UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTADISTICA Y ACTURIALES

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

MONOGRAFÍA PARA OPTAR AL TITULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN FRACCIONARIA

PRESENTADO POR:

BR. JUAN CARLOS RIVERA OBANDO

TUTOR:

LIC. MARIO REYNALDO ZAPATA ZAPATA

LEÓN, NICARAGUA, FEBRERO 2023

“A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD”

Agradecimientos

En primer lugar a Dios por el conocimiento, fuerza y bendición en cada momento para hacer posible la culminación de esta tesis.

A NUESTRO TUTOR Lic. Mario Reynaldo Zapata, por guiarnos en este trabajo investigativo.

Al Dr. Fernando Brambila paz, y **Al Msc**. Anthony Torres

Por el apoyo incondicional.

A todas las personas que se involucraron en la culminación de esta tesis.

DEDICATORIA

A MIS PADRES: Domingo Rivera y Filomena Obando por brindarme apoyo amor y confianza.

A mi hermano: José Daniel Rivera, que de una u otra forma contribuyó a la culminación de esta tesis.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es elaborar un documento de derivadas e integrales fraccionarias y deducir el método Newton Raphson Fraccional que permita encontrar raíces reales y complejas. Primero se analizan las derivadas e integrales fraccionarias. En este caso se estudian las propiedades de la función gamma, diferenciación e integración de orden entero, definiciones generales para derivadas e integrales, integral iterada, para poder definir tanto la derivada como la integral de orden fraccionara, los métodos clásicos de análisis numérico como: punto fijo, bisección, Newton Raphson y newton fractal son métodos introductorios, para plantear la teoría del método.

Palabras claves: **Derivadas fraccionarias, integrales fraccionarias, Newton Raphson fraccional.**

ÍNDICE GENERAL

1 ASPECTOS INTRODUCTORIOS 1
1.1 Introducción 1
1.2 Objetivos 3
2 MARCO TEÓRICO 4
2.1 Propiedades básicas 4
2.1.1 Propiedades de la Función Gamma 4
2.1.2 Diferenciación e Integración de Orden Entero 11
2.1.3 Definiciones Generales Para Derivadas e Integrales 13
2.1.4 Integral Iterada 16
2.1.5 Operadores 21
2.1.6 Operador fraccionario de Jean-Baptiste Joseph Fourier. 22
2.1.7 Operadores Diferointegrables 22
2.2 Derivada fraccionaria 24
2.2.1 Derivada fraccionaria de Laplace 25
2.2.2 Ley de los exponentes para operadores diferenciales de orden entero 26
2.2.3 Derivada fraccionaria de Josep Liouville 26
2.2.4 Derivada fraccionaria de Grünwald-Létnikov 28
2.2.5 Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville 29
2.2.6 Derivada Fraccionaria de Caputo 31
2.3 Métodos introductorios 33
2.3.1 Método del punto fijo. 33
2.3.2 Método de Bisección. 37
2.3.3 Método de Newton Raphson 38
2.3.4 Casos donde el método de Newton Raphson falla 40
2.3.5 Newton fractal 41
3 METODOLOGÍA 45

4 RESULTADOS.. 46
CONCLUSIONES………56
RECOMENDACIONES………………………………………………………………………………………………………..57
REFERENCIAS 58

CAPITULO 1

1 ASPECTOS INTRODUCTORIOS

1.1 Introducción

En cálculo diferencial e integral de orden entero se aprenden diferentes métodos para calcular derivadas e integrales, así como el campo de aplicaciones que tienen en ingeniería, física, biología análisis numérico, etc. La derivación y la integración son operaciones inversas una de la otra y difieren en una o varias constantes, dependiendo del orden de la derivada.

La $d^n/dx^n\, f(x) = D^n f(x)$ representa la derivada de orden n, es decir, la *n*-ésima derivada de la función $f\,(x)$ con respecto a $x,$ con $n = 1, 2,$ y $I^n f(x) = \int f(x)dx = D^{-n} f(x)$ representa la *n*-ésima integral de la misma función $f\,(x)$. Esto es lo que conocemos como cálculo diferencial e integra de orden entero. En 1695 L^Hopital le escribe una carta a Leibniz en donde le pregunta si la definición que el invento para una derivada de orden n puede ser extendida a un orden $n = 1/2$.

Leibniz respondió "usted puede ver con eso, señor, que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad tal como $d^{1/2}xy\ o\ d^{1:2}xy$. Aunque la serie infinita y la geometría son relaciones distantes, la serie infinita admite solamente el uso de exponentes que son enteros positivos y negativos, y aún no se conoce el uso de exponentes fraccionarios.

Posteriormente, en dicha carta, Leibniz continúa de forma profética:" Por lo tanto, $d^{1/2}x = x\sqrt{dx{:}\,x}$. Esta es una aparente paradoja de la cual, un día, útiles consecuencias serán extraídas.

Euler en 1738 solo menciona, pero no da ejemplos ni aplicaciones de la derivada de orden fraccionario. La referencia a una derivada fraccionaria en un libro de texto aparece por primera vez en 1819 en el libro del matemático francés S. F. Lacroix (1765-1843). El libro, de casi 700 páginas, dedica dos páginas que sin ver si quiera el índice del libro de Lacroix (1819) le atribuyen la definición de la derivada de orden fraccionario., Por tal motivo, se considera importante dar más de información sobre los aportes que matemáticos como: Laplace, caputo, Liouville, Riemann han realizado.

Se presenta, además, teóricamente una aplicación de la derivada fraccionaria en análisis numérico para encontrar raíces reales y complejas de un polinomio con el propósito de motivar al lector para que inicie el estudio del cálculo de orden fraccionario.

El presente trabajo consta de cuatro capítulos. El primer capítulo contiene aspectos introductorios de esta investigación, el segundo trata de las propiedades básicas para luego definir la derivada e integral fraccionaria así como métodos básicos en análisis numérico: Método de punto fijo, método de bisección, método de Newton Raphson, Newton fractal. En el tercer capítulo se explica la metodología de trabajo en esta investigación y en el capítulo cuatro presentamos los resultados de derivadas e integrales fraccionarias y la deducción del método NRF. Finalmente, en los anexos se incluyen graficas de algunas derivadas fraccionarias.

1.2 Objetivos

Objetivo General

Elaborar un documento de derivación e integración fraccionaria, con una aplicación que permita encontrar raíces Reales y Complejas.

Objetivos específicos.

- Mostrar el fundamento teórico que sustenta la derivación e integración fraccionarias con ejercicios resueltos.
- Deducir teóricamente el método de Newton Raphson fraccional.

CAPITULO 2

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Propiedades básicas

2.1.1 Propiedades de la Función Gamma

La función Gamma $\Gamma(\mathrm{z})$ juega un papel importante en la teoría de la diferenciación. Es conveniente recopilar ciertas fórmulas y propiedades relacionadas con esta función. Una definición de $\Gamma(\mathrm{z})$ con $z \in C$, es proporcionada por el limite infinito de Euler.

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \qquad : z \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{1)}$$

La definición anterior también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(z-1)!}{(z+n)!} n^z, \tag{2)}$$

y de sus propiedades, sobre todo

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) = \mathrm{z}\Gamma(\mathrm{z}) \qquad : \qquad \mathrm{z} = 0,1,2, \ldots. \tag{3)}$$

Por hipótesis sabemos que estamos haciendo $z \to z+1$, sustituyendo en la ecuación anterior.

