UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y ACTUARIALES

MONOGRAFÌA PARA OPTAR AL TÌTULO DE LICENCIADO EN MATEMÀTICA

MÉTODOS MULTIPASOS DE TAMAÑO DE PASO VARIABLE PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PROBLEMA DE VALOR INICIAL

PRESENTADO POR:

BR. DAVIONNY GUTIÉRREZ GUILLERMO

BR. STANFORD JUNIOR HUMPHREYS LORIO

BR. KENNY ALFONSO MAYNNER CALISTRO

TUTOR:

M.Sc. MARTIN JOSÉ ALONSO CALDERÓN

LEÓN NICARAGUA, 9 DE MARZO 2023

“A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD”

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y ACTUARIALES

MONOGRAFÌA PARA OPTAR AL TÌTULO DE LICENCIADO EN MATEMÀTICA

MÉTODOS MULTIPASOS DE TAMAÑO DE PASO VARIABLE PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PROBLEMA DE VALOR INICIAL

PRESENTADO POR:

BR. DAVIONNY GUTIÉRREZ GUILLERMO

BR. STANFORD JUNIOR HUMPHREYS LORIO

BR. KENNY ALFONSO MAYNNER CALISTRO

APROBADO POR:

____

M.Sc. MARTIN JOSÉ ALONSO CALDERÓN

LEÓN NICARAGUA, 9 DE MARZO 2023

“A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD”

RESUMEN

Los métodos multipasos con tamaño variable de paso para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias son herramientas constructoras de integradores que solucionan numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias con problemas de valor inicial. En dichos integradores numéricos, basado en el algoritmo predictor-corrector con tamaño paso variable de Adams, se utiliza el algoritmo que permite una mayor precisión de las aproximaciones numéricas.

Estos métodos pueden implementarse en programas de cómputo elaborados en MATLAB, los que nos permiten determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El trabajo de investigación tiene como objetivo analizar los algoritmos de los métodos numéricos multipasos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias así mismo elaborar el programa en MATLAB del método numérico multipasos con tamaño variable de paso para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Palabras claves: **métodos multipasos, ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos numéricos para la solución de una ecuación diferencial mediante MATLAB.**

DEDICATORIA

El presente trabajo investigativo lo dedico principalmente a Dios, por ser el inspirador y por darme siempre la fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados, a mis padres Alfonso Denis Maynnor y Melania Livay Calistro por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, esta tesis y todo lo que logre hacer será gracias a su fortaleza, virtudes y valores inculcados en mí.

A todos mis hermanos por estar siempre presentes, acompañándome en todo y por el apoyo moral y económico que me brindaron a lo largo de todo este proceso de formación, a todas las personas que me han apoyado de una u otra manera y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que me abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todos mis amigos, compañero de clases, mi compañero de tesis Davionny Gutiérrez por el apoyo moral que siempre tuvimos uno con el otro y a las personas que nos acompañaron en el recorrido laborioso de este trabajo a mi tutor Msc. Martin Alonso Calderón y a mi asesora Msc. Lissette del Carmen quintero Vargas, quienes con su amplia experiencia y conocimientos me orientaron al correcto desarrollo y culminación con éxito este trabajo para la obtención de la licenciatura en Matematica pura.

Kenny Alfonso Maynnor Calistro

Dedico este trabajo principalmente a Dios quien ha sido mi guía, fortaleza y su mano de fidelidad y amor han estado conmigo hasta el día de hoy. Ami madre Liseth Lorio Spellman por su gran dedicación, amor, paciencia y esfuerzo, por ser la base de mi vida, por ser ejemplo de perseverancia y amor, me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más.

A mis hermanos por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo cada momento gracias. A toda mi familia que siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo, consejos y palabras de aliento que de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

A mis compañeros, amigos presentes y pasados, quienes sin esperar a nada a cambio compartieron sus conocimientos, alegrías y tristeza. Aquellas todas personas que durante estos cinco años estuvieran a mi lado apoyándome y lograron que este sueño se haga realidad.

Standford Humphreys

Al padre nuestro que está en los cielos por la vida, salud, sabiduría, por darme las fuerzas que siempre necesitaba y librarme de todo mal, al igual a mi abuela mi primera instructora de vida la que me enseño, me aconsejo sobre el mundo y de cómo vivir en ella, que descanse en paz.

A mi madre María Gutiérrez Guillermo la que es a la vez mi padre, ella es toda mi familia, mi inspiración por la que siempre estuve de pie, y por la que pude alcanzar mi meta, uno de mis sueños más deseados y exitosas de mi vida, gracias.

Finalmente a mis familiares, compañeros, amigos, amistades que me dieron la mano y me apoyaron tan siquiera con un vaso de agua se le agradece de corazón, muchas gracias por ese granito sembrados en mí que ahora es un árbol con muchos frutos para brindarles a otros.

Davionny Gutiérrez

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar nuestro agradecimiento se dirige a quien ha forjado nuestro camino y nos han dirigido por el sendero correcto, a Dios, el que en todo momento está con nosotros ayudándonos a aprender de nuestros errores y a no cometerlos otra vez, eres quien guía el destino de nuestras vidas. A nuestros padres y familiares que siempre nos han brindado su apoyo incondicional para poder cumplir todos nuestros objetivos personales y académicos ellos son los que nos han brindado el soporte material y económico para poder concentrarnos en los estudios y nunca abandonarlos.

Agradecemos profundamente a nuestro tutor M.Sc. Martin José Alonso y a nuestra asesora M.Sc Lissette del Carmen Quintero por su dedicación y tiempo en el proceso de la presente tesis. Agradecemos a todos nuestros compañeros los cuales muchos de ellos se han convertido en nuestros amigos. Gracias por las horas compartidas, los trabajos realizados en conjunto y las historias vividas.

Queremos brindar nuestro máximo agradecimiento a todo el personal y autoridades que conforman la universidad UNAN, León facultad de Ciencias Y Tecnología, que a través de sus directivos y maestros impartieron valiosos conocimientos y consejos, en especial al M.Sc. Martin Alonso Calderón, quien fue principal colaboradora durante todo el proceso que con su confianza, dirección y conocimiento permitió el desarrollo de esta tesis monográfica.

ÍNDICE GENERAL

CAPITULO 1 ASPECTOS INTRODUCTORIOS

1 Antecedentes

Los métodos de Adams son los métodos lineales multipasos más antiguos, ya que datan del siglo XIX. John C. Adams $(1819 - 1892)$, al analizar, en 1846, irregularidades en la órbita de Saturno hizo la conjetura de la existencia de otro planeta, por lo que cuando fue observado Urano, que hasta entonces no se conocía, sus métodos adquirieron fama, incluso fuera de la comunidad científica. Los métodos que se conocen como métodos de Adams, este no los públicos. Fueron publicados en 1885 los métodos que hoy se conocen como métodos de Adams-Bashforth o métodos explícitos, por Bashford, en un trabajo relacionado con el tratamiento numérico de problemas de capilaridad, tensión superficial y sobre la forma de una gota, aunque en dicho trabajo comento que ya eran conocidos desde 1885 por Adams. Los métodos implícitos, o métodos de Adams-Moulton aparecen en 1926, en un trabajo relacionado con problemas de balística.

A pesar de su antigüedad los métodos de Adams son los métodos lineales multipasos más utilizados y, debido a sus buenas propiedades, continúan en la actualidad siendo empleados mediante modernos algoritmos y, salvo problemas particulares, son los únicos métodos lineales multipasos de interés de propósito general. Aunque durante los años $1960 - 1970$ se utilizaron muchos otros métodos, como los métodos de Nystrom o los métodos de Milne-Simpson de los ejemplos y ejercicios del apartado anterior, todos ellos han perdido interés con la experiencia obtenida en el uso de los ordenadores de Adams son pues los más populares dentro de los métodos multipasos.

El método predictor-corrector fue diseñado por dos físicos matemáticos de edades diferentes en su época, cuando cada uno en forma independiente crearon su método ellos son.

- Adams Bashforth creo el modelo predictor
- Adams Moulton creo el modelo corrector

Generando de su unión el médelo predictor-corrector, el algoritmo procede en dos pasos.

1. El paso inicial de predicción comienza con una función ajustada a los valores de función y valores de derivada en un conjunto de puntos anterior para extrapolar (anticipar) el valor de esta función en un punto posterior.
2. El siguiente paso corrector, refina la aproximación inicial utilizando el valor predicho de la función y otro método para interpolar el valor de esa función desconocida en el mismo punto posterior.

Al considerar la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), un método predictor-corrector generalmente usa un método explicito para el paso del predictor y un método para el paso del corrector.

1.1 Introducción

En la presente investigación analizaremos sobre el metodo multipaso con tamaño variable de paso para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial, partiendo de algunos estudios posteriores de ecuaciones diferenciales ordinarias y algunos métodos que se ha estudiado sobre las aproximaciones de soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias de valor inicial.

Así mismo siguiendo con los estudios básicos de interés y analizando los métodos de un paso, multipasos y de paso variable haremos uso del algoritmo Predictor-corrector de tamaño de paso variable de Adams para la obtención de las soluciones numéricas que son aproximaciones de la solución exacta de una ecuación diferencial ordinaria con valor inicial, aplicados en ejemplos e ilustrados en tablas.

Los método de Runge-Kutta de cuarto orden, método predictor-corrector de cuarto orden de Adams y método de Runge-Kutta-Fehlberg que se utilizaran durante el desarrollo de esta investigación estos métodos son herramientas muy buenas para el control de error y las aproximaciones de las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial pero no tan eficaz y eficiente como el método multipaso con tamaño variable de paso que da una aproximación más exacta y un control de error mejorada esto se demostrara mediante la programación de los métodos utilizando el software MATLAB (MAtrix LAboratory "laboratorio de matrices) que es de vital importancia para este trabajo investigativo.

Contenidos de los capítulos

Este trabajo se divide en los siguientes capítulos:

- **Introducción:** Incluye el planteamiento del problema, su enfoque, antecedentes y los objetivos perseguidos.

- **Marco teórico:** métodos multipasos de tamaño de paso variable para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. En matemáticas, específicamente en el Análisis trata de diseñar métodos para aproximar de una manera eficiente las soluciones de problemas matemáticamente además de esto se introduce algunos conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.
- **Metodología:** Se presenta el plan a seguir para la correcta realización de esta investigación.

- **Resultado y discusión:** Mostraremos los resultados manuales obtenidos en la evaluación de los métodos y su funcionamiento.

- **Conclusiones:** para finalizar se presentan las conclusiones sobre el trabajo realizado y se proponen recomendaciones para trabajos futuros.

1.2 Objetivos

Objetivos Generales:

Analizar los algoritmos de los métodos numéricos multipasos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Objetivos Específicos:

- Aplicar el algoritmo predictor-corrector de tamaño paso variable de Adams para aproximar la solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria.

- Elaborar el programa en MATLAB del método numérico multipasos con tamaño de paso variable para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Comparar las ventajas del método de Runge-Kutta-Fehlberg con el método del predictor-corrector de tamaño de paso variable de Adams en la resolución de un mismo problema en lo que se refiere a eficiencia y exactitud.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

En este segundo capítulo se abordaran las definiciones más importantes tales como ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales lineales, ecuación diferencial lineal con problema de valor inicial y posteriormente la solución de una ecuación diferencial. Los cuáles serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo.

1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se da la definición de una ecuación diferencial obtenida de (Spiegel, (1983)) y (Zill. Dennis G, (2009))

Definición 2.1: Ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende solo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias) la ecuación se llama una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial.

Definición 2.2: orden de una ecuación diferencial.

El orden de una ecuación diferencial, es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Una ecuación diferencial general de orden n se puede representar mediante los símbolos:

$\boldsymbol{f(x, y, y') = 0}$ Primer orden

$\boldsymbol{f(x, y, y', y'') = 0}$ Segundo orden

$\boldsymbol{f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0}$ Orden n,

Definición 1.3: Solución de una ecuación diferencial.

