente se escribe $X \equiv J(X)$. En el caso que X no sea completo se tiene que X no se identifica con $J(X)$.

Definición 2.1.44 (Espacio de Banach reflexivo)**.** *Un espacio de Banach X es reflexivo cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir $J(X) = X^{**}$. En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}.*

2.1.4. Topologías débiles en espacios normados

En esta subsección se introducen dos topologías, la topología débil para cualquier espacio normado y la topología débil estrella para espacios duales, para una estudio más detallado consulte González (2010). Dado que, si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| \,:\, \|x^*\| \leq 1\} = \text{máx}\{|[J(x)](x^*)| \,:\, \|x^*\| \leq 1\}$$

igualdad que asegura que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en la bola cerrada unidad de X^*.

Ahora, si $x^* \in X^*$, entonces existe $f \in X^{**}$ tal que $\|f\| = 1$, y $f(x^*) = \|x^*\|$. Si el espacio X es reflexivo, dicho funcional será de la forma $f = J(x)$ para algún $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y se deduce que

$$\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| \,:\, \|x\| \leq 1\}\ (x^* \in X,\ X \text{ es reflexivo})$$

De la igualdad anterior se puede decir que x^* alcanza su norma en la bola cerrada unidad de X.

Una justificación, aunque no la única, para introducir las topologías débiles es que si $\dim X = \infty$ entonces las propiedades anteriores no pueden ser probadas usando la propiedad de compacidad. Antes de introducir las topologías débiles es necesario enunciar la definición de topología inicial para una colección de funciones.

Definición 2.1.45 (Topología inicial). *Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y, la topología inicial en X para la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas. Dicha topología se denotará por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.*

Para todo abierto $B \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(B)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(B_i), \text{ donde } f_i \in \mathcal{F}\ B_i \in \mathcal{T} \text{ para todo } 1 \leq i \leq q \tag{2.6}$$

Es fácil comprobar que las uniones de conjuntos que tienen la forma de 2.6 son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Por tanto, dichos conjuntos, intersecciones finitas de imágenes inversas de abiertos en Y por funciones de $\mathcal{F}$, forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Una base de entornos de un punto $x \in X$ para dicha topología se obtiene cuando los B_i son entornos de $f_i(x)$ en Y.

Definición 2.1.46 (Topología débil). *Sea X un espacio normado y X^* su dual. La topología débil en X es la topología inicial para la familia de funciones en X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todos las formas lineales en X^* son continuas.*

Se denotará la topología débil por $\sigma(X, X^*)$, los conceptos referentes a esta topología suelen indicase con la letra w. Los conceptos referentes a la topología de la norma por $\|\cdot\|$.

Definición 2.1.47 (Base de entornos). *Una base de entornos de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma*

$$V(x_0,\, f_1, f_2, \cdots, f_n,\, \varepsilon) \;=\; \{x \in X \,:\, |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\, 1 \leq i \leq n\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in X \,:\, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \\
&= x_0 + \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in X \,:\, |f_i(x)| < \varepsilon\} \\
&= x_0 + V(0,\ f_1, f_2, \cdots, f_n,\ \varepsilon)
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_1, \cdots, f_n \in X^*$.

Definición 2.1.48 (Subbase de abiertos)**.** *Una subbsase de abiertos para la topología* $\sigma(X, X^*)$ *está formada por todos los semiespacios abiertos* $\{x \in X \,:\, Re\, f(x) < \alpha\}$ *para* $f \in X^*$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

En el siguiente resultado se establecen algunas propiedades de la convergencia de sucesiones en la topología débil.

Proposición 2.1.5. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de puntos de* X *y* $x \in X$. *Se verifica que*

1. $\{x_n\} \overset{w}{\to} x$ *sí, y solo si* $\{f(x_n)\} \to f(x)$ *para todo* $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \overset{\|\cdot\|}{\to} x$ *entonces* $\{x_n\} \overset{w}{\to} x$.
3. *Si* $\{x_n\} \overset{w}{\to} x$ *entonces* $\{x_n\}$ *está acotada y* $\|x\| \leq \liminf\{\|x_n\|\}$.
4. *Si* $\{x_n\} \overset{w}{\to} x$ *y* $\{f_n\} \overset{\|\cdot\|}{\to} f(x)$ *en* X^*, *entonces* $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Demostración. Ver González (2010). □

Ahora, de la misma manera que el espacio normado X, el espacio X^* tiene su topología débil.

Definición 2.1.49 (Topología débil en X^*)**.** *La topología débil de* X^*, *denotada por* $\sigma(X^*, X^{**})$, *es la topología inicial en* X^* *para las formas lineales en su dual* X^{**}.

Si ahora se considera en X^* una topología más pequeña, que es la topología inicial en X^*, para las formas lineales del subespacio $J_X(X) \subset X^{**}$, entonces se define la topología débil estrella de X^* a como sigue.

Definición 2.1.50 (Topología débil estrella). *La topología débil estrella de X^* representada por $\sigma(X^*, X)$ es la topología más pequeña en X^* para la cual las aplicaciones de evolución $x^* \to x^*(x)$ $(x^* \in X^*)$, es decir las formas lineales que los elementos de X definen en X^{**}, son continuas.*

Los conceptos referentes a la topología débil estrella se indicarán con la expresión w^*.

Definición 2.1.51 (Base de entornos). *Una base de entornos de $x^* \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los conjuntos de la forma*

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \cdots, x_n, \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon\} \\ &= x_0^* + \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$.

Definición 2.1.52 (Subbase). *Una subbase de abiertos para la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x^* \in X^* : Re\, x^* < \alpha\}$ donde $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

La siguiente proposición pone de manifiesto la convergencia de sucesiones en la topología débil estrella.

Proposición 2.1.6. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de punto en el dual X^* de un espacio normado X y $x^* \in X^*$. Se verifica que*

1. *$\{x_n^*\} \xrightarrow{w} x^*$ sí, y solo si $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.*
2. *Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w} \{x^*\}$ entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leq \liminf\{\|x_n^*\|\}$.*

Demostración. Puede encontrarse en González (2010). $\square$

El siguiente teorema es uno de los más útiles en el análisis funcional, se conoce como teorema de Banach-Alaoglu en honor a los matemáticos Stefan Banach $(1892-1945)$ y Leonidas Alaoglu $(1914-1981)$.

Teorema 2.1.12 (Banach-Alaoglu). *La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual que sea w^*-cerrado y acotado en norma es compacto.*

Demostración. Véase González (2010). □

2.2. Teoría de la medida e integración

Cotidianamente se miden objetos, desde los más simples, por ejemplo la anchura de una calle, el área de un estadio, el volúmen de agua de una fuente, hasta aquellos que poseen naturaleza abstracta, sin importar su naturaleza, surgen las preguntas ¿qué es medir? ¿qué cosas pueden medirse?, si un objeto puede medirse ¿qué condiciones o características debe tener dicho objeto para ser medible?, las preguntas anteriores son bastan interesante y a menudo se da por hecho que todo objeto es medible, en la teoría siguiente se encuentran las respuestas a las interrogantes planteadas anteoriormente, sin embargo desde ya puede decirse que no todo objeto se puede medir.

La teoría de la medida e integración es indispensable para el estudio y comprensión de la teoría ergódica y otras áreas de las matemáticas que son de gran relevancia. En esta sección se exponen algunos conceptos y enunciados elementales, para un estudio más a fondo puede consultarse "Apuntes de Teoría de la Medida" (2018) o Ambrosio y cols. (2011).

2.2.1. Anillo, álgebra y $\sigma-$ álgebra

Definición 2.2.1 (Anillo). *Dado un conjunto arbitrario Ω, se llama anillo en Ω a una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la cual cumple las siguientes propiedades:*

a. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{A}$

b. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $A - B \in \mathcal{A}$

Definición 2.2.2 (Álgebra)**.** *Llamaremos álgebra a un anillo* $\mathcal{A}$ *para el que* $\Omega \in \mathcal{A}$ *y por tanto cerrado por paso al complemento y por uniones e intersecciones finitas.*

Definición 2.2.3 ($\sigma-$álgebra)**.** *Se llama* $\sigma-$*álgebra a un álgebra* $\mathcal{A}$ *cerrada para uniones numerables, por tanto con las siguientes propiedades:*

a. $\Omega \in \mathcal{A}$.

b. *Si* $A \in \mathcal{A}$*, entonces* $A^c \in \mathcal{A}$.

c. *Si* $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$*, entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Algunos ejemplos sobre colecciones que forman una $\sigma-$álgebra sobre Ω son presentados en seguida, los ejemplos 2.2.1 y 2.2.2 son bastante evidentes:

Ejemplo 2.2.1. *El conjunto potencia* $\mathcal{P}(\Omega)$ *de* Ω *es la mayor* $\sigma-$*álgebra de* Ω.

Ejemplo 2.2.2. *La colección* $\{\emptyset,\ \Omega\}$ *es la menor* $\sigma-$*álgebra de* Ω.

Ejemplo 2.2.3. *Sea* Ω *con infinitos elementos (numerables o no) y sea la colección*

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega\ :\ A \text{ ó } A^c \text{ es numerable}\}$$

Entonces $\mathcal{A}$ *es* $\sigma-$*álgebra de* Ω.

Solución: Se debe verificar que $\mathcal{A}$ cumple las condiciones de la definición 2.2.3.

1. La primera condición es bastante evidente pues el conjunto vacío $\emptyset$ es finito y dado que $X^c = \emptyset$ entonces $X \in \mathcal{A}$.

2. Para la segunda condición, suponga que $A \in \mathcal{A}$, entonces se tienen los siguientes casos:

    - A es numerable ó A^c es numerable.

- A^c es numerable ó A es numerable.
- A^c es numerable ó $(A^c)^c$ es numerable.

Por lo cual $A^c \in \mathcal{A}$.

3. Considerando la colección $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjunto de $\mathcal{A}$ y asumiendo que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces puede ocurrir que:
   - A es numerable, entonces $A \in \mathcal{A}$.
   - A no es numerable, por lo cual para que A esté en $\mathcal{A}$ se debe probar que A^c es numerable. Puesto que A es no numerable, entonces existe algún número natural k para el cual A_k es no numerable, pero A_k^c es numerable dado que A_k está en $\mathcal{A}$, y puesto que
   $$A^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_k$$

   Así, $A^c \subseteq A_k$ y dado que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable, entonces resulta que A^c es numerable y por tanto A está en $\mathcal{A}$.

Por lo cual se concluye que la colección $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de Ω.

Definición 2.2.4 (Espacio medible)**.** *Llamamos espacio medible al par $(\Omega, \mathcal{A})$ donde Ω es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de Ω y conjuntos medibles a los elementos de $\mathcal{A}$.*

Es bastante evidente que la intersección arbitraria de $\sigma-$álgebras en Ω es una $\sigma-$álgebra, lo cual justifica la siguiente definición.

Definición 2.2.5. *Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjunto de Ω, denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$ la mínima $\sigma-$álgebra que contienen a $\mathcal{C}$, que por la nota anterior existe y es la intersección de todas las $\sigma-$álgebras que la contiene (observemos que al menos hay una, $\mathcal{P}(\Omega)$). Del mismo modo se tiene la existencia de la mínima álgebra que contiene a la familia, que denotamos por $\alpha(\mathcal{C})$.*

Un caso particularmente importante de espacio medible se obtiene cuando $(\Omega, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Definición 2.2.6 ($\sigma-$álgebra de Borel)**.** *Dado un espacio topológico $(\Omega, \mathcal{T})$. Llamaremos $\sigma-$álgebra de Borel a la generada por sus abiertos, que denotaremos por $\sigma(\mathcal{T}) = \beta(\Omega)$, y a sus elementos los llamaremos borelianos.*

Observación 2.2.1. *Los conjuntos abiertos y cerrados son borelianos y si el espacio es de Hausdorff también los compactos pues son cerrados.*

Lema 2.2.1. *Para cada $A \subset \Omega$ se tiene que*

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A = \sigma_A(\mathcal{C} \cap A).$$

Demostración. La prueba puede verse en“Apuntes de Teoría de la Medida” (2018). □

Proposición 2.2.1. *Si X es un espacio topológico e $Y \subset X$ es un subespacio de X, entonces*

$$\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap Y.$$

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ la topología del espacio X y $\mathcal{T}_Y$ la topología del espacio Y; por definición 2.1.6 se tiene que $\mathcal{T}_Y$ es la colección de todas las intersecciones de abierto en X con Y, por lo cual

$$\mathcal{T}_Y = \mathcal{T} \cap Y$$

Ahora, por definición 2.2.6 se sabe que $\sigma(\mathcal{T}_Y) = \mathcal{B}(Y)$ y $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(X)$ son las $\sigma-$álgebras de Borel generadas por las topologías $\mathcal{T}_Y$ y $\mathcal{T}$, respectivamente. Así por lema 2.2.1 se tiene que

$$\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{T}_Y) = \sigma_Y(\mathcal{T}_X \cap Y) = \sigma(\mathcal{T}_X) \cap Y = \mathcal{B}(X) \cap Y$$

Por tanto se prueba que $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap Y$. □

Proposición 2.2.2. *Si el espacio topológico Ω tiene una base numerable de abiertos $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{T}$ está contenido en la $\sigma-$álgebra $\sigma(\mathcal{N})$, entonces se tiene que $\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\mathcal{N})$. □

Ejemplo 2.2.4. *Considerando el conjunto* $\Omega = \mathbb{R}$ *dotado con la topología usual* $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, *de todas las uniones arbitrarias de intervalos abiertos* (a, b), *puede tomarse* $\mathcal{N} = \{(a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *para el que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{N})$. *Como consecuencia, tomando la colección* $\mathcal{C} = \{(a, b] \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$ *resulta que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$.

Observación 2.2.2. *Existen otras familias generadoras, véase "Apuntes de Teoría de la Medida" (2018).*

Ejemplo 2.2.5. *En* $\Omega = \overline{\mathbb{R}}$ *definiendo la topología* $\overline{\mathcal{T}}$, *formada por la uniones arbitrarias de intervalos del tipo*

$$[-\infty, a), \qquad (a, b), \qquad (a, \infty]$$

con $a, \in \mathbb{R}$ *y* $a \leq b$, *para la cual* $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \overline{\mathcal{T}} \cap \mathbb{R}$. *Esta topología tiene una base numerable* $\mathcal{N}_{\overline{\mathbb{R}}}$ *formada por los mismos intervalos con la diferencia que* $a, b \in \mathbb{Q}$. *Vea que por la proposición 2.2.1 se tiene que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R}$, *por lo tanto, dado que* $\mathbb{R},\ \{\infty\},\ \{-\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *se tiene que*

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E,\ E \cup \{\infty\},\ E \cup \{-\infty\},\ E \cup \{\infty, -\infty\} \,:\, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Definición 2.2.7. *Llamaremos límite superior y límite inferior de una sucesión de conjuntos* A_n *respectivamente a los conjuntos*

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \qquad \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

y denotamos con

$A_n \uparrow A \Leftrightarrow A_n \subset A_{n+1}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\cup A_n = A$.

$A_n \downarrow A \Leftrightarrow A_n \supset A_{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\cap A_n = A$.

Definición 2.2.8 (Clase monótona). *Una clase monótona* $\mathcal{C}$ *de* Ω *es una familia de subconjuntos de* Ω *satisfaciendo las condiciones:*

a. *Si* $A_n \in \mathcal{C}$ *y* $A_n \uparrow A$, *entonces* $A \in \mathcal{C}$.

b. *Si* $A_n \in \mathcal{C}$ *y* $A_n \downarrow A$, *entonces* $A \in \mathcal{C}$.

Proposición 2.2.3. *Una familia* $\mathcal{A}$ *de* Ω *es una* $\sigma-$*álgebra sí, y solo si es álgebra y clase monótona.*

Demostración. Ver “Apuntes de Teoría de la Medida” (2018). □

Observación 2.2.3. *La intersección arbitraria de clases monótonas es clase monótona, y por tanto dada una clase* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* Ω *existe la mínima clase monótona que la contiene, que se denotará por* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. *Para la que se tiene que si* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *entonces*

$$\alpha(\mathcal{C}) \subset \alpha(\mathcal{C}); \qquad \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D}); \qquad \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{D})$$

Lema 2.2.2. *Si* $\mathcal{A}$ *es álgebra, entonces* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *es álgebra.*

Demostración. Se puede encontrar en “Apuntes de Teoría de la Medida” (2018). □

Teorema 2.2.1 (Teorema de la clase monótona)**.** *Si* $\mathcal{A}$ *es álgebra entonces*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Demostración. Consulte “Apuntes de Teoría de la Medida” (2018). □

2.2.2. Medida

Definición 2.2.9 (Medida)**.** *Por una medida, en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$, *con* $\mathcal{A}$ *álgebra o anillo, entendemos una función no negativa*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

que satisface:

a. $\mu(\emptyset) = 0$

b. *Es numerablemente aditiva, es decir, si dados* $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots \in \mathcal{A}$ *disjuntos, esto es, tales que* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$ *y cuya unión esta en* $\mathcal{A}$ *(esto es automáticamente si* $\mathcal{A}$ *es una* $\sigma-$*álgebra), entonces*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observación 2.2.4. *1. Si la condición (b) sólo es válida para colecciones finitas de conjuntos disjuntos, $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$, diremos que la medida es aditiva.*

2. Diremos que la medida μ es $\sigma-$finita si existe una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, tal que $\bigcup A_n = \Omega$ y cada $\mu(A_n) < \infty$.

3. Llamaremos probabilidad a toda medida verificando $\mu(\Omega) = 1$.

Definición 2.2.10 (Espacio de medida)**.** *Llamaremos espacio de medida a toda terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida sobre la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ de Ω.*

Algunos ejemplos sobre medidas se muestran en seguida.

Ejemplo 2.2.6. *Considerando el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sea $x \in \Omega$ y E un conjunto medible en $\mathcal{A}$, se define*

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in E \\ \\ 0 & \textit{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

como la medida delta de Dirac en x ó probabilidad concentrada en el punto x.

Ejemplo 2.2.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con los puntos x medibles, $\{x\} \in \mathcal{A}$ y $\mu(\emptyset) = 0$, se define*

$$\mu(A) = \begin{cases} \mu(A) = n & \textit{si } \ |A| = n \\ \\ \mu(A) = \infty & \textit{En otro caso} \end{cases}$$

como la medida de contar.

Ejemplo 2.2.8. *Sean $\Omega = \mathbb{N}$ y una sucesión de números reales no negativos $p_n \geq 0$. Para cada $A \in \mathbb{N}$ la suma definida por*

$$\sum_{n\in A} p_n,$$

es una medida en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$*, para la que* $\mu(\{n\}) = p_n$*. Si* $\sum p_n = 1$ *entonces es una probabilidad y si* $p_n = 1$ *para cada* n*,* μ *es la medida de contar en los naturales.*

Definición 2.2.11 (Espacio de medida completo)**.** *Diremos que un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *es completo si para cada* $B \subset A$ *con* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\mu(A) = 0$*, también* $B \in \mathcal{A}$*.*

2.2.3. Integración

Definición 2.2.12 (Función medible)**.** *Diremos que una aplicación entre espacios medibles,*

$$F : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

es una aplicación medible, si $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ *para todo* $B \in \mathcal{A}_2$*, es decir* $F^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$*.*

Lo anterior quiere decir que la función F es medible si la antiimagen de conjuntos medibles en $\mathcal{A}_2$ a través de F es un conjunto medible en $\mathcal{A}_1$.

Definición 2.2.13. *Dada una función* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *definimos las funciones*

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\} \text{ y } f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$$

para las que $f = f^+ - f^-$*, se llaman parte positiva y parte negativa de* f *respectivamente.*

Observación 2.2.5. *Dado que la inclusión* $i : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *es continua y por tanto medible, entonces si* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *es medible, también lo es extendida a* $\overline{\mathbb{R}}$*. Por lo que todo función real se puede entender en* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Lema 2.2.3. *Sea* $(\Omega_1, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *una función. Entonces la colección*

$$\mathcal{A}_f = \{E \subseteq \Omega_2 \,:\, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω_2.