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!.\,z!}{(z+n+1)!} n^{z+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{zn}{z+n+1} \frac{n!\,(z-1)!}{(z+n)} n^{z}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{zn}{z+n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(z-1)!}{(z+n)} n^{z}$$

$$= \mathrm{z} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+(z+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(z-1)!}{(z+n)} n^{z}$$

$$= \mathrm{z} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(z-1)!}{(z+n)} n^{z}$$

$$= z\Gamma(z)$$

Por tanto,

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) = z\Gamma(z).$$

Otra propiedad importante es la siguiente:

4)

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= 1$$

De las dos propiedades anteriores se obtiene:

$$\Gamma(\mathrm{z}+1)=\mathrm{z}!$$

Por la propiedad anterior sabemos que:

$$\Gamma(\mathrm{z}+1)=z(z-1)\ldots 2.1$$

$$z!$$

Por tanto,

$$\Gamma(\mathrm{z}+1)=\mathrm{z}!=\mathrm{z}\Gamma(\mathrm{z}) \qquad \textbf{5)}$$

La definición integral, conocida como integral definida de Euler, es a menudo más útil, aunque se restringe a valores de $z\in C$ con $Re(z)>0$

$$\Gamma(\mathrm{z})\equiv\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,\ Re(z)>0 \qquad \textbf{6)}$$

Esta expresión de la función Gamma puede ser reescrita en dos formas que suelen ser útiles, tomando el cambio de variable $t=u^2$

$$\Gamma(\mathrm{z})=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-u^2}(-u^2)^{z-1}(2udu)$$

$$=2\int_0^\infty e^{-u^2}(-u)^{2z-2}udu$$

$$=2\int_0^\infty e^{-t^2}(-t)^{2z-1}dt\ \ Re(z)>0 \qquad \textbf{7)}$$

Si ahora se toma el cambio de variable $t = -lnu$

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= \int_1^0 u(-lnu)^{z-1}(-\frac{1}{u}du)$$

$$= -\int_1^0 (ln\frac{1}{u})^{z-1} du$$

$$= \int_0^1 (ln\frac{1}{t})^{z-1}\ dt,\ \ Re(z) > 0, \tag{8)}$$

Tomando (7) es fácil obtener el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}(-t)^{2\frac{1}{2}-1} dt$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$$= 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{9)}$$

Las ecuaciones (1) y (6) son equivalentes:

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad : z \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,\ Re(z) > 0$$

Para mostrar la equivalencia de las ecuaciones se considera la ecuación de dos variables.

$$F(z,n) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0 \qquad \textbf{10)}$$

Tomando el limite cuando $n \to \infty$ en la ecuación (10)

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$$

$$= \int_0^n \lim_{n\to\infty} (1-\frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1} dt$$

$$= \Gamma(z)$$

Debido a la relación de recurrencia $\Gamma(\mathrm{z}+1) = \mathrm{z}\Gamma(\mathrm{z})$ y que $\Gamma(1) = 1$ tenemos que:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 1.2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 1.2.3 = 3!$$

Por tanto se puede mostrar que para un entero positivo n

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \textbf{11)}$$

$$= n(n-1)\Gamma(n-1)$$

.

.

.

$$= n(n-1)\ldots 2.1\Gamma(1)$$

$$= n!$$

Reescribiendo la relación de recurrencia como:

$$\Gamma(n-1) = \frac{\Gamma(\mathrm{z})}{(z-1)} \qquad \textbf{12)}$$

Ayuda a extender la definición de la función Gamma a valores negativos para los cuales la definición (6) no es válida. Esta relación muestra que $\Gamma(0)$ es infinito así como $\Gamma(-1)$ y cualquier valor de la función Gamma en los enteros negativos. Sin embargo los coeficientes entre funciones Gamma para enteros negativos son finitos, entonces sí N y n son enteros positivos.

$$\frac{\Gamma(-\mathrm{n})}{\Gamma(-\mathrm{N})} = \frac{\Gamma(1-\mathrm{n})}{\Gamma(1-\mathrm{N})}\frac{(-N)}{(-n)}$$

$$= \frac{\Gamma(2-\mathrm{n})}{\Gamma(2-\mathrm{N})}\frac{(1-N)(-N)}{(1-n)(-n)}$$

$$= \frac{\Gamma(3-\mathrm{n})}{\Gamma(3-\mathrm{N})}\frac{(2-N)(1-N)(-N)}{(2-n)(1-n)(-n)}$$

.

.

.

$$= \frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-1)}\frac{(-2)(-3)\ldots(2-N)(1-N)(-N)}{(-2)(-3)(-4)\ldots(2-n)(1-n)(-n)}$$

$$= (-1)^{N-n}\frac{N!}{n!}$$

$$= (-1)^{N-n}\frac{\Gamma(\mathrm{N}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}+1)} \qquad \textbf{13)}$$

Como se ha visto, la función Gamma de un número positivo n es un entero positivo, mientras que para un entero negativo es invariablemente infinito. Las funciones $\Gamma(\frac{1}{2}+n)$ y $\Gamma(\frac{1}{2}-n)$ resultan ser múltiplos de $\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \qquad \textbf{14)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-1)^{n}2^{2n}\sqrt{\pi}}{(2n)!} \qquad \textbf{15)}$$

Dos propiedades de la función Gamma que resultan ser útiles son la reflexión

$$\Gamma(\mathrm{x})=\frac{\pi\csc(\pi x)}{\Gamma(1-\mathrm{x})}=\frac{\pi}{\Gamma(1-\mathrm{x})\sin(\pi\mathrm{x})} \qquad \textbf{16)}$$

Y la duplicación

$$\Gamma(2\mathrm{x})=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\mathrm{x})\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad \textbf{17)}$$

Siendo esta última una instancia de la fórmula de multiplicación de Gauss.

$$\Gamma(\mathrm{nx})=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{n^{x}}{\sqrt{\pi}}\right]^{n}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(\mathrm{x}+\frac{k}{n}) \qquad \textbf{18)}$$

2.1.2 Diferenciación e Integración de Orden Entero

En cálculo diferencial estamos acostumbrados a usar la notación

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} f, \tag{19}$$

para la derivada n-esima de una función f con respecto a la variable x cuando n es un entero no negativo.

Dado que la integración y la diferenciación son operaciones inversas, es natural asociar la notación

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f, \tag{20}$$

a la integral indefinida de f con respecto a x.

Sin embargo, para que la integral indefinida este completamente determinada se asocia la notación anterior con el límite inferior cero.

$${}_0D_x^{-1} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f = \int_0^x f(y)dy. \tag{21}$$

La integración múltiple con el lımite inferior cero puede ser simbolizada por

$${}_0D_x^{-2} f = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0.$$

$${}_0D_x^{-3} f = \int_0^x dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0.$$

.

.

.

$$ {}_0D_x^{-n}f = \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-3} \dots \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0 \qquad \textbf{22)} $$

Por tanto,

$$ \int_a^x f(y)dy = \int_0^{x-a} f(y+a)dy \qquad \textbf{23)} $$

se puede extender el simbolismo anterior para casos en que el límite inferior de la integral sea menor a cero.

$$ {}_aD_x^{-1}f = \left(\frac{d}{d(x-a)}\right)^{-1} f = \int_a^x f(y)dy, $$

$$ {}_aD_x^{-2}f = \left(\frac{d}{d(x-a)}\right)^{-2} f = \int_a^a dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0, $$

.

.

.

$$ {}_aD_x^{-n}f = \left(\frac{d}{d(x-a)}\right)^{-n} $$

$$ = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-3} \dots \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 \qquad \textbf{24)} $$

Se debe tener cuidado con la equivalencia

$$\left(\frac{d}{d(x-a)}\right)^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \qquad \textbf{25)}$$

que es una característica de un operador local, ya que en general para ordenes negativos.

$$\left(\frac{d}{d(x-a)}\right)^{-n} \neq \left(\frac{d}{dx}\right)^{-n} \qquad \textbf{26)}$$

El símbolo $f^{(n)}$tiene un uso frecuente en la literatura como abreviatura de$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f$. Asimismo, se utiliza ocasionalmente $f^{(-n)}$ para simbolizar una integral n-foleada de f con respecto a x, estando los lımites inferiores sin especificar.

$$f^{(-n)} = \int_{a_n}^{x} dx_{n-1} \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_{n-2} \int_{a_{n-2}}^{x_{n-2}} dx_{n-3} \dots \int_{a_2}^{x} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} f(x_0) dx_0 \qquad \textbf{27)}$$

Donde $a_1, a_2, \dots a_n$ son valores completamente arbitrarios. Sin embargo, cuando se tiene en cuenta una diferencia como$f^{(-n)}(x) - f^{(-n)}(a)$ se asume que los límites inferiores $a_1, a_2, \dots a_n$ de cada integral son los mismos.