Una solución de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación, esto es, la reduce a una identidad.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que tiene por lo menos n derivadas y satisface la ecuación. Es decir

$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots . f^{n}(x)\right) = 0$ Para todo x de I

Definición 1.4 Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal.

Una ecuación diferencial ordinaria lineal es una ecuación que puede ser escrita en la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Donde $F(x)$ y los coeficientes $a(x), a_1(x), \ldots . a_n(x)$ son funciones dadas de x y $a(x)$ no es idéntica a cero.

Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución, a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

Definición 1.5 Ecuación Diferencial con problema de valor inicial.

Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

1.4 Aspectos del análisis numérico

El análisis numérico trata de diseñar métodos para aproximar de una manera eficiente, las soluciones de problemas matemáticamente. Para obtener tal aproximación se idea un metodo llamado algoritmo.

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ninguna ambigüedad, una sucesión finita de pasos a realizar en un orden especifico.

El objetivo del algoritmo será generalmente el de implementar un procedimiento numérico para resolver un problema o aproximar una solución del problema.

Generalmente se selecciona métodos que produzcan resultados confiables en cuanto a la propagación del error que puede ocurrir cuando se aplica métodos numéricos. Con ellos se tiene la oportunidad de aproximar con cierta precisión de algunos problemas que no pueden resolverse exactamente.

1.5 Errores.

El análisis de error en los resultados es fundamental para cualquier problema ya sea realizado con una calculadora o con ayuda de una computadora. Los datos de entrada rara vez son exactos, ya que a menudo se basan en experimentos o son estimados, y los procesos numéricos a su vez introducen errores de varios tipos.

1.6 Tipos de errores

Existen tres tipos básicos de errores, error inherente, errores por truncamiento y error por redondeo.

Errores inherentes: son errores que existen en los valores de los datos, causados por incertidumbre en las mediciones, por verdaderas equivocaciones, o por la naturaleza necesariamente aproximada de la representación, mediante un numero finito de dígitos, de cantidades que no pueden representarse exactamente con el número de dígitos permisible.

Errores por truncamiento: para llevar a cabo operaciones de algunas funciones matemáticas los compiladores ejecutan estas funciones utilizando series infinitas de términos, pero es difícil llevar a cabo estos cálculos hasta el infinito, por lo tanto la serie tendrá que ser truncada. Truncamiento es el término usado para reducir el número de dígitos a la derecha del punto decimal, descartando los menos significativos.

Error por redondeo: es aquel tipo error en donde el número significativo de dígitos después del punto decimal se ajusta a un número específico provocando con ello un ajuste en el último digito que se toma en cuenta. Los errores de redondeo resultan de representar aproximadamente números que son exactos. Proceso mediante el cual se eliminan decimales poco significativos a un número decimal (Alonso, 2004).

2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

2.1 Introducción

En análisis numérico, los métodos de Runge-kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue desarrollado alrededor del año 1990 por los matemáticos C. Runge y M.W Kutta.

Probablemente es uno de los métodos numéricos más conocidos y más exactos, usado para obtener soluciones aproximadas para un problema con valores iniciales $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ es el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Como el nombre lo indica existen diferentes métodos de Runge-Kutta de diferentes órdenes.

2.2 Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Según (Burden Richard L F. D., (2010)) El método de Runge Kutta es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales que surge como una mejora del método de Euler. El método de Euler se puede considerar como un método de Runge - Kutta de primer orden, el Heun, es un metodo de Runge-Kutta de orden dos.

Los métodos de Runge-Kutta logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todas se pueden denotar en la forma generalizada de la ecuación.

El metodo de Runge-Kutta que se usa de manera común es de orden cuatro en forma de ecuación de diferencia, dado como sigue.

RUNGE-KUTTA DE ORDEN CUATRO

$$w_0 = \alpha$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

Para cada $i = 0,1,2, \dots, N-1$ y empleado para resolver el problema de valor inicial de primer orden

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

Puede generalizarse como sigue. Se elige un entero $N > 0$ y se hace $h = (b-a)/N$ realizando una partición del intervalo $[a, b]$ en N sub-intervalos con los puntos de red $t_j = a + j * h$ para cada $j = 0,1,2, \dots, N$.

Ejemplo ilustrativo 1. Aplique el metodo de Runge Kutta de orden cuatro para obtener aproximaciones a la solución del problema de valor inicial.

$$\boldsymbol{y' = y - t^2 + 1, \;\; 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5}$$

Con $\boldsymbol{h = 0.2}$, $\boldsymbol{N = 10}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{t_i = 0.2i}$

Solución:

Para calcular el valor w_1 que corresponde ha $x = 0$ y $h = 0.2$ tendremos que calcular los k_j de manera sucesiva, de la siguiente manera

$w_0 = 0$

$k_1 = 0.2f(0{,}0.5) = 0.2(1.5) \longrightarrow k_1 = 0.3$

$k_2 = 0.2f(0.1{,}0.65) = 0.2(1.64) \longrightarrow k_2 = 0.328$

$k_3 = 0.2f(0.1{,}0.664) = 0.2(1.654) \longrightarrow k_3 = 0.3308$

$k_4 = 0.2f(0.2{,}0.8308) = 0.2(1.7908) \longrightarrow k_4 = 0.35816$

$w_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(0.3 + 2(0.328) + 2(0.3308) + 0.35816) \longrightarrow w_1 = 0.8292933$

Y así sucesivamente llega hasta obtener $w_3 = 1.6489220$ haciendo los respectivos cálculos.

Por tanto las aproximaciones mediante este método son:

$w_1 = 0.8292933$, $w_2 = 1.2140762$ y $w_3 = 1.6489220$

De esta manera se muestra los resultados restantes en la siguiente tabla.

2.3 Tabla 1: tabla de iteraciones del método de Runge-Kutta de orden cuatro

Iteraciones I	***Tamaño de paso*** t_i	***Valores exactos*** $y_i = y(t_i)$	***Runge-kutta orden 4*** (w_i)	***Error*** $\lvert y_i - w_i \rvert$
0	0.0	0.5	0.5	0.0000000
1	0.2	0.82929862	0.8292933	0.000053
2	0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
3	0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
4	0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000239
5	1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000305
6	1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000389
7	1.4	3.73324000	3.7323401	0.0000495
8	1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000630
9	1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000799
10	2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001013

3.4 Método de Runge-Kutta Fehlberg

Una técnica popular que usa la desigualdad $q \leq \left(\frac{\varepsilon h}{|\widetilde{w}_{i+1}-w_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$ para encontrar el error es el método Runge-Kutta-Fehlberg, esta técnica utiliza el método Runge-Kutta con error de truncamiento local de orden 5.

$$\widetilde{w}_{i+1} = w_{i+1} + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$

Para calcular el error local en un método Runge-Kutta de orden 4 dado por

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

Donde los coeficientes de las ecuaciones son:

$K_1 = hf(t_i, w_i),$

$K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{K_1}{4}\right),$

$K_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3K_1}{32} + \frac{9}{32}K_2\right),$

$K_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right),$

$K_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right),$

$K_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_6\right),$

Una ventaja de este método es que solo se requieren seis evaluaciones de f por paso. Los métodos arbitrarios de Runge-Kutta de ordenes 4 y 5, utilizado juntos requiere por lo menos cuatro evaluaciones de f para el método de cuarto orden y un sexto adicional para el método de quinto orden, para un total de por lo menos 10 evaluaciones de función. Por lo que el metodo Runge-Kutta-Fehlberg tiene al menos 40% de disminución.

En la teoría de control de error, un valor inicial de h en el i-ésimo paso se usa para encontrar los primeros valores de w_{i+1} y $\widetilde{w}_{i+1}$, lo cual conduce a la determinación de q para ese paso y, entonces, se repiten los cálculos. Este procedimiento requiere el doble de evaluaciones de función por paso sin control de error. En la práctica, el valor de q que se utilizara se selecciona de una forma diferente con el fin de hacer que el costo de la evaluación de función incrementado valga la pena. El valor de q determinado en el i-ésimo paso se utiliza para dos propósitos:

- Cuando $R > \epsilon,$ rechazamos la condición inicial de h en él i-ésimo paso y repetimos los cálculos mediante qh.

- Cuando $R \leq \epsilon,$ aceptamos el valor calculado en él i-ésimo paso mediante el tamaño de paso $h,$ pero cambiamos el tamaño de paso para qh para el $(i+1)$ paso.

Debido a la desventaja en términos de evaluaciones de función que se debe pagar si los pasos se repiten, q tiende a ser seleccionado de manera conservadora. De hecho, para el metodo de Runge-Kutta-Fehlberg con $n = 4$, una elección común es

Fórmula para la selección de q para el metodo Runge-Kutta-Fehlberg con $n = 4$.

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|\widetilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.84\left(\frac{\varepsilon h}{|\widetilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.84\left(\frac{\epsilon}{R}\right)^{\frac{1}{\mathrm{n}}}$$

En el algoritmo para el método de Runge-Kutta-Fehlberg se añade el paso 9 para eliminar grandes modificaciones en el tamaño de paso. Esto se hace para no pasar demasiado tiempo con tamaños de paso pequeños en regiones con irregularidades en las derivadas de y y para evitar tamaños de paso grandes, lo cual puede resultar en la omisión de regiones sensibles entre los pasos. El procedimiento de incremento del tamaño de paso se puede evitar por completo a partir del algoritmo y el procedimiento de disminución del tamaño de paso que se usa solo cuando sea necesario para controlar el error. (Burden, (2010)).

3 MÉTODOS MULTIPASOS

3.1 Introducción

Según (Burden Richard L y. F., (2002)) El método de Euler, el método mejorado de Euler y el método de Runge-Kutta son ejemplos de métodos numéricos de un solo paso o inicio. En ellos se calcula cada valor sucesivo y_{n+1} solo con base en la información sobre el valor inmediato anterior y_n por otra parte, en los métodos de varios pasos, o continuos, los valores calculados a partir de varios pasos se usan para obtener el valor y_{n+1}. Existe gran cantidad de fórmulas de los métodos de varios pasos que son aplicables para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

Los métodos que hemos explicado hasta ahora se llaman métodos de un paso, porque la aproximación del punto de red t_{i+1} contiene información proveniente de uno solo de los puntos anteriores de red t_i aunque estas técnicas pueden usar la información relativa a la evaluación de funciones en los puntos entre t_i y t_{i+1}, no la conservan para utilizarla directamente en aproximaciones futuras. Toda la información que emplean se obtiene dentro del sub intervalo en que va aproximarse la solución.

Como la solución aproximada está disponible en los puntos de red $t_0, t_1, \dots, t_i$ antes de obtener la aproximación en t_{i+1} y como el error $|w_j - y(t_j)|$ tiende aumentar con j, parece razonable desarrollar métodos que usen estos datos precedentes más precisos al aproximar la solución en t_{i+1}.

Los métodos que utilizan la aproximación en más de uno de los puntos anteriores de red para determinar la aproximación en los puntos siguientes se llaman métodos multipasos. A continuación se da la definición exacta de estos métodos multipaso junto con la de dos tipos de ellos.

Definición 1.6 método multipaso: Un método multipaso de paso m para resolver el problema de valor inicial

$$y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha \tag{2}$$

Es aquel cuya ecuación de diferencias para obtener la aproximación w_{i+1} en el punto de red t_{i+1} puede representar por medio de la siguiente ecuación, donde m es un entero mayor que 1

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_1 + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h[b_m f(t_{1+1}, w_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{1+1-m}, w_{i+1-m})] \tag{3}$$

Para $i = m-1, m, \dots, N-1$ donde $h = (b-a)/N, a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ y $b_0, b_1, \dots., b_m$ son constantes y los valores iniciales

$$w_0 = \alpha, \qquad w_1 = \alpha_1, \qquad w_2 = \alpha_2, \dots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

Son específicos.

Cuando $b_m = 0$ el modo es explícito o abierto, ya que la ecuación **(2)** da entonces w_{i+1} de manera explícita en términos de los valores determinados. Cuando $b_m \neq 0$, el método es implícito o cerrado, ya que w_{i+1} se encuentra en ambos de la ecuación **(3)**

Y se especifica solo implícitamente.