Demostración. La prueba se reduce a la comprobación de las condiciones de la definición 2.2.3.

a. Puesto que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, entonces para cada $x \in \Omega_1$ se tiene que $f(x) \in \Omega_2$, así $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$ y dado que $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ resulta que $f^{-1}(\Omega_2) \in \mathcal{A}$, lo cual implica que $\Omega_2 \in \mathcal{A}_f$.

b. Primeramente observe que $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$, pues dado un punto x para el cual

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E^c) &\Leftrightarrow f(x) \in E^c \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin E \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(E) \\ &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(E))^c \end{aligned}$$

lo cual verifica que $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$.

Ahora se puede comprobar la condición b) de la definición 2.2.3. Suponga que $E \in \mathcal{A}_f$, entonces $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Dado que $\mathcal{A}$ es $\sigma-$álgebra, entonces $\Omega_1 - f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Solo es necesario probar que $f^{-1}(\Omega_2 - E) = \Omega_1 - f^{-1}(E)$. Para ello note que si

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\Omega_2 - E) &= f^{-1}(\Omega_2 \cap E^c) \\ &= f^{-1}(\Omega_2) \cap f^{-1}(E^c) \\ &= \Omega_1 \cap (f^{-1}(E))^c \\ &= \Omega_1 - f^{-1}(E) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\Omega_2 - E) = \Omega_1 - f^{-1}(E)$, así $f^{-1}(\Omega_2 - E) \in \mathcal{A}$, en consecuencia $\Omega_2 - E \in \mathcal{A}_f$.

c. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de elementos de $\mathcal{A}_f$, así para cada $n = 1,\ 2, \cdots$, se cumple que $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{A}$. Luego

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2) \cup \cdots \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{-1}(E_n))$$

Pero, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{A}$, por lo cual $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_f$.

Por tanto, $\mathcal{A}_f$ es una $\sigma-$álgebra de Ω_2. □

Proposición 2.2.4. *a. La composición de aplicaciones medibles es medible.*

b. Si $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ son espacios medibles y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}_2$ es tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$ entonces $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible sí, y solo si para cada $B \in \mathcal{C},\ F(B) \in \mathcal{A}_1$.

c. Las aplicaciones continuas entre espacios topológicos son medibles para las $\sigma-$álgebras de Borel.

Demostración. Sean $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ espacios medibles para $i = 1,\ 2,\ 3$.

a. Sean $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ funciones medibles. Se probará que $f \circ g : \Omega_1 \to \Omega_3$ es medible. Sea $C \in \mathcal{A}_3$, luego dado que g es medible, entonces $g^{-1}(C) \in \mathcal{A}_2$ y dado que f es medible resulta que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}_1$, por tanto $f \circ g$ es medible.

b. De izquierda a derecha. Dado que $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible, y puesto que por hipótesis $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$ entonces resulta que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ para todo $B \in \mathcal{C}$.

Recíprocamente. Considere la colección

$$\mathcal{A}_F = \{E \subseteq \Omega_2 \ :\ F^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1\}$$

que por lema 2.2.3 es una $\sigma-$álgebra de Ω. Ahora, por hipótesis, para cada $B \in \mathcal{C}$ se cumple que $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$, por lo cual $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}_F$, pero además $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}_F$ y dado que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$ entonces $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_F$. Por tanto, para cada $E \in \mathcal{A}_2$ se cumple que $F^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$, así F es medible.

c. Es consecuencia de b).

$\square$

Proposición 2.2.5. *Una función* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$*, es medible sí, y solo si para cada* $c \in \mathbb{R}$*,* $\{x \in \Omega \,:\, f(x) > c\} \in \mathcal{A}$*.*

Demostración. De izquierda a derecha. Dados que los intervalos de la forma $(c, +\infty]$ generan la $\sigma-$álgebra de Borel, entonces $(c, +\infty] \in \overline{\mathbb{R}}$ es medible y dado que

$$f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) \in (c, +\infty]\} = \{x \in \Omega \,:\, f(x) > c\}$$

y puesto que f es medible, entonces $f^{-1}((c, +\infty])$ es medible.

De derecha a izquierda. Se sabe que $f^{-1}((c, +\infty])$ está en $\mathcal{A}$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, entonces por la parte b) de la proposición 2.2.4 la aplicación f es medible. $\square$

Teorema 2.2.2. *Sea* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *una función real extendida con dominio medible, entonces para cada* $c \in \mathbb{R}$ *son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) > c\} \in \mathcal{A}$.

2. $f^{-1}([-\infty, c]) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$.

3. $f^{-1}([c, +\infty]) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) \geq c\} \in \mathcal{A}$.

4. $f^{-1}([-\infty, c)) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) < c\} \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ una función real extendida con dominio medible, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$:

$1 \Rightarrow 2$. Observe que la antiimagen $f^{-1}([-\infty, c])$ se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
f^{-1}([-\infty,c]) &= \{x\in\Omega\,:\,f(x)\leq c\}\\
&= \{x\in\Omega\,:\,f(x)\in[-\infty,c]\}\\
&= \{x\in\Omega\,:\,f(x)\in(c,+\infty]^c\}\\
&= f^{-1}((c,+\infty]^c)\\
&= (f^{-1}((c,+\infty]))^c
\end{aligned}
$$

Por lo cual, $f^{-1}([-\infty,c]) = (f^{-1}((c,+\infty]))^c$, y dado que $f^{-1}((c,+\infty])\in\mathcal{A}$, entonces $f^{-1}([-\infty,c])\in\mathcal{A}$.

$2\Rightarrow 1.$ Puesto que

$$
\begin{aligned}
f^{-1}((c,+\infty]) &= \{x\in\Omega\,:\,f(x)> c\}\\
&= \{x\in\Omega\,:\,f(x)\in(c,+\infty]\}\\
&= \{x\in\Omega\,:\,f(x)\in[-\infty,c]^c\}\\
&= f^{-1}([-\infty,c]^c)\\
&= (f^{-1}([-\infty,c]))^c
\end{aligned}
$$

Así, $f^{-1}((c,+\infty]) = (f^{-1}([-\infty,c]))^c$, y puesto que $f^{-1}([-\infty,c])\in\mathcal{A}$ entonces se concluye que $f^{-1}((c,+\infty])\in\mathcal{A}$.

Las implicaciones $3\Rightarrow 4$ y $4\Rightarrow 3$ se prueban de forma análoga a los caso anteriores.

$1\Rightarrow 3.$ Dado que $\{x\in\Omega\,:\,f(x)\geq c\} = f^{-1}([c,+\infty])$ y puesto que es posible escribir $[c,+\infty] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(c-\dfrac{1}{n},+\infty\right]$ entonces

$$\begin{aligned}
\{x \in \Omega \,:\, f(x) \geq c\} &= f^{-1}([c, +\infty]) \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(c - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left(c - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \Omega \,:\, f(x) > c - \frac{1}{n}\right\}
\end{aligned}$$

Ahora, dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}((c - \frac{1}{n}, +\infty]) \in \mathcal{A}$ entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \Omega \,:\, f(x) > c - \frac{1}{n}\right\} \text{ está en } \mathcal{A}.$$

Por tanto, $f^{-1}([c, +\infty]) \in \mathcal{A}$.

$3 \Rightarrow 1$. Dado que $\{x \in \Omega \,:\, f(x) > c\} = f^{-1}((c, +\infty])$ y además se sabe que

$$(c, +\infty] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[c + \frac{1}{n}, +\infty\right]$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
\{x \in \Omega \,:\, f(x) > c\} &= f^{-1}((c, +\infty]) \\
&= f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[c + \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left[c + \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \Omega \,:\, f(x) \geq c + \frac{1}{n}\right\}
\end{aligned}$$

Ahora, como $\{x \in \Omega \,:\, f(x) \geq c + \frac{1}{n}\}$ está en $\mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{x\in\Omega\,:\,f(x)\geq c+\frac{1}{n}\right\}\text{ está en }\mathcal{A}.$$

Por tanto, $f^{-1}((c,+\infty])\in\mathcal{A}$.

□

Proposición 2.2.6. *a. Si f es una función medible, entonces, $-f$ y $|f|$ son medibles.*

b. Si f y g son funciones medibles, entonces $\text{máx}(f,g)$ es una función medible.

c. Si f es medible, entonces f^+ y f^- son medibles.

Demostración. a. Para probar que $-f$ es medible, usando la proposición 2.2.5, es necesario mostrar que para cualquier $c\in\mathbb{R}$ el conjunto $\{x\in\Omega\,:\,-f(x)>c\}\in\mathcal{A}$. Para ellos observe que

$$\{x\in\Omega\,:\,-f(x)>c\}=\{x\in\Omega\,:\,f(x)<-c\}=\{x\in\Omega\,:\,f(x)\geq -c\}^c$$

Ahora, dado que f es medible, por proposición 2.2.5, el conjunto $\{x\in\Omega\,:\,f(x)>c\}$ está $\mathcal{A}$, y por teorema 2.2.2 ($1\Rightarrow 3$) el conjunto $\{x\in\Omega\,:\,f(x)\geq c\}\in\mathcal{A}$, por lo cual $\{x\in\Omega\,:\,f(x)\geq -c\}^c$ está en $\mathcal{A}$ pues $c\in\mathbb{R}$ es arbitrario, así $-f$ es medible.

Para mostrar que $|f|$ es medible, es necesario verificar que el conjunto $\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>c\}\in\mathcal{A}$.

Si $c<0$, entonces $\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>c\}=\Omega$ y dado que $\Omega\in\mathcal{A}$, entonces $\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>c\}\in\mathcal{A}$.

Si $c\geq 0$ se tiene que

$$\{x\in\Omega\,:\,|f(x)|>c\}=\{x\in\Omega\,:\,f(x)>c\}\cup\{x\in\Omega\,:\,f(x)<-c\}$$

Ahora, dado que f es medible, entonces $\{x \in \Omega : f(x) > c\} \in \mathcal{A}$, y por teorema 2.2.2 el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < -c\}$ también es medible, por tanto $\{x \in \Omega : |f(x)| > c\} \in \mathcal{A}$, así f es medible.

b. Asumiendo que $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$ se debe probar que $\{x \in \Omega : h(x) > c\}$ está en $\mathcal{A}$. Así, observe que

$$\{x \in \Omega : h(x) > c\} = \{x \in \Omega : f(x) > c\} \cup \{x \in \Omega : g(x) > c\}$$

y dado que por hipótesis las funciones f y g son medibles, entonces por proposición 2.2.5, $\{x \in \Omega : h(x) > c\}$ es medible por ser unión de dos conjuntos medibles, por tanto $\text{máx}\{f(x), g(x)\}$ es medible.

c. Es consecuencia de los incisos anteriores.

$\square$

Definición 2.2.14 (Conjunto de funciones reales medibles)**.** *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y un conjunto $A \in \mathcal{A}$, denotamos el conjunto de todas las funciones reales medibles como*

$$L_{\mathbb{R}}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \,|\, f \textit{ es real medible}\}$$

Observación 2.2.6. *Es importante notar que en la definición 2.2.14 la función f toma valores en $\mathbb{R}$ y no en $\overline{\mathbb{R}}$.*

Ahora se introducen un tipo particular de funciones $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ denominadas funciones simples y se mostraran algunas de sus propiedades; dichas funciones forman un espacio vectorial real, para su estudio es necesaria la definición de función característica.

Definición 2.2.15 (Función característica)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, llamamos función característica de A a la función medible $\mathcal{X}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in A \\ \\ 0 & \textit{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Definición 2.2.16 (Función simple). *Diremos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es simple si es medible y toma un número finito de valores. Denotamos el conjunto de las funciones simples con*

$$\mathcal{S} = \{s : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, s \textit{ es simple}\}$$

Si $f(\Omega) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ con $a_k \neq a_j$ para $k \neq j$ y puesto que $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. Entonces la representación canónica de f es única y está dada por

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i}$$

cuando los $A_k \cap A_j \neq \emptyset$ y forman una partición finita de Ω. Sin embargo, la función f tiene muchas representaciones de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i}$$

si los $A_1, A_2, \cdots, A_n$ no son necesariamente disjuntos uno a uno y no necesariamente los a_i con $i = \overline{1, n}$ están en la imagen de f. A raíz de lo anterior se enuncia la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ es simple sí, y solo si existe $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos y $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i}, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simple, entonces por definición 2.2.16, f toma un número finito de valores $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y se puede representar como

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i}$$

la cual es su representación canónica. Ahora, dado que $imf = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y dado que los a_i para $i = \overline{1, n}$ son todos distintos y puesto que f es medible, entonces resulta que los conjuntos

$$A_i = f^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in \Omega \,:\, f(x) = a_i\}$$

son medibles, disjuntos dos a dos para $i = \overline{1,\, n}$ y además $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

$(\Leftarrow)$ Sean $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n$ elementos de $\mathbb{R}$ y $A_1,\, A_2,\, \cdots,\, A_n$ conjuntos medibles de $\mathcal{A}$ para los cuales

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Ahora, de acuerdo a como se ha definido f es claro que f toma una cantidad finita de valores.

Resta probar que f es medible. Sea c cualquier número real, entonces

$$\{x \in \Omega \,|\, f(x) > c\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a_i \leq c,\ \forall\, i = \overline{1,\, n} \\ \\ \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{A_i \,:\, a_i > c\} & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Puesto que $\emptyset \in \mathcal{A}$ y las uniones finitas de elementos de $\mathcal{A}$ están en $\mathcal{A}$, entonces en cualquiera de los dos caso, f es medible. Por tanto, se concluye que f es simple.

$\square$

Proposición 2.2.8. *Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $f+g$, fg están en $\mathcal{S}$ y si g es no nula, también $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Dado que f y g son funciones simples, entonces por proposición 2.2.7 existen $a_i,\, b_j \in \mathbb{R}$ con $i = \overline{1,\, n}$ y $j = \overline{1,\, m}$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{y} \quad g = \sum_{i=1}^{m} b_j\, \mathcal{X}_{B_j}$$

donde los conjuntos A_i son medibles y disjuntos, y los B_j también son medibles y disjuntos y además $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$.

Ahora, para $i = \overline{1,\, n}$ se sabe que

$$A_i = A_i \cap \Omega = A_i \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \tag{2.7}$$

De la misma manera, para $j = \overline{1,\, m}$ se tiene

$$B_j = B_j \cap \Omega = B_j \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j) \tag{2.8}$$

Así, de las representaciones canónicas de f y g, y de las igualdades 2.7 y 2.8 resulta que

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{\cup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i,\, j} a_i\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

y

$$g = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathcal{X}_{\cup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_j)} = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i,\, j} b_j\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

Por lo cual

$$f + g = \left(\sum_{i,\, j} a_i\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \right) + \left(\sum_{i,\, j} b_j\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \right) = \sum_{i,\, j} (a_i + b_j) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

$$fg = \left(\sum_{i,\, j} a_i\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \right) \cdot \left(\sum_{i,\, j} b_j\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \right) = \sum_{i,\, j} (a_i \cdot b_j) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

y en el caso que g es no nula, entonces los $b_j \neq 0$ para $j = \overline{1,\, m}$, de lo cual resulta que

$$\frac{f}{g} = \frac{\sum_{i,\, j} a_i\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}}{\sum_{i,\, j} b_j\, \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}} = \sum_{i,\, j} \left(\frac{a_i}{b_j} \right) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

está bien definida.

Así, de lo anterior y del hecho que los $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, se concluye que $f + g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ son funciones medibles. $\square$

Definición 2.2.17 (Integral de una función simple)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $h \in \mathcal{S}$ *no negativa, es decir*

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \ \mathcal{X}_{A_i} : \Omega \to [0, \infty)$$

con los $0 \leq a_i < \infty$ *y los* $A_i \in \mathcal{A}$ *disjuntos y* $\bigcup A_i = \Omega$*. Se define la integral de* h *con respecto a* μ *como el valor de* $[0, \infty]$

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

Dado que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, hay que comprobar que la integral de la función simple no negativa h es independiente de sus representaciones. Es decir, si existen dos representaciones para $h \in \mathcal{S}$ dadas por

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{y} \quad h = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}$$

estas llevan al mismo valor de la integral de h. Para su comprobación recuerde que para cada $i = \overline{1,\, n}$ y $j = \overline{1,\, m}$ se tiene que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \quad \text{y} \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

donde la colección de los $A_i \cap B_j$ son disjuntos y $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$.

Por lo cual

$$\mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)$$

Así

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j)$$

Haciendo un proceso análogo para B_j se obtiene que

$$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$$

y además

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j)$$

Ahora, dado que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, entonces $a_i = b_j$ y de la definición 2.2.17 se cumple que

$$\int h \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \, \mu(B_j)$$

Observación 2.2.7. *Cuando no exista confusión con el dominio Ω de f, se escribe $\int f \, d\mu$ en lugar de $\int_\Omega f \, d\mu$.*

La linealidad y monotonía de la integral sobre las funciones simples no negativas se exhibe en la proposición 2.2.9 lo cual permite extender la noción de integración a las funciones medibles no negativas.

Proposición 2.2.9. *Sean $f, g \in \mathcal{S}$ no negativas y $c \in [0, +\infty)$, entonces:*

a. $\displaystyle\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$

b. $\displaystyle\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

c. $f \leq g$ *entonces* $\displaystyle\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Demostración. Sean f y g funciones simples no negativas, entonces por proposición 2.2.7 sus representaciones canónicas están dadas por

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathcal{X}_{A_i} \quad \text{y} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \, \mathcal{X}_{B_j}$$

donde los A_i y B_j son disjuntos y cumplen que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$.

Por otra parte, se sabe que

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \quad \text{y} \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

a. Puesto que $c \in [0, +\infty)$, entonces se tiene que:

Si $c = 0$, entonces trivialmente se cumple que $\displaystyle\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$.

Si $c > 0$, entonces $cf = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ca_i \mathcal{X}_{A_i}$, así por definición 2.2.17 se tiene

$$\int cf\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} ca_i\, \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = c \int f\, d\mu$$

Por tanto, $\displaystyle\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$.

b. De acuerdo a como se han expresado los conjuntos A_i y B_j en la demostración de la proposición 2.2.8, entonces resulta que

$$\mathcal{X}_{A_i} = \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j)} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_{B_j} = \mathcal{X}_{\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_j)} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

Por lo cual

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathcal{X}_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

y

$$g = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mathcal{X}_{B_j} = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i \cap B_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

Por tanto

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}$$

Así, por definición 2.2.17 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\,d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_i\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(B_j)\\
&= \int f\,d\mu+\int g\,d\mu
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\int (f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu.$$

c. Dado que $f\leq g$ entonces $0\leq g-f$, así de los incisos a) y b) se tiene que

$$\int g\,d\mu-\int f\,d\mu=\int g\,d\mu+\int (-f)\,d\mu=\int (g-f)\,d\mu$$

Ahora, por definición 2.2.17 $\displaystyle\int (g-f)\,d\mu\in[0,+\infty)$ por lo cual

$$\int g\,d\mu-\int f\,d\mu=\int (g-f)\,d\mu\geq 0$$

de donde se cumple que

$$\int f\,d\mu\leq\int g\,d\mu$$

□

Definición 2.2.18 (Integral de una función medible)**.** *Si $h\geq 0$ es medible, la integral de h respecto de μ en Ω se define de la forma*

$$\int_\Omega h\,d\mu=\sup\left\{\int_\Omega s\,d\mu\ :\ s\in\mathcal{S},0\leq s\leq h\right\}$$

Para $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, descomponiendo $h = h^+ - h^-$ y si uno de los términos, $\int_\Omega h^+ d\mu$ ó $\int_\Omega h^- d\mu$ son finitos, se define su integral respecto de μ como la diferencia

$$\int_\Omega h\, d\mu = \int_\Omega h^+ d\mu - \int_\Omega h^- d\mu$$

en caso contrario se dirá que la integral de h no existe. Se dice que h es integrable si ambos términos son finitos.

Definición 2.2.19. *Para $h = h_1 + ih_2 : \Omega \to \mathbb{K}$ medible (entendiendo que en $\mathbb{C}$ se considera la $\sigma-$ álgebra de Borel, y que h_1 y h_2 son medibles), se dirá que es integrable si lo son su parte real h_1 y su parte imaginaria h_2, en cuyo caso se define*

$$\int h\, d\mu = \int h_1\, d\mu + i \int h_2\, d\mu.$$

Definición 2.2.20 (Espacio de funciones integrables)**.** *Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ se denota por $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$, $L^1(\mu, \mathbb{K})$ ó $L^1(\mu)$, ó simplemente L^1 si no hay confunsión, el espacio de las funciones integrables*

$$f : \Omega \to \mathbb{K}.$$

Observación 2.2.8. *Si $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible y $B \in \mathcal{A}$, la restricción de h a $(B, \mathcal{A}_B, \mu)$ también es medible y si su integral existe en este espacio se denotará por $\int_B h\, d\mu$. Para el caso en que $B = \emptyset$ para $h \geq 0$ se tiene que*

$$\int_\emptyset h\, d\mu = \sup \left\{ \int_\emptyset s\, d\mu \;:\; s \in \mathcal{S},\, 0 \leq s \leq h_{|\emptyset} \right\} = \sup \emptyset$$

y se define $\sup \emptyset = 0$, lo cual es congruente pues si $A \subset B \subset [0, \infty]$ entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$. Para una función medible arbitraria h se define $\int_\emptyset h\, d\mu = \int_\emptyset h^+\, d\mu - \int_\emptyset h^-\, d\mu$.