2.1.3 Definiciones Generales Para Derivadas e Integrales

Tomando la definición convencional de la primera derivada en términos de una diferencia atrás.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^1 f = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x}$$

De igual forma se pueden obtener

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} f(x - \delta x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x} - \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x - \delta x) - f(x - 2\delta x)}{\delta x}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)}{\delta x^2},$$

Análogamente

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^3 f = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{d^2}{dx^2} f(x - \delta x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)}{\delta x^2} - \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x - \delta x) - 2f(x - 2\delta x) + f(x - 3\delta x)}{\delta x^2}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - 3f(x - \delta x) + 3f(x - 2\delta x) - f(x - 3\delta x)}{\delta x^3},$$

Donde se ha asumido que los indicados existen. De lo anterior se asume que la formula general de la derivada para un entero positivo n es

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\delta x^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta x) \qquad \textbf{28)}$$

Si la derivada n-esima de f existe, esta última ecuación define $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f$ como un límite sin restricciones, donde δx tiende a cero a través de valores sin restricciones. Para unificar esta fórmula con la que define una integral como el límite de una suma, es deseable definir las derivadas en términos de un límite restringido. Si el límite no es restringido también existe el lımite restringido y son iguales, la n-esima derivada puede definirse entonces como:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \lim_{\delta_N x \to 0} \frac{1}{(\delta_N x)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta_N x) \qquad \textbf{29)}$$

Ahora ya que $\binom{n}{k} = 0 \; si \; k > n$ cuando n es un entero, la ecuación anterior puede escribirse como

Se elige $\delta_N x \equiv \frac{x-a}{N}, N = 1,2 \ldots,$ donde a es un número menor que x y desempeña un papel equivalente a un limite inferior.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \lim_{\delta_N x \to 0} \frac{1}{(\delta_N x)^n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\delta_N x).$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x - k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \qquad \textbf{30)}$$

Regresando a las derivadas e integrales, comenzamos con la definición usual de una integral como el límite de una suma de Riemann

$${}_aD_x^{-1} f = \int_a^x f(y)dy,$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \delta_N x (f(x) + f(x - \delta_N x) + f(x - 2\delta_N x) + \cdots + f(a + \delta_N x)$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} \delta_N x \sum_{k=0}^{N-1} f(x - k\,\delta_N x),$$

Donde $\delta_N x \equiv \frac{x-a}{N}$.

$${}_aD_x^{-2} f = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} (\delta_N x)^2 (f(x) + 2f(x - \delta_N x) + 3f(x - 2\delta_N x) + \cdots + Nf(a + \delta_N x)$$

$$= \lim_{\delta_N x \to 0} (\delta_N x)^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x - k\delta_N x),$$

tomando una iteración más para obtener una imagen más clara de la fórmula general

$$ {}_aD_x^{-3}f = \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 $$

$$ = \lim_{\delta_N x\to 0}(\delta_N x)^3\left(f(x) + 3f(x-\delta_N x) + 6f(x-2\delta_N x) + \cdots + \frac{N(N+1)}{2}f(a+\delta_N x)\right. $$

$$ = \lim_{\delta_N x\to 0}(\delta_N x)^3 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} f(x-k\delta_N x). $$

Se observa que los coeficientes son construidos de la forma $\binom{k+n-1}{k}$, donde n es el orden de la integral, y todos los signos son positivos. Por lo tanto,

$$ {}_aD_x^{-n}f = \lim_{\delta_N x\to 0}(\delta_N x)^n \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} f(x-k\delta_N x) $$

$$ = \lim_{N\to 0}\left(\frac{x-a}{N}\right)^n \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} f\left(x-k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \qquad \textbf{31)} $$

Comparando los coeficientes de las ecuaciones (30) y (31)

$$ (-1)^k\binom{n}{k} = \binom{k+n-1}{k} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}, $$

Se puede construir una ecuación general que involucre tanto la derivada como la integral

$$ {}_aD_x^q f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\Gamma(-q)} \frac{1}{\left(\frac{x-a}{N}\right)^q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f\left(x-k\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \qquad \textbf{32)} $$

2.1.4 Integral Iterada

Sea $f(x)$ una función continua de $x \in R$, entonces se puede definir

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{33)}$$

Integrando $F(x)$

$$\int_a^x F(t)dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds\right)dt,$$

Integrando por parte tomando

$$u = F(t) \rightarrow du = \frac{d}{dt}F(t)dt = f(t)dt,$$

$$dv = dt \ \rightarrow v = t,$$

Entonces

$$\int_a^x F(t)dt = vF(t)|_a^x - \int_a^x tf(t)dt$$

$$= xF(x) - \int_a^x tf(t)dt$$

$$= x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

$$= \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

Por lo tanto la integral

$$\int_a^x F(t)dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds\right)dt = \int_a^x (x-t)f(t)dt \tag{34)}$$

Definiendo ahora

$$G(x) = \int_a^x F(t)dt \tag{35)}$$

Integrando G(x) se obtiene

$$\int_a^x G(t)dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds\right)dt = \int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^s f(r)dr\right)ds\right)dt \qquad \textbf{36)}$$

Integrando por parte

$$u = G(t) \to du = \frac{d}{dt}G(t)dt = F(t)dt,$$

$$dv = dt \ \to v = t,$$

Entonces

$$\int_a^x G(t)dt = vG(t)|_a^x - \int_a^x tF(t)dt$$

$$= xG(x) - \int_a^x tF(t)dt$$

$$= x\int_a^x F(t)dt - \int_a^x tF(t)dt$$

$$= \int_a^x (x-t)F(t)dt$$

Integrando por parte nuevamente

$$u = F(t) \to du = \frac{d}{dt}F(t)dt = f(t)dt,$$

$$dv = (x-t)dt \ \to v = -\frac{(x-t)^2}{2},$$

Entonces

$$\int_a^x G(t)dt = -\frac{(x-t)^2}{2}F(t)|_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^2}{2}f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt,$$

Por lo tanto la integral

$$\int_a^x G(t)dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds \right) dt \qquad \textbf{37)}$$

$$= \int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^s f(r)dr \right) ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt$$

Con el desarrollo anterior podemos deducir

$$\int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^s \left(\int_a^x f(n)dn \right) dr \right) ds \right) dt = \frac{1}{3.2} \int_a^x (x-t)^3 f(t)dt \qquad \textbf{38)}$$

Tomando como ${}_aI_x^4$ el operador integral definido en el intervalo (a, x) podemos escribir

$${}_aI_x^4 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^t \left(\int_a^s \left(\int_a^x f(n)dn \right) dr \right) ds \right) dt = \frac{1}{3!} \int_a^x (x-t)^3 f(t)dt,$$

Lo que lleva a deducir una fórmula para la $n-esima$ integral de la función $f(x)$

$${}_aI_x^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad \textbf{39)}$$

Procedemos a demostrar mediante el proceso de inducción que la ecuación anterior se cumpla para todo $n \in N$. Supongamos que la ecuación es válida para $n = k$ con $\in N$.

$${}_aI_x^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t)dt,$$

Aplicando nuevamente el operador integral y utilizando algebra de operadores obtenemos

$${}_aI_x \left({}_aI_x^k f(t) \right) = {}_aI_x \left({}_aI_x^{k-1}\, {}_aI_x f(t) \right) = {}_aI_x^k ({}_aI_x f(t))$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} \left({}_aI_t f(s) \right) dt,$$

Integrando por parte

$$u = {}_aI_t f(s) \to du = f(t)dt$$

$$dv = (x-t)^{k-1} dt \to v = -\frac{(x-t)^k}{k}$$

$$ {}_aI_x\left({}_aI_x^k f(t)\right) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}\left({}_aI_t f(s)\right)dt $$

$$ = \frac{1}{(k-1)!}\left[-\frac{(x-t)^k}{k}\ {}_aI_t f(s)|_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^k}{k} f(t)dt\right] $$

$$ = \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f(t)dt $$

$$ = \ {}_aI_x^{k+1} f(t), $$

Lo cual demuestra que

${}_aI_x^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$ es válida para todo $n \in N$.