Definición 1.7 método multipaso:

Si $y(t)$ es la solución al problema de valor inicial

$y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$ Y si

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_1 + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{1+1-m}, w_{i+1-m})]$$

Es el $(i+1)$-esimo paso en un método multipaso, el error local de truncamiento en este paso será.

$$\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \cdots - a_0 y(t_{i+1-m})}{h} - [b_m f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, y(t_{i+1-m}))] \quad \textbf{(4)}$$

Para cada $i = m-1, m, \ldots, N-1$

A continuación se incluyen algunos de los métodos multipasos explícitos, junto con sus valores iniciales requeridos y los errores locales de truncamiento.

Método de Adams-Bashforth de dos pasos:

$$w_0 = \alpha\,, \quad w_1 = \alpha_1$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \quad \textbf{(5)}$$

Donde $i = 1,2, \ldots, N-1$ el error local de truncamiento $\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{5}{12}y'''(\mu_i)h^2$, para alguna $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$

Método de Adams-Bashforth de tres pasos:

$$w_0 = \alpha\,, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})] \quad \textbf{(6)}$$

Donde $i = 1,2, \ldots, N-1$ el error local de truncamiento $\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{3}{8}y^4(\mu_i)h^3$, para alguna $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$

Método de Adams-Bashforth de cuatro pasos:

$$w_0 = \alpha\,, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})] \quad \textbf{(7)}$$

Donde $i = 3,4, \ldots, N-1$ el error local de truncamiento $\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^5(\mu_i)h^4$, para alguna $\mu_i \in (t_{i-3}, t_{i+1})$

A continuación se incluyen algunos de los métodos implícitos más comunes.

Método de Adams-Moulton de dos pasos:

$w_0 = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i+1}, w_{i+1})] \quad \textbf{(8)}$$

Donde $i = 1,2, \ldots, N-1$ el error local de truncamiento es $\mathcal{T}_{i+1}(h) = -\frac{1}{24} y^4(\mu_i)h^3$, para algún $\mu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$

Método de Adams-Moulton de tres pasos:

$w_0 = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $w_2 = \alpha_2$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})] \quad \textbf{(9)}$$

Donde $i = 1,2, \ldots, N-1$ el error local de truncamiento es $\mathcal{T}_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^5(\mu_i)h^4$, para alguna $\mu_i \in (t_{i-2}, t_{i+1})$

En la práctica, no se emplean los métodos multipasos de forma aislada. Solo se usan para mejorar aproximaciones obtenidas mediante los métodos explícitos.

Lo recomendable es la combinación de una técnica explicita con una implícita, a la que se llama método predictor-corrector. El método explicito predice y el método implícito corrige.

Método predictor-corrector de Adams-Bashforth y Adam-Moulton

Los métodos de Adams son métodos multipasos. Los métodos de Adams se pueden clasificar en dos grandes clases: los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton. Estos se pueden combinar para formar los métodos predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton.

La idea fundamental del método de Adams-Bashforth de n pasos es usar un polinomio de interpolación de $f(t, y(t))$ que pasa por los n puntos esto es:

$(t_i, f_i)(t_{i-1}, f_{i-1}) \dots, (t_{i+1-m}, f_{i+1-m})$.

Ahora la idea fundamental del método de Adams-Moulton de n pasos es usar un polinomio de interpolación de $f(t, y(t))$ que pasa por los $n+1$ puntos esto es:

$(t_{i+1}, f_{i+1}), (t_i, f_i), \dots, (t_{i+1-m}, f_{i+1-m})$.

4 Método predictor-corrector de Adams de cuarto orden

Considere el siguiente método de cuarto orden para resolver un problema de valor inicial. La técnica de estos métodos es la siguiente, el primer paso es calcular los valores iniciales w_0, w_1, w_2 y w_3 para el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos. Para eso usamos un método de cuarto orden de un paso, el método de Runge-kutta de cuarto orden.

El siguiente paso es calcular una aproximación, ${w_4}^{(0)}$ para $y(t_4)$ usando el método de Adams-Bashforth como predictor

$$ {w_4}^{(0)} = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)], $$

Esta aproximación se mejora insertando $w_4^{(0)}$ en el segundo miembro del método de Adams-Moulton de tres pasos utilizando este método como corrector

$$w_4^{(1)} = w_3 + \frac{h}{24}\left[9f\left(t_4, w_4^{(0)}\right) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)\right]$$

El valor de $w_4^{(1)}$ se usa después como una aproximación para $y(t_4)$ y se repite la técnica utilizada en el método de Adams-Bashforth como predictor para encontrar $w_5^{(0)}$ y $w_5^{(1)}$ que son las aproximaciones inicial y final a $y(t_5)$ etc. En teoría, se pueden obtener aproximaciones mejoradas para $y(t_{i+1})$ iterando la fórmula de Adams-Moulton

$$w_{i+1}^{(k+1)} = w_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(t_{i+1}, w_{i+1}^{(k)}\right) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})\right],$$

En la práctica puesto $\left\{w_{i+1}^{(k+1)}\right\}$ converge en la aproximación real dada por la formula implícita y no en la solución $y(t_{i+1})$ es más eficiente usar una reducción en el tamaño de paso cuando se necesite mejor la precisión.

Así generalizaremos esta técnica hacia los métodos multipasos de tamaño variable de paso para la solución numérica de ecuaciones diferenciales de valor inicial.

Ejemplo ilustrativo 2. Aplique el método predictor-corrector de cuarto orden de Adams con $h = 0.2$ y los valores iniciales del método de cuarto orden de Runge-Kutta para el problema de valor inicial.

$$\boldsymbol{y' = y - t^2 + 1,\ \ 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5}$$

Solución:

Aplicamos ahora el método predictor-corrector de Adams dado en las formulas $(\mathbf{7})$ y $(\mathbf{9})$ habiendo aplicado previamente Runge-Kutta para determinar los valores de arranque para el predictor-corrector el cual se obtuvieron las siguientes aproximaciones.

$$y(0) \approx w_0 = 0.5\ , y(0.2) \approx w_1 = 0.8292933, y(0.4) \approx w_2 = 1.2140762\ y\ y(0.6) \approx w_3 = 1.6489220$$

Y posteriormente el método de Adams-Bashforth de cuarto orden nos da

$$y(0.8) \approx wp_4 = w_3 + \frac{0.2}{24}(55f(0.6, w_3) - 59f(0.4, w_2) + 37f(0.2, w_1) - 9f(0, w_0))$$

$$= 1.6489220 + \frac{0.2}{24}(55f(0.6,1.6489220) - 59f(0.4,1.2140762)$$

$$+ 37f(0.2,0.8292933) - 9f(0,0.5))$$

$$= 1.6489220 + 0.0083333(55(2.2889220) - 59(2.0540762)$$

$$+ 37(1.7892933) - 9(1.5)) = 2.1272892$$

Ahora utilizaremos el wp como el predictor de la aproximación para $y(0.8)$ y determinaremos el valor correcto wc a partir del método implícito de Adams-Moulton. Esto nos da

$$y(0.8) \approx wc_4 = w_3 + \frac{0.2}{24}(9f(0.8, wp) + 19f(0.6, w_3) - 5f(0.4, w_2) + f(0.2, w_1))$$

$$= 1.6489220 + \frac{0.2}{24} + (9f(0.8,2.1272892) + 19f(0.6,1.6489220)$$

$$- 5f(0.4,1.2140762) + f(0.2,0.8292933)) =$$

$$= 1.6489220 + 0.0083333(9(2.4872892) + 19(2.2889220) - 5(2.0540762)$$

$$+ (1.7892933)) = 2.1272056$$

Ahora utilizamos esta aproximación para determinar el predictor wp_5 para $y(1.0)$ como

$$y(1.0) \approx wp_5 = w_4 + \frac{0.2}{24}(55f(0.8, w_4) - 59f(0.6, w_3) + 37f(0.4, w_2) - 9f(0.2, w_1))$$

$$= 2.1272056 + \frac{0.2}{24}(55f(0.8,2.1272056) - 59f(0.6,1.6489220)$$

$$+ 37f(0.4,1.2140762) - 9f(0.2,0.8292933))$$

$$= 2.1272056 + 0.0083333(55(2.4872056) - 59(2.2889220)$$

$$+ 37(2.0540762) - 9(1.7892933)) = 2.6409314$$

Y corregimos esto con.

$$y(1.0) \approx wc_5 = w_4 + \frac{0.2}{24}(9f(1.0, w_4) + 19f(0.8, w_4) - 5f(0.6, w_3) + f(0.4, w_2))$$

$$= 2.1272056 + \frac{0.2}{24}(9f(1.0{,}2.6409314) + 19f(0.8{,}2.1272892)$$

$$- 5(0.6{,}1.6489220) + f(0.4{,}1.2140762))$$

$$= 2.1272056 + 0.0083333(9(2.6409314) + 19(2.4872056) - 5(2.2889220)$$

$$+ (2.0540762)) = 2.6408286$$

Así sucesivamente llega hasta obtener $wc_{10} = 5.3053707$ mediante la ecuación predictor-corrector, estas aproximaciones para $y(0.8)$ y $y(1.0)$ son precisas, respectivamente, dentro de

$|2.1272295 - 2.1272056| = 2.39 \times 10^{-5}$ Y $|2.6408286 - 2.6408591| = 3.05 \times 10^{-5}$

En comparación con las de Runge-Kutta, lo cual es preciso, respectivamente, dentro

$|2.1272027 - 2.1272892| = 2.69 \times 10^{-5}$ Y $|2.6408227 - 2.6408591| = 3.64 \times 10^{-5}$

Las aproximaciones restantes que se obtuvieron aplicando el método predictor-corrector se muestran en la siguiente tabla.

4.1 Tabla 2: tabla de Iteraciones del método predictor-corrector de orden cuatro.

Iteraciones I	***Tamaño de paso*** t_i	***Valores exactos*** $y_i = y(t_i)$	***Aproximaciones*** (w_i)	***Error*** $\|y_i - w_i\|$
0	0.0	0.5	0.5	0.0000000
1	0.2	0.8292986	0.8292933	0.000053
2	0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
3	0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
4	0.8	2.1272295	2.1272056	0.0000239
5	1.0	2.6408591	2.6408286	0.0000305
6	1.2	3.1799415	3.1799026	0.0000389
7	1.4	3.73324000	3.7323505	0.0000495
8	1.6	4.2834838	4.2834208	0.0000630
9	1.8	4.8151763	4.8150964	0.0000799
10	2.0	5.3054720	5.3053707	0.0001013

4.2 Estabilidad de los métodos numéricos

Una cuestión importante en el uso de métodos numéricos es su estabilidad para aproximar la solución de un problema de valor inicial. En otras palabras, un metodo numérico es estable si pequeños cambios en la condición inicial redundan son en pequeños cambios en la solución calculada.

Se dice que un método numérico es inestable cuando no es estable. La razón de que las consideraciones de estabilidad sean importantes es que, en cada etapa sucesiva después de la primera etapa de una Técnica numérica, esencialmente comenzamos otra vez con un nuevo problema de valor inicial, donde la condición inicial es el valor aproximado de la solución calculada en la etapa previa.

4.3 Ventajas y desventajas de los métodos de varios pasos

En la elección de un método para resolver numéricamente una ecuación diferencial influyen muchos aspectos. Los métodos de un solo paso, en particular el método de Runge-Kutta, a, menudo se eligen por su exactitud y porque son fáciles de programar. No obstante, una de sus principales desventajas es que el lado derecho de la ecuación diferencial debe evaluarse muchas veces en cada etapa. Por ejemplo, el método de Runge-Kutta requiere cuatro evaluaciones de función por etapa. (Zill. Dennis G, (2009))

5 Métodos multipasos con tamaño variable de paso

Según (Richard, (2010)) El método de Runge-Kutta-Fehlberg se usa para controlar el error porque cada paso ofrece, con un pequeño costo adicional, dos aproximaciones comparables y relacionadas con el error local. Las técnicas predictor-corrector siempre generan dos aproximaciones en cada paso, por lo cual son candidatas naturales para adaptar el control del error.