Proposición 2.2.10. *Sean $f, g : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces:*

a. Si existe la integral de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces existe la integral de cf y $\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu$.

b. Si $f \leq g$ y existen sus integrales, entonces

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$$

c. Si $f \leq g$, existe $\int f\,d\mu$ y $-\infty < \int f\,d\mu$, entonces existe $\int g\,d\mu$ y si existe $\int g\,d\mu$ y $\int g\,d\mu < \infty$, entonces existe $\int f\,d\mu$ y en ambos casos

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$$

d. Si existe la integral de f, entonces $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu.$

Demostración. Véase "Apuntes de Teoría de la Medida" (2018). □

Proposición 2.2.11. *e. Si $f \geq 0$ es medible y $B \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\int_B f\,d\mu = \int \mathcal{X}_B\, f\,d\mu$$

Demostración. La prueba puede verse en "Apuntes de Teoría de la Medida" (2018). □

Teorema 2.2.3 (Teorema de convergencia monótona). *Suponga que $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ es una sucesión creciente de funciones integrables de valor real en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $\{\int f_n\,d\mu\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe casi en todas partes, y es integrable y $\int (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$. Si $\{\int f_n\,d\mu\}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n$ es infinito en un conjunto de medida positiva ó $\lim_{n\to\infty} f_n$ es no integrable.*

Lema 2.2.4 (Lema de Fatou). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ acotada inferiormente por una función integrable. Si $\lim_{n\to\infty} \inf \int f_n\,d\mu < \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ es integrable y*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf f_n\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n\,d\mu$$

Teorema 2.2.4 (Teorema de convergencia dominada). *Si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es integrable y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales medibles con $|f_n| \leq g$ casi en todas partes $(n \geq 1)$ y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ casi en todas partes, entonces f es integrable y $\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$*

2.3. Teoría ergódica

2.3.1. Aplicaciones que preservan medidas

Definición 2.3.1. *Suponga que* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *son espacios de probabilidad. Una transformación* $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ *es preservadora de medida si* T *es medible y* $\mu_1(T^{-1}(A_2)) = \mu_2(A_2)$ *para todo* $A_2 \in \mathcal{A}_2$*.*

Definición 2.3.2. *Suponga que* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *son espacios de probabilidad. Decimos que* $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ *es una transformación invertible que preserva medida si* T *preserva medida, es biyectiva, y* T^{-1} *preserva medida.*

En la práctica, es difícil comprobar utilizando la definición 2.3.1, si una transformación dada es preservadora de medida o no, ya que normalmente no se tiene conocimiento explícito de todos los miembros de $\mathcal{A}_2$. Sin embargo, a menudo se tienen conocimientos explícitos de una semi-álgebra que genera a $\mathcal{A}$. El resultado siguiente es por lo tanto deseable para comprobar si las transformaciones son preservadoras de medida o no.

Teorema 2.3.1. *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *espacios de probabilidad y* $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ *una transformación. Sea* $\mathcal{S}_2$ *una semi-álgebra que genera a* $\mathcal{A}_2$*. Si para cada* $A_2 \in \mathcal{S}_2$ *tenemos que*

1. $T^{-1}A_2 \in \mathcal{A}_1$
2. $\mu_1(T^{-1}A_2) = \mu_2(A_2)$

Entonces, T *es medible y preserva medida.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{A}_2 \,|\, T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1,\ \mu_1(T^{-1}(B)) = \mu_2(B)\}.$$

Se quiere probar que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A}_2$. Así observe que, de acuerdo a como se ha definido $\mathcal{C}_2$ se tiene que $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{A}_2$. Ahora, sea $\alpha(\mathcal{S}_2)$ el álgebra generado por $\mathcal{S}_2$ y dado que cada miembro de $\alpha(\mathcal{S}_2)$ es una unión finita de miembros disjuntos de $\mathcal{S}_2$ por lo cual se tiene que $\alpha(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{S}_2$, así $\alpha(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{C}_2$.

Ahora, note que $\mathcal{C}_2$ es una clase monótona ya que

a. Si $F_1,\ F_2, \cdots,\ F_n,\ \cdots \in \mathcal{C}_2$ con $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$, entonces

$$T^{-1}(F) = T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(F_n).$$

y puesto que los $F_n \in \mathcal{C}_2$ entonces $T^{-1}(F) \in \mathcal{A}_1$. Ahora, para que $F \in \mathcal{C}_2$ se debe probar que $\mu_1(T^{-1}(F)) = \mu_2(F)$, pero esto es sencillo pues

$$\begin{aligned}
\mu_1(T^{-1}(F)) &= \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(F_n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(T^{-1}(F_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_2(F_n) \\
&= \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\
&= \mu_2(F)
\end{aligned}$$

por lo cual $F \in \mathcal{C}_2$.

b. De forma similar que en a), sean $G_1,\ G_2, \cdots,\ G_n,\ \cdots \in \mathcal{C}_2$ con $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G$, entonces resulta que

$$T^{-1}(G) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-1}(G_n).$$

y puesto que los $G_n \in \mathcal{C}_2$ entonces $T^{-1}(G) \in \mathcal{A}_1$. Ahora, de la misma manera que en el caso de F, para que $G \in \mathcal{C}_2$ se debe probar que $\mu_1(T^{-1}(G)) = \mu_2(G)$, así

$$\begin{aligned}
\mu_1(T^{-1}(G)) &= \mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-1}(G_n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(T^{-1}(G_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_2(G_n) \\
&= \mu_2\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \\
&= \mu_2(G)
\end{aligned}$$

por tanto $G \in \mathcal{C}_2$.

Así, por definición 2.2.8, la colección $\mathcal{C}_2$ es una clase monótona que contiene a $\alpha(\mathcal{S}_2)$.

Ahora, dado el álgebra $\alpha(\mathcal{S}_2)$, entonces la mínima $\sigma-$álgebra generada por $\alpha(\mathcal{S}_2)$ es $\mathcal{A}_2$, así por teorema 2.2.1 $\mathcal{A}_2$ es la mínima clase monótona que contiene a $\alpha(\mathcal{S}_2)$, así $\alpha(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{C}_2$, por lo cual $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A}_2$, por tanto, de la definición 2.3.1 la transformación T es preservadora de medida.

□

2.3.2. Recurrencia y transformaciones inducidas

El teorema de recurrencia de Poincaré afirma que, dada cualquier medida finita invariante, casi todo punto de cualquier conjunto A de medida positiva vuelve a A un número infinito de veces (Viana y Oliveira, 2016). La teoría que se presenta en seguida requiere de algunos enunciados expuestos en la subseción 4.1.1 y la sección A.1.

Teorema 2.3.2 (Teorema de recurrencia de Poincaré)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Sea* $T : \Omega \to \Omega$ *una transformación medible y sea* μ *una medida finita invariante* *bajo T. Sea $A \subset \Omega$ cualquier conjunto medible con $\mu(A) > 0$. Entonces casi para todo $x \in A$ existen infinitos valores n para los cuales $T^n(x)$ también está en A.*

Demostración. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \subset \Omega$ un subconjunto con $\mu(A) > 0$. Se probará que casi todo punto $x \in A$ vuelve infinitas veces a A, es decir $T^n(x) \in A$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$, excepto en un conjunto de medida cero. Sea E el conjunto de todos los puntos $x \in A$ que nunca regresan a A, esto es

$$E = \{x \in A : T^n(x) \notin A, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Interesa probar que $\mu(E) = 0$, para ello observe que las antiimagenes $T^{-n}(E)$ son disjuntas dos a dos, para probar este hecho, por contradicción, suponga que existen $m > n \geq 1$ tal que

$$T^{-m}(E) \cap T^{-n}(E) \neq \emptyset$$

Sea $x \in T^{-m}(E) \cap T^{-n}(E)$ y definiendo el punto $y = T^n(x)$, luego se tiene que $x \in T^{-n}(E)$ y por definición de imagen de un conjunto bajo T se tiene que $T^n(x) \in E$, por lo cual $y \in E$ y además se obtiene que $T^{m-n}(y) = T^{m-n}(T^n(x)) = T^{(m-n)+n}(x) = T^{m+(-n+n)}(x) = T^{m+0}(x) = T^m(x) \in E$, pero se sabe que $E \subset A$, lo cual quiere decir que y vuelve al menos una vez a A, esto contradice la definición de E. Por lo cual, los conjuntos $T^{-n}(E)$ son disjuntos dos a dos, es decir

$$T^{-m}(E) \cap T^{-n}(E) = \emptyset \tag{2.9}$$

Ahora, dado que μ es invariante y por la ecuación 2.9 se tiene que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(E)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E)$$

Luego, como μ es finita entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E))$ es finita, sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E)$ una suma infinita de términos que son todos iguales, por lo cual la única manera que tal suma puede ser finita es si los términos son iguales a cero, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) = 0$$

Así se verifica que $\mu(E) = 0$, esto es, E tiene medida cero.

Ahora, sea F el conjunto de todos los puntos $x \in A$ que regresan a A un número finito de veces, es decir

$$F = \{x \in A : T^n(x) \in A \text{ para un número finito } n \in \mathbb{N}\}$$

Luego, de acuerdo a como se ha definido el conjunto F, existe un $k \in \mathbb{N}$ para el cual $x \in F$ verifica que $T^n(x) \notin A$, así $T^k(x)$ estará en E, es decir

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(E)$$

Pero dado que $\mu(E) = 0$ y μ es invariante, se tiene que

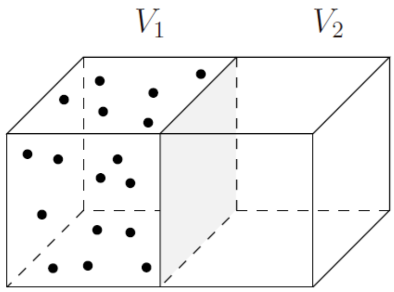
$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(E)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(T^{-k}(E)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E) = 0.$$

Por tanto $\mu(F) = 0$, esto es, F tiene medida cero. Por lo cual se concluye que todo punto $x \in A$ vuelve infinitas veces a A, excepto en un conjunto de medida cero. □

Ejemplo 2.3.1 (Paradoja de Zermelo)**.** *Para el experimento considere un gas ideal contenido en una caja paralelepipédica V subdividida en dos partes cúbicas V_1 y V_2 con una longitud de lado de 10 cm. Ahora, suponga que en el tiempo $t = 0$, todas las moléculas están en V_1 y que en V_2 se ha creado un vacío a como se muestra en la figura 2.3, bajo las condiciones anteriores, suponga ahora que se elimina la partición entre V_1 y V_2.*

Al liberar la separación entre V_1 y V_2 el gas procederá a recorrer V, lo interesante es que la teoría y en específico el teorema de recurrencia de Poincaré predice que para casi todas estas posiciones iniciales de energía dada, el gas debe volver a la parte V_1, sin embargo esto parece paradójico, porque este suceso nunca se ha observado. Por lo cual surge la siguiente interrogante: ¿cómo se podría resolver esta aparente contradicción entre lo que se observa cotidianamente y el resultado del teorema de recurrencia de Poincaré?

Figura 2.3: Paradoja de Zermelo.



Fuente: Tomada de "Récurrence", Systèmes dynamiques élémentaires (p. 23), 2002, Cours de Magistère ENS.

Más adelante, en la subsección 4.1.1 se retomará esta aparente paradoja y se dará una repuesta que no conduce a contradicciones, para ello se necesita la siguiente teoría.

Definición 2.3.3 (Primer tiempo de retorno). *Sea $T : \Omega \to \Omega$ una transformación medible y sea μ una medida finita invariante bajo T en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$. Sea $A \subset \Omega$ con $\mu(A) > 0$. Definimos la función de primer tiempo de retorno $n_A : A \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como*

$$n_A(x) = \text{mín}\{n \geq 1 \,:\, T^n x \in A\}.$$

Siempre que $\{n \geq 1 \,:\, T^n x \in A\} \neq \emptyset$, en caso contrario $n_A(x) = \infty$.

De acuerdo al teorema 2.3.2, $n_A(x)$ es finito en A, excepto en un conjunto de medida cero. Por otra parte, para propósitos posteriores se definen los siguientes conjuntos.

$$E_0 = \{x \in A \,:\, T^n(x) \notin A \text{ para todo } n \geq 1\}$$

$$E_0^* = \{x \in \Omega \,:\, T^n(x) \notin A \text{ para todo } n \geq 0\}$$

donde E_0 es el conjunto de todos los $x \in A$ que no regresan a A, y E_0^* el conjunto de todos los $x \in \Omega$ que no entran a A. Por el Teorema 2.3.2 se tienen que $\mu(E_0) = 0$.

Ahora, dado un espacio de probabilidades, es posible construir otros sistema íntimamente relacionado con el original, el cual es llamado sistema inducido (Viana y Oliveira, 2016), para ello considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, con μ una medida finita. Sea $A \subset \Omega$ y $A \cap \mathcal{A}$ la $\sigma-$álgebra sobre A la cual es la restricción de $\mathcal{A}$ a A. Ahora, definiendo la medida μ_A para todo $B \in A \cap \mathcal{A}$ como

$$\mu_A(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$$

Por lo cual μ_A es una probabilidad, así se obtiene un nuevo espacio de probabilidad $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu)$.

Definición 2.3.4 (Transformación de primer retorno)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y T una transformación preservadora de medida. Sea $A \subset \Omega$ un subconjunto medible con $\mu(A) > 0$, y sea $n_A(x)$ el tiempo de primer retorno de x a A. La transformación de primer retorno de tiempo al dominio A está definida por*

$$T_A(x) = T^{n_A(x)}(x)$$

cuando $n_A(x)$ es finito, esto es, para todo subconjunto medible de A.

Proposición 2.3.1. *La transformación T_A es medible respecto a la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} \cap A$.*

Proposición 2.3.2. *La transformación $T_A : A \to A$ preserva la medida μ_A.*

Demostración. Sea C un conjunto en la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A} \cap A$ y puesto que T es una transformación preservadora de medida con respecto a μ, entonces por definición 2.3.1, $\mu(C) = \mu(T^{-1}(C))$. Para mostrar que T_A es invariante respecto a μ_A es necesario probar que

$$\frac{\mu(C)}{\mu(A)} = \frac{\mu(T_A^{-1}(C))}{\mu(A)}$$

por lo cual solo es necesario demostrar que $\mu(C) = \mu(T_A^{-1}(C))$. Así para $k \geq 1$ sean los conjuntos

$$E_k = \{x \in A \,|\, n_A(x) = k\}$$

$$E_k^* = \{x \in \Omega - A \,|\, T(x), \cdots, T^{k-1}(x) \notin A, \, T^k(x) \in A\}$$

Observe que, de acuerdo a como se han definido los conjunto E_k y E_k^*, entonces A puede expresarse como

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

donde los $E_1,\ E_2, \cdots,\ E_k, \cdots$ son disjuntos dos a dos y además es evidente que

$$T^{-1}(A) = E_1 \cup E_1^* \tag{2.10}$$

De modo similar, se tiene que

$$T^{-1}(E_n^*) = E_{n+1} \cup E_{n+1}^* \tag{2.11}$$

Para probar la veracidad de la igualdad en 2.11 suponga que $y \in T^{-1}(E_n^*)$, luego por definición de imagen $T(y) \in E_n^*$, así por definición de E_n^*, la primera iteración de $T(y)$ que está en A es $T^n(T(y)) = T^{n+1}(y)$, pero esto ocurre sí, y solo si y pertenece a cualquiera de los conjuntos

$$E_{n+1}^* = \{x \in \Omega - A \,:\, x \notin A,\ T(x) \notin A,\ \ldots,\ T^{n-1}(x) \notin A,\ T^n(x) \notin A,\ T^{n+1}(x) \in A\}$$

$$E_{n+1} = \{x \in A \,:\, T(x) \notin A,\ \ldots,\ T^{n-1}(x) \notin A,\ T^n(x) \notin A,\ T^{n+1}(x) \in A\}$$

lo cual prueba la igualdad en 2.11.

Ahora, por definición 2.3.4 para cualquier $x \in E_k$ se tiene que $T_A(x) = T^k(x)$, así para $C \in \mathcal{A} \cap A$ se tiene

$$T_A^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap T^{-k}(C))$$

donde los $E_k \cap T^{-k}(C)$ son disjuntos dos a dos, entonces por la $\sigma-$aditividad de μ resulta que

$$\mu(T_A^{-1}(C)) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap T^{-k}(C))\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k \cap T^{-k}(C)\right) \tag{2.12}$$

luego, dado que $T^{-1}(C) = A \cap T^{-1}(C)$ entonces

$$\mu(T^{-1}(C)) = \mu(A \cap T^{-1}(C)). \tag{2.13}$$

Ahora, aplicando sucesivamente las relaciones 2.10 y 2.11 en la ecuación 2.13, a como sigue

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(C)) &= \mu(A \cap T^{-1}(C)) \\
&= \mu((E_1 \cup E_1^*) \cap T^{-1}(C)) \\
&= \mu((E_1 \cap T^{-1}(C)) \cup (E_1^* \cap T^{-1}(C))) \\
&= \mu(E_1 \cap T^{-1}(C)) + \mu(E_1^* \cap T^{-1}(C)) \\
&= \mu(E_1 \cap T^{-1}(C)) + \mu(T^{-1}(E_1^* \cap T^{-1}(C))) \\
&= \mu(E_1 \cap T^{-1}(C)) + \mu(T^{-1}(E_1^*) \cap T^{-2}(C)) \\
&= \mu(E_1 \cap T^{-1}(C)) + \mu((E_2 \cap E_2^*) \cap T^{-2}(C)) \\
&= \mu(E_1 \cap T^{-1}(C)) + \mu(E_2 \cap T^{-2}(C)) + \mu(E_2^* \cap T^{-2}(C)) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap T^{-k}(C)) + \mu(E_n^* \cap T^{-n}(C))
\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\mu(T^{-1}(C)) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap T^{-k}(C)) + \mu(E_n^* \cap T^{-n}(C)) \tag{2.14}$$

Observe que los conjuntos $E_n^* \cap T^{-n}(C)$ son disjuntos dos a dos. Por otro lado, dado que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n^* \cap T^{-n}(C)) \subseteq \Omega$ y puesto que el espacio es de probabilidad, entonces

$$1 = \mu(\Omega) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n^* \cap T^{-n}(C))\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^* \cap T^{-n}(C))$$

por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^* \cap T^{-n}(C))$ está acotada, así

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n^* \cap T^{-n}(C)) = 0$$

de donde se infiere que, si $n \to \infty$, entonces en 2.14 se tiene que

$$\mu(T^{-1}(C)) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k \cap T^{-k}(C)) \tag{2.15}$$

Ahora, de las ecuaciones 2.12 y 2.15 se obtiene que

$$\mu(T^{-1}(C)) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k \cap T^{-k}(C)) = \mu(T_A^{-1}(C))$$

y puesto que $\mu(C) = \mu(T^{-1}(C))$, entonces resulta que

$$\mu(C) = \mu(T_A^{-1}(C))$$

Por tanto se concluye que T_A es invariante para la medida μ_A. □

2.3.3. Ergodicidad y teoremas ergódicos importantes

Definición 2.3.5 (Transformación ergódica)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Una transformación $T : \Omega \to \Omega$ que preserva la medida μ en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada ergódica si los únicos miembros A de $\mathcal{A}$ con $T^{-1}A = A$ satisfacen $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$.*

Existen varias maneras de indicar la condición de la ergodicidad a como se muestra en el teorema siguiente.