Tomando en cuenta el hecho de que la función Gamma es relacionada con el factorial por la igualdad $\Gamma(n) = (n-1)!$ Se puede escribir:

$$ {}_aI_x^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \ \ n \in N\backslash(Z^- \cup \{0\}) \tag{40} $$

Con el recíproco de la función Gamma, conocido como el producto infinito de Weierstrass, es univaludo y finito para todo $z \in \mathbb{C}\backslash(Z^- \cup \{0\})$ podemos escribir la ecuación ${}_aI_x^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$ como

$$ {}_aI_x^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \ \ \alpha \in N\backslash(Z^- \cup \{0\}) \tag{41} $$

Por otro lado si se considera el intervalo (x, b) y se lleva acabo el mismo desarrollo se obtiene

$$ {}_xI_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \ \ \alpha \in N\backslash(Z^- \cup \{0\}) \tag{42} $$

2.1.5 Operadores

Los operadores de tipo diferenciación. Diferenciación, diferenciación. Integración, integración. Integración. Obedecen la ley de los exponentes:

$$(diferenciacion)^m.(diferenciacion)^n = (diferenciacion)^{m+n}$$

$$(diferenciacion)^m.(integracion)^n = \begin{cases}(diferenciacion)^{m-n} \ si\ m \geq n \\ (integracion)^{n-m}\ si\ m \leq n\end{cases}$$

$$(integracion)^m.(integracion)^n = (integracion)^{m+n}$$

Los operadores de tipo $(integracion)^m.(diferenciacion)^n$son más complicados.

$$D^{-1}D^3 f = D^{+2} - f''(a)$$

$$D^{-1}D^2 f = D^{+1} - f'(a)$$

$$D^{-1}D^1 f = D^{+0} - f(a)$$

$$D^{-2}D^3 f = D^{+1}f - f''(a)(x-a) - f'(a)$$

$$D^{-2}D^2 f = D^{+0}f - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$D^{-2}D^1 f = D^{-1}f - f(a)(x-a)$$

$$D^{-3}D^3 f = D^{+0}f - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$D^{-3}D^2 f = D^{-1} - \frac{1}{2}f'(a)(x-a)^2 - f(a)(x-a)$$

$$D^{-3}D^1 f = D^{-2} - \frac{1}{2}f(a)(x-a)^2$$

En general:

$$(integracion)^m.(diferenciacion)^n$$

$$= \begin{cases}(diferenciacion)^{m-n} + terminos\ extra\ si\ m \geq n \\ (integracion)^{n-m} + terminos\ exta\ si\ m \leq n\end{cases}$$

2.1.6 Operador fraccionario de Jean-Baptiste Joseph Fourier.

Su definición de un operador fraccionario se obtuvo de su representación de orden entero para $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos\big(p(x-\alpha)\big)\, dp$$

Ya que

$$(\frac{d}{dx})^n \cos\big(p(x-\alpha)\big) = p^n \cos\left(\, p(x-\alpha) + n\frac{\pi}{2}\right),$$

Para n un entero. Sustituyendo n con v (v arbitrario), se obtiene la generalización

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^v f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^v \cos\left(\, p(x-\alpha) + v\frac{\pi}{2}\right) \quad \mathbf{43)}$$

El número v que aparece en la ecuación anterior se considera como cualquier cantidad, ya sea positiva o negativa.

2.1.7 Operadores Diferointegrables

Primero notemos como están relacionadas las funciones trigonométricas seno y coseno para las derivadas e integrales de orden entero.

$$sin\left(x \pm \frac{n}{2}\pi\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) \pm sin\left(\frac{n}{2}\pi\right)\cos(x) \quad \mathbf{44)}$$

$$cos\left(x \pm \frac{n}{2}\pi\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) \mp \sin(x)\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) \quad \mathbf{45)}$$

Sin pérdida de generalidad tomemos la función seno y obtengamos sus primeras derivadas.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\sin(x) = \cos(x) = sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right),$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \sin(x) = -\sin(x) = \sin(x+\pi),$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^3 \sin(x) = -\cos(x) = \sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right),$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 \sin(x) = \sin(x) = \sin(x+2\pi),$$

Ahora tomando las integrales impropias se obtiene

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + a_0 = sin\left(x-\frac{1}{2}\pi\right) + a_0,$$

$$\left(\int\right)^2 \sin(x)\,d^2x = -\sin(x) + \sum_{k=0}^{1} a_x x^k = \sin(x-\pi) + \sum_{k=0}^{1} a_k x^k,$$

$$\left(\int\right)^3 \sin(x)\,d^3x = \cos\,(x) + \sum_{k=0}^{2} a_x x^k = \sin\left(x-\frac{3}{2}\pi\right) + \sum_{k=0}^{2} a_k x^k,$$

$$\left(\int\right)^4 \sin(x)\,d^4x = \sin(x) + \sum_{k=0}^{3} a_x x^k = \sin(x-2\pi) + \sum_{k=0}^{3} a_k x^k,$$

Se puede deducir la fórmula para la n-esima derivada y la n-esima integral de la función seno

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \sin(x) = sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) \quad \textbf{46)}$$

$$\left(\int\right)^n \sin(x)\,d^nx = \sin\left(x-\frac{n}{2}\pi\right) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad \textbf{47)}$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos que el operador derivada induce un corrimiento hacia la derecha para la función seno mientras que el operador integral induce un corrimiento hacia la izquierda, considerando que la derivada es el operador inverso por la izquierda de la integral podemos definir

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int\right)^n f(x)d^n x = D^n I^n f(x)$$

$$= I^{-n} I^n f(x)$$

$$= D^n D^{-n} f(x)$$

$$= f(x),$$

Por tanto

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int\right)^n f(x)d^n x = D^n I^n f(x) = f(x) \quad \textbf{49)}$$

2.2 Derivada fraccionaria

Los conceptos más extendidos de las matemáticas es la derivada, considerándose como la rapidez de cambio de una variable respecto de otra. La definición de derivada nos permite aumentarla y podemos considerar la primera derivada, segunda derivada, tercera derivada y así sucesivamente. ¿Pero qué tal si calculamos la media derivada? ¿Podemos hacer ¾ de derivadas? La pregunta no es absurda y surgió casi al mismo tiempo que surgió el cálculo diferencial. Por mucho que se asegure el dominio del cálculo diferencial e integral de los libros de texto, si no podemos asignar la derivada de orden ½ o más general de orden positivo o negativo, real o complejo, entonces trabajamos privado de un recurso poderoso.

Es necesario un conocimiento detallado de las propiedades básicas y sus connotados más notables:

Sujeto a las restricciones apropiadas, podemos emplear operaciones de cálculo ordinario para construir.

$$\ldots \leftarrow \iiint f \leftarrow \iint f \leftarrow \int f \leftarrow f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \rightarrow \cdots$$

2.2.1 Derivada fraccionaria de Laplace

Desarrolló un único ejercicio matemático generalizando a partir de un caso de orden entero. Empezando con $f(x) = x^m$ con m un entero positivo, Lacroix desarrolló fácilmente la derivada n-esima de $f(x)$.

$$\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = m x^{m-1}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^3 f(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big)x^{m-n}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \qquad m \geq n \tag{50}$$

Haciendo uso del símbolo de Legendre para la generalización del factorial (la función gamma), obtiene

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{51}$$

Después da el ejemplo para el caso $f(x) = x^m$ con $n = 1/2$.

Si $m = 1$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1!}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

2.2.2 Ley de los exponentes para operadores diferenciales de orden entero

Lagrange (1772) contribuyó indirectamente al cálculo fraccional al desarrollar la ley de exponentes para operadores diferenciales de orden entero:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n} f(x) \qquad 52)$$

Si calculamos media derivada a una función dos veces obtenemos la primera derivada es decir,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) \qquad 53)$$

2.2.3 Derivada fraccionaria de Josep Liouville

Liouville (1832) parte de la derivada de orden entero de la función exponencial.