Con el fin de mostrar el procedimiento de control del error, construiremos un método predictor-corrector con tamaño variable de paso, utilizando como predictor el método

Explícito de Adams-Bashforth de cuatro pasos y como corrector el método implícito de Adams-Moulton de tres pasos como corrector.

El método de Adams-Bashforth de cuatro pasos proviene de la relación

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[55f(t_i, y(t_i)) - 59f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 37f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) - 9f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))] + \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^5$$

Para algún $\hat{\mu}_i \epsilon (t_{i-3}, t_{i+1})$. La suposición de que las aproximaciones $w_0, w_1, \ldots, w_i$ son todas exactas, significa que el error de truncamiento de Adams-Bashforth es

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\hat{\mu}_i) h^4 \qquad \textbf{(10)}$$

Un análisis similar del método de Adams-Moulton de tres pasos, que proviene de

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))) + 19f(t_i, y(t_i)) - 5f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4,$$

Para algún $\hat{\mu}_i \epsilon (t_{i-2}, t_{i+1})$ nos lleva al error local de truncamiento

$$\frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) h^4. \qquad \textbf{(11)}$$

Si queremos avanzar más, debemos suponer que, para un valor pequeño de h,

$$y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i).$$

La efectividad del método de control de error depende directamente de esta suposición. Si restamos la ecuación **(10)** a la ecuación **(11)** tendremos

$$\frac{w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}}{h} = \frac{h^4}{720}\left[251 y^{(5)}(\hat{\mu}_i) + 19 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)\right] \approx \frac{3}{8} h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i),$$

Y, por tanto,

$$y^{(5)}(\tilde{\mu}_i) \approx \frac{8}{3h^5}\left(w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right) \tag{12}$$

Al utilizar este resultado para suprimir el término que contiene $h^4 y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$ en **(11)** obtenemos la aproximación al error

$$|T_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19h^4}{720} . \frac{8}{3h^5}\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right| = \frac{19\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}{270h}$$

Supóngase que ahora reconsideramos **(10)** con un nuevo tamaño de paso qh que genera nuevas aproximaciones $\widehat{w}_{i+1}^{(0)}$ y $\widehat{w}_{i+1}$. El objetivo es escoger q, tal que el error local de truncamiento de **(10)** este acotado por la tolerancia prescrita ε. Si suponemos que el valor $y^{(5)}(\mu)$ en **(10)** asociado a qh se aproxima también por medio de **(11)**, entonces,

$$\frac{|y(t_i + qh) - \widehat{w}_{i+1}|}{qh} = \frac{19q^4h^4}{720}\left|y^{(5)}(\mu)\right| \approx \frac{19q^4h^4}{720}\left[\frac{8}{3h^5}\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|\right],$$

Y debemos seleccionar a q tal que

$$\frac{|y(t_i + qh) - \widehat{w}_{i+1}|}{qh} \approx \frac{19q^4}{720}\frac{\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}{h} < \varepsilon.$$

Es decir, seleccionamos q tal que

$$q < \left(\frac{270}{19}\frac{h\varepsilon}{\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}\right)^{1/4} \approx 2\left(\frac{h\varepsilon}{\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

En este planteamiento hemos hecho varias suposiciones de aproximación, así que en la práctica se selecciona q en forma conservadora, generalmente así

$$q = 1.5\left(\frac{h\varepsilon}{\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}\right)^{1/4}.$$

Un cambio del tamaño de paso en un método multipasos requiere más evaluaciones de funciones que un método de un paso, porque hay que calcular nuevos valores iniciales uniformemente espaciados. En consecuencia, en las practicas se acostumbra ignorar el cambio de tamaño de paso siempre que el error local de truncamiento se encuentre entre $\varepsilon/10$ y ε, es decir, cuando

$$\frac{\varepsilon}{10} < |T_{i+1}(h)| = \frac{|y(t_{i+1}) - w_{i+1}|}{h} \approx \frac{19\left|w_{i+1} - w_{i+1}^{(0)}\right|}{270h} < \varepsilon$$

Además, a q suele asignársele una cota superior para asegurarse de que una sola aproximación de exactitud poco usual no produzca un tamaño de paso demasiado grande.

CAPÍTULO 3 DISEÑO METODOLÓGICO

5.1 TIPO DE ESTUDIO

Según el tipo de datos empleados es cuantitativo: debido a que se utilizó herramientas matemáticas tales como ecuaciones diferenciales y análisis numérico en el software MATLAB para la resolución de ejercicios prácticos del método predictor-corrector con tamaño de paso variable.

Según de manipulación de variables es experimental: puesto que se hace uso de manipulación de dos variables, que son el intervalo solución, el tamaño de paso mínimo y máximo una dependiente de la otra y se controla el aumento o disminución de ellas en el tiempo.

5.2 ETAPAS DEL PROYECTO

El tipo de investigación en este estudio es proyectiva ya que, consiste en el diseño de un programa en matlab que facilite el cálculo de ejercicios prácticos del método multipasos de tamaño de paso variable.

Para cumplir con los objetivos en este trabajo seguiremos el siguiente esquema.

Etapa I: Recolección de la información

En esta parte de la investigación se obtuvo información a través de los libros físicos, digitales, artículos relacionados con el tema y sitios web así mismo se procedió a indagar todo lo referente al método multipaso con tamaño de paso variable para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Etapa 2: Selección de software a usar

Para desarrollar el código numérico que nos permita resolver ejercicios teóricos del método multipaso de tamaño paso variable se ha seleccionado el software MATLAB.

Etapa 3: Desarrollo del código numérico en MATLAB

En esta etapa se describe inicialmente el método multipaso, que son el método predictor-corrector de cuarto orden, control de error del método de Runge-Kutta-Fehlberg, luego mediante usos de comandos del software se definieron aquellos parámetros iniciales que son necesario para el funcionamiento del método; Acto seguido se procedió a la implementación del algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden que nos permite obtener soluciones aproximadas al algoritmo de tamaño de paso variable, finalmente se establecieron comandos que permiten simular mediante tablas las soluciones encontradas.

Etapa 4: comprobación de la funcionalidad del programa.

En esta etapa se evaluó la funcionalidad del programa mediante la resolución de unas series de ejercicios teóricos en el cual se pudo comprobar la eficacia de sus aproximaciones mediante tablas.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6 ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En cada capítulo podemos dar los siguientes resultados.

En el capítulo 1 se da la parte introductoria de los métodos multipasos, posteriormente los objetivos generales y específicos.

En el capítulo 2 se desarrolla el método de Runge-kutta la cual es un conjunto de métodos genéricos iterativos explícitos e implícitos, de resolución de ecuaciones diferenciales, es uno de los métodos numéricos más conocidos y más exactos para obtener soluciones aproximadas para un problema con valores iniciales, así mismo de todos los métodos de Runge-kutta el más usado es el de cuarto orden en el que se requiere realizar cuatro evaluaciones por paso para que sea mejor. Además en este capítulo se desarrolla el método predictor-corrector de cuarto orden lo cual es un método de cuarto orden para resolver un problema de valor inicial, la técnica de este metodo es la siguiente, el primer paso es calcular los valores iniciales w_0, w_1, w_2 y w_3 para el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos. Para eso usamos un método de cuarto orden de un paso, el método de Runge-kutta de cuarto orden.

El siguiente paso es calcular una aproximación, ${w_4}^{(0)}$ para $y(t_4)$ usando el método de Adams-Bashforth como predictor luego Esta aproximación se mejora insertando ${w_4}^{(0)}$ en el segundo miembro del método de Adams-Moulton de tres pasos utilizando este método como corrector. Seguidamente el método multipaso de tamaño de paso variable, en donde el método de Runge-Kutta-Fehlberg se usa para controlar el error porque en cada paso ofrece, con un pequeño costo adicional dos aproximaciones comparables y relacionadas con el error local. Las técnicas predictor-corrector siempre generan dos aproximaciones en cada paso, por lo cual son candidatas naturales para adaptar el control del error.

6.1 ALGORITMO (1) DEL MÉTODO PREDICTOR-CORRECTOR DE TAMAÑO DE PASO VARIABLE

Predictor-corrector de tamaño de paso variable de Adams

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha$$

Con un error local de truncamiento dentro los límites de una tolerancia dada

Entrada extremo a, b; condición inicial α ; tolerancia TOL; tamaño máximo de paso $hmáx$; tamaño mínimo de paso $hm\text{ín}$.

SALIDA i, t_i, w_i, h donde en el i-esimo paso w_i aproxima $y(t_i)$ y se usó el tamaño de paso h, o bien un mensaje de que se rebaso el tamaño mínimo de paso.

Paso 1 plantee un subalgoritmo para el método Runge-Kutta de cuarto orden al que se asignara el nombre $RK4(h, v_0, x_0, v_1, x_1, v_2, x_2, v_3, x_3)$ que acepta como entrada un tamaño de paso h y valores iniciales $v_0 \approx y(x_0)$ y devuelve $\{(x_j, v_j) \,/\, j = 1,2,3\}$ definido por lo siguiente:

Para $j = 1,2,$

Tome $K_1 = hf(x_{j-1}, v_{j-1})$;

$$K_2 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_1/2)$$

$$K_3 = hf(x_{j-1} + h/2, v_{j-1} + K_2/2)$$

$$K_4 = hf(x_{j-1} + h, v_{j-1} + K_3)$$

$$v_j = v_{j-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$$

$$x_j = x_0 + jh$$

Pasó 2 Tome $t_0 = a;$

$$w_0 = \alpha;$$

$$h = hmáx;$$

$$BAN = 1; (BAN\ sera\ usado\ para\ salir\ del\ ciclo\ en\ el\ paso\ 4.)$$

$$ULT = 0; (ULT\ indica\ cuando\ se\ calcula\ el\ ultimo\ valor.)$$

SALIDA (t_0, w_0).

Pasó 3 Llame $RK4(h, w_0, t_0, w_1, t_1, w_2, t_2, w_3, t_3);$

Tome $NBAN = 1;$ $(indica\ calculo\ a\ partir\ de\ RK4)$.

$i = 4;$

$t = t_3 + h.$

Paso 4 Mientras $(BAN = 1)$ haga pasos 5-20$w_{m,1} = u(m, t_1) = 0$

Ahora podemos usar los valores $w_{i,1}$ para generar todo los valores de la forma $w_{i,2}$.

Paso5 Si $WP = w_{i-1} + \frac{h}{24}[55f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 59f(t_{i-2}, w_{i-2}) + 37f(t_{i-3}, w_{i-3}) - 9f(t_{i-4}, w_{i-4})];$ $(predice\ w_i)$

$$WC = w_{i-1} + \frac{h}{24}[9f(t, WP) + 19f(t_{i-1}, w_{i-1}) - 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) + f(t_{i-3}, w_{i-3})]; \quad (corrige\ w_i)$$

$\sigma = 19|WC - WP|/(270h).$

Paso 6 Si $\sigma \leq TOL$ entonces haga pasos 7-16 (Resultado aceptado.)

Si no, haga pasos 17-19. (Resultado rechazado.)

Paso 7 Tome $w_i = WC$; (Resultado aceptado.)

$t_i = t$

Paso 8 Si $NBAN = 1$ entonces para $j = i - 3, i - 2, i - 1, i$

SALIDA $\left(j, t_j, w_j, h\right)$;

(Los resultados previos también aceptados.)

Si no, SALIDA (i, t_i, w_i, h).

(Los resultados previos ya aceptados.)

Paso 9 Si $ULT = 1$ entonces tome $BAN = 0$ (siguiente paso es el 20.)

Si no, haga pasos 10-16.

Pasó 10 Tome $i = i + 1$

$NBAN = 0$.

Paso 11 Si $\sigma \leq 0.1\ TOL\ o\ t_{i-1} + h > b$ entonces haga pasos 12-16 (Aumente h si es más preciso de lo requerido o disminuya h para incluir $a\ b$ como un punto de red).

Pasó 12 Tome $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$.