Teorema 2.3.3. *Si $T : \Omega \to \Omega$ es una transformación que preserva medida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es ergódica.*

2. *Los únicos miembros A de $\mathcal{A}$ con $\mu(T^{-1}A \,\Delta\, A) = 0$ son aquellos con $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$.*

3. *Para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) > 0$ tenemos que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.*

4. *Para todo $A, B \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$ existe $n > 0$ con $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.*

Demostración. Ver Walters (2000) para la demostración. □

El primer resultado importante de la teoría ergódica fue demostrado en 1931 por G. D. Birkhoff, a decir, el teorema ergódico de Birkhoff también conocido como teorema ergódico puntual. Será enunciado para una transformación preservadora de la medida en un espacio $\sigma-$finito. Para su demostración se hace uso de los siguientes enunciados.

Definición 2.3.6. *Sea T una transformación preservadora de medida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $f \in L^1(\mu)$, se define:*

1. *El promedio temporal de f en x como*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

si el límite exite.

2. *La fase media o promedio espacial se define como*

$$\int_{\Omega} f(x)\, d\mu$$

Como se verá más adelante, el teorema ergódico (teorema 2.3.5) implica que estos promedios son iguales casi en todas partes para toda $f \in L^1(\mu)$ sí, y solo si T es ergódica.

Definición 2.3.7 (Operador inducido)**.** *Sea $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ un espacio de probabilidad con $i = 1, 2$. Si $T : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una transformación que preserva medida, el operador inducido $U_T : L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \to L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ está definido como $(U_T f)(x) = f(T(x))$ para todo $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $x \in \Omega$, y $\| U_T f \|_1 = \| f \|_1;\ \forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$.*

Teorema 2.3.4 (Teorema ergódico maximal). *Sea* $U : L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *un operador lineal positivo con* $\| U \| \leq 1$. *Sea* $N > 0$ *un número entero y sea* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. *Definamos* $f_0 = 0;\ f_n = f + Uf + U^2 f + \cdots + U^{n-1} f$ *para todo* $n \geq 1$, *y* $F_N = \text{máx}_{0 \leq n \leq N} f_n \geq 0$, *entonces* $\displaystyle\int_{\{x \,:\, F_N(x) > 0\}} f \, d\mu \geq 0$.

Demostración. La prueba se realizó en base a las ideas de Vergaray Albujar (2016). Es claro que $F_N \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ pues el máximo de funciones integrables es integrable. Por otra parte, para cada $0 \leq n \leq N$ se tiene que $F_N \geq f_n$ y dado que U es positivo resulta que $UF_N \geq Uf_n$, así

$$
\begin{aligned}
UF_N + f &\geq Uf_n + f \\
&= U(f + Uf + U^2 f + \cdots + U^{n-1} f) + f \\
&= f + Uf + U^2 f + \cdots + U^n f
\end{aligned}
$$

Así, $UF_N + f \geq f_{n+1}$. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
UF_N(x) + f(x) &\geq \max_{0 \leq n \leq N} f_{n+1}(x) \\
&= \max_{1 \leq n \leq N+1} f_n(x) \\
&\geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n(x)
\end{aligned}
$$

Ahora, por hipótesis se tiene que $F_N(x) \max\limits_{0 \leq n \leq N} f_n(x) \geq 0$ por lo cual, si $F_N(x) > 0$ entonces existe n_0 que toma valores en el conjunto $\{0, 1, \cdots, N\}$ tal que $f_{n_0}(x) > 0 = f_0(x)$, por lo cual

$$
\max_{1 \leq n \leq N} f_n(x) = \max_{0 \leq n \leq N} f_n(x) = F_N(x)
$$

Así,

$$
UF_N(x) + f(x) \geq \max_{0 \leq n \leq N} f_n(x) = F_N(x) \text{ cuando } F_N(x) > 0
$$

De la relación anterior se tiene que

$$f \geq F_N - UF_N \text{ en } A = \{x \,:\, F_N(x) > 0\}$$

Así, dado que f, F_N y UF_N son integrables entonces

$$\int_A f\, d\mu \geq \int_A F_N\, d\mu - \int_A UF_N\, d\mu \tag{2.16}$$

Ahora, dado que $F_N = \max_{0\leq n\leq N} f_n \geq 0$ y $F_N > 0$ en A, entonces $F_N = 0$ en $\Omega - A$ por lo que

$$\begin{aligned}
\int_A F_N\, d\mu - \int_A UF_N\, d\mu &= \int_\Omega F_N\, d\mu + 0 - \int_A UF_N\, d\mu \\
&= \int_\Omega F_N\, d\mu + \int_{\Omega - A} F_N\, d\mu - \int_\Omega UF_N\, d\mu \\
&= \int_\Omega F_N\, d\mu - \int_A UF_N\, d\mu
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\int_A f\, d\mu \geq \int_\Omega F_N\, d\mu - \int_A UF_N\, d\mu \tag{2.17}$$

Por otra parte, dado que $F_N \geq 0$ en Ω y tomando el hecho que U es un operador lineal positivo, entonces $UF_N \geq 0$, de donde se puede afirmar que

$$\int_\Omega UF_N\, d\mu \geq \int_A UF_N\, d\mu \tag{2.18}$$

Luego, relacionando la desigualdad 2.18 con la desigualdad 2.17 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_A f\, d\mu &\geq \int_\Omega F_N\, d\mu - \int_A UF_N\, d\mu \\
&\geq \int_\Omega F_N\, d\mu - \int_\Omega UF_N\, d\mu \\
&\geq \int_\Omega \|F_N\|\, d\mu - \int_\Omega \|UF_N\|\, d\mu \\
&\geq \int_\Omega \|F_N\|\, d\mu - \int_\Omega \|U\|\|F_N\|\, d\mu
\end{aligned}$$

$$\geq \int_\Omega \|F_N\|(1-\|U\|)\,d\mu$$

Ahora, dado que $\|U\| \leq 1$ entonces $0 \leq 1-\|U\|$ y puesto que $\|F_N\| \geq 0$ entonces

$$\int_\Omega \|F_N\|(1-\|U\|)\,d\mu \geq 0$$

Por tanto,

$$\int_{\{x\,:\,F_N(x)>0\}} f\,d\mu \geq 0.$$

□

Corolario 2.3.1. *Sea $T:\Omega\to\Omega$ una transformación que preserva medida. Si $g\in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y $B_\alpha = \big\{x\in\Omega\,:\,\sup\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} g(T^i(x)) > \alpha\big\}$ entonces*

$$\int_{B_\alpha\cap A} g d\mu \geq \alpha\mu(B_\alpha\cap A)$$

si $T^{-1}A = A$ y $\mu(A)<\infty$.

Demostración. La demostración se realizará bajo el supuesto que $\mu(\Omega)<\infty$ y $A=\Omega$. Sea $g=f-\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}
B_\alpha &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,:\,\sum_{i=0}^{n-1} g(T^ix) > n\alpha\right\}\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,:\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(T^ix)\right) - n\alpha > 0\right\}\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,:\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(T^ix) - \alpha\right) > 0\right\}
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $f(T^ix) = g(T^ix)-\alpha$ resulta que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,:\,\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(T^ix) - \alpha\right) > 0\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,:\,\sum_{i=0}^{n-1} f(T^ix) > 0\right\}$$

Por otra parte, dado que para cualquier $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ se cumple que $U(f) = f(T)$ y dado que $f_n = f + U(f) + U^2(f) + \cdots + U^{n-1}(f)$ entonces

$$f_n = f + f(T) + f(T^2) + \cdots + f(T^{n-1}) \tag{2.19}$$

Así, resulta que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \,:\, \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \,:\, f_n(x) > 0 \}$$

pero

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \,:\, f_n(x) > 0 \} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{ x \,:\, F_N(x) > 0 \}$$

Ahora, sea $C_N = \{ x \,|\, F_N(x) > 0 \}$ y observe que $C_N \subseteq C_{N+1}$. Por lo cual

$$\lim_{N \to \infty} \mathcal{X}_{C_N} = \mathcal{X}_{B_\alpha}$$

Así

$$\lim_{N \to \infty} f\, \mathcal{X}_{C_N} = f\, \mathcal{X}_{B_\alpha}$$

y puesto que $|f\, \mathcal{X}_{C_n}| \leq |f|$ donde $|f|$ evidentemente es integrable, entonces por teorema de convergencia dominada (teorema 2.2.4)

$$\int_{C_N} f\, d\mu = \int_{\Omega} f \mathcal{X}_{C_N}\, d\mu \to \int_{\Omega} f \mathcal{X}_{B_\alpha} d\mu = \int_{B_\alpha} f\, d\mu \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Ahora, por teorema 2.3.4 resulta que para todo $N \geq 1$

$$\int_{C_N} f\, d\mu \geq 0$$

Así

$$\int_{B_\alpha} f\, d\mu \geq 0$$

y dado que $f = g - \alpha$, entonces

$$\int_{B_\alpha} (g - \alpha)\, d\mu \geq 0 \Leftrightarrow \int_{B_\alpha} g\, d\mu \geq \int_{B_\alpha} \alpha\, d\mu$$

por tanto,

$$\int_{B_\alpha} g\, d\mu \geq \alpha\mu(B_\alpha).$$

□

Para el caso general se trabaja la restricción de T a A y se aplica el teorema 2.3.4 para obtener

$$\int_{B_\alpha \cap A} g\, d\mu \geq \alpha\mu(B_\alpha \cap A).$$

Teorema 2.3.5 (Teorema ergódico de Birkhoff)**.** *Sea $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ una transformación preservadora de medida y $f \in L^1(\mu)$, entonces $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge casi en todas partes a una función $f^* \in L^1(\mu)$. Además $f^* \circ T = f^*$ casi en todas partes, y si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $\int f^* d\mu = \int f d\mu$.*

Observación 2.3.1.

1. *Si T es ergódica, entonces f^* es constante casi en todas partes, entonces si $\mu(\Omega) < \infty$, $f^* = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int f d\mu$ casi en todas partes.*

2. *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de probabilidad y T es ergódica, se tiene que $\forall f \in L^1(\mu)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f d\mu$ casi en todas partes.*

Demostración. Asumiendo primeramente que $\mu(\Omega) < \infty$. Para la demostración del teorema basta considerar el caso en que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Así, para f sean

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

y

$$f_*(x) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

Ahora, sea

$$a_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x).$$

Observe que $f^* \circ T = f^*$ y $f_* \circ T = f_*$ ya que si

$$a_n(T(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(T(x))) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^{i+1}(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i(x))$$

y puesto que

$$\frac{n+1}{n}a_{n+1}(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{(n+1)-1} f(T^i(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(T^i(x))$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}a_{n+1}(x) - a_n(T(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(T^i(x)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i(x)) \\
&= \frac{1}{n}f(x) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i(x)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^i(x)) \\
&= \frac{1}{n}f(x)
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\frac{n+1}{n}a_{n+1}(x) - a_n(T(x)) = \frac{1}{n}f(x) \tag{2.20}$$

Ahora, tomando el límite superior de la igualdad 2.20, es decir

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}a_{n+1}(x) - a_n(T(x))\right] = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(x) = 0$$

pero

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}a_{n+1}(x) = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}(x) + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_{n+1}(x) = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}(x)$$

por lo cual

$$\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}(x) - \limsup_{n\to\infty} a_n(T(x)) = 0$$

lo cual es equivalente a decir que

$$\limsup_{n\to\infty}\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(T(x))$$

pero

$$\limsup_{n\to\infty} a_n(x) = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}(x)$$

Así,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(T(x))$$

de donde se concluye que $f^* = f^* \circ T$.

Para probar que$f_* = f_* \circ T$ se toma el límite inferior y se realiza un proceso análogo.

1. Ahora, se debe probar que $f^* = f_*$ casi en todas partes y que pertenecen a $L^1(\mu)$.

   Sean α, β números reales para los cuales se define el conjunto

   $$E_{\alpha,\beta} = \{x \in \Omega \,|\, f_*(x) < \beta \text{ y } f^*(x) > \alpha\}$$

   Observe que

   $$\{x \,|\, f_*(x) < f^*(x)\} = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} \{E_{\alpha,\beta} \,|\, \beta < \alpha\} \tag{2.21}$$

   Así, para probar que $f^* = f_*$ casi en todas partes, es suficiente mostrar que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ siempre que $\alpha < \beta$. Dado que $f^* \circ T = f^*$ y $f_* \circ T = f_*$, es decir, T es invariante entonces es claro que $T^{-1}(E_{\alpha,\beta}) = E_{\alpha,\beta}$ y definiendo

   $$B_\alpha = \left\{ x \in \Omega \,|\, \sup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) > \alpha \right\}$$

   entonces

   $$E_{\alpha,\beta} \cap B_\alpha = E_{\alpha,\beta} \tag{2.22}$$

   Luego, del corolario 2.3.1 se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{E_{\alpha,\beta}} f\,d\mu &= \int_{E_{\alpha,\beta}\cap B_\alpha} f\,d\mu \\ &\geq \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}\cap B_\alpha) \\ &= \alpha\mu(E_{\alpha,\beta})\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f\,d\mu \geq \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) \tag{2.23}$$

Ahora, reemplazando f, α y β por $-f$, $-\beta$ y $-\alpha$ respectivamente y usando el hecho que

$$(-f)^* = -f_* \text{ y } (-f)_* = -f^*$$

se obtiene que

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f\,d\mu \leq \beta\mu(E_{\alpha,\beta}) \tag{2.24}$$

Por tanto, de 2.23 y 2.24 se tiene que

$$\alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) \leq \beta\mu(E_{\alpha,\beta}) \tag{2.25}$$

Ahora, dado que $\beta < \alpha$, entonces para que la relación en 2.25 tenga sentido debe ocurrir que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$. Así

$$\mu\left(\bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\\ \beta<\alpha}} E_{\alpha,\beta}\right) = 0$$

Entonces de la igualdad 2.21, se tiene que $\mu(\{x : f_*(x) < f^*(x)\}) = 0$, es decir $f_*(x) = f^*(x)$ casi en todas partes, y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = f^*(x)$$

existe casi en todas partes.

2. Sea $g(x)$ dada por

$$g(x) = \left| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \right|$$

entonces

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |f| \circ T^i \tag{2.26}$$

Luego, tomando el límite en 2.26 resulta que

$$|f^*| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |f| \circ T^i = |f|^*$$

por lo cual

$$|f^*| \leq |f|^* \tag{2.27}$$

Así, por lema de Fatou (lema 2.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\mu &= \int |f^*|\, d\mu \\
&\leq \int |f|^*\, d\mu \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |f \circ T^i|\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n}\int \sum_{i=0}^{n-1} |f \circ T^i|\, d\mu
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} \int \sum_{i=0}^{n-1} |f|\, d\mu \quad \text{Por la invarianza de } T$$

$$= \lim_{n\to\infty} \inf \int |f|\, d\mu$$

$$= \int |f|\, d\mu < \infty$$

Por lo cual, $\int (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\mu = \int |f^*|\, d\mu$, es decir $f^* \in L^1(\mu)$.

3. Resta probar que $\int f\, d\mu = \int f^*\, d\mu$ si $\mu(\Omega) < \infty$. Sean $k \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 1$ para los cuales se define el conjunto

$$D_k^n = \left\{ x \in \Omega \,|\, \frac{k}{n} \leq f^*(x) < \frac{k+1}{n} \right\}$$

Así, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene

$$D_k^n \cap B_{\frac{k}{n}-\varepsilon} = D_k^n$$

Ahora, dado que $T^{-1}(D_k^n) = D_k^n$ entonces por corolario 2.3.1

$$\begin{aligned} \int_{D_k^n} f\, d\mu &= \int_{D_k^n \cap B_{\frac{k}{n}-\varepsilon}} f\, d\mu \\ &\geq \left(\frac{k}{n} - \varepsilon\right) \mu(D_k^n \cap B_{\frac{k}{n}} - \varepsilon) \\ &= \left(\frac{k}{n} - \varepsilon\right) \mu(D_k^n) \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_{D_k^n} f\, d\mu \geq \left(\frac{k}{n} - \varepsilon\right) \mu(D_k^n)$$

y dado que ε es arbitrario se tiene que

$$\int_{D_k^n} f\, d\mu \geq \frac{k}{n}\mu(D_k^n) \tag{2.28}$$

Luego, de acuerdo a como se ha definido D_k^n y de la desigualdad 2.28 resulta que

$$\int_{D_k^n} f^*\, d\mu \leq \frac{k+1}{n}\mu(D_k^n) = \frac{k}{n}\mu(D_k^n) + \frac{1}{n}\mu(D_k^n) \leq \frac{1}{n}\mu(D_k^n) + \int_{D_k^n} f\, d\mu$$

Ahora, dado que Ω pues expresarse como

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k^n$$

donde los D_k^n son disjuntos entre si. Entonces tomando la suma sobre $k \in \mathbb{Z}$, es decir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{D_k^n} f^*\, d\mu \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\mu(D_k^n) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{D_k^n} f\, d\mu$$

se tiene que

$$\int_{\Omega} f^*\, d\mu \leq \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_{\Omega} f\, d\mu.$$

Dado que esto es para todo $n \geq 1$ y puesto que $\mu(\Omega) < \infty$ resulta que

$$\int_{\Omega} f^*\, d\mu \leq \int_{\Omega} f\, d\mu. \tag{2.29}$$

Ahora, aplicando el mismo argumento a $-f$ se tiene que

$$\int_{\Omega} (-f)^*\, d\mu \leq \int_{\Omega} -f\, d\mu$$

por lo cual

$$\int_{\Omega} f_* \, d\mu \geq \int_{\Omega} f \, d\mu \tag{2.30}$$

pero se sabe que $f^* = f_*$, así

$$\int_{\Omega} f^* \, d\mu \geq \int_{\Omega} f \, d\mu \tag{2.31}$$

Por tanto, de las desigualdades 2.29 y 2.31 se tiene que

$$\int_{\Omega} f^* \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

con lo cual finaliza la prueba para $\mu(\Omega) < \infty$.

Para $\mu(\Omega) = \infty$ la prueba anterior es válida si se muestra que $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$ para $\beta < \alpha$, pues esto permite aplicar el corolario 2.3.1.

1. Asumiendo que $\alpha > 0$. Sea $C \in \mathcal{A}$ cualquier conjunto con $C \subset E_{\alpha,\beta}$ y $\mu(C) < \infty$ el cual existe pues Ω es $\sigma-$finito. Entonces la aplicación $h = f - \alpha\, \mathcal{X}_C \in L^1(\mu)$, así por el teorema ergódico maximal (teorema 2.3.4)

$$\int_{\{x\,:\,H_N(x)>0\}} (f - \alpha\mathcal{X}_C)\, d\mu \geq 0 \text{ Para todo } N \geq 1$$

pero se sabe que $C \subset E_{\alpha,\beta} \subset \bigcup_{N=0}^{\infty}\{x \,:\, H_N(x) > 0\}$ por lo cual

$$\int_{\Omega} |f|\, d\mu \geq \alpha\mu(C)$$

Así, $\mu(C) \leq \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\Omega} |f|\, d\mu$ para cada $C \in \mathcal{A}$ con $C \subset E_{\alpha,\beta}$ y $\mu(C) < \infty$. Dado que Ω es $\sigma-$finito se tiene que $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$.

2. Si $\alpha \leq 0$ entonces $\beta < 0$. Aplicando el proceso anterior con $-f$ y $-\beta$ en lugar de f y α se tiene que $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$.

De esta forma finaliza la prueba del teorema. $\square$

2.3.4. Topología débil estrella en $M_1(\Omega)$ y medidas invariantes

En esta subsección Ω será un espacio métrico. El objetivo es definir la topología débil estrella en el conjunto $M_1(\Omega)$ de medidas borelianas de probabilidad en Ω y enunciar algunos resultados importantes cuando se asume la topología débil estrella en $M_1(\Omega)$.

Dada una medida $\mu \in M_1(\Omega)$ y un conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ de funciones continuas acotadas $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ y un número $\varepsilon > 0$, se define el siguiente conjunto:

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ v \in M_1(\Omega) \;:\; \left| \int \phi_i dv - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon, \text{ para todo } i \right\}$$

Observe que la intersección de dos conjuntos arbitrarios que tengan la estructura anterior contiene algún conjunto de la misma forma. Esto asegura que la colección $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon) \,:\, \Phi, \varepsilon\}$ puede ser tomada como una base de vecindades de cada $\mu \in M_1(\Omega)$.