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax} \qquad 54)$$

donde indica que m puede ser cualquier número real o complejo, positivo (indicando la derivación) o negativo (indicando la integración). A partir de esta definición de derivada y suponiendo que una función y se puede desarrollar en una serie de exponenciales, establece una formula general para la derivada. Primero desarrolla en serie de exponenciales

$$y = \sum_i A_i e^{m_i x}, \tag{55}$$

Y deriva término a término esta serie para obtener:

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \sum_i A_i m_i^u e^{m_i x} \tag{56}$$

a la expresión (56) se le conoce como la primera definición de derivada fraccionaria de Liouville. Luego da dos ejemplos, que algunos historiadores han llamado como la segunda definición de Liouville.

Primer ejemplo:

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\alpha \tag{57}$$

Es importante notar que (57) no es más que la transformada de Laplace de la función escalón unitario en la que se ha cambiado s por x. Partiendo (57), Liouville utiliza la fórmula de derivada fraccionaria y obtiene.

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x}}{dx^\mu} = \int_0^\infty (-1)^\mu e^{-\alpha x} \alpha^\mu d\alpha = \frac{(-1)^\mu \Gamma(\mu+1)}{x^{1+\mu}} \tag{58}$$

Para el segundo ejemplo define:

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{n-1} d\alpha \tag{59}$$

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \int_0^\infty \frac{(-1)^\mu e^{-\alpha x} \alpha^{\mu+n-1} d\alpha}{\Gamma(n)} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n) x^{n+\mu}} \tag{60}$$

A continuación, Liouville da una expresión para la integral fraccionaria de una función arbitraria, pero con restricciones:

$$\frac{d^{-\mu}}{dx^{-\mu}} = \int^{\mu} \phi(x)dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha, \quad \textbf{61)}$$

Donde $\mu > 0$ y si $\phi(.) = \sum A_m\, e^{mx}$ y m debe ser menor que cero o si es de la forma $m = -p + q\sqrt{-1}$, p debe ser mayor que cero. Al final de cuentas lo que se trata es cuidar la convergencia de la integral impropia que se logra cuando el integrando se anula en ∞ .

Para obtener la derivada de $\phi(x)$, Liouville hace $\mu = n - p$, donde n es menor entero positivo mayor que μ con lo que obtiene.

$$\frac{d^{\mu}\phi(x)}{dx^{\mu}} = \frac{1}{(-1)^{p}\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}[\phi(x+\alpha)]\alpha^{p-1}d\alpha \quad \textbf{62)}$$

2.2.4 Derivada fraccionaria de Grünwald-Létnikov

Anton Karl Grünwald (1838-1920), en 1867, y Aleksey Vasilievich Létnikov (1837-1888), en 1868, proponen la definición de la derivada fraccionaria, partiendo de la definición básica de la derivada de orden entero; esto es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

.

.

.

$$f^{n}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{0\le m\le n}(-1)^m\binom{n}{m}f[x+(m-n)h]}{h^n} \quad \textbf{63)}$$

Donde

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)} \qquad 64)$$

Haciendo operaciones aritméticas se llega a las siguientes fórmulas de la derivada fraccionaria de Grünwald-Létnikov:

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-\alpha}{h}} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh), \qquad 65)$$

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{x-a}\right)^{\alpha} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)} f\left[x - m\left(\frac{x-a}{n}\right)\right] \qquad 66)$$

2.2.5 Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Una de las piezas claves en el estudio de cálculo fraccionario es la integral iterada, que se define de la siguiente manera.

Definición: Sea $L^1_{loc}(a,b)$ el espacio de funciones localmente integrables en el intervalo (a,b). Si f es una función tal que $f \in L^1_{loc}(a,\infty)$, entonces la n-esima integral iterada de la función f está dada por:

$$_aI_x^n f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$_aI_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

donde

$$_aI_x \ = f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

tomando en cuenta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, de manera natural se puede obtener una generalización de la integral de f para un orden arbitrario $\alpha > 0$

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad (derecha) \tag{67} $$

de manera similar en el caso en que f sea una función integrable localmente en el intervalo $(-\infty, b)$ se tiene

$$ {}_xI_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad (izquierda) \tag{68} $$

ambas formas están definidas para f.

Las ecuaciones (67) y (68) corresponden a las definiciones de integral fraccionaria derecha e izquierda de Riemann-Liouville, respectivamente. Las integrales fraccionarias satisfacen la propiedad de semigrupo, la cual está dada en la siguiente proposición

Proposición

Sea f una función. Si $f \in L_{loc}^1(a, \infty)$, entonces las integrales fraccionales de f satisfacen que

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ {}_aI_x^{\beta} f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha, \beta > 0 \tag{69} $$

del resultado anterior se tiene que en particular

$$ {}_aI_x^{n}\ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = {}_aI_x^{n+\alpha} f(x), \quad n \in N, \ \alpha > 0 \tag{70} $$

Como el operador d/dx es el operador inverso por la izquierda del operador ${}_aI_x$, cualquier integral $\alpha - esima$ de una función $f \in L_{loc}^1(a, \infty)$ se puede escribir como

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left({}_aI_x^{n}\ {}_aI_x^{\alpha} f(x) \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left({}_aI_x^{n+\alpha} f(x) \right) \tag{71} $$

Entonces, de las ecuaciones anteriores se construye el siguiente operador, el cual corresponde a la derivada fraccional (derecha) de Riemann-Liouville

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \qquad \textbf{72)} $$

Se pueden unificar las definiciones de integral fraccional y derivada fraccional de Riemann-Liouville, dada las ecuaciones anteriores, de la siguiente manera

$$ {}_aD_x^{\alpha} fx) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt & si\ \alpha < 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dx^n} \displaystyle\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, & si\ a \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{73)} $$

donde $n-1 \leq \alpha < n, con\ n = \lfloor\alpha\rfloor + 1$.

De manera análoga para la derivada fraccional izquierda de Riemann-Liouville se tiene que

$$ {}_xD_b^{\alpha} fx) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_x^b (t-x)^{-\alpha-1} f(t)dt & si\ \alpha < 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dx^n} \displaystyle\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt, & si\ a \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{74)} $$

Considerando (67) y (71) podemos construir la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

$$ {}_aD_x^{\alpha} fx) = \begin{cases} {}_aI_x^{-\alpha} f(x), & si\ \alpha < 0 \\ \dfrac{d^n}{dx^n}\left({}_aI_x^{n-\alpha} f(x) \right) & si\ \alpha \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{75)} $$

Donde $n = \lceil\alpha\rceil$ luego aplicando el operador (75) a la función x^{μ} con $\alpha \in R \setminus Z$ y $\mu \geq 0$, obtenemos el siguiente resultado

$$ {}_0D_x^{\alpha} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \qquad \textbf{76)} $$

2.2.6 Derivada Fraccionaria de Caputo

Michele Caputo (1969) publicó un libro e introdujo una nueva definición de derivada fraccionaria, creo esta definición con el objetivo de modelar fenómenos de difusión anómalos. La definición de Caputo ya había sido descubierta de forma independiente por Gerasimov (1948). Esta derivada es de suma importancia ya que permite modelar tiempo el fraccionario. En algunos textos, se conoce como la derivada fraccionaria de Gerasimov-Caputo.