Paso 13 Si $q > 4$ entonces tome $h = 4h$

Si no, tome $h = qh$

Paso 14 Si $h > hmáx$ entonces tome $h = hmáx$

Paso 15 Si $t_{i-1} + 4h > b$ entonces

Tome $h = (b - t_{i-1})/4$;

$ULT = 1$.

Pasó 16 Llame $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$;

Tome $NBAN = 1$;

$i = i + 3$. $(terminada\ rama\ verdadera.\ siguiente\ paso\ es\ el\ 20.)$

Pasó 17 tome $q = (TOL/(2\sigma))^{1/4}$. $(rama\ falsa\ desde\ el\ paso\ 6{:}\ resultado\ rechazado)$

Paso 18 Si $q < 0.1$ entonces tome $h = 0.1h$

Si no, tome $h = qh$

Paso 19 Si $h < hmín$ entonces tome $BAN = 0$;

SALIDA $('hmín\ rebasado')$

Si no

Si $NBAN = 1$ entonces tome $i = i - 3$;

(Resultados previos también rechazados.)

Llame $RK4(h, w_{i-1}, t_{i-1}, w_i, t_i, w_{i+1}, t_{i+1}, w_{i+2}, t_{i+2})$;

Tome $i = i + 3$;

$NBAN = 1$

Pasó 20 Tome $t = t_{i-1} + h$.

Paso 21 PARAR

MÉTODO MULTIPASO DE TAMAÑO DE PASO VARIABLE.

Ejemplo ilustrativo 3: Utilice el método predictor-corrector de tamaño de paso variable de Adams con tamaño máximo de paso $hmax = 0.2$, tamaño mínimo de paso $hmin = 0.01$ y tolerancia $TOL = 10^{-5}$ para aproximar la solución del problema de valor inicial.

$$y' = y - t^2 + 1,\ \ 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5$$

<u>Solución</u>: Ésta es una continuación y modificación del problema considerado en el ejemplo 1 al inicio de la sección. En ese ejemplo encontramos que las aproximaciones de inicio a partir de Runge-Kutta son

$$y(0) \approx w_0 = 0.5\ , y(0.2) \approx w_1 = 0.8292933, y(0.4) \approx w_2 = 1.2140762\ y\ y(0.6) \approx w_3 = 1.6489220$$

Y el método de Adams-Bashforth nos da.

$$\begin{aligned}(0.8) \approx wp_4 = w_3 + \frac{0.2}{24}(55f(0.6, w_3) - 59f(0.4, w_2) + 37f(0.2, w_1) - 9f(0, w_0))\\ = 1.6489220 + \frac{0.2}{24} + (55f(0.6{,}1.6489220) - 59f(0.4{,}1.2140762)\\ + 37f(0.2{,}0.8292933) - 9f(0{,}0.5))\\ = 1.6489220 + 0.0083333(55(2.2889220) - 59(2.0540762)\\ + 37(1.7892933) - 9(1.5)) = 2.1272892\end{aligned}$$

Ahora utilizaremos el wp como el predictor de la aproximación para $y(0.8)$ y determinaremos el valor correcto wc a partir del metodo implícito de Adams-Moulton. Esto nos da

$$\begin{aligned}y(0.8) \approx wc_4 = w_3 + \frac{0.2}{24}(9f(0.8, wp) + 19f(0.6, w_3) - 5f(0.4, w_2) + f(0.2, w_1))\\ = 1.6489220 + \frac{0.2}{24} + (9(0.8{,}2.1272892) + 19f(0.6{,}1.6489220)\\ - 5f(0.4{,}1.2140762) + f(0.2{,}0.8292933))\\ = 1.6489220 + 0.0083333(9(2.4872892) + 19(2.2889220 - 5(2.0540762)\\ + (1.7892933)) = 2.1272056\end{aligned}$$

Ahora determinaremos si las aproximaciones son suficientes precisas o si necesita cambiar el tamaño de paso para es encontramos primero

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = |2.1272056 - 2.1272892| = 2.941 \times 10^{-5}$$

Puesto que esto excede la tolerancia de 10^{-5}, se necesita un tamaño de paso nuevo y este es

$$qh = \left(\frac{10^{-5}}{2\delta}\right)^{1/4} = \left(\frac{10^{-5}}{2(2.941 \times 10^{-5})}\right)^{1/4}(0.2) = 0.642(0.2) \approx 0.12841297$$

Como consecuencia, necesitamos comenzar de nuevo con el procedimiento, al calcular los valores de Runge-Kutta con este tamaño de paso y, a continuación utilizamos el metodo predictor corrector con este tamaño de paso para calcular los valores nuevos w_C y w_P

Por tanto comenzaremos nuevamente aplicando el metodo Runge-Kutta con el tamaño de paso $h = 0.12841297$ y con la tolerancia 10^{-5} así trabajando con la misma función

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.5$$

Con $h = 0.12841297 \; y \; w_i = 0.5$

De esta manera la aproximación para $y(0.128)$ se obtiene mediante

$w_0 = 0$

$k_1 = hf(t_0, w_0) = 0.128f(0{,}0.5) = 0.128[0.5 - 0^2 + 1] \longrightarrow k_1 = 0.19269455$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.128f\left(0 + \frac{0.128}{2}, 0.5 + \frac{1}{2}(0.19269455)\right)$$
$$= 0.128f(0.064, 0.596) = 0.128[0.596 - 0.064^2 + 1]$$
$$\longrightarrow k_2 = 0.204460893$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.128f\left(0 + \frac{0.128}{2}, 0.5 + \frac{1}{2}(0.204460893)\right)$$

$$= 0.128f(0.064, 0.602230446) = 0.128[0.602230446 - 0.064^2 + 1]$$

$$\longrightarrow k_3 = 0.20522119$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, w_0 + k_3) = 0.128f(0 + 0.128, 0.5 + 0.20522119)$$
$$= 0.128f(0.128, 0.70522119) = 0.128[0.70522119 - 0.128^2 + 1]$$

$$\longrightarrow k_4 = 0.216868599$$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$w_1 = 0.5 + \frac{1}{6}(0.19269455 + 2(0.204460893) + 2(0.20522119) + 0.216868599)$$

$\boldsymbol{w_1} = 0.70480402$

Las aproximaciones siguientes lo obtenemos aplicando el mismo paso con el método de Runge-Kutta de cuarto orden así las aproximaciones son:

$w_0 = 0\,, w_1 = 0.70480402\,, w_2 = 0.93320019\;\; y\;\; w_3 = 1.18390218$

Posteriormente aplicamos las ecuaciones predictor y corrector

La ecuación para el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos es

$w_0 = \alpha\,,\quad w_1 = \alpha_1,\quad w_2 = \alpha_2,\quad w_3 = \alpha_3,$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

$w_0 = 0.5,\quad w_1 = 0.70480402\,,\quad w_2 = 0.93320019\;,\quad w_3 = 1.18390218$

Tomamos a $y(0.51365188)$ como la aproximación para el valor predictor esto es a

$$y(0.51) \approx w_P = w_3 + \frac{0.12841297}{24}(55f(0.38523891, w_3) - 59f(0.25682594, w_2)$$
$$+ 37f(0.12841297, w_1) - 9f(0, w_0)$$

$$y(0.51) \approx w_P = w_3 + \frac{0.12841297}{24}(55f(0.38523891{,}1.18390218) - 59f(0.25682594{,}0.93320019) + 37f(0.12841297{,}0.70480402) - 9f(0{,}0.5)$$

$$y(0.51) \approx w_P = w_3 + \frac{0.12841297}{24}(55f(2.035493162) - 59f(1.867240627) + 37f(1.688314129) - 9f(1.5) \longrightarrow \boldsymbol{w_{P4}} = 1.4554476$$

Ahora usaremos w_P como la aproximación a $y(0.51)$ y determinaremos el valor corregido w_C

La ecuación para el método de Adams-Moulton de tres pasos es

$w_1 = 0.70480402$, $w_2 = 0.93320019$, $w_3 = 1.18390218$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

$$w_{C4} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_P) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

$$y(0.51) \approx w_{C4} + w_3 + \frac{0.12841297}{24}(9f(0.51365188, w_P) + 19f(0.38523891, w_3) - 5f(0.25682594, w_2) + f(0.12841297, w_1)$$

$$y(0.51) \approx w_{C4} + 1.18390218 + \frac{0.12841297}{24}(9f(0.51365188, \mathbf{1.4554476}) + 19f(0.38523891{,}1.18390218) - 5f(0.25682594{,}0.93320019\ ) + f(0.12841297{,}0.70480402)$$

$$y(0.51) \approx w_{C4} + 1.18390218\frac{0.12841297}{24}(9f(2.191609416) + 19f(2.035493162) - 5f(1.867240627) + f(1.688314129) \longrightarrow \boldsymbol{w_C} = 1.45544767$$

Ahora determinaremos si las aproximaciones son precisas o si se necesita cambiar el tamaño de paso, para eso primero encontramos y vemos el error local de truncamiento

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = |\mathbf{1.4554476 - 1.45544767}| \longrightarrow \boldsymbol{\sigma_4} = 4.431680 \times 10^{-6}$$

Como observamos que $\sigma \leq TOL$ ósea $4.431680 \times 10^{-6} \leq 10^{-5}$ por lo tanto se acepta el mismo tamaño de paso para la siguiente iteración

Del mismo modo se aplica la ecuación predictor y corrector para las aproximaciones siguientes, siguiendo los mismos procedimientos

Al aplicar la ecuación predictor-corrector con las iteraciones $y(0.51365188)$ y $y(0.64206485)$ obtenemos el predictor de la aproximación que es

$w_P = 1.746182645$ Posteriormente determinamos el valor corregido usando w_P como el predictor de la aproximación así el corrector da $w_C = 1.74617653$ que corresponde a la aproximación $w_5 = 1.74617653$ una vez que hemos obtenido estos valores calculamos el error local de truncamiento con la siguiente formula

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = |\ \mathbf{1.74617653 - 1.746182645}| \longrightarrow \boldsymbol{\sigma_5} = 5.057497 \times 10^{-6}$$

Ahora bien de estos resultados previamente obtenidos llegamos calculando las aproximaciones hasta la iteración 10 mediante la ecuación predictor de Adams Bashforth de cuarto orden y la ecuación correctora de Adams Moulton de tercer en la iteración 10

Da como resultado $w_C = 3.411476934$ y $w_P = 3.411495273$ a su vez es el resultado del corrector seria la aproximación $w_{10} = 3.411476934$

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = |\ 3.411476934 \ \ - 3.411495273| \longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{10}} = 9.588365 \times 10^{-6}$$

Nuevamente al aplicar el método la ecuación predictora y la ecuación correctora a las siguientes aproximaciones

$w_7 = 2.37734317$, $w_8 = 2.71319271$, $w_9 = 3.05895769$, $w_{10} = 3.41147778$

$$y(1.28) \approx w_{11P}$$
$$= w_{10} + \frac{0.12841297}{24}[55f(1.28412970, w_{10}) - 59f(1.15571673, w_9) + 37f(1.02730376, w_8) - 9f(0.89889079, w_7)]$$

$\boldsymbol{w_{11P}} = 3.767179486$ Y

$$y(1.41) \approx w_{11C}$$
$$= w_{10} + \frac{0.12841297}{24}[55f(1.28412970, w_{10}) - 59f(1.15571673, w_9) + 37f(1.02730376, w_8) - 9f(0.89889079, w_7)]$$

$$\boldsymbol{w_{11C}} = 3.767159590$$

Vamos a verificar si las aproximaciones son precisamente exactas o si necesita cambiar el tamaño de paso por ende usamos la siguiente fórmula para verificar lo dicho así los valores del corrector y predictor que

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = \frac{19}{270(0.12841297)}|3.767159590 \quad - 3.767179486|$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{11}} = 1.09030177 \times 10^{-5}$$

Puesto que este resultado excede la tolerancia pres escrita 10^{-5} se necesita un tamaño de paso nuevo para ello aplicamos la formula siguiente

$$qh = \left(\frac{10^{-5}}{2\delta}\right)^{1/4} = \left(\frac{10^{-5}}{2(1.09030177 \times 10^{-5})}\right)^{1/4}(0.12841297)$$
$$= 0.12841297(0.822916597605) \approx 0.10567582$$

Por consiguiente $h = 0.10567582$ que es el tamaño de paso para las siguientes iteraciones.