Definición 2.3.8 (Topología débil estrella de $M_1(\Omega)$)**.** *La topología débil estrella de $M_1(\Omega)$ es la topología definida por las bases de vecindades $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon) \,:\, \Phi, \varepsilon\}$.*

Es decir, los abiertos de la topología débil estrella son los conjunto $A \subset M_1(\Omega)$ tal que para todo elemento $\mu \in A$ existe algún $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ contenido en A.

Observación 2.3.2. *La topología débil estrella definida en $M_1(\Omega)$ apenas depende de la topología de Ω y no de su distancia. La topología es de Hausdorff ya que dadas dos medidas de probabilidad μ y v distintas, entonces por proposición A.1.3, existe un $\varepsilon > 0$ y alguna función continua acotada $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $V(\mu, \{\phi\}, \varepsilon) \cap V(v, \{\phi\}, \varepsilon) = \emptyset$.*

Lema 2.3.1. *Una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para una medida $\mu \in M_1(\Omega)$ sí, y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi \, d\mu_n = \int \phi \, d\mu \text{ para toda función continua acotada } \phi : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea ϕ una función continua acotada y sea el conjunto $\Phi = \{\phi\}$. Por hipótesis $(\mu_n)_n \to \mu$, así para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\overline{n}$ tal que $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ para todo $n \geq \overline{n}$. Pero esto significa que

$$\left|\int \phi\, d\mu_n - \int \phi\, d\mu\right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq \overline{n}.$$

Por lo cual, la sucesión $(\int \phi\, d\mu_n)_n$ converge a $\int \phi\, d\mu$.

Recíprocamente, sea ϕ un función continua acotada para la cual la sucesión $(\int \phi\, d\mu_n)_n$ converge a $\int \phi\, d\mu$. Se quiere probar que, dado cualquier conjunto Φ y $\varepsilon > 0$ existe un $\overline{n}$ tal que para todo $n \geq \overline{n}$ se cumple que $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$. Para verificar esto, sea $\Phi = \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$. La hipótesis garantiza que para cada i existe un $\overline{n}_i$ tal que

$$\left|\int \phi_i\, d\mu_n - \int \phi_i\, d\mu\right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq \overline{n}_i.$$

Tomando $\overline{n} = \text{máx}\{\overline{n}_1, \cdots, \overline{n}_N\}$, entonces $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ para todo $n \geq \overline{n}_i$. □

Proposición 2.3.3. *Sea Ω un espacio métrico compacto. Entonces, toda sucesión $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $M_1(\Omega)$ admite alguna subsucesión que es convergente en la topología débil estrella.*

Demostración. Consulte Oliveira y Viana (2014) para la demostración. □

Ahora, dada el espacio compacto Ω. Sea $T : \Omega \to \Omega$ una función continua y μ cualquier mediada en Ω, la aplicación T induce una aplicación $T_* : M_1(\Omega) \to M_1(\Omega)$ definida por

$$T_*(\mu)(B) = \mu(T^{-1}B) \text{ para cualquier conjunto medible } B \subset \Omega$$

La medida $T_*\mu$ es llamada iteración o imagen de μ mediante T. Observe que la medida μ es invariante por T sí, y solo si $T_*\mu = \mu$.

Lema 2.3.2. *Sea μ una medida y ϕ una función medible acotada. Entonces*

$$\int \phi\, dT_*\mu = \int \phi \circ T\, d\mu$$

Demostración. La demostración es sencilla, véase en Oliveira y Viana (2014). □

Proposición 2.3.4. *La aplicación $T_* : M_1(\Omega) \to M_1(\Omega)$ es continua sobre la topología débil estrella de $M_1(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\Phi = \{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ cualquier familia de funciones continuas acotadas. Puesto que T es continua, y dado que la composición de funciones continuas es continua, entonces la familia de funciones $\Psi = \{\phi_1 \circ T, \cdots, \phi_n \circ T\}$ consiste de funciones continuas acotadas, así por lema 2.3.2 se tiene que

$$\left| \int \phi_i \, d(T_*\mu) - \int \phi_i \, d(T_*v) \right| = \left| \int (\phi_i \circ T) \, d\mu - \int (\phi_i \circ T) \, dv \right| \tag{2.32}$$

y por tanto el miembro izquierdo de la igualdad en 2.32 es menor que ε siempre que el lado derecho sea menor que ε. Esto significa que

$$T_*(V(\mu, \Psi, \varepsilon)) \subset V(T_*\mu, \Phi, \varepsilon) \text{ para todo } \mu, \ \Phi \text{ y } \varepsilon$$

así, de la contención anterior se infiere que T_* es continua. □

Ahora, dado que cualquier punto $x \in \Omega$ define la medida delta de Dirac δ_x, entonces se tiene que $T_*\delta_x = \delta_{T(x)}$ para todo $x \in \Omega$. Para ver esto, sea $B \subset \Omega$ cualquier conjunto medible, y de acuerdo a como se ha definido T_* se tiene que

$$(T_*\delta_x)(B) = \delta_x(T^{-1}B) = \delta_{T(x)}(B)$$

Por lo cual, la imagen de la medida δ_x mediante T^n están dadas por

$$T^n\delta_x = T_*^n\delta_x = \delta_{T^n(x)}$$

Sea v cualquier medida de probabilidad en Ω, por ejemplo la medida de Dirac en cualquier punto $x \in \Omega$. Entonces se define la sucesión de probabilidades

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j v \tag{2.33}$$

Por proposición 2.3.3, la medida 2.33 posee algún punto de acumulación, es decir, existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y alguna probabilidad $\mu \in M_1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j v = \mu$$

en la topología débil estrella de $M_1(\Omega)$. Así tiene lugar el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Todo punto de acumulación de un sucesión* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *del tipo 2.33 es una probabilidad invariante para* T*.*

Demostración. Dada una la sucesión de medidas de probabilidad $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene la forma de 2.33 en $M_1(\Omega)$, por proposición 2.3.3 existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y alguna probabilidad $\mu \in M_1(\Omega)$ para la cual

$$\lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j v = \mu$$

Ahora, dada la aplicación T_*, entonces por proposición 2.3.4 se cumple que

$$\begin{aligned} T_*\mu &= T_*\left(\lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j v\right) \\ &= \lim_k T_*\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j v\right) \\ &= \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^{j+1} v \\ &= \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} T_*^j v \end{aligned}$$

Así,

$$T_*\mu = \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} T_*^j v \tag{2.34}$$

Luego, para probar el lema basta demostrar que $T_*\mu = \mu$. Puesto que la subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil estrella a μ, entonces por lema 2.3.1 existe una familia $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$ de funciones continuas acotadas y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\int \phi_i \, d\mu_{n_k} - \int \phi \, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pero

$$\begin{aligned}\left|\int \phi_i \, d\mu_{n_k} - \int \phi \, d\mu\right| &= \left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int \phi_i \, dT_*^j v - \int \phi \, d\mu\right| \\ &= \left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv - \int \phi \, d\mu\right|\end{aligned}$$

por lo que

$$\left|\frac{1}{n_k}\int \sum_{j=0}^{n_k-1}(\phi_i \circ T^j) \, dv - \int \phi \, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.35}$$

Por otra parte, observe que

$$\left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv - \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv\right|$$

es igual a

$$\frac{1}{n_k}\left|\left(\int (\phi_i \circ T^0) \, dv + \sum_{j=1}^{n_k-1}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv\right) - \left(\sum_{j=1}^{n_k-1}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv + \int (\phi_i \circ T^{n_k}) \, dv\right)\right|$$

por lo que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv - \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k}\int (\phi_i \circ T^j) \, dv\right| &= \frac{1}{n_k}\left|\int \phi_i \, dv - \int (\phi_i \circ T^{n_k}) \, dv\right| \\ &\leq \frac{1}{n_k}\left|\int \phi_i \, dv\right| + \frac{1}{n_k}\left|\int (\phi_i \circ T^{n_k}) \, dv\right| \\ &\leq \frac{1}{n_k}\sup|\phi_i| + \frac{1}{n_k}\sup|\phi_i| \\ &= \frac{2}{n_k}\sup|\phi_i|\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\lim_k \frac{2}{n_k}\sup|\phi_i| \to 0$, entonces $\frac{2}{n_k}\sup|\phi_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo i y para todo k suficientemente grande. Así

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv - \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.36}$$

Luego,de las relaciones en 2.35 y 2.36 y de la desigualdad triangular se tiene que

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv - \int \phi_i\, d\mu \right|$$

es menor o igual que

$$\left| \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv - \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv \right) + \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv - \int \phi_i\, d\mu \right) \right|$$

en consecuencia

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ T^j)\, dv - \int \phi_i\, d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo cual

$$\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} T_*^j v = \mu \tag{2.37}$$

Así, de los límites en 2.34 y 2.37, y por unicidad de límite se verifica que $T_*\mu = \mu$. $\square$

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de estudio

Esta investigación es de enfoque cualitativo de carácter descriptivo, debido a que los datos recopilados son no numéricos y tiene como objetivo caracterizar y describir los conceptos, teoremas, lemas, corolarios y demás teoría matemática relacionada con las demostración del lema de Kac y prueba del teorema de Szemerédi a través de elementos propios de la teoría ergódica, pero también es de carácter documental ya que la investigación se desarrolla mediante la información obtenida de la documentación.

3.2. Fuente de información

En este estudio, dentro de las fuente de información no existen fuentes primarias debido a que no se trabajó con los primeros artículos y documentos formulados y publicados originalmente.

3.2.1. Fuentes secundaria

Entre las fuentes secundarias encontradas durante la recopilación de información están:

1. Pósteres.

2. Artículos científicos.

3. Monografías y tesis.

4. Libros.

3.3. Procedimiento de recolección de información

La recolección de información se llevó acabo en el periodo comprendido de febrero de 2022 a julio del mismo año de la siguiente manera:

Inicialmente se hizo una exploración global para conocer sobre la bibliografía existente acerca del tema de estudio, por lo cual se consultaron repositorios institucionales (RIUL y RIUMA), Repositorio del CNU-Nicaragua y el Repositorio regional SIIDCA-CSUCA, además se consultaron bases de datos, foros de investigación matemática y revistas de carácter científico.

Seguidamente se procedió a la depuración y selección de la bibliografía, esto con el objetivo de contar con la información concreta que permitiera desarrollar la investigación.

La información seleccionada se clasificó en los siguientes grupos:

1. Antecedentes históricos y de investigación.

2. Fundamentos de análisis matemático, topología y análisis funcional.

3. Teoría de la medida e integración.

4. Teoría ergódica.

5. Sistemas dinámicos y combinatoria aditiva.

3.4. Plan de análisis

Revisada y seleccionada la información, se dispuso a la estructuración del plan de investigación y seguidamente se elaboró el documento final, en ambos se ordenaron de manera coherente y adecuada las definiciones, teoremas, corolarios, lemas y demás enunciados para poder obtener los resultado correspondientes sobre la relación y aplicación teórica que tiene la teoría ergódica en los sistemas dinámicos discretos y la combinatoria aditiva.

El documento final se diseñó de forma estratégica ordenando los capítulos, secciones y subsección de manera que la relación y complementación entre diferentes teorías queda expuesta sin traslapar información de un área a otra a menos de ser necesario. El nivel de dificultad del marco teórico es progresivo a medida que se avanza pero cada sección se complementa con las anteriores y el apartado de anexos.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Aplicaciones de la teoría ergódica

4.1.1. Sistemas dinámicos discretos

Los sistemas dinámicos son el estudio del comportamiento a largo plazo de los sistemas en evolución. La teoría moderna de los sistemas dinámicos se originó a finales del siglo XIX con preguntas fundamentales sobre el estudio de la estabilidad y la evolución del sistema solar. (Brin y Stuck, 2002)

Sin embargo, los problemas de la dinámica han fascinado a la comunidad científica durante cientos de años, los más notables son los de la dinámica celéste los cuales consisten en el estudio del movimiento de los cuerpos dentro del sistema solar. De esta forma surgió el planteamiento de modelos de problemas dinámicos como ecuaciones diferenciales. A pesar que dichas ecuaciones parecían muy simples, estas ocuparon las mentes de los mejores matemáticos de los siglos XVIII y XIX para los cuales la herramienta indiscutible para el tratamiento de los problemas dinámicos era el análisis, sin embargo debido a los errores en los trabajos de Poincaré, este fucionó el análisis con la geometría para desarrollar un nuevo punto de vista cualitativo para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de esta forma surgió lo que actualmente se conoce como sistemas dinámicos. (Lacomba, 2000)

Por otra parte, desde los trabajos de Poincaré, cuando se toman secciones transversales a ciertas soluciones, generalmente periódicas, de una ecuación diferencial ordinaria con el objetivo de estudiar el comportamiento de las órbitas vecinas, aparece otro tipo de sistema dinámico, llamado sistema dinámico discreto que consiste en el estudio cualitativo de las ecuaciones en diferencias o iteración de aplicaciones. Estas tienen muchas aplicaciones en áreas como física, biología, meteorología, astronomía, economía, etcétera. (Lacomba, 2000)

Definición 4.1.1 (Sistema dinámico)**.** *Un sistema dinámico es un par* (Ω, T) *donde* Ω *es un espacio con cierta estructura, denominado tradicionalmente como espacio de fase y una dinámica (función)* $T : \Omega \to \Omega$*.*

Por ejemplo, (Ω, T) podría ser un espacio de medida y una transformación que preservaría la medida; un espacio topológico y una función continua o un espacio métrico y una isometría. Brin y Stuck (2002)

Definición 4.1.2 (Sistema dinámico discreto)**.** *Un sistema dinámico a tiempo discreto consiste en un espacio* Ω *y una transformación* $T : \Omega \to \Omega$ *para la cual la* $n-$*ésima iteración de* T *con* $n \in \mathbb{N}$*, está dada por* $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$*.*

Se define T^0 como la función identidad usualmente denotada por I_d; si T es invertible entonces $T^{-n} = T^{-1} \circ T^{-1} \circ \cdots \circ T^{-1}$ n veces. Además $T^{n+m} = T^n \circ T^m$, esta propiedad algebraica se llama propiedad de grupo, lo cual significa que, si estas iteraciones son invertibles forman un grupo, y un semigrupo en caso contrario.

Definición 4.1.3 (Sistema dinámico continuo)**.** *Un sistema dinámico a tiempo continuo consiste en un espacio* Ω *y una familia de mapas de un parámetro de* $\{T^n : \Omega \to \Omega\}$*, con* $n \in \mathbb{R}$ *ó* $n \in \mathbb{R}_0^+$*, que forma un grupo o semigrupo, es decir* $T^{n+m} = T^n \circ T^m$ *y* $T^0 = I_d$

Definición 4.1.4 (Semiorbita positiva)**.** *Para un elemento* $x \in \Omega$ *definimos la semiorbita positiva de* x *por* $\mathcal{O}_T^+(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n(x)$

Definición 4.1.5 (Semiorbita negativa). *Para* $x \in \Omega$ *definimos la semiorbita negativa de* x *por* $\mathcal{O}_T^-(x) = \bigcup_{n \leq 0} T^n(x)$

Definición 4.1.6 (Órbita). *La órbita de un punto* $x \in \Omega$ *mediante* T *se define como*

$$\mathcal{O}_T^+(x) \cup \mathcal{O}_T^-(x) = \bigcup_n T^n(x)$$

Definición 4.1.7 (Punto periódico). *Un punto* $x \in \Omega$ *es un punto periódico de periodo* $R > 0$ *si* $T^R(x) = x$*. La órbita de un punto periódico es llamada órbita periódica.*

Definición 4.1.8 (Periodo mínimo). *Si* x *es un punto periódico, pero no un punto fijo, al mínimo número positivo* R *tal que* $T^R(x) = x$ *se le llama periodo mínimo de* x*.*

Definición 4.1.9 (Punto eventualmente periódico). *Si* $f^s(x)$ *es periódico para algún* $s > 0$*, se dice que* x *es eventualmente periódico.*

Definición 4.1.10 (Sistema preservador de medida). *Si* T *es una transformación que preserva medida en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, llamamos sistema preservador de medida a la cuádrupla* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$*.*

Proposición 4.1.1. *Si* T *es ergódica en* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, entonces* T_A *es ergódica en* $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu_A)$*.*

Demostración. Sea C un conjunto medible en $\mathcal{A} \cap A$ tal que $T_A^{-1}(C) = C$. Se debe probar que $\mu_A(C) = 0$ ó 1, pero dado que $\mu_A(C) = \mu_A(T^{-1}(C))$ es decir

$$\frac{\mu(C)}{\mu(A)} = \frac{\mu(T_A^{-1}(C))}{\mu(A)}$$

entonces, probar lo anterior es equivalente a probar que $\mu(C) = 0$ o que $\mu(C) = \mu(A)$. Así, sean los conjuntos

$$E_k = \{x \in A \,|\, n_A(x) = k\}$$

$$E_k^* = \{x \in \Omega - A \,|\, T(x), \cdots, T^{k-1}(x) \notin A, \, T^k(x) \in A\}$$

Ahora, puesto que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ entonces se tiene que

$$C = T_A^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \cap T^{-k}(C)).$$

Por otra parte, sean los conjuntos

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k^* \cap T^{-k}(C)) \tag{4.1}$$

y

$$G = F \cup C \tag{4.2}$$

Note que la unión de F y C es disjunta. Ahora, puesto que

$$T^{-1}(A) = E_1 \cup E_1^* \tag{4.3}$$

y

$$T^{-1}(E_k^*) = E_{k+1} \cup E_{k+1}^* \tag{4.4}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} T^{-1}(G) &= T^{-1}(F) \cup T^{-1}(C) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}((E_{k+1} \cup E_{k+1}^*) \cap T^{-(k+1)}(C)) \cup ((E_1 \cup E_1^*) \cap T^{-1}(C)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k \cap T^{-k}(C)) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k^* \cap T^{-k}(C)) \\ &= C \cup F \\ &= G \end{aligned}$$

entonces G es un conjunto invariante bajo T. Ahora, dado que T es ergódica entonces se tienen los siguientes casos:

1. Si $\mu(G) = 0$, entonces $\mu(F \cup C) = 0$ por lo cual $\mu(C) = 0$ de lo cual resulta que $\mu_A(C) = 0$.

2. Si $\mu(G) = 1$, se tiene que $\mu(X - G) = 0$ y dado que

$$X - G = (A - C) \cup ((X - A) - F) \supseteq A - C$$

así,

$$0 = \mu(X - G) \geq \mu(A - C)$$

por lo que $\mu(A - C) = 0$, o equivalentemente $\mu(A) = \mu(C)$ de donde se deduce que $\mu_A(C) = 1$.

Por tanto, la transformación T_A es ergódica. □

En este punto, es importante recordar que en presencia de medidas invariantes el teorema 2.3.2 es aplicable, es decir, garantiza que la recurrencia ocurre en casi todas partes lo cual aporta información cualitativa, sin embargo una necesidad natural es conocer resultados cuantitativos sobre la recurrencia del sistema.

En 1947 el matemático polaco$-$estadounidense Mark Kac $(1914 - 1984)$ estableció una expresión para dar respuesta a la necesidad de conocer el tiempo de retorno. Tal estimación cuantitativa ha sido una herramienta muy útil en el estudio de otras propiedades de recurrencia. (Varandas, 2016)

El enunciado que permite conocer el tiempo de retorno de un sistema, se enuncia en el siguiente lema llamado lema de Kac en honor a Mark Kac.

Lema 4.1.1 (Lema de Kac)**.** *Sea T una transformación ergódica preservadora de medida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sea A un subconjunto medible de Ω tal que $\mu(A) > 0$, y sea $n(x)$ la función de primer tiempo de retorno dada en la definición 2.3.3 y sea T_A la transformación inducida de T en A, entonces*

$$\int_A n_A d\mu = 1$$

de donde se tiene que $n_A \in L^1(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_A)$ *y que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} n_A \left(T_A^i(x)\right) = \frac{1}{\mu(A)}$$

casi en todas partes sobre el conjunto A*.*

Demostración. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sea T un transformación ergódica y $A \subset \Omega$ un subconjunto tal que $\mu(A) > 0$.