Sea f una función, tal que es n veces diferenciable con $f^{(n)} \in L^1_{loc}(a,b)$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo por la derecha se define como:

$$({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}y)(x) = ({}^{RL}_{a}I^{n-\alpha}_{x}D^{n}y)(x)$$

$$({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(t)dt$$

77)

$$({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}y)(x) = (-1)^{n}({}^{RL}_{x}I^{n-\alpha}_{b}D^{n}y)(x)$$

$$({}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b})(x) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(t)dt \qquad 78)$$

Donde $n = \lceil\alpha\rceil$. Cabe mencionar que la derivada fraccionaria de Caputo se comporta como el operador inverso a la izquierda de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, es decir,

$$({}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x})(\,{}_{a}I^{\alpha}_{x}D^{n}f(x)) = f(x) \qquad 79)$$

Por otro lado la relación entre las derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville está dada por la siguiente expresión

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x) = \,{}_{a}D^{\alpha}_{x}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right) \qquad 80)$$

Entonces $f^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k < n$, obtenemos

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x) = \,{}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x) \qquad 81)$$

Considerando el caso particular anterior, es posible unificar las definiciones de derivada fraccionaria de Rieman-Liouville y Caputo de la siguiente manera

$$ {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} f x) = \begin{cases} {}_{a}I_{x}^{-\alpha} f(x), & si\ \alpha < 0 \\ {}_{a}I_{x}^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) & si\ \alpha \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{82)} $$

2.3 Métodos introductorios

2.3.1 Método del punto fijo.

El método del punto fijo también conocido como el método de iteración funcional es el fundamento matemático para construir métodos eficientes para el cálculo de raíces reales de ecuaciones no lineales.

Este método consiste en re-escribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$. Esta ecuación debe ser consistente con la ecuación original en el sentido que debe satisfacerse con la misma raíz.

$$ r = g(r) \ \leftrightarrow \ f(r) = 0 \quad \textbf{83)} $$

Se construye un proceso iterativo a partir del valor semilla x_0

$$ g(x_0) = x_1 $$

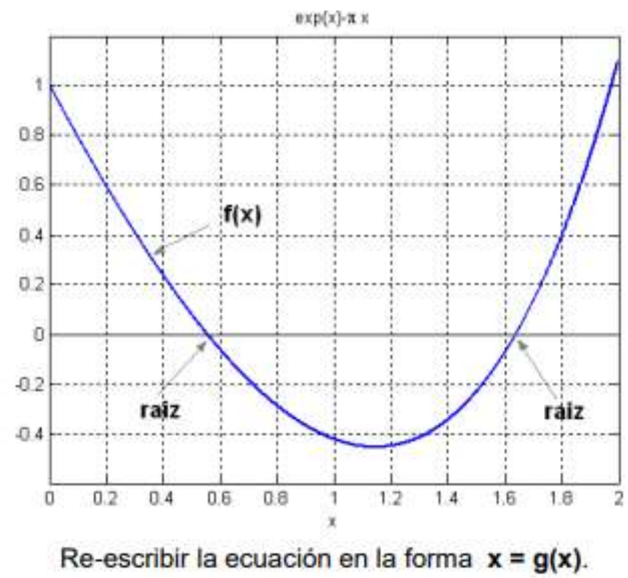
$$ g\ (x_1) = x_2 $$

$$ g(x_{n-1}) = x_n \quad \textbf{84)} $$

<u>Ejemplo2.3.1</u>

Calcule una raíz real de $f(x) = e^x - \pi x = 0$ con el método del punto fijo.

Un gráfico de f nos muestra que la ecuación tiene dos raíces reales en el intervalo [0, 2]



$$x = g(x) = e^{x}/\pi$$

Figura 2.1: x=g(x)= del punto fijo para el ejemplo 2.31. (https//www.uv.mx)

PUNTOS FIJOS PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Preliminar

La forma general de un sistema de ecuaciones no lineales es:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0; \\ &f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0; \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0; \end{aligned} \qquad \textbf{85)}$$

donde cada función f_i puede tomarse como una aplicación de un vector x del espacio *n*-dimensional R^n, $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^t$, en la recta real R. Alternativamente, el sistema puede representarse definiendo una función F, de R^n en R^n por

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n) = \left(f_1(x_1; x_2; \dots; x_n); \ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n); \dots; \ f_n(x_1; x_2; \dots; x_n)\right)^t = 0$$

Usando notación vectorial para representar las variables x_i, el sistema asume la forma:

$$F(x) = 0 \qquad \textbf{86)}$$

Las funciones $f_1; \ f_2; \dots ; f_n$ se llaman funciones coordenadas de F.

Método de Iteración

Se desarrolló un proceso iterativo para resolver la ecuación $f(x) = 0$ transformando primero esta ecuación en una ecuación de la forma $x = g(x)$. La función g tiene sus puntos fijos precisamente en las soluciones de la ecuación original. Aquí se investigará un procedimiento similar para funciones de R^n en R^n.

Sea dado un sistema de ecuaciones no lineales de un tipo especial:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1; x_2; \dots; x_n); \\ x_2 &= g_2(x_1; x_2; \dots; x_n); \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1; x_2; \dots; x_n); \end{aligned} \qquad \textbf{87)}$$

donde las funciones $g_1, g_2; \dots; g_n$ son reales, definidas y continuas en un conjunto D, vecindad de una solución separada $(x_1^*; \ x_2^*; \dots; \ x_n^*)$ del sistema. De forma más compacta el sistema se puede escribir como:

$$x = G(x) \qquad \textbf{88)}$$

Definición. Se dice que una función $G: D \subset R^n \to R^n$ tiene un punto fijo en $p \in D$ si $G(p) = p$.

Para hallar la raíz vectorial $p = (p_1; \ p_2; \dots; \ p_n)$ de la ecuación (85), frecuentemente resulta conveniente utilizar el método de iteración

$$x^{(k+1)} = G\left(x^{(k)}\right) \qquad \textbf{89)}$$

$k = 0; 1; 2; \ldots$, donde la aproximación inicial $x^{(0)} \approx p$. Obsérvese que si el proceso de iteración (89) converge, entonces el valor limite $\xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ es definitivamente una raíz de la ecuación (88), y pasando al límite en (89) para $k \to \infty$ tendremos, en virtud de la continuidad de la función $G(x)$;

$$\xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = G\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}\right) = G(\xi)$$

De este modo, ξ es una raíz de la ecuación vectorial (88). Si, además, todas las aproximaciones $x^{(k)}$ $(k = 0; 1; 2; \ldots)$ pertenecen al dominio D y p es una raíz única del sistema en D, entonces $\xi = p$. El método de iteración puede aplicarse también al sistema general $(86) o$ (87), donde $F(x)$ es una función vectorial, definida y continua en la vecindad D de una raíz separada p. Por ejemplo, escribamos nuevamente este sistema de la forma;

$$x = x + A\,F(x) = G(x) \qquad \textbf{90)}$$

donde A es una matriz no singular. El método ordinario de iteración (89) es directamente aplicable a esta ecuación. Si la función $F(x)$ tiene una derivada continua $F'(x)$ en D, se sigue que

$$G'(x) = I + AF'(x) = I + AJ(x) \qquad \textbf{91)}$$

donde la matriz $J(x) = F'(x)$ es la matriz Jacobiana, definida como $J(x) = Jij = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$. Entonces elegiremos (debido a lo que se demostrara más adelante) la matriz A de forma que

$$G'\left(x^{(0)}\right) = I + A\,J\left(x^{(0)}\right) = 0\,; \qquad \textbf{92)}$$

de donde, si la matriz $J(x^{(0)})$ = $F'\left(x^{(0)}\right)$ es no singular, tendremos

$$A = -\left[J\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1} \qquad \textbf{93)}$$

Si $det[J(x^{(0)})] = 0$, debe eligirse una aproximación inicial $x^{(0)}$ diferente.

2.3.2 Método de Bisección.

El método de bisección es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene la raíz. Esto se logra llevar a cabo a través de varias interacciones que son aplicadas en un intervalo para por medio de ello encontrar la raíz de la función.

Este es uno de los métodos más sencillos de fácil intuición para resolver ecuaciones en una variable, también conocido como método del intervalo medio, este se basa en el teorema del valor intermedio, el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a, c]$ toma todos los valores que se hallan entre $f(a)\ y\ f(b)$. Esto es que todo valor entre $f(a)\ y\ f(b)$ es la imagen de al menos un valor del intervalo $[a, b]$.En caso de que $f(a)\ y\ f(b)$ tengan signos opuestos, el valor cero sería un valor intermedio entre $f(j) y\ f(e)$, por lo que con certeza existe un p en $[a, b]$ que cumple $f(p) = 0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(a) = 0$.