Por tanto siguiendo con el algoritmo 4 hacemos uso del subalgoritmo **Runge-Kutta de orden cuatro** con tamaño de paso $h = 0.10567582$ y $TOL.10^{-5}$ de esta manera procedemos a calcular los valores de $k_1, k_2, k_3\ y\ k_4$

De esta manera la aproximación para $y(0.10567582)$ se obtiene mediante

$$k_1 = hf(t_{10}, w_{10}) = 0.10567582f(1.28412970{,}3.41147778)$$
$$= 0.10567582[3.41147778 - 1.28412970^2 + 1] \longrightarrow k_1 = 0.291928257$$

$$k_2 = hf\left(t_{10} + \frac{h}{2}, w_{10} + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$= 0.10567582f\left(1.28412970 + \frac{0.10567582}{2}, 3.41147778 + \frac{1}{2}(0.291928257)\right)$$
$$= 0.10567582f(1.33696761{,}3.55744190)$$
$$= 0.10567582[3.55744190 - 1.33696761^2 + 1] \longrightarrow k_2 = 0.292717743$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$= 0.10567582f\left(1.28412970 + \frac{0.10567582}{2}, 3.41147778 + \frac{1}{2}(0.292717743)\right)$$

$$= 0.10567582f(1.33696761{,}3.557836652)$$
$$= 0.10567582[3.557836652 - 1.33696761^2 + 1] \longrightarrow k_3 = 0.292759458$$

$$k_4 = hf(t_{10} + h, w_{10} + k_3)$$
$$= 0.10567582f(1.28412970 + 0.10567582{,}3.41147778 + 0.292759458)$$
$$= 0.10567582f(1.38980552, 3.704237238)$$
$$= 0.10567582[3.704237238 - 1.38980552^2 + 1]$$

$$\longrightarrow k_4 = 0.213005005$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$w_{11} = 3.41147778 + \frac{1}{6}(0.291928257 + 2(0.292717743) + 2(0.292759458) + 0.213005005)$$

$$\boldsymbol{w_{11}} = 3.704125724$$

Así al calcular las demás aproximaciones tenemos lo siguiente

$\boldsymbol{w_{11}} = 3.704125724$, $\boldsymbol{w_{12}} = 3.996674142$, $\boldsymbol{w_{13}} = 4.286622484$

Mediante estas aproximaciones obtendremos la siguiente aproximación que será por metodo de Adams Bashforth de cuarto orden como predictor y Adams Moulton de tercer orden como corrector estas son las siguientes

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

$w_{10} = 3.41147778$, $w_{11} = 3.704125724$, $w_{12} = 3.996674142$, $w_{13} = 4.286622484$

Tomando a $y(1.60)$ como la aproximación para el valor predictor esto es

$$y(1.60) \approx w_{14P} = w_{13} + \frac{0.10567582}{24}[55f(1.60115716, w_{13}) - 59f(1.49548134, w_{12}) + 37f(1.38980552, w_{11}) - 9f(1.28412970, w_{10})]$$

$$y(1.60) \approx w_{14P} = 4.28662249 + \frac{0.10567582}{24}[55f(1.60115716, 4.28662249) - 59f(1.49548134, 3.996674142) + 37f(1.38980552, 3.704125724) - 9f(1.28412970, 3.41147778)]$$

$$y(1.60) \approx w_{14P}$$
$$= 4.28662249$$
$$+ \frac{0.10567582}{24}[55f(2.722918239) - 59f(2.760209702)$$
$$+ 37f(2.772566337) - 9f(2.762488694)]$$

$\boldsymbol{w_{14P}} = 4.57120169$

Luego utilizaremos w_{14P} como el predictor de la aproximación $y(1.70)$ y determinaremos el valor corregido

$$y(1.70) \approx w_{14C}$$
$$= w_{13}$$
$$+ \frac{0.10567582}{24}[9f(1.70683298, w_{14P}) + 19f(1.60115716, w_{13})$$
$$- 5f(1.02730376, w_{12}) + f(0.89889079, w_{11})]$$

$$y(1.70) \approx w_{14C}$$
$$= w_{13}$$
$$+ \frac{0.10567582}{24}[9f(1.70683298, 4.57120169)$$
$$+ 19f(1.60115716, 4.28662249) - 5f(1.02730376, 3.996674142)$$
$$+ f(0.89889079, 3.704125724)]$$

$$y(1.70) \approx w_{14C}$$
$$= w_{13}$$
$$+ \frac{0.10567582}{24}[9f(2.657922868) + 19f(2.722918239) - 5f(2.760209702)$$
$$+ 2.772566337]$$

$\boldsymbol{w_{14C}} = 4.57119105$

Así las aproximaciones mediante el método predictor y corrector nos dan:

$w_{14P} = 4.57120169 \;\; y \;\; w_{14C} = 4.57119105$ Posteriormente calculamos el error local de truncamiento

$$\sigma = \frac{19}{270h}|w_C - w_P| = \frac{19}{270(0.10567582)}|\,4.57119105 \; - 4.57120169|$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{11}} = 7.085927 \times 10^{-6}$$

Luego, se continúa calculando los valores en los otros puntos del dominio en el que desea obtener la solución numérica, y a continuación se muestran los resultados de estos procesos en la siguiente tabla.

6.2 Tabla 3: tabla de iteraciones del método de tamaño de paso variable.

Iteraciones t_i	**Valores exactos** $y_i = y(t_i)$	***Aproximaciones*** (w_i)	***tamaño de paso*** h_i	***Tolerancia*** σ_i	***Error*** $\lvert y(t_i) - w_i \rvert$
0	0.5	0.5			
0.12841297	0.70480460	0.70480402	0.12841297	4.431680×10^{-6}	0.0000005788
0.25682594	0.93320140	0.93320019	0.12841297	4.431680×10^{-6}	0.0000012158
0.38523891	1.18390410	1.18390218	0.12841297	4.431680×10^{-6}	0.0000019190
0.51365188	1.45545014	1.45544767	0.12841297	4.431680×10^{-6}	0.0000024670
0.64206485	1.74617653	1.74617341	0.12841297	5.057497×10^{-6}	0.0000031210
0.77047782	2.05419248	2.05418856	0.12841297	5.730989×10^{-6}	0.0000039170
0.89889079	2.37734803	2.37734317	0.12841297	6.522850×10^{-6}	0.0000048660
1.02730376	2.71319271	2.71319271	0.12841297	7.416639×10^{-6}	0.0000060010
1.15571673	3.05896505	3.05895769	0.12841297	8.433180×10^{-6}	0.0000073570
1.28412970	3.41148675	3.41147778	0.12841297	9.588365×10^{-6}	0.0000089720
1.38980552	3.70413577	3.70412572	0.10567582	7.085927×10^{-6}	0.0000100440
1.49548134	3.99668536	3.99667414	0.10567582	7.085927×10^{-6}	0.0000112120
1.60115716	4.28663498	4.28662249	0.10567582	7.085927×10^{-6}	0.0000124870
1.70683298	4.57120536	4.57119105	0.10567582	7.085927×10^{-6}	0.0000143120
1.81250880	4.84730747	4.84729107	0.10567582	7.844396×10^{-6}	0.0000163960
1.91818462	5.11150794	5.11148918	0.10567582	8.747367×10^{-6}	0.0000187650
1.93863847	5.16095461	5.16093546	0.02045384	1.376200×10^{-6}	0.0000191530
1.95909231	5.20978430	5.20976475	0.02045384	1.376200×10^{-6}	0.0000195490
1.97954616	5.25796697	5.25794701	0.02045384	1.376200×10^{-6}	0.0000199540
2.00000000	5.30547195	5.30545159	0.02045384	1.376200×10^{-6}	0.0000203670

6.3 Programa del método de tamaño de paso variable

```
syms('OK', 'A', 'B', 'ALPHA', 'TOL', 'HMIN', 'HMAX');
syms('FLAG', 'NAME', 'OUP', 'DONE', 'KK', 'NFLAG');
syms('I', 'WP', 'WC', 'SIG', 'K', 'J', 'Q');
syms('W','T','t','y','s','TT','WW','K1','K2','K3','K4');
syms('P1','P2');
TRUE = 1;
FALSE = 0;
% STEP 1 Runge-Kutta Order 4 Method is implemented within the
% following code.
fprintf(1,'This is the Adams Variable Step-size Predictor-');
fprintf(1,'Corrector Method\n');
fprintf(1,'Input the function F(t,y) in terms of t and y\n');
fprintf(1,'For example: y-t^2+1 \n');
s = input(' ','s');
F = inline(s,'t','y');
OK = FALSE;
while OK == FALSE
    fprintf(1,'Ingrese los puntos finales izquierdo y derecho en líneas
separadas.\n');
    A = input(' ');
    B = input(' ');
    if A >= B
        fprintf(1,'El punto final izquierdo debe ser menor que el punto final
derecho.\n');
    else
        OK = TRUE;
    end;
end;
OK = FALSE;
fprintf(1,'Ingrese la condición inicial.\n');
ALPHA = input(' ');
while OK == FALSE
    fprintf(1,'Ingrese la tolerancia.\n');
    TOL = input(' ');
    if TOL <= 0
        fprintf(1,'La tolerancia debe ser positiva.\n');
    else
        OK = TRUE;
    end;
end;
OK = FALSE;
while OK == FALSE
    fprintf(1,'Ingrese el valor maximo y minimo ');
    fprintf(1,'en lineas separadas.\n');
    HMIN = input(' ');
    HMAX = input(' ');
    if HMIN < HMAX & HMIN > 0
        OK = TRUE;
    else
        fprintf(1,'El espacio minimo de malla debe ser un ');
        fprintf(1,'número real positivo y menor que\n');
        fprintf(1,'el espacio máximo de malla.\n');
```

```
    end;
end;
if OK == TRUE
    fprintf(1,'Seliccione el metodo de salida:\n');
    fprintf(1,'1. Salida a pantalla\n');
    fprintf(1,'2. Salida en formato de Archivo\n');
    fprintf(1,'Por favor ingrese 1 o 2\n');
    FLAG = input(' ');
    if FLAG == 2
        fprintf(1,'Ingrese el nombre del archivo en el formulario -
unidad:\\name.ext\n');
        fprintf(1,'Por ejemplo:\\OUTPUT.DTA\n');
        NAME = input(' ','s');
        OUP = fopen(NAME,'wt');
    else
        OUP = 1;
    end;
    fprintf(OUP, 'MÉTODO CORRECTOR PREDICTOR DE TAMAÑO VARIABLE DE
ADAMS\n\n');
    fprintf(OUP, ' t       w          h           sigma\n');
    % STEP 2
    T = zeros(1,100);
    W = zeros(1,100);
    T(1) = A;
    W(1) = ALPHA;
    H = HMAX;
    % OK is used in place of FLAG to exit the loop in Step 4.
    OK = TRUE;
    % DONE is used in place of last to indicate when last value
    % is calculated
    DONE = FALSE;
    % STEP 3
    for KK = 1:3
        X = T(KK);
        Y = W(KK);
        K1 = H*F(X,Y);
        K2 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K1);
        K3 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K2);
        K4 = H*F(X+H,Y+K3);
        WW = Y+(K1+2.0*(K2+K3)+K4)/6.0;
        TT = X+H;
        T(KK+1) = TT;
        W(KK+1) = WW;
    end;
    % NFLAG indicates the computation from RK4
    NFLAG = 1;
    I = 5;
    % use TT in place of t
    TT = T(4) + H;
    % STEP 4
    while DONE == FALSE
        % STEP 5
        % predict W(I)
        P1 = 55.0*F(T(I-1),W(I-1))-59.0*F(T(I-2),W(I-2));
        P2 = 37.0*F(T(I-3),W(I-3))-9.0*F(T(I-4),W(I-4));
```

```
        WP = W(I-1)+H*(P1+P2)/24.0;
        % correct W(I)
        P1 = 9.0*F(TT,WP)+19.0*F(T(I-1),W(I-1))-5.0*F(T(I-2),W(I-2));
        P2 = F(T(I-3),W(I-3));
        WC = W(I-1)+H*(P1+P2)/24.0;
        SIG = 19.0*abs(WC-WP)/(270.0*H);
        % STEP 6
        if SIG <= TOL
            % STEP 7
            % result accepted
            W(I) = WC;
            T(I) = TT;
            % STEP 8
            if NFLAG == 1
                K = I-3;
                KK = I-1;
                % Previous results are also accepted.
                for J = K:KK
                    fprintf(OUP, '%12.8f %11.8f %11.8f %11.8f\n', T(J), W(J),
H, SIG);
                end;
                fprintf(OUP, '%12.8f %11.8f %11.8f %11.8f\n', T(I), W(I), H,
SIG);
            else
                % Previous results were already accepted.
                fprintf(OUP, '%12.8f %11.8f %11.8f %11.8f\n', T(I), W(I), H,
SIG);
            end;
            % STEP 9
            if OK == FALSE
                % Next step is 20.
                DONE = TRUE;
            else
                % STEP 10
                I = I+1;
                NFLAG = 0;
                % STEP 11
                if SIG <= 0.1*TOL | T(I-1)+H > B
                    % Increase H if more accuracy than required has been
obtained,
                    % or decrease H to include b as a mesh point.
                    % STEP 12
                    % to avoid underflow
                    if SIG <= 1.0e-20
                        Q = 4.0;
                    else
                        Q = (0.5*TOL/SIG)^(1/4);
                    end;
                    % STEP 13
                    if Q > 4.0
                        H = 4.0*H;
                    else
                        H = Q * H;
                    end;
                    % STEP 14
```

```
                if H > HMAX
                    H = HMAX;
                end;
                % STEP 15
                if T(I-1)+4.0*H > B
                    H = 0.25*(B-T(I-1));
                    if H < TOL
                        DONE = TRUE;
                    end;
                    OK = FALSE;
                end;
                % STEP 16
                for KK = I-1:I+2
                    X = T(KK);
                    Y = W(KK);
                    K1 = H*F(X,Y);
                    K2 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K1);
                    K3 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K2);
                    K4 = H*F(X+H,Y+K3);
                    WW = Y+(K1+2.0*(K2+K3)+K4)/6.0;
                    TT = X+H;
                    T(KK+1) = TT;
                    W(KK+1) = WW;
                end;
                NFLAG = 1;
                I = I+3;
            end;
        end;
    else
        % FALSE branch for Step 6 - result rejected
        % STEP 17
        Q = (0.5*TOL/SIG)^(1/4);
        % STEP 18
        if Q < 0.1
            H = 0.1 * H;
        else
            H = Q * H;
        end;
        % STEP 19
        if H < HMIN
            fprintf(OUP, 'HMIN exceeded\n');
            DONE = TRUE;
        else
            if T(I-1)+4.0*H > B
                H = 0.25*(B-T(I-1));
            end;
            if NFLAG == 1
                % Previous results also rejected.
                I = I-3;
            end;
            for KK = I-1:I+2
                X = T(KK);
                Y = W(KK);
                K1 = H*F(X,Y);
                K2 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K1);
```

```
                    K3 = H*F(X+0.5*H,Y+0.5*K2);
                    K4 = H*F(X+H,Y+K3);
                    WW = Y+(K1+2.0*(K2+K3)+K4)/6.0;
                    TT = X+H;
                    T(KK+1) = TT;
                    W(KK+1) = WW;
                end;
                I = I+3;
                NFLAG = 1;
            end;
        end;
        % STEP 20
        TT = T(I-1) + H;
    end;
    % STEP 21
    if OUP ~= 1
        fclose(OUP);
        fprintf(1,'La salida %s ha sido exitosa \n',NAME);
    end;
end;
```