Para cada $n \geq 1$ sean los conjuntos

- $E_n = \{x \in A \,:\, T(x) \notin A, \ldots, T^{n-1}(x) \notin A, T^n(x) \in A\}$
- $E_n^* = \{x \in \Omega \,:\, x \notin A, T(x) \notin A, \ldots, T^{n-1}(x) \notin A, T^n(x) \in A\}$

Así, por definición de función de primer retorno, E_n es el conjunto de todos los puntos $x \in A$ que retornan por primera vez a A exactamente en el momento n, es decir

$$E_n = \{x \in A \,:\, n_A(x) = n\}$$

De manera similar, E_n^* es el conjunto de todos los puntos $x \notin A$ que entran por primera vez a A exactamente en el momento n.

Es claro que estos conjuntos son medibles ya que A es medible y por consecuencia A^c también es medible. Ahora, dado que T es medible, entonces $T^{-1}(A^c)$ es medible. Así, por definición de antiimagen se tiene que

$$E_n = A \cap T^{-1}(A^c) \cap T^{-2}(A^c) \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}(A^c) \cap T^{-n}(A)$$

Luego, E_n es la intersección finita de conjunto medibles, por lo cual E_n es medible y en consecuencia $n_A : A \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es medible. Un argumento similiar se usa para probar que E_n^* es medible.

Por otra parte, de acuerdo a como se han definido los E_n y E_n^* para $n \geq 0$, estos conjuntos son disjuntos dos a dos y su unión es Ω. Luego

$$
\begin{aligned}
\Omega = \bigcup_{n\geq 0}(E_n \cup E_n^*) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n \cup E_n^*) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\mu(E_n) + \mu(E_n^*)) \\
&= \mu(E_0) + \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E_n) + \mu(E_n^*))
\end{aligned}
$$

Ahora, de acuerdo a como se definió el conjunto E_0, por el teorema de recurrencia de Poincaré (teorema 2.3.2), se tiene que $\mu(E_0) = 0$, así

$$
\mu(\Omega) = \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E_n) + \mu(E_n^*)) \tag{4.5}
$$

Ahora, observe que

$$
T^{-1}(E_n^*) = E_{n+1}^* \cup E_{n+1} \text{ para todo } n. \tag{4.6}
$$

Para ello, considere un punto y tal que $y \in T^{-1}(E_n^*)$, luego por definición de imagen $T(y) \in E_n^*$, así por definición de E_n^*, la primera iteración de $T(y)$ que está en A es $T^n(T(y)) = T^{n+1}(y)$, pero esto ocurre sí, y solo si y pertenece a cualquiera de los siguientes conjuntos

$$
E_{n+1}^* = \{x \notin A : x \notin A,\ T(x) \notin A,\ \ldots,\ T^{n-1}(x) \notin A,\ T^n(x) \notin A,\ T^{n+1}(x) \in A\}
$$

$$
E_{n+1} = \{x \in A : T(x) \notin A,\ \ldots,\ T^{n-1}(x) \notin A,\ T^n(x) \notin A,\ T^{n+1}(x) \in A\}
$$

Con lo cual se prueba la igualdad 4.6. Ahora, dada la invarianza de la transformación T se tiene que

$$
\mu(E_n^*) = \mu(T^{-1}(E_n^*)) \text{ para todo } n
$$

y de la igualdad 4.6 resulta que

$$\begin{aligned}
\mu(E_n^*) &= \mu(T^{-1}(E_n^*)) \\
&= \mu(E_{n+1}^* + E_{n+1}) \\
&= \mu(E_{n+1}^*) + \mu(E_{n+1})
\end{aligned}$$

Así,

$$\mu(E_n^*) = \mu(E_{n+1}^*) + \mu(E_{n+1}) \text{ para todo } n \tag{4.7}$$

Ahora, iterando la relación 4.7 repetidamente, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mu(E_n^*) &= \mu(E_{n+1}^*) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(T^{-1}(E_{n+1}^*)) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(E_{n+2}^*) + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(T^{-1}(E_{n+2}^*)) + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(E_{n+3}^*) + \mu(E_{n+3}) + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1}) \\
\vdots & \qquad\qquad \vdots \\
&= \mu(E_{m-1}^*) + \mu(E_{m-1}) + \ldots + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(T^{-1}(E_{m-1}^*)) + \mu(E_{m-1}) + \ldots + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1}) \\
&= \mu(E_m^*) + \mu(E_m) + \mu(E_{m-1}) + \ldots + \mu(E_{n+2}) + \mu(E_{n+1})
\end{aligned}$$

$$= \quad \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \text{ para todo } m > n$$

Es decir,

$$\mu(E_n^*) = \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \text{ para todo } m > n \tag{4.8}$$

Por otra parte, al sustituir 4.8 en 4.5 se tiene

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &= \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(E_n) + \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \right) \\ &= \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_m^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(E_n) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \right) \end{aligned}$$

Ahora, se sabe que $\mu(\Omega)$ es finita, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_m^*)$ es una suma infinita de $\mu(E_m^*)$, por lo cual para que la igualdad anterior tenga sentido debe ocurrir que $\mu(E_m^*) = 0$ cuando $m \to \infty$. Por tanto, tomando el límite cuando $m \to \infty$ en la igualdad 4.8 resulta

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \mu(E_n^*) &= \lim_{m\to\infty} \left(\mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \mu(E_m^*) + \lim_{m\to\infty} \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i) \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\mu(E_n^*) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{4.9}$$

Así, de la igualdad 4.9 resulta que

$$\mu(\Omega) \quad = \quad \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(E_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i) \right)$$

$$= \quad \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\mu(E_i)\right)$$

Ahora, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\mu(E_i)\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) + \sum_{i=2}^{\infty}\mu(E_i) + \sum_{i=3}^{\infty}\mu(E_i) + \cdots \\
&= (\mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots) + (\mu(E_2) + \mu(E_3) + \cdots) + \cdots \\
&= \mu(E_1) + 2\mu(E_2) + 3\mu(E_3) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)
\end{aligned}$$

Así,

$$\mu(\Omega) = \mu(E_0^*) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)$$

Luego, se obtiene que

$$\mu(\Omega) - \mu(E_0^*) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) = \int_A n_A \, d\mu$$

Por lo cual

$$\mu(\Omega) - \mu(E_0^*) = \int_A n_A \, d\mu. \tag{4.10}$$

Ahora se probará que $\mu(E_0^*) = 0$, para ello, considere los conjuntos

$$E_0^* = \{x \in \Omega \, : \, T^n(x) \notin A, \forall n \geq 0\}$$

$$(E_0^*)^c = \{x \in \Omega \, : \, T^n(x) \in A, \forall n \geq 1\}$$

Así, observe que

$$E_0^* = T^{-1}(A^c) \cap T^{-2}(A^c) \cap \cdots \cap T^{-n}(A^c) \cap \cdots$$

Por lo cual, E_0^* es la intersección de conjuntos medibles y por tanto es medible, así $(E_0^*)^c$ es medible. Luego,

$$(E_0^*)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A^c)\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(T^{-n}(A^c))^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$$

Ahora, dado que T es ergódica, entonces por teorema 2.3.3 ($1 \Rightarrow 3$) se tiene que

$$\mu((E_0^*)^c) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$$

y en consecuencia se debe cumplir que $\mu(E_0^*) = 0$. Así, de 4.10 y del hecho que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de probabilidad resulta que

$$\int_A n_A \, d\mu = 1 \tag{4.11}$$

Por lo cual n_A es integrable, entonces se sigue que $n_A \in L^1(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_A)$ y por proposición 2.3.2, la transformación T_A es μ_A-invariante, entonces por el teorema ergódico de Birkhoff (teorema 2.3.5) existe una función $\tilde{f}$ en $L^1(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_A)$ para la cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} n(T_A^i x) = \tilde{f} \tag{4.12}$$

Ahora, dado que T es ergódica en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, por proposición 4.1.1, T_A es ergódica en $(A, \mathcal{A} \cap A, \mu_A)$ y puesto que $\mu(A) < \infty$ entonces de la observación 2.3.1 del teorema ergódico de Birkhoff (teorema 2.3.5) resulta que

$$\tilde{f} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A n_A \, d\mu \tag{4.13}$$

por lo cual, de las igualdades 4.12 y 4.13 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} n(T_A^i x) = \tilde{f} = \frac{1}{\mu(A)} \int_A n_A \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)}$$

De donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} n(T_A^i x) = \frac{1}{\mu(A)}$$

□

Así, el Lema de Kac establece que, el tiempo medio de retorno de un punto de A, es inversamente proporcional al tamaño del conjunto A, es decir, es igual a $\frac{1}{\mu(A)}$.

Ahora, regresando al ejemplo 2.3.1. Para dar una respuesta a la paradoja, es necesario recurrir a cálculos aproximados que se realizan con el tiempo de recurrencia, aquí entra en juego el lema 4.1.1. De acuerdo a estimaciones sobre el primer tiempo medio de retorno, este es finito pero excesivamente grande, de hecho se estima en $2^{10^{23}}$ años, lo cual es mayor que la edad del universo, de esto hecho se sabe que no existe contradicción y solo hay que esperar una cantidad de tiempo extremadamenta grande pero finita.

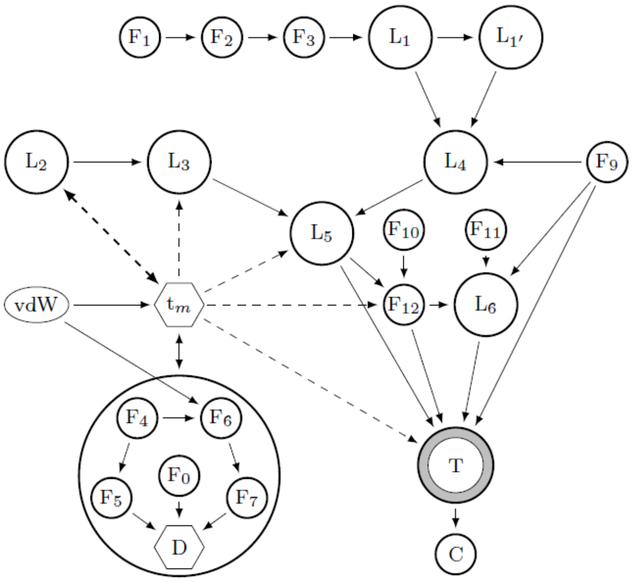
4.1.2. Combinatoria aditiva

La combinatoria aditiva es una rama de las matemáticas que se encuentra en la intersección de la combinatoria, teoría de números, análisis de Fourier y teoría ergódica. Los objetos de estudio dentro de la combinatoria aditiva son los subconjuntos de los enteros o de otros grupos abelianos más generales en los cuales interesan las propiedades y patrones que pueden expresarse mendiante sumas y múltiplicación. (Trevisan, 2009)

Un resultado bastante interesante dentro de la combinatoria aditiva formulado en 1936 por los matemáticos húngaros Paul Erdös $(1913-1996)$ y Pál Turán $(1910-1976)$ fué la conjetura de Erdös$-$Turán la cual propone que, la existencia de progresiones aritméticas de una longitud dada k en un subconjunto de los enteros está garantizada por razones de densidad. Este fué un problema sin solución hasta que en 1953 Klaus Roth $(1925-2015)$ obtuvo el primer resultado alentador sobre la conjetura de Erdös$-$Turán para el caso en que las progresiones aritméticas tienen longitud k igual a tres y sucesivamente en 1969 el matemático húngaro Endre Szemerédi extendió el teorema de Roth para progresiones de longitud cuatro utilizando métodos combinatorios. (Lugosi y Serra, 2012)

A pesar de las demostraciones para progresiones de longitud tres y cuatro, el caso general seguía siendo un problema sin una prueba concreta, hasta que en 1975 nuevamente Endre Szemerédi en una sesión abordada en el *Collaque de Théorie de Graphes et Combinatoire* en Marseille, Francia presentó la demostración de la conjetura de Erdös$-$Turán para progresiones aritméticas de longitud arbitraria. (Lugosi y Serra, 2012)

Figura 4.1: Flujo del teorema de Szemerédi en combinatoria aditiva, donde $K_k \equiv$ Hecho k, $L_k \equiv$ Lema k, $T \equiv$ Teorema, $C \equiv$ Corolario, $D \equiv$ Definiciones B, S, P, α, β, etc, $t_m \equiv$ Definición de t_m, $vdW \equiv$ Teorema de Van der Waerden, $F_0 \equiv$ Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es subaditiva, entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n}$.



Fuente: Tomada de “Endre Szemerédi, Premio Abel 2012”, El Diablo de los Números (p. 541), 2012, La Gaceta de la RSME Vol. 15 (2012), Núm. 3, Págs. 537–559.

La demostración brindada por Szemerédi utiliza métodos de la combinatoria bastantes complejos, el flujo de la demostración puede verse en la figura 4.1. Probablemente la complejidad de la demostración impulsó a muchos matemáticos a buscar una nueva forma de probar el teorema utilizando métodos diferentes a los de la combinatoria. De forma extravagante el matemático israelí Hillel Furstenberg proporcionó una brillante demostración utilizando métodos de la teoría ergódica, además mediante el principio de correspondencia el cual lleva su nombre estableció que teorema de Szemerédi es equivalente al teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg.

La demostración del teorema de Szemerédi mediante métodos combinatorios se encuentra en el artículo Szemerédi (1975) y la prueba formulada por Furstenberg haciendo uso de métodos ergódicos puede verse en Furstenberg (1977).

Definición 4.1.11 (Progresión aritmética)**.** *Una progresión aritmética finita es una sucesión de la forma*

$$m+n, m+2n, \ldots, m+qn \text{ con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n, q \geq 1$$

el número q es llamado longitud de la progresión.

Definición 4.1.12 (Densidad superior de Banach)**.** *Dado un subconjunto A de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$, la densidad superior de Banach de A, denotada por $\overline{d}_B(A)$, es*

$$\overline{d}_B(A) = \lim_{|I|\to\infty} \sup \frac{|A \cap I|}{|I|}$$

donde I abarca intervalos de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$. Es decir, para alguna sucesión de intervalos $\{I_k\}$ con $I_k = (a_k, b_k)$, $b_k - a_k \to \infty$ se tiene

$$\lim_{|I_k|\to\infty} \frac{|A \cap I_k|}{|I_k|} = \overline{d}_B(A)$$

y para cualquier otra sucesión con $|I_k| \to \infty$

$$\lim_{|I_k|\to\infty} \sup \frac{|A \cap I_k|}{|I_k|} \leq \overline{d}_B(A).$$

La densidad inferior de Banach se define de forma similar intercambiando el $\sup$ por $\inf$ en la definición anterior.

Definición 4.1.13 (Conjunto de funciones continuas)**.** *Dado un espacio de Hausdorff X, denotamos por $C(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{K}$, esto es:*

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ es continua}\}$$

Definición 4.1.14. *Sea X un espacio de Hausdorff y sea $C_b(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $\| f \| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$, esto decir,*

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ es continua y } \| f \| < \infty\}$$

Observación 4.1.1. *El conjunto $C_b(X)$ con*

1. $(f + g) : X \to \mathbb{K}$ *mediante*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para todo } f, g \in C_b(X)$$

2. *Para $\alpha \in \mathbb{K}$, y $x \in X$, definimos $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$*

es un espacio de Banach.

Definición 4.1.15. *Sea X un espacio de Hausdorff, definimos el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{K}$ que sea anulan en el infinito por $C_0(X)$.*

Observación 4.1.2. *Si $X = \mathbb{R}$, entonces $C_0(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tal que*

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ es continua y } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\}$$

Observación 4.1.3. *Si X es un espacio compacto de Hausdorff, se cumple que*

$$C_0(X) = C_b(X) = C(X)$$

Definición 4.1.16. *Llamamos carga en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ a toda función $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, +\infty]$, numerablemente aditiva y tal que $\mu(\emptyset) = 0$.*

Proposición 4.1.2. *Sea X un espacio topológico, y $\mathcal{X}_A$ la función característica de $A \subset X$. Entonces $\mathcal{X}_A$ es continua sí, y solo si A es abierto y cerrado.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Suponga $\mathcal{X}_A$ una función continua. Observe que $\mathcal{X}_A : A \to \{0, 1\}$ es una aplicación continua entre espacios topológicos si se considera cada subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Luego, $\mathcal{X}_A^{-1}(\{1\}) = A$ y dado que $\{1\}$ es cerrado en $\{0,1\}$ entonces A es cerrado en X debido a la continuidad de $\mathcal{X}_A$.

De manera similiar, dado que el conjunto $\{0\}$ es cerrado en $\{0,1\}$ entonces por la continuidad de $\mathcal{X}_A$ el conjunto $\mathcal{X}_A^{-1}(\{0\}) = A^c$ es cerrado en X, luego $(A^c)^c = A$ es abierto en X.

$(\Leftarrow)$ Sea A un subconjunto abierto y cerrado de X. Para mostrar que $\mathcal{X}_A$ es continua se debe probar que, para cualquier subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{X}_A^{-1}(U)$ es abierto en X. Así

$$\mathcal{X}_A^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad 1 \notin U \ \text{ y } \ 0 \notin U \\ \\ A & \text{si} \quad 1 \in U \ \text{ y } \ 0 \notin U \\ \\ A^c & \text{si} \quad 1 \notin U \ \text{ y } \ 0 \in U \\ \\ X & \text{si} \quad 1 \in U \ \text{ y } \ 0 \in U \end{cases}$$

Ahora, es claro que $\emptyset$ y X son abiertos, además por hipótesis el conjunto A es abierto y dado que además A es cerrado entonces A^c es abierto, por lo cual $\mathcal{X}_A$ es una aplicación continua.

$\square$

Definición 4.1.17 (Medidas reales y complejas)**.** *Llamamos medida real en* $(\Omega, \mathcal{A})$ *a toda carga finita* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$*; llamamos medida compleja en* $(\Omega, \mathcal{A})$ *a toda carga finita* $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$

Definición 4.1.18 (Variación de una medida compleja)**.** *Dada una medida compleja* μ *en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$ *y* $A \in \mathcal{A}$*, llamaremos variación de* μ *a la medida*

$$\mid \mu \mid (A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mid \mu(A_i) \mid : \ A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \textit{ con } i \neq j, \cup A_i = A \right\}$$

Definición 4.1.19 (Variación total de una medida compleja)**.** *Dada una medida compleja* μ *en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{A})$*, llamaremos variación total de* μ *al valor*

$$\|\mu\| = \mid \mu \mid (\Omega)$$

Definición 4.1.20. *$M(\Omega)$ se define como el conjunto de todas las medidas borelianas complejas en Ω.*

Teorema 4.1.1 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Si Ω es un espacio localmente compacto de Hausdorff y $\mu \in M(\Omega)$, definimos $F_\mu : C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$F_\mu(f) = \int f d\mu$$

entonces $F_\mu \in C_0(\Omega)^*$ y el mapeo $\mu \to F_\mu$ es un isomorfismo isométrico de $M(\Omega)$ en $C_0(\Omega)^*$.

A continuación se enuncia el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg, herramienta central para la prueba del teorema de Szemerédi.

Teorema 4.1.2 (Teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg)**.** *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y T una transformación en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ que preservan la medida, entonces para cualquier $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) > 0$ existe un entero $n \geq 1$ tal que*

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0$$

Lema 4.1.2. *Dado el conjunto finito $\{0,1\}$ y el producto cartesiano de $\{0,1\}$ consigo mismo un número contable de veces denotado por Ω, esto es $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y definamos la aplicación $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ mediante*

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \textit{si} \quad x \neq y \textit{ donde } k = \text{mín}\{|j| + 1 \,:\, x_j \neq y_j\} \\ \\ 0 & \textit{si} \quad x = y \end{cases}$$

entonces Ω es metrizable con la aplicación d.

Demostración. Van Amstel y cols. (2018). Es necesario mostrar que la función d satisface la condiciones de la definición 2.1.15.

1. Dados dos punto cualquieras x e y distintos en Ω, observe que

$$1 \leq \text{mín}\{|j|+1 \,:\, x_j \neq y_j\} < \infty,$$

entonces

$$0 < \frac{1}{\text{mín}\{|j|+1 \,:\, x_j \neq y_j\}} \leq 1$$

por lo cual la aplicación d toma valores finitos para cualquier par (x, y) en Ω, así $d(x,y) \in \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}^+$, entonces $d(x,y) \geq 0$.

2. Por la definición de la función $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ se tiene que si $x = y$ entonces $d(x,y) = 0$.

   Recíprocamente, si $d(x,y) = 0$ entonces $x = y$ pues si $x \neq y$ resulta que $d(x,y) \in \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ y $\frac{1}{n} > 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice el hecho que $d(x,y) = 0$, por tanto $x = y$.