El método consiste en lo siguiente:

- Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$
- A continuación se verifica que $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Se calcula el punto medio *m* del intervalo $[a, b]$ y se evalúa $f(m)$ si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada
- En caso de que no lo sea, verificamos si *f*(*m*) tiene signo opuesto con *f*(*a*) o con *f*(*b*)
- Se re define el intervalo [*a*, *b*] como $[a, m]$ ó $[m, b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo

- Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada

El método de bisección es menos eficiente que el método de Newton, pero es mucho más seguro para garantizar la convergencia.

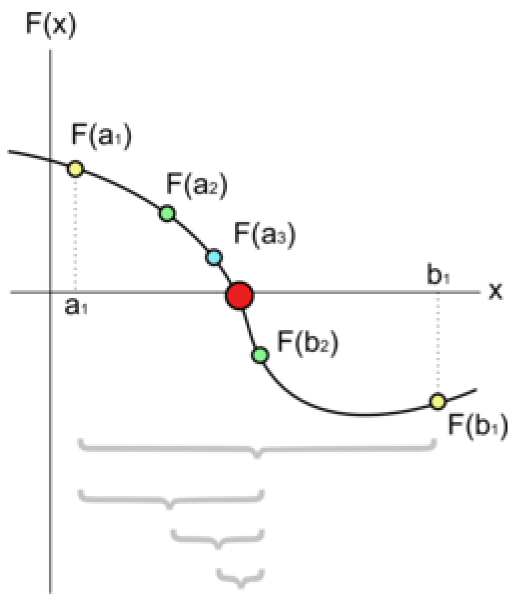


Figura 2.2: gráfica de convergencia del método de bisección.(https://www.ingenieria.unam.mx)

2.3.3 Método de Newton Raphson

Encontrar raíces de ciertos tipos de ecuaciones fue un problema que cautivo a los matemáticos durante siglos. Los ceros de una función polinomial f de grado 4 o menos (es decir, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$) siempre pueden encontrarse por medio de una formula algebraica que expresa la incógnita x en términos de los coeficientes de f. Sin embargo en el siglo XIX se demostró que las ecuaciones mayor grado que cuatro no pueden resolverse por medio de fórmulas algebraicas, en otras palabras en términos radicales. Consideraremos una técnica de aproximación que utiliza la derivada de una función f o, con más precisión, una recta tangente a la gráfica de f. Este método se denomina **método de Newton Raphson.**

Suponga que f es diferenciable y suponga que c representa una raíz real desconocida de $f(x) = 0$; es decir $f(c) = 0$. Sea x_0 un número que se escoge arbitrariamente como primera conjetura para c. Si $f(x_0) \neq 0$, calcule $f'(x)$. Construya una tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ .Si se hace que $(x_1, 0)$ denote la intersección x de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, entonces las coordenadas $x = x_1$ y $y = 0$ deben satisfacer esta ecuación. Al despejar x_1 de $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ obtenemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \textbf{94)}$$

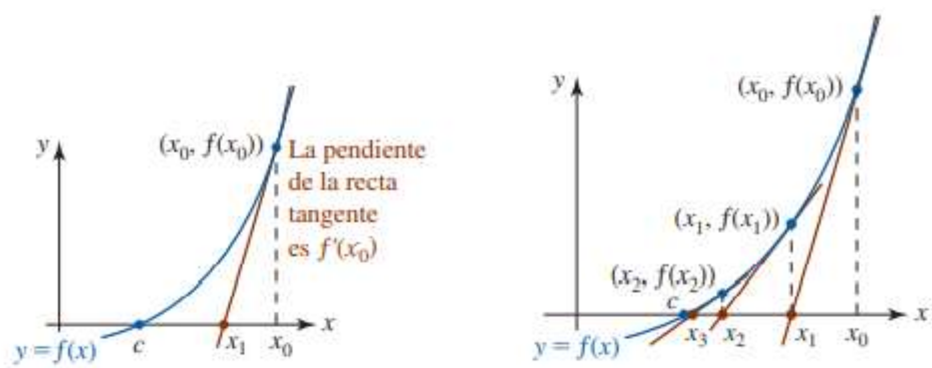


Figura 2.3: Grafica de aproximación mediante iteraciones.(https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu)

Repitiendo el procedimiento en $(x_1, f(x_1))$ y sea $(x_2, 0)$ la intersección de x de la segunda recta tangente y $f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Por $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ encontramos $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ al continuar de esta manera determinamos x_{n+1} a partir de x_n al usar la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ 95)

2.3.4 Casos donde el método de Newton Raphson falla

El método de Newton Raphson no siempre produce una sucesión convergente.

- ✓ El método de Newton Raphson no converge si $f'(x)_n = 0$. Al usar la formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ 96

- ✓ La función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  Ejemplo:

  sea la función $f(x) = x^{1/3}$

  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

  tomamos $x_0 = 0.1$ como primera conjetura y empezamos las iteraciones

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.1 - \frac{(0.1)^{1/3}}{\frac{1}{3}(0.1)^{-2/3}} = -0.20000$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.20000 - \frac{(-0.20000)^{1/3}}{\frac{1}{3}(-0.20000)^{-2/3}} = 0.40000$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.40000 - \frac{(0.40000)^{1/3}}{\frac{1}{3}(0.40000)^{-2/3}} = -0.80000$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0.80000 - \frac{(-0.80000)^{1/3}}{\frac{1}{3}(-0.80000)^{-2/3}} = 1.60000$$

  podemos ver que la estimación inicial no produce una sucesión convergente.

- ✓ La función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, cuando el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, tiene solución compleja y la gráfica no intersecta x siempre va estar encima o debajo del eje x.

  Ejemplo:

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$

La grafica de la función no intercepta el eje x, por tanto el método de Newton Raphson no es aplicable.

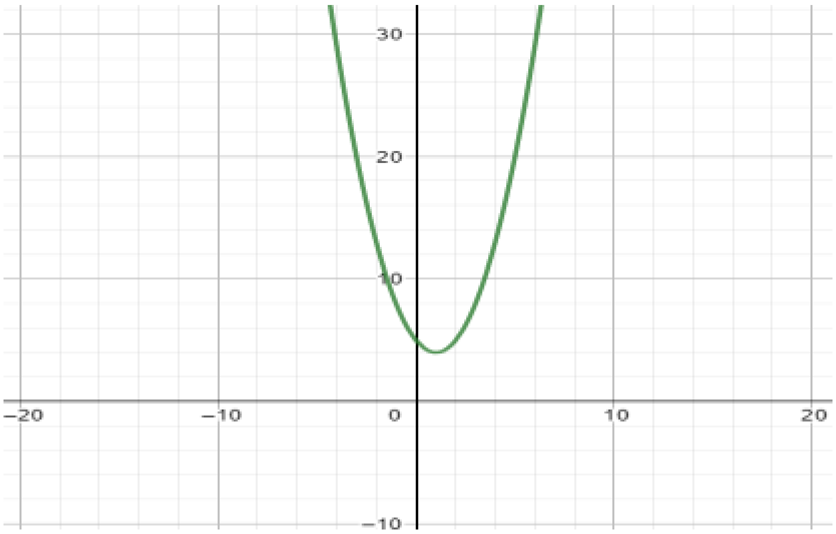


Figura 2.4. función cuadrática con raíces complejas.

Condición suficiente para que Newton Raphson converja

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \qquad \text{97)}$$

2.3.5 Newton fractal

Newton fractal se basa en el método de Newton para encontrar raíces, para una función en particular y a partir de puntos dispuestos en una cuadricula en el plano complejo. Es el conjunto de Julia de la función $z \to z - \frac{p(z)}{p'(z)}$ que viene dado por el método de Newton.