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-FELHBERG

6.4 Algoritmo (2) del método de Runge-kutta-Fehlberg

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Con error de truncamiento local dentro de una tolerancia determinada.

ENTRADA extremo a, b; condición inicial α ; tolerancia TOL; tamaño máximo de paso $hmáx$; tamaño mínimo de paso $hm\text{ín}$.

SALIDA i, t, w, h donde w se aproxima $y(t)$ y se utiliza el tamaño de paso h, o bien un mensaje de que se rebaso el tamaño mínimo de paso.

Paso 1 determine $t = a$;

$w = \alpha$;

$h = hmax$;

$FLAG = 1$;

SALIDA (t, w).

Pasó 2 Mientras $(FLAG = 1)$ $haga\ los\ pasos$ $3 - 11$

Paso 3 Mientras

$K_1 = hf(t_i, w_i)$,

$K_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{K_1}{4}\right)$,

$K_3 = hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3K_1}{32} + \frac{9}{32}K_2\right)$,

$K_4 = hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right)$,

$$K_5 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right),$$

$$K_6 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_6\right),$$

Paso 4 Determine $R = \frac{1}{h}\left|\frac{1}{1\,360}k_1 - \frac{128}{4275}K_2 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right|$.

Paso 5 si $R \leq TOL\ entonces\ haga\ los\ pasos\ 6\ y\ 7$

Paso 6 $Determine\ t = t + h;\ \ (aproximacion\ aceptada)$

$$w = w + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

Paso 7 SALIDA (t, w, h). $\quad (Fin\ de\ paso\ 5)$

Paso 8 $Determine\ \delta = 0.84\left(\frac{TOL}{R}\right)^{1/4}$

Paso 9 si $\delta = 0.1\ entonces\ haga\ h = 4h$

$si\ no\ haga\ h = \delta h.\quad (calcular\ h\ nueva)$.

Paso 10 si $h > hmax\ entonces\ haga\ h = hamax$

Paso 11 si $t \geq b\ ntonces\ haga\ FLAG = 0$

$tambien\ si\ t + h > b\ entonces\ haga\ h = b - t$

$tambien\ si\ h < hmin\ entonces$

$determine\ FLAG = 0;$

SALIDA $(minima\ excedida)$.

Paso 12 $(el\ procedimiento\ esta\ completo\ )$.

PARE

Ejemplo ilustrativo 4: Utilice el método Ruge-Kutta-Fehlberg con una tolerancia $TOL = 10^{-5}$, un tamaño de paso máximo $hmax = 0.25$ un tamaño de paso mínimo $hmi = 0.01$ para aproximar la solución del problema de valor inicial.

$$y' = y - t^2 + 1, \qquad 0 \le t \le 2, \qquad y(0) = 0.5$$

Y compare los resultados con la solución exacta $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$.

Solución:

Trabajaremos a través del primer paso de los cálculos y, continuación, aplicaremos el algoritmo para determinar los resultados restantes. La condición inicial dado $t_0 = 0$ y $w_0 = 0.5$. Para determinar w_1 mediante w_0 usando $h = 0.25$, el tamaño de paso máximo permisible, calculamos.

$$k_1 = hf(t_0, w_0) = 0.25(0.5 - 0^2 + 1) = \mathbf{0.375}$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{4}h, w_0 + \frac{1}{4}k_1\right) = 0.25f\left(\frac{1}{4}0.25, 0.5 + \frac{1}{4}0.375\right) = \mathbf{0.3974609}$$

$$K_3 = hf\left(t_0 + \frac{3h}{8}, w_0 + \frac{3K_1}{32} + \frac{9}{32}K_2\right) = 0.25f\left(0.09375, 0.5 + \frac{3(0.375)}{32} + \frac{9}{32}0.3974609\right) = \mathbf{0.4095383}$$

$$K_4 = hf\left(t_0 + \frac{12h}{13}, w_0 + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right) = 0.25f\left(0.2307692, 0.5 + \frac{1932}{2197}0.375 - \frac{7200}{2197}0.3974609 + \frac{7296}{2197}0.4095383\right) = \mathbf{0.4584971}$$

$$K_5 = hf\left(t_0 + h, w_0 + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right) = 0.25f\left(0.25, 0.5 + \frac{439}{216}0.375 - 8(0.3974609) + \frac{3680}{513}0.4095383 - \frac{845}{4104}0.4584971\right) = \mathbf{0.4658452}$$

$$K_6 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_6\right)$$
$$= 0.25f\left(0.125, 0.5 - \frac{8}{27}0.375 + 2(0.3974609) - \frac{3544}{2565}0.4095383 + \frac{1859}{4104}0.4584971 - \frac{11}{40}0.4658452\right) = \mathbf{0.4204789}$$

Entonces. Se encuentra que las dos aproximaciones para $y(0.25)$ son.

$$\widetilde{w}_1 = w_0 + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$
$$= 0.5 + \frac{16}{135}0.375 + \frac{6656}{12825}0.4095383 + \frac{28561}{56430}0.4584971 - \frac{9}{50}0.4658452 + \frac{2}{55}0.4204789 = 0.9204870,$$

Luego para

$$w_1 = w_0 + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$
$$= 0.5 + \frac{25}{216}0.375 + \frac{1408}{2565}0.4095383 + \frac{2197}{4104}0.4584971 - \frac{1}{5}0.4658452$$
$$= \mathbf{0.9204886}.$$

Esto también implica que

$$R = \frac{1}{0.25}\left|\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right|$$
$$= 4\left|\frac{1}{360}0.375 - \frac{128}{4275}0.4095383 - \frac{2197}{75240}0.4584971 + \frac{1}{50}0.4658452 + \frac{2}{55}0.4204789\right| = \mathbf{0.00000621388},$$

$$q = 0.85\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.85\left(\frac{0.00001}{0.00000621388}\right)^{\frac{1}{4}} = \mathbf{0.9461033291}$$

Se continúa calculando los valores en los otros puntos del dominio en el que se desea obtener la solución numérica. En la tabla siguiente se muestran los resultados restantes.

6.5 Tabla 4: tabla de iteraciones del método de Runge-kutta-Fehlberg

		RFK-4				RFK-5	
t_i	$y_i - y(t_i)$	w_i	h_i	R_i	$\lvert y_i - w_i \rvert$	$\widehat{w_i}$	$\lvert y_i - \widehat{w_i} \rvert$
0	0.5	0.5			0.5		
0.2500000	0.9204873	0.9204886	0.2500000	6.2×10^{-6}	1.3×10^{-6}	0.9204870	2.424×10^{-7}
0.4865522	1.3964884	1.3964884	0.2365522	4.5×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.3964900	1.510×10^{-7}
0.7293332	1.9537446	1.9537488	0.2427810	4.3×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.9537477	3.136×10^{-6}
0.9793332	2.5864198	2.5864260	0.2500000	3.8×10^{-6}	6.2×10^{-6}	2.5864251	5.242×10^{-6}
1.2293332	3.2604520	3.2604605	0.2500000	2.4×10^{-6}	8.5×10^{-6}	3.2604599	7.895×10^{-6}
1.4793332	3.9520844	3.9520955	0.2500000	7×10^{-7}	1.11×10^{-5}	3.9520954	1.006×10^{-5}
1.7293332	4.6308127	4.6308268	0.2500000	1.5×10^{-6}	1.41×10^{-5}	4.6308272	1.446×10^{-5}
1.9793332	5.2574687	5.2574861	0.2500000	4.3×10^{-6}	1.73×10^{-5}	5.2574871	1.839×10^{-5}
2.000000	5.3054720	5.3054720	0.0206668		1.77×10^{-5}	5.3054896	1.768×10^{-5}