3. Dados cualquier par de puntos arbitrarios x e y de Ω, entonces

$$d(x,y) = \frac{1}{\text{mín}\{|j|+1 \,:\, x_j \neq y_j\}} = \frac{1}{\text{mín}\{|j|+1 \,:\, y_j \neq x_j\}} = d(y,x)$$

   por lo que se verfica que $d(x,y) = d(y,x)$.

4. Sean x, y y z elementos distintos de Ω. Se mostrará que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

   Sean los números A, B y C definidos como

$$A = \text{mín}\{|j|+1 \,:\, x_j \neq y_j\}$$
$$B = \text{mín}\{|j|+1 \,:\, x_j \neq z_j\}$$
$$C = \text{mín}\{|j|+1 \,:\, z_j \neq y_j\}$$

   Así, se tienen los siguientes casos:

   i. Si $A = B = C$, entonces resulta que $\frac{1}{A} \leq \frac{2}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$ por lo cual $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

ii. Si $B < A < C$ ó $B < C < A$.

Asumiendo que $B < A < C$ resulta que $\frac{1}{B} > \frac{1}{A} > \frac{1}{C}$. Ahora, puesto que $\frac{1}{C} > 0$ entonces $\frac{1}{C} + \frac{1}{A} > \frac{1}{A}$, así $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} > \frac{1}{A} + \frac{1}{C} > \frac{1}{A}$ por tanto $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

De manera similiar, si $B < C < A$ entonces $\frac{1}{B} > \frac{1}{C} > \frac{1}{A}$, luego dado que $\frac{1}{C} + \frac{1}{A} > \frac{1}{A}$ se infiere que $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} > \frac{1}{A}$, así $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

iii. Si $B < A = C$ ó $B = A < C$.

Suponiendo que $B < A = C$, entonces $\frac{1}{B} > \frac{1}{A}$ y $\frac{1}{B} > \frac{1}{C}$ por lo cual

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{C} > \frac{1}{A} + \frac{1}{C} = \frac{2}{A} > \frac{1}{A}$$

por tanto $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. La prueba es similar para $B = A < C$.

iv. Falta probar que las desigualdades $A < B < C$ y $A < C < B$ no son posibles.

Asumiendo que $A < B < C$, entonces por definición de A, B y C se tiene que

$$\begin{aligned} x_k = y_k, &\quad \forall k \in \{-A+1, \cdots, A-1\} \\ x_k = z_k, &\quad \forall k \in \{-B+1, \cdots, B-1\} \\ z_k = y_k, &\quad \forall k \in \{-C+1, \cdots, C-1\} \end{aligned}$$

mientras alguna de cada una de las siguientes posibilidades es cierta

$$x_A \neq y_A \text{ ó } x_{-A} \neq y_{-A}$$
$$x_B \neq z_B \text{ ó } x_{-B} \neq z_{-B}$$
$$z_C \neq y_C \text{ ó } z_{-C} \neq y_{-C}$$

Pero, dado que $x_k = z_k$ para cualquier $k \in \{-B+1, \cdots, B-1\}$ y $z_k = y_k$ para todo $k \in \{-C+1, \cdots, C-1\}$ y $B < C$ entonces se tiene que $x_k = y_k$ por lo menos para todo $k \in \{-B+1, \cdots, B-1\}$. Pero dado que $A < B$, lo cual contradice el hecho que $x_A \neq y_A$ o que $x_{-A} \neq y_{-A}$ por lo que $A < B < C$ no es posible. Para el caso en que $A < C < B$ se usa un argumento similar.

Por tanto, se concluye que $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una métrica en Ω. □

Definición 4.1.21. *Sea Ω el espacio métrico definido en el lema 4.1.2, la aplicación $T : \Omega \to \Omega$ definida por*

$$T((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

se denomina función de desplazamiento o Shift.

Lema 4.1.3 (Van Amstel y cols. (2018))**.** *Sea (Ω, d) el espacio métrico definido en el lema 4.1.2, entonces la función de desplazamiento T es continua en (Ω, d).*

Demostración. Se desea mostrar que la aplicación $T : \Omega \to \Omega$ es continua. Para ello se probará que T es Lipschitz continua. Sean x, y elementos de Ω y definiendo $m_0 = \min\{|j| + 1 \, : \, x_j \neq y_j\}$. Se tienen los siguientes caso:

1. Si $m_0 = 1$ entonces $x_0 \neq y_0$, por lo cual $d(T(x), T(y)) \leq 2 = \dfrac{2}{m_0} = 2d(x, y)$.
2. Si $m_0 > 1$ y $j > 0$ para $|j| + 1 = \min\{|j| + 1 \, : \, x_j \neq y_j\}$, entonces $\min\{|j| + 1 \, : \, (T(x))_j \neq (T(y))_j\} = m_0 - 1$, así $d(T(x), T(y)) = \dfrac{1}{m_0 - 1} \leq \dfrac{2}{m_0} = 2d(x, y)$.
3. Si $m_0 > 1$ y $j < 0$ para $|j| + 1 = \min\{|j| + 1 \, : \, x_j \neq y_j\}$, entonces $\min\{|j| + 1 \, : \, (T(x))_j \neq (T(y))_j\} = -m_0 + 1$, así

$$d(T(x), T(y)) = \frac{1}{-m_0 + 1} \leq \frac{1}{m_0} \leq \frac{2}{m_0} = 2d(x, y)$$

Puesto que lo anterior cubre todos los casos posibles, entonces se concluye que T es Lipschitz continua con constante igual a 2, por lo cual es uniformemente continua y en consecuencia continua. □

Lema 4.1.4. *El espacio métrico* (Ω, d) *del lema 4.1.2 es compacto.*

Demostración. Van Amstel y cols. (2018). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Ω. Dado que $\{0,1\}$ es un conjunto finito, entonces existe algún $\alpha_0 \in \{0,1\}$ tal que $|\{n \in \mathbb{N} : x_n(0) = \alpha_0\}| = \infty$. Definiendo al conjunto $K_0 = \{n \in \mathbb{N} : x_n(0) = \alpha_0\}$ y $n_1 = \min K_0$.

Ahora, sea $K_1 = \{n > n_1 : x_n(0) = \alpha_0,\, x_n(1) = \alpha_1,\, x_n(-1) = \alpha_1\}$ donde $\alpha_1 \in \{0,1\}$ se ha tomado de tal forma que $|K_1| = \infty$ y tomando $n_2 = \min K_1$.

Siguiendo de esta forma se tiene que, para todo $j \geq 2$ se tiene que $K_j = \{n > n_{j-1} : x_n(i) = \alpha_i,\, x_n(-i) = \alpha_i,\, \forall\, i \in \{0,1,\cdots,j-1\},\, x_n(j) = \alpha_j,\, x_n(-j) = \alpha_j\}$ donde los α_i están definidos para todo $i \in \{0,1,\cdots,j-1\}$ y donde $\alpha_j \in \{0,1\}$ tal que $|K_j| = \infty$. Ahora, definiendo $n_{j+1} = \min K_j$ y sea $x = \{\cdots, \alpha_2,\, \alpha_1,\, \alpha_0,\, \alpha_1, \alpha_2,\, \cdots\} \in \Omega$.

Es evidente que la subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \Omega$, así para probar este hecho, tomando cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, es suficiente mostrar $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Así, por definición de la subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$

$$\min\{|j| + 1 : (x_{n_k})(j) \neq x(j)\} \geq N + 1 > N$$

entonces, $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ para todo $k \geq N$. Dado que la elección de $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces la subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a x. Puesto que $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión arbitraria contenida en Ω se concluye que (Ω, d) es un espacio métrico compacto. $\square$

Teorema 4.1.3 (Teorema de Szemerédi)**.** *Si* A *es un subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *con densidad superior positiva de Banach, entonces* A *contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud arbitraria.*

Demostración. La construcción de la demostración toma algunas de las ideas de Chulluncuy Centeno (2014). Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ un subconjunto con densidad superior positiva de Banach, y definase el conjunto $\{0,1\}$ con la topología discreta, y denotando por

$X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ al producto cartesiano de $\{0,1\}$ consigo mismo un número contable de veces. Así, por lema 4.1.2, el conjunto X es metrizable con la distancia

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si} \quad x \neq y \text{ donde } k = \min\{|j|+1 \ : x_j \neq y_j\} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

donde $x, y \in X$.

Ahora, dado que $\{0,1\}$ es compacto, entonces por el teorema de Tychonoff (teorema 2.1.8), X con la topología producto $\mathcal{T}_P$ es compacto, y por lema 4.1.4, (X,d) es un espacio métrico compacto. Ahora, puesto que $\{0,1\}$ es un espacio de Hausdorff, entonces X es de Hausdorff.

Por otra parte, para cada $i \in \mathbb{Z}$ sean las funciones de proyección de coordenadas $\pi_i : X \to \{0,1\}$, y sea $T : X \to X$ la aplicación de desplazamiento dada por

$$T((z_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (z_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

Luego, por lema 4.1.3, la aplicación T es continua en X.

Ahora, para cada $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$, se define x_i como

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \notin A \end{cases}$$

Ahora, considerando el conjunto de órbitas de un punto $x \in X$, $H = \{T^n(x) \ : n \in \mathbb{Z}\}$ y su clausura $\Omega = \overline{\{T^n(x) \ : n \in \mathbb{Z}\}}$, es claro que $\Omega \subset X$ es compacto, y sea $S = \Omega \cap \pi_0^{-1}(\{1\})$ donde $\pi_0^{-1}(\{1\}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_0 = 1\}$.

Por otra parte, dada la topología producto $\mathcal{T}_P$ en X, se define $\mathcal{A}$ como la $\sigma-$álgebra de Borel generada por $\mathcal{T}_P$. Ahora, dado que $\{0,1\}$ está equipado con la topología discreta, entonces $\{1\}$ es abierto y cerrado, por lo cual la imagen inversa $\pi_0^{-1}(\{1\})$ es abierta y cerrada en $\mathcal{T}_P$, y puesto que Ω es abierto y cerrado en la topología inducida en Ω por X, la cual por teorema 2.1.5 coincide con la topología producto de X restringida a Ω, por lo que $S = \Omega \cap \pi_0^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}_P$, así $S \in \mathcal{A}$, es decir, S es medible.

Ahora, dado que $A \subseteq \mathbb{Z}$ posee densidad superior positiva de Banach, es decir

$$\overline{d}_B(A) = \lim_{|I|\to\infty} \sup \frac{|A \cap I|}{|I|} > 0; \quad I \subset \mathbb{Z}$$

Entonces, existe un sucesión de intervalos $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ tal que

$$\lim_{|I_k|\to\infty} \frac{|A \cap I_k|}{|I_k|} = \overline{d}_B(A) > 0 \tag{4.14}$$

Por otra parte, dado que X es un espacio de Hausdorff y Ω es compacto, entonces Ω es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, por lo cual, fijando un punto $t \in \Omega$, se define el funcional de Dirac $\delta_t^* : C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante

$$\delta_t^*(f) = f(t); \text{ para todo } \quad f \in C_0(\Omega) \tag{4.15}$$

Es claro que δ_t^* es lineal y observe que

$$|\delta_t^*(f)| = |f(t)| \leq \sup\{|f(\beta)| \;:\; \beta \in \Omega\} = \|f\|$$

Por lo cual, δ_t^* es continuo, así $\delta_t^* \in C_0(\Omega)^*$ y además, de la definición de norma para el funcional δ_t^* y de la desigualdad anterior, es claro que $\|\delta_t^*\| \leq 1, \;\; \forall t \in \Omega$.

Ahora, dado que Ω es localmente compacto y dada una medida $v \in M(\Omega)$, entonces por el teorema de representación de Riesz (teorema 4.1.1), existe un isomorfismo isométrico $F : M(\Omega) \to C_0(\Omega)^*$ dado por $F(v) = F_v$ donde $F_v : C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ en $C_0(\Omega)^*$ está definido por

$$F_v(f) = \int_\Omega f dv \qquad \text{para todo } f \in C_0(\Omega)$$

Luego, para cada $t \in \Omega$ existe una media w_t en $M(\Omega)$, así mediante el isomorfismo isométrico se tiene que $F(w_t) = \delta_t^*$, por lo cual para cualquier $f \in C_0(\Omega)$ resulta que

$$\delta_t^*(f) = \int_\Omega f dw_t$$

Pero, de la igualdad 4.15 sabe que

$$\delta_t^*(f) = f(t) \quad \forall f \in C_0(\Omega)$$

Por lo cual

$$f(t) = \int_\Omega f dw_t \quad \forall f \in C_0(\Omega)$$

Ahora, sea $E \subset \Omega$ un conjunto abierto y cerrado, y sea además $\mathcal{X}_E$ la función característica de E, esto es

$$\mathcal{X}_E(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in E \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \notin E \end{cases}$$

Luego, dado que E es abierto y cerrado en Ω con la topología $\mathcal{T}_P$, entonces $E \in \mathcal{A}$ y por proposición 4.1.2, $\mathcal{X}_E \in C_0(\Omega)$, así del isomorfismo isométrico de $M(\Omega)$ en $C_0(\Omega)^*$ se tiene que

$$w_t(E) = \int_\Omega \mathcal{X}_E \, dw_t = F_{w_t}(\mathcal{X}_E) = \delta_t^*(\mathcal{X}_E)$$

Pero, de la relación 4.15 se sabe que

$$\delta_t^*(\mathcal{X}_E) = \mathcal{X}_E(t)$$

Por lo cual

$$w_t(E) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in E \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \notin E \end{cases}$$

De lo anterior, w_t es la medida delta de Dirac, entonces, por notación, suponga que $w_t = \delta_t$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sean las medidas promedios complejas finitas borelianas v_n en Ω dadas por

$$v_n = \frac{1}{|I_n|} \sum_{j \in I_n} \delta_{T^j(x)}$$

Puesto que F es una isometría entre $M(\Omega)$ y $C_0(\Omega)^*$ y se sabe que $\|\delta_t^*\|_{C_0(\Omega)^*} \leq 1$ para todo $t \in \Omega$ por lo cual $\|\delta_{T^j(x)}\|_{M(\Omega)} \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, así para todo $j \in I_n$ resulta que

$$\|v_n\| = \left\| \frac{1}{|I_n|} \sum_{j \in I_n} \delta_{T^j(x)} \right\| = \frac{1}{|I_n|} \left\| \sum_{j \in I_n} \delta_{T^j(x)} \right\| \leq \frac{1}{|I_n|} \sum_{j \in I_n} \|\delta_{T^j(x)}\| \leq \frac{1}{|I_n|} \sum_{j \in I_n} 1 = 1$$

Es decir, $\|v_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, como la aplicación F es lineal entonces

$$F(v_n) = F_{v_n} = v_n^* = \frac{1}{|I_n|} \sum_{j \in I_n} \delta_{T^j(x)}^*$$

De donde se puede afirmar que $v_n^* \in C_0(\Omega)^*$ y $\|v_n^*\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo cual la sucesión de funcionales lineales acotados $(v_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C_0(\Omega)^*$ está contenida en la bola cerrada unidad $\overline{B}(0,1)$ de $C_0(\Omega)^*$, pero por teorema de Banach-Alaoglu (teorema 2.1.12) resulta que $\overline{B}(0,1)$ es compacta, y por lo tanto secuencialmente compacta en la topología débil estrella de $C_0(\Omega)^*$, así por definición de compacidad secuencial existe una subsucesión $(v_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $(v_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, y existe un funcional $\mu^* \in C_0(\Omega)^*$, y por el isomorfismo isométrico F también existe una medida μ en $M(\Omega)$ para la cual $F(\mu) = F_\mu = \mu^*$, tal que $(v_{n_k}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a μ^* en la topología débil estrella de $C_0(\Omega)^*$. Así, para cualquier $f \in C_0(\Omega)^*$ se tiene que

$$\int_\Omega f d\mu = [F(\mu)](f) = \mu^*(f) = J_f(\mu^*) = J_f\left(\lim_{k \to \infty} v_{n_k}^*\right) = \lim_{k \to \infty} v_{n_k}^*(f)$$

Pero

$$\lim_{k \to \infty} v_{n_k}^*(f) = \lim_{k \to \infty} [F(v_{n_k})](f) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f dv_{n_k}$$

Por lo cual

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f dv_{n_k} = \int_\Omega f d\mu$$

Así, por lema 2.3.1, la subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil estrella a la medida $\mu \in M(\Omega)$, es decir

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = \mu \tag{4.16}$$

Ahora, por lema 2.3.3, la medida μ es invariante para la función T.

Por otra parte, se sabe que $S \in \mathcal{A}$ y dado que S es abierto y cerrado. Entonces por proposición 4.1.2 resulta que $\mathcal{X}_S \in C_0(\Omega)$, y por la igualdad 4.16 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(S) = \mu(S)$$

pero

$$v_{n_k} = \frac{1}{|I_{n_k}|} \sum_{j\in I_{n_k}} \delta_{T^j(x)}$$

Por lo cual

$$\mu(S) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|I_{n_k}|} \sum_{j\in I_{n_k}} \delta_{T^j(x)}(S)$$

Ahora, observe que, dada la medida de S con respecto a $\delta_{T^j(x)}$ resulta que

$$\delta_{T^j(x)}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T^j(x) \in S \\ \\ 0 & \text{si} \quad T^j(x) \notin S \end{cases}$$

Es decir, $\delta_{T^j(x)}(S) = 1$ sí, y solo si $T^j(x) \in S$, pero $S = \Omega \cap \pi_0^{-1}(\{1\})$, por lo cual $\delta_{T^j(x)}(S) = 1$ sí, y solo si $(T^j(x))_0 = 1$ y puesto que $(T^j(x))_0 = x_j$, luego de acuerdo a como se han definido las componentes de los puntos $x \in X$, lo anterior es equivalente a decir que

$$\delta_{T^j(x)}(S) = 1 \text{ sí, y solo si } j \in A.$$

Por lo cual, los valores $j \in \mathbb{Z}$ tal que $\delta_{T^j(x)}(S)$ adquiera un valor distinto de cero, son precisamente aquellos $j \in A$. Por tanto

$$\mu(S) = \lim_{k\to\infty} v_{n_k}(S) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|I_{n_k}|} \sum_{j\in I_{n_k}} \delta_{T^j(x)}(S) = \lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{|I_{n_k}|} = \overline{d}(A) > 0$$

De lo anterior se verifica que $\mu(S) > 0$. Así, dado que μ es $T-$invariante en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y además $S \in \mathcal{A}$ cumple que $\mu(S) > 0$, entonces por el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg (teorema 4.1.2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(S \cap T^{-n}S \cap T^{-2n}S \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}S) > 0$$

Por lo cual

$$S \cap T^{-n}S \cap T^{-2n}S \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}S \neq \emptyset$$

Es decir, existe un punto $\omega \in S$ tal que

$$T^n(\omega) \in S,\ T^{2n}(\omega) \in S, \cdots, T^{(k-1)n}(\omega) \in S$$

Por lo cual, se puede afirmar que

$$\omega, T^n(\omega), T^{2n}(\omega), \cdots, T^{(k-1)n}(\omega) \in \pi_0^{-1}(\{1\})$$

Así

$$\omega_0 = 1,\ (T^n(\omega))_0 = 1,\ (T^{2n}(\omega))_0 = 1, \cdots, (T^{(k-1)n}(\omega))_0 = 1$$

Ahora, note que la primera componente de $T^n(\omega)$, es decir $(T^n(\omega))_0$ es la $n-$ésima componente de ω, así, $\omega_n = (T^n(\omega))_0$, de la misma manera se cumple que

$$\omega_{2n} = (T^{2n}(\omega))_0, \cdots, \omega_{(k-1)n} = (T^{(k-1)n}(\omega))_0$$

De lo cual resulta que

$$\omega_0 = \omega_n = \cdots = \omega_{(k-1)n} = 1$$

Ahora, dado que $\omega \in \Omega$, entonces ω es el punto límite de una sucesión en el conjunto H. Suponga que $\{T^r(x)\}$ es la sucesión en H que converge a ω en S, así por definición de convergencia de una sucesión, existe $R \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r \geq R$ se tiene que

$$d(\omega, T^r(x)) < \frac{1}{kn}$$

es decir

$$\frac{1}{\text{mín}\{|j|+1\,:\,\omega_j \neq (T^r(x))_j\}} < \frac{1}{kn}$$

Ó equivalentemente

$$\text{mín}\{|j|+1\,:\,\omega_j \neq (T^r(x))_j\} > kn$$

Ahora, sin perdida de generalidad, suponga que

$$kn+1 = \text{mín}\left\{|j|+1\,:\,\omega_j \neq (T^r(x))_j\right\}$$

Entonces, $|j| = kn$, así $\omega_j \neq (T^r(x))_j$ para $j = kn$ ó $j = -kn$, es decir $\omega_j = (T^r(x))_j$ para $|j| < kn$, más precisamente se puede decir que

$$\omega_j = (T^r(x))_j \text{ para todo } j \in \{-(k-1)n,\ -(k-1)n+1,\ \cdots,\ (k-1)n-1,\ (k-1)n\}$$

Ahora, como $\omega_0 = \omega_n = \cdots = \omega_{(k-1)n} = 1$, entonces se tiene que

$$1 = \omega_j = (T^r(x))_j \text{ para todo } j \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ (k-1)n-1,\ (k-1)n\}$$

Por lo cual $(T^r(x))_0 = (T^r(x))_n = (T^r(x))_{2n} = \cdots = (T^r(x))_{(k-1)n} = 1$, y dado que

$$x_r = (T^r(x))_0,\ x_{r+n} = (T^r(x))_n,\ x_{r+2n} = (T^r(x))_{2n},\ \cdots,\ x_{r+(k-1)n} = (T^r(x))_{(k-1)n}$$

entonces,

$$x_r = 1,\ x_{r+n} = 1,\ x_{r+2n} = 1,\ \cdots,\ x_{r+(k-1)n} = 1$$

Pero, de acuerdo a como se han definido los valores de las componentes de los puntos $x \in X$, entonces lo anterior ocurre sí, y solo si

$$r,\ r+n,\ r+2n,\ \cdots,\cdots r+(k-1)n \in A$$

Pero, $r,\ r+n,\ r+2n,\ \cdots,\cdots r+(k-1)n$ es una progresión aritmética de longitud arbitraria, por tanto, se concluye que el subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ contiene infinitas progresiones aritméticas de longitud arbitraria. $\square$

Teorema 4.1.4 (Teorema de Van der Waerden - Oliveira y Viana (2014)). *Dada cualquier partición finita* $\{S_1, S_2, \cdots, S_l\}$ *de* $\mathbb{Z}$*, existe algún* $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$ *tal que* S_j *contiene progresiones aritméticas de longitudes arbitrarias. En otras palabra, para todo* $q \geq 1$ *exite* $m \in \mathbb{Z}$ *y* $n \geq 1$ *tal que* $m + in \in S_j$ *para todo* $1 \leq i \leq q$.