6.6 Programa del método de Runge-kutta-Fehlberg

```
fprintf('Adams Fourth-Order Predictor-Corrector');
fprintf('Corrector Method\n');
fprintf('Input the function F(t,y) in terms of t and y\n');
fprintf('For example: y-t^2+1 \n');
s = input(' ','s');
f = inline(s,'t','y');
a = input('Enter left end ponit, a:  ');
b = input('Enter right end point, b:  ');
ya = input('Enter the initial condition, alpha:  ');
rtol=input('Ingrese la Tolerancia ');
h= input('Ingrese el tamaño máximo de pasos ');
t= input('Ingrese el tamaño minimo de pasos ');
fprintf('    t          w\n');
% Compute the constants once
c30 = 3/8;
c31 = 3/32;
c32 = 9/32;
c40 = 12/13;
c41 = 1932/2197;
c42 = -7200/2197;
c43 = 7296/2197;
c51 = 439/216;
c52 = -8;
c53 = 3680/513;
c54 = -845/4104;
c61 = -8/27;
c62 = 2;
c63 = -3544/2565;
c64 = 1859/4104;
c65 = -11/40;
cw1 = 25/216;
cw3 = 1408/2565;
cw4 = 2197/4104;
cw5 = -1/5;
cz1 = 16/135;
cz3 = 6656/12825;
cz4 = 28561/56430;
cz5 = -9/50;
cz6 = 2/55;
ce1 = 1/360;
ce3 = -128/4275;
ce4 = -2197/75240;
ce5 = 1/50;
ce6 = 2/55;

% Absolute tolerance
atol = 1e-13;
alpha = 0.8;
k = 0;
% Initial time moment
i = 1;
```

```
tt(1) = a;
t = a;
% Initial condition
y(1,:) = ya;
wi = ya;
% If it is the last iteration, then lastit = 1, otherwise lastit = 0
lastit = 0;
while lastit == 0
    % Stretch the step if within 10% of b-t
    if t + 1.1*h > b
        h = b - t;
        lastit = 1;
    end;

    % Compute the step
    s1 = f(t,wi);
    s2 = f(t + 0.25 * h, wi + 0.25*h*s1);
    s3 = f(t + c30 * h, wi + c31 * h * s1 + c32 * h * s2);
    s4 = f(t + c40 * h, wi + c41 * h * s1 + c42 * h * s2 + c43 * h * s3);
    s5 = f(t + h, wi + c51 * h * s1 + c52 * h * s2 + c53 * h * s3 + c54 * h *
s4);
    s6 = f(t + 0.5 * h, wi + c61 * h * s1 + c62 * h * s2 + c63 * h * s3 + c64
* h * s4 + c65 * h * s5);
    w = wi + h * (cw1 * s1 + cw3 * s3 + cw4 * s4 + cw5 * s5);
    z = wi + h * (cz1 * s1 + cz3 * s3 + cz4 * s4 + cz5 * s5 + cz6 * s6);
    e = h * norm(ce1 * s1 + ce3 * s3 + ce4 * s4 + ce5 * s5 + ce6 * s6);

    % Target tolerance for this step
    T = rtol * norm(wi) + atol;
    if e <= T % In case the tolerance is met
        t = t + h;
        h = alpha*h*(T/e)^0.2;
        i = i + 1;
        tt(i) = t;
        wi = z;
        fprintf('%5.4f %11.8f  %11.8f\n', t, w,h)
        y(i,:) = z;
        k = 0;
    elseif k == 0 % Tolerance is not met for the first time in this step
        h = alpha*h*(T/e)^0.2;
        k = k + 1;
        lastit = 0;
    else % Tolerance is not met more than once in this step
        h = h / 2;
        lastit = 0;
    end;
end
```

6.7 Algoritmo (3) del método de Runge-kutta de cuarto orden para ecuaciones diferenciales ordinarias

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

En $(N+1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a,b]$:

ENTRADA extremos a, b; entero N; condición inicial α.

SALIDA aproximación w a y en los $(N+1)$ valores t

Pasó 1 Tome $h = (b-a)/N$;

$t = a$;

$w = \alpha$;

SALIDA (t,w).

Paso 2 para $i = 1,2,\ldots,N$ haga pasos 3-5

Pasó 3 Tome $k_1 = hf(t,w)$;

$k_2 = hf\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{k_1}{2}\right)$;

$k_3 = hf\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{k_2}{2}\right)$;

$k_4 = hf(t+h, w + k_3)$;

Paso 4 Tome $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$; $\quad (calcule\ w_i)$

$t = a + ih \ \ (calcule\ t_i)$

Paso 5 SALIDA (t,w)

Paso 6 PARAR.

6.8 Programa del método de Runge-kutta de cuarto orden.

```
clear all
close all
fprintf('Runge Kutta 4 orden');
fprintf('Input the function F(t,y) in terms of t and y\n');
fprintf('For example: y-t^2+1 \n');
s = input(' ','s');
f = inline(s,'t','y');
a = input('Ingrese el lado derecho, a:  ');
b = input('Ingrese el lado izquierdo, b:  ');
y0 = input('Ingrese la condicion inicial: ');
N= input('Ingrese el numero de iteraciones ');

h = (b - a)/N;
t(1) = a;
w(1) = y0;
fprintf('    t          w\n');
% Aproximación de la solución en los primeros 10 puntos
% utilizando un método de Runge-Kutta de orden 4
for i=1:N
    k1=f(t(i),w(i));
    k2=f(t(i)+h/2,w(i)+k1*h/2);
    k3=f(t(i)+h/2,w(i)+k2*h/2);
    k4=f(t(i)+h,w(i)+k3*h);
    w(i+1)=w(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)*h/6;
    t(i+1)=t(i)+h;
    fprintf('%6.2f %12.8f\n', t(i+1),w(i+1))
end
```

CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓNES Y RECOMENDACIONES

Conclusión

En este presente trabajo monográfico se realizó aproximaciones numéricas para la solución de una ecuación diferencial ordinaria con valor inicial usando los algoritmos de cada metodo estudiado y para cada uno se desarrolló su programación en el software MATLAB que todo fue un éxito.

Así mismo se muestran tablas de cada método donde se aplicaron los algoritmos, ilustrando las soluciones aproximadas, el tamaño de paso, la tolerancia, el margen de error, el valor exacto y las iteraciones dentro del intervalo dado, se vio que los otros métodos son más fácil de manejar y cortas la aplicación del algoritmo así mismo su programación es sencilla comparadas con el método multipaso con tamaño variable de paso.

Los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo del método predictor-corrector de tamaño de paso variable y programarlo en el software MATLAB comparadas con los otros 3 métodos resalto una precisión más exacta disminuyendo el margen de error, está claro que el método multipaso con tamaño variable de paso, su procedimiento de desarrollar su algoritmo es más extensa y que dentro de ella hace uso parte de los otros métodos de manera que también su programación tiene su grado de dificultad pero esto hace que las solución numérica de la ecuación diferencial ordinaria con valor inicial sea más eficaz, eficiente y exacta a los resultados obtenidos de los otros tres métodos ilustrado en el desarrollo de la investigación.

Recomendación.

Finalizando este trabajo monográfico, consideramos apropiado brindar ciertas recomendaciones a futuros investigadores.

A los estudiantes de la carrera de Matematica, retomar como tema de investigación para su monografía la importancia del dominio de los métodos numéricos multipasos de paso variable y adoptar la implementación de dichos métodos.

- Recomendamos llevar estos algoritmos a un software libre como Python.
- Aplicación en la vida real a los campos de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Aplicación en los diversos campos de física.
- Aplicación a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Bibliografía

Alonso, M. J. (2004). *Soluciones Numericas de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (UNAN-LEON).* SIBUL-UNAN LEON.

Burden Richard L, F. D. ((2010)). *Analisis Numerico .* 10ma Edicion D.R. 2017 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Burden Richard L, y. F. ((2002)). *Analisis Numerico (Mexico).* Thomson Learning, 7ma Edicion.

Burden, R. ((2010)). Ninth Edition, Copyright 2010 Cengage Learning.

Burden, R. ((2010)). *Numerical Analysis .* Ninth Edition, Copyright 2010 Cengage Learning.

Burden, R., Faires, D., & Burden, A. (2017). *ANÁLISIS NUMÉRICO.* Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Richard, B. ((2010)). *Numerical Analysis.* Ninth Edition, Copyright 2010 Learning .

Spiegel, M. R. ((1983)). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas .* 3era Edicion. Prentice - Hall hispanoamericana, S.A (Mexico).

Zill, D. (1988). *Ecuaciones Diferenciales con aplicación* (Segunda ed.). Grupo editorial Iberiamerica, S.A. de C.V.

Zill, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con aplicacion de modelado* (Novena ed.). Cengage Learning Editores, S.A de C.V.

Zill. Dennis G, G. M. ((2009)). *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera.* 7ma Edicion Cengage Learning Editores, S. A. de C. V.

CAPÍTULO 6. ANEXOS

MÉTODOS MULTIPASOS DE TAMAÑO DE PASO VARIABLE EN EL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN MATLAB

6.9 Algoritmo (4) del método corrector-predictor de cuarto orden de Adams para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para aproximar la solución del problema de valor inicial.

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha$$

En $(N + 1)$ números igualmente espaciados en el intervalo $[a, b]$:

ENTRADA extremos a, b; entero N; condición inicial α

SALIDA aproximación w para y en los valores $(N + 1)$ de t

Pasó 1 Tome $h = (b - a)/N$;

$t_0 = a$;

$w_0 = \alpha$;

SALIDA (t_0, w_0)

Paso 2 para $i = 1,2,3$ haga pasos 3-5

Pasó 3 Tome $k_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1})$;

$k_2 = hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right)$;

$k_3 = hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, w_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right)$;

$k_4 = hf(t_{i-1} + h, w_{i-1} + k_3)$;

Pasó 4 Tome $w_i = w_{i-1} + \frac{K_1+2K_2+2K_3+K_4}{6}$;

$t_i = a + ih$

Paso 5 SALIDA (t_i, w_i)

Paso 6 para $i = 4, \ldots, N$ haga pasos 7-10

Pasó 7 tome $t = a + ih$

$$w = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]; \quad (predice\ w_i)$$

$w = w_3 + \frac{h}{24}[9f(t, w) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]; \quad (corrige\ w_i)$.

Paso 8 SALIDA (t, w)

Paso 9 para $j = 0,1,2$

Tome $t_j = t_{i+1}$; $(prepare\ la\ siguiente\ iteración)$

$w_j = w_{i+1}$.

Pasó 10 tome $t_3 = t$;

$w_3 = w$.

Paso 11 PARAR

6.10 Programa del método corrector- predictor de cuarto orden de Adams.

```
fprintf('Adams Fourth-Order Predictor-Corrector');
fprintf('Corrector Method\n');
fprintf('Input the function F(t,y) in terms of t and y\n');
fprintf('For example: y-t^2+1 \n');
s = input(' ','s');
f = inline(s,'t','y');
a = input('Enter left end ponit, a:  ');
b = input('Enter right end point, b:  ');
n = input('Enter no. of subintervals, n: ');
alpha = input('Enter the initial condition, alpha:  ');
h = (b-a)/n;
t(1) = a;
w(1) = alpha;
fprintf('    t          w\n');
fprintf('%5.4f  %11.8f\n', t(1), w(1));

 for i = 1:3
     t(i+1) = t(i)+h;
     k1 = h*f(t(i), w(i));
     k2 = h*f(t(i)+0.5*h, w(i)+0.5*k1);
     k3 = h*f(t(i)+0.5*h, w(i)+0.5*k2);
     k4 = h*f(t(i+1), w(i)+k3);
     w(i+1) = w(i)+(k1+2.0*(k2+k3)+k4)/6.0;
    fprintf('%5.4f  %11.8f\n', t(i+1), w(i+1));
 end
  for i = 4:n
    t0 = a+i*h;
    part1 = 55.0*f(t(4),w(4))-59.0*f(t(3),w(3))+37.0*f(t(2),w(2));
    part2 = -9.0*f(t(1),w(1));
    w0 = w(4)+h*(part1+part2)/24.0;



    part1 =
9.0*f(t0,w0)+19.0*f(t(4),w(4))5.0*f(t(3),w(3))+f(t(2),w(2));
     w0 = w(4)+h*(part1)/24.0;
    fprintf('%5.4f  %11.8f\n', t0, w0);
    for j = 1:3
       t(j) = t(j+1);
       w(j) = w(j+1);
    end
    t(4) = t0;
    w(4) = w0;
 end
```