El teorema de Szemerédi (teorema 4.1.3), tiene importantes consecuencias y ha permitido avances significativos en el área de la combinatoria aditiva pues mediante dicho teorema se han demostrado maravillosos resultados, por ejemplo el teorema de Van der Waerden (teorema 4.1.4), demostrado en 1927 por el matemático neerlandés Bartel Leendert Van der Waerden $(1903 - 1996)$, tiene gran relación con el teorema de Szemerédi, pues el teorema de Van der Waerden se sigue del teorema de Szemerédi.

Por otra parte, en 2004 el matemático británico Ben Green y el matemático australiano Terence Tao demostraron un bello e importante resultado que invalucra a los números primos el cual afirma que, *existen progresiones aritméticas arbitrariamente largas formadas por números primos*, este resultado se conoce como el teorema de Green$-$Tao. Da Silva (2016)

A pesar que el teorema de Green$-$Tao no se deduce del teorema de Szemerédi pues el conjunto de los números primos no posee densidad superior positiva por lo cual el teorema 4.1.3 no puede ser directamente aplicado, es posible extender el teorema de Szemerédi a un contexto más general mediante un principio de transferencia y en consecuencia el teorema es aplicable en la demostración del teorema de Green$-$Tao.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó la recopilación de la base teórica de elementos específicos y más importantes del análisis funcional, topología y teoría de la medida e integración los cuales brindaron el soporte teórico y permitieron establecer la conexión y aplicabilidad de la teoría ergódica a los sistemas dinámicos a tiempo discreto y a la combinatoria aditiva.

La recurrencia permite obtener información valiosa de carácter cualitativo que de otra forma sería difícil obtener, en específico el teorema de recurrencia de Poincaré garantiza que bajo transformaciones invariantes todo punto de un conjunto A de medida positiva vuelve a A infinitas veces excepto en un conjunto de medida cero, sin embargo aunque dicha información es valiosa surge la necesidad de conocer información cuantitativa sobre el tiempo de retorno de los puntos del conjunto A al propio conjunto A.

A través de las propiedad de ergodicidad, el teorema ergódico de Birkhoff, el teorema de recurrencia de Poincaré, la transformación de primer retorno y sus propiedades, es posible demostrar el lema de Kac el cual brinda información cuantitativa sobre el primer tiempo de retorno de un punto, lo cual complementa la información que proporciona el teorema de recurrencia de Poincaré lo que lo convierte en una herramienta importante para el estudio de sistemas dinámicos a tiempo discreto aún cuando sus dinámicas son caóticas.

El teorema de Szemerédi garantiza la existencia de infinitas progresiones aritméticas de longitud arbitraria en un subconjunto de los enteros con densidad superior positiva de Banach. La construcción de un sistema de probabilidad invariante junto con enunciados como el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg, el teorema de representación de Riesz, el teorema de Tychonoff, las propiedades de compacidad y demás teoría, permitieron formular una prueba del teorema de Szemerédi desde el punto de vista ergódico de una manera más sencilla y accesible para su compresión en comparación a la prueba formulada en combinatoria aditiva.

El teorema de Szemerédi tiene importantes implicaciones, por ejemplo el teorema de Van der Waerden se sigue del teorema de Szemerédi el cual también se encarga de garantizar la existencia de progresiones aritméticas en subconjuntos de los enteros, por otra parte, para la demostración del teorema de Green$-$Tao se utiliza el teorema de Szemerédi como una herramienta para la construcción de la demostración del teorema, existen otras consecuencias y aplicaciones pero debido al alcance del estudio solo se mencionan las enteriores.

Esta investigación se limita al estudio de las aplicaciones teóricas que tiene la teoría ergódica en sistemas dinámicos a tiempo discreto, en específico a la demostración del lema de Kac y a la prueba del teorema de Szemerédi en combiantoria aditiva, sin embargo existen múltiples aplicaciones tanto teóricas, computacionales y aplicativas que tiene la teoría ergódica en diversos campos.

El estudio permite concluir que la teoría ergódica es una rama de las matemáticas profunda y bien establecida, vital para ayudar a responder interrogantes que otras áreas no pueden solucionar por si solas, o bien, para proporcionar herramientas que permiten simplificar los problemas en sus campos de aplicación.

CAPÍTULO 6

RECOMENDACIONES

Para futuras investigaciones monográficas, a los estudiantes interesados en trabajar en teoría ergódica, se recomiendan las siguientes aplicaciones teóricas:

- En teoría de números, la teoría ergódica tiene aplicaciones a los números normales y las fracciones continuas.

- En combiantoria aditiva, puede aplicarse para demostrar el teorema de Van der Waerden (teorema 4.1.4) desde la perpespectiva ergódica y para mostrar que el teorema de Szemerédi implica el teorema de recurrencia múltiple de Furstenberg.

- En geometría fractal, se puede utilizar en el estudio de las medidas fractales y la conservación de dimensión, específicamente puede probarse que: *La restricción de una aplicación lineal a un conjunto A conserva la dimesión si A es un conjunto homogeneo en un espacio Euclidiano.*

BIBLIOGRAFÍA

Ambrosio, L., y cols. (2011). *Introduction to measure theory and integration* (1.ª ed.). Edizioni della Normale. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=85950b5474faaf8cd69d2c898d52a226

Apuntes de teoría de la medida. (2018, 1). *Universidad de Extremadura, ES*, *96*. Descargado de https://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf

Arbieto, A., Matheus, C., y Moreira, C. G. (2007). *Aspectos ergódicos da teoria dos números*. IMPA. Descargado de https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_34.pdf

Bartle, R. G. (1980). *Introducción al análisis matemático*. LIMUSA S.A de CV. Descargado de https://bit.ly/3RIYFfq

Benettin, G. (2019). A smooth introduction to ergodic theory. *Università di Padova*. Descargado de https://www.math.unipd.it/~benettin/links-ergodic/ergodic.pdf

Benoist, Y., y Paulin, F. (2002). Systèmes dynamiques élémentaires. *Cours de Magistère ENS*, *3*. Descargado de https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~frederic.paulin/notescours/cours_sysdyn.pdf

Brin, M., y Stuck, G. (2002). *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press. Descargado de https://bit.ly/3HdqzxI

Cárcamo, U. C., y cols. (1996). El origen fenomenológico de la teoría ergódica. *Revista Universidad EAFIT*, *32*(103), 15–27. Descargado de https://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/article/view/1191

Chulluncuy Centeno, A. V. (2014). *El teorema de szemerédi, consecuencias en la distribución de números primos y perspectivas* (Tesis de Master, Universidad Nacional de Ingeniería). Descargado de https://bit.ly/3KT8p4f

Conway, J. B. (1990). *A course in functional analysis* (2nd ed.). Springer. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=83d1dfa8cbd17fb0ce455d2a06e0df19

Dajani, K., y Dirksin, S. (2008). A simple introduction to ergodic theory. *University of Utrecht*. Descargado de https://webspace.science.uu.nl/~kraai101/lecturenotes2009.pdf

Da Silva, V. L. (2016). *Demonstração do teorema de van der waerden via sistemas dinâmicos* (Tesis de Master, Universidade Federal de Alagoas, Brasil). Descargado de https://bit.ly/3Ov8oFK

Furstenberg, H. (1977). Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of szemerédi on arithmetic progressions. *Journal d'Analyse Mathématique*, *31*(1), 204–256. Descargado de https://www.cs.umd.edu/~gasarch/TOPICS/vdw/furstenbergsz.pdf

Furstenberg, H. (1980). *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton University Press. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=e94f462307fa3363ab0b828e678c5e80

García Nogales, A. (2008). *Teoría de la medida y de la probabilidad*. Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones. Descargado de https://core.ac.uk/download/pdf/72045115.pdf

González, F. (2010). Análisis funcional en espacios de banach. *Granada: Universidad de Granada*. Descargado de https://www.ugr.es/~fjperez/textos/Analisis_Funcional_en_Espacios_de_Banach.pdf

Gutierrez, C. (1992). Introducción a la teoría ergódica. *Pro Mathematica*, *6*(11-12), 5–104. Descargado de https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/3421/3268

Herrero Piñeyro, P. J. (2010). *Topología de espacios métricos*. Universidad de Murcia. Descargado de https://docer.com.ar/doc/808n55x

Ivorra Castillo, C. (s.f.). *Topología*. Universidad de Valencia. Descargado de https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=4bf619a633b163cb1b1ca2c8528c34cf

Lacomba, E. A. (2000). Los sistemas dinámicos ¿qué son y para qué sirven? *Miscelánea matemática, México, D.F.*, 39–50. Descargado de https://bit.ly/3E58xvo

Lovett, S. (2017). Additive combinatorics and its applications in theoretical computer science. *Theory of Computing librery*, 1–55. Descargado de https://theoryofcomputing.org/articles/gs008/gs008.pdf

Lugosi, G., y Serra, O. (2012). El diablo de los números. *La Gaceta de la RSME*, *15*(3), 537–559. Descargado de https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1099

Marra, M. R. d. S., y cols. (2019). Sistemas dinâmicos: Alguns teoremas clássicos da teoria ergódica. *Universidade Federal de Uberlândia*. Descargado de https://bit.ly/3HYJjjF

Moore, C. C. (2015). Ergodic theorem, ergodic theory, and statistical mechanics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *112*(7), 1907–1911. Descargado de https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1421798112s

Munkres, J. (2002). *Topología* (2.ª ed.). Prentice Hall. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=6a3cc8032d2f3fd6458f9575fe7e28dc

Núnez-Yepez, H., y Salas-Brito, A. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Revista mexicana de física E*, *59*(2), 91–100. Descargado de https://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v59n2/v59n2a2.pdf

Oliveira, K., y Viana, M. (2014). *Fundamentos da teoria ergódica*. Sociadade Brasileira de Matemática. Descargado de http://libgen.li/file.php?md5=2235fa8e2b2af4928569a4443b4c1b92

RAN, D. (s.f.). Birkhoff's ergodic theorem. *University of Chicago*. Descargado de http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Ran.pdf

Rojas Salazar, M. (2018). *Introducción a la teoría ergódica* (Tesis de Licenciatura (No publicada), Universidad Nacional Autónoma de Ciudad Juárez). Descargado de https://bit.ly/3qA6g4t

Steif, J. (2007). Notes on ergodic theory. *Citeseer, PSU*. Descargado de https://tinyurl.com/53ec6txh

Szemerédi, E. (1975). On sets of integers containing k elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica*, *27*(1), 199–245. Descargado de http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa27/aa27132.pdf

Trevisan, L. (2009). Additive combinatorics and theoretical computer science. *ACM SIGACT News*, 1–18. Descargado de http://theory.stanford.edu/~trevisan/pubs/addcomb-sigact.pdf

Van Amstel, S. J. V. D. W., y cols. (2018). *An ergodic theoretic approach to szemerédi's theorem* (Tesis de Master, University of Pretoria). Descargado de https://repository.up.ac.za/bitstream/handle/2263/70516/VanAmstel_Ergodic_2019.pdf?sequence=1

Varandas, P. (2016). A version of kac's lemma on first return times for suspension flows. *Stochastics and Dynamics*, *16*(02), 1660002. Descargado de https://pgmat.ufba.br/sites/pgmat.ufba.br/files/kac-final.pdf

Vergaray Albujar, C. A. (2016). *Elementos de dinámica de iteración de funciones* (Tesis de Master). Descargado de https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6990

Viana, M., y Oliveira, K. (2016). *Foundations of ergodic theory*. Cambridge University Press. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=22d209c4e8ba94f4cab85b42b7b11e1a

Walters, P. (2000). *An introduction to ergodic theory* (Vol. 79). Springer Science & Business Media. Descargado de https://libgen.li/file.php?md5=bbfa86d4ecc8d3d0e647d46d5ab584e0

Zepeda, C., y López, B. (2000). *Tópicos elementales de teoría de medida e integración* (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León). Descargado de http://riul.unanleon.edu.ni:8080/jspui/handle/123456789/8641

ANEXOS

A.1. Enunciados complementarios

En este apartado se introducen algunos enunciados y resultados básicos pero necesarios para la comprensión del contenido.

Definición A.1.1 (Espacio vectorial)**.** *Un espacio vectorial es un conjunto V, cuyo elementos se llaman vectores, previsto de dos operaciones binarias llamadas suma vectorial y multiplicación por escalar.*

Si $x, y \in V$ existe un elemento $x + y$ llamado suma vectorial de x e y. Esta operación satisface las siguientes propiedades:

A_1. $x + y = y + x$ *para todo* $x, y \in V$

A_2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *para todo* $x, y, z \in V$

A_3. *Existe un elemento* $0 \in V$ *tal que* $0 + x = x + 0 = x$ *para todo* $x \in V$

A_4. *Dado* $x \in V$*, hay un elemento* $-x \in V$ *tal que* $x + (-x) = -x + x = 0$

Si $a \in \mathbb{R}$ y $x \in V$, hay un elemento ax en V llamado el múltiplo de a y x. Esta operación de multiplicación por escalar satisface las siguientes propiedades:

M_1. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ *para todo* $x \in V$

M_2. $a(bx) = (ab)x =$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $x \in V$

D. $a(x + y) = ax + ay$ *y* $(a + b)x = ax + bx$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $x, y \in V$

Definición A.1.2 (Conjunto abierto)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que A es un conjunto abierto, si para cada punto $a \in A$, existe una bola $B(a, r)$ contenida en A. Entenderemos que $\emptyset$ es abierto.*

Definición A.1.3 (Conjunto cerrado)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$ un subconjunto; diremos que C es un conjunto (o subconjunto) cerrado si su complementario $X - C = C^c$ es abierto.*

Definición A.1.4 (Conjunto adherente)**.** *Si (X, d) es un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que $x \in X$ es un punto adherente de A si todo entorno U de x cumple que $U \cap A \neq \emptyset$, es decir, no hay ningún entorno de x totalmente contenido en $X - A$. El conjunto de punto adherentes de A se llama la adherencia de A o la clausura de A y se representa por $\overline{A}$.*

Proposición A.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces:*

1. *El conjunto $\overline{A}$ es cerrado.*
2. *$\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, es decir, si B es un conjunto cerrado tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$.*

Demostración. La demostración de esta proposición puede encontrarse en Herrero Piñeyro (2010). □

Definición A.1.5 (Conjunto derivado)**.** *Sea (X, d) un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un punto de acumulación (o punto limite) de A si cualquier entorno U de x contiene un punto de A distinto de x. Es decir, si*

$$(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama conjunto derivado de A, y se representa por A'.

Proposición A.1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in X$ es un punto de acumulación de A sí, y solo si, para todo $r > 0$ se cumple que*

$$(B(x,r)-\{x\})\cap A\neq\emptyset$$

Demostración. La demostración se sigue de la definición A.1.2. $\square$

Definición A.1.6 (Sucesión)**.** *Si (X,d) es un espacio métrico, una sucesión en X es un subconjunto de X definido mediante una aplicación $x:\mathbb{N}\to X$ de tal modo que $x(n)=x_n\in X$; denotaremos a la sucesión por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $(x_n)_n$; y a los elementos de la sucesión los llamamos términos.*

Definición A.1.7 (Convergencia de una sucesión)**.** *Si (X,d) es un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x en (X,d), y lo denotamos por $x_n\to x$ o $\lim\limits_{n} x_n=x$, si para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que si $n\geq n_0$, entonces $d(x_n,x)<\varepsilon$*

En otras palabras, si para toda bola $B(x,\varepsilon)$, existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que si $n\geq n_0$, entonces $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

En la siguiente definición $D(f)$ representará el dominio de la función f contenido en $\mathbb{R}^p$ y con rango $R(f)$ contenido en $\mathbb{R}^q$. Cabe aclarar que no se requiere que $D(f)=\mathbb{R}^p$ o que $p=q$.

Definición A.1.8 (Continuidad de una función)**.** *Sea $a\in D(f)$, se dice que f es continua en a si para todo vecindad V de $f(a)$ existe una vecindad U (dependiendo de V) de a tal que si x es cualquier elemento de $U\cap D(f)$, entonces $f(x)$ es un elemento de V. Si $A\subset D(f)$, se dice que f es continua en A siempre que sea continua en todo punto de A.*

Definición A.1.9 (Números reales extendidos)**.** *Definimos el conjunto de los números reales extendidos $\overline{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ en el cual asumimos las operaciones usuales. Dados $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\overline{\mathbb{R}}$ se define:*

a. $a+\infty=\infty+a=\infty$

b. $a-\infty=-\infty+a=-\infty$

c. $\infty + \infty = \infty$

d. $-\infty - \infty = -\infty$

e. $b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty$ *si* $b > 0$

f. $b \cdot \infty = \infty \cdot b = -\infty$ *si* $b < 0$

g. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$*;* $\dfrac{a}{\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$

h. $\infty - \infty$*,* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *no están definidos.*

Definición A.1.10 (Conjunto de medida cero)**.** *Dado un espacio de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$*, decimos que un conjunto* $B \in \mathcal{A}$ *tiene medida nula o cero si* $\mu(B) = 0$*.*

Definición A.1.11 (Propiedad de casi en todas partes)**.** *Decimos que una propiedad se cumple casi en todas partes respecto de una medida* μ*, si el único conjunto* C *de puntos donde no se verifica la propiedad está en un medible,* $C \subset B \in \mathcal{A}$ *con* $\mu(B) = 0$*.*

El conjunto C no es necesariamente medible, pero si lo es cuando el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es completo. En cualquier caso, si C es medible, $\mu(C) = 0$.

Proposición A.1.3 (Oliveira y Viana (2014) pág 449)**.** *Si* μ *y* v *son probabilidades en un espacio métrico* X *tales que*

$$\int \phi d\mu = \int \phi dv$$

para toda función $\phi : X \to \mathbb{R}$ *Lipschitz limitada, entonces* $\mu = v$*.*