Como trazar la gráfica de un fractal de Newton:

El gráfico de un fractal de Newton se crea asignando diferentes colores a los puntos en una cuadrícula de números complejos, según el cual una de las diferentes raíces de una función del método de Newton converge desde cada punto de la cuadricula.

- Decidir, que función $F(x)$ usar; esto determina la estructura del fractal.
- Defina la cuadricula bidimensional de puntos en el plano de números complejos. Cada uno de ellos servirá como una suposición inicial del método de Newton.
- Obtenga una lista de las raíces de $F(x)$, más precisas sus posiciones en el plano de números complejos con suficiente posición y exactitud.
- En realidad, la lista de raíces no tiene por qué estar completa, pero cuantas más raíces tengas, más colorida será tu imagen.
- Ejecute el método de Newton, comenzando desde cada punto de la cuadricula, y determine a cuál de las raíces está convergiendo para este punto de la cuadricula. También observe después de cuantos pasos de iteración se alcanza una cierta precisión objetivo para cada punto de la cuadricula.
- Al final, tendrá una lista de los siguientes números para cada punto de la cuadricula:
  Una coordenada x.
  Una coordenada y.
  La raíz a la que convergió el método.
  Cuantos pasos de iteración se necesitaron para llegar a la raíz con una precisión preestablecida determinada.

Entonces todo lo que queda por hacer es lo siguiente:

- Asignar un valor numérico diferente a cada una de las raíces, por ejemplo, un número entero (solo numera las raíces).
- Convertir este valor numérico en un color.
- Trazar los colores resultantes para todos los puntos de la cuadricula.
- Si lo desea, puede utilizar la cantidad de pasos de iteración necesarios para sombrear el color.

Eso es todo. Cuando haga esto debe asegurarse de lo siguiente

- Las posiciones de las raíces deben estar cubiertas por su cuadrícula inicial, al menos parcialmente. Esto no es necesario, pero es una buena primera versión de su cuadrícula para que pueda ver dónde suceden cosas interesantes. Luego, puede restablecer la cuadrícula para acercar o alejar o establecer posiciones como desee.
- Usted sabe cuántos pasos en promedio necesita el método de Newton para converger en su cuadrícula. De esta manera, puede elegir un número máximo adecuado de iteraciones (establecer ese máximo evita bucles infinitos en su código).
- La precisión que necesita del método de Newton para cada punto de partida debe ser mayor que la precisión con la que decide que un resultado se encuentra lo suficientemente cerca de una de las raíces. Esta identificación del punto final con una de las raíces también se realiza numéricamente.
- Comience con un número suficientemente pequeño de puntos de cuadrícula. Dichos cálculos pueden ser largos muy rápidamente y siempre puede usar más puntos de cuadrícula, una vez que esté seguro de que todo está funcionando como se esperaba.

Ejemplo2.3.2:

$$F(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

$$F(z) = ((x + iy)^2 - 1)(x + iy)^2 + 1)$$

$$F(z) = (x^2 - y^2 + i2xy - 1)((x^2 - y^2 + i2xy + 1)$$

$$F'(z) = (x^2 - y^2 + i2xy - 1)'((x^2 - y^2 + i2xy + 1) + (x^2 - y^2 + i2xy \\ - 1)((x^2 - y^2 + i2xy + 1)'$$

$$F'(z) = (2x + i2y)((x^2 - y^2 + i2xy + 1) + (x^2 - y^2 + i2xy - 1)(2x + i2y)$$

$$F'(z) = (2x + i2y)[((x^2 - y^2 + i2xy + 1) + (x^2 - y^2 + i2xy - 1)$$

$$F'(z) = 2z((z^2 - 1) + (z^2 + 1))$$

$$z_{y0+1} = z_I - \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{2z((z^2-1)+(z^2+1))}$$

Esta función tiene cuatro ceros complejos:

$-1, 1, -y0, y0$

Lo que significa que nuestro fractal debe tener cuatro colores diferentes basados en a convergencia hacia estas cuatro raíces. Usamos una cuadricula compleja de z con 100 valores para partes reales e imaginarias cada uno ∈ [-2,2]. El resultado es:

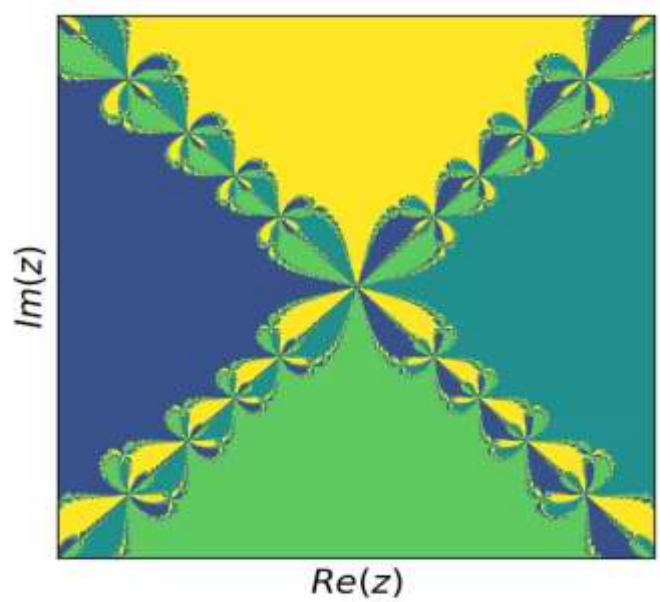


Figura 2.5. Representación gráfica de raíces complejas de una función compleja del ejemplo 2.3.2.(https://atmost.eas.cornell.edu)

CAPITULO 3

3 METODOLOGÍA

3.1. Tipo de Investigación.

El tipo de investigación en este estudio es monográfico y consiste en mostrar la definición de derivada e integral fraccionaria, deduciendo teóricamente el método de Newton Raphson Fraccional en análisis numérico.

3.2. Diseño de la investigación

Esta investigación se fundamenta en propiedades de cálculo y análisis numérico y se diseñó de la siguiente manera:

1. Comprender propiedades básicas como:

La función gamma.

Diferenciación e integración de orden entero.

Definiciones generales para derivadas e integrales.

Integral iterada.

Métodos tradicionales de análisis numérico.

2. Deducir las ecuaciones de derivada e integral fraccionaria.

3. Aplicar derivada fraccionaria y Newton Rapshon clásico para definir la fórmula del modelo matemático newton raphson fraccional.

3.2.1 Comprensión de la teoría

Se analizó toda la teoría básica de propiedades básicas para el desarrollo de derivadas e integrales fraccionarias al igual para el método de newton rapshon fraccional, fundamentadas en análisis numérico y en cálculo diferencial e integral.

CAPITULO 4

4 RESULTADOS

4.1. Derivadas fraccionarias (Riemann Liouville)

$$ {}_aD_x^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt, $$

1. Calcular media derivada de la función constante $f(x) = 1$

Solución:

Primeramente calculamos la media integral y luego derivamos.

$$ {}_0I_x^{1/2}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-u)^{1/2-1}1du, $$

Sabemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, luego calculamos la integral

$$ \int_0^x (x-u)^{1/2-1}1du $$

$$ \int_0^x \frac{du}{(x-u)^{1/2}} $$

Mediante cambio de variable resulta

$$ = -2(x-u)^{1/2}\Big|_0^x $$

$$ = -2(x-x)^{\frac{1}{2}} - (-2(x-0))^{1/2} $$

$$ = 2x^{1/2} $$

La media integral de f(x)=1 es

$$I^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$$

Si derivamos la media integral resultante obtenemos la media derivada

$$Sea\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$${}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

Por tanto hemos obtenido la media derivada de la función constante $f(x) = 1$ y por tanto sabemos que la derivada fraccionaria de una función constante no siempre es cero.

2. Calcular media derivada de la función $f(x) = x$

$${}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} (\frac{d}{dx})^1 \int_0^x (x-t)^{1-1/2-1} t dt,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-1/2} t dt,$$

Cambio de variable

$$u = x - t \rightarrow t = x - u$$

$$du = -dt \rightarrow -du = dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} (x-u). -du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} (- \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} (x-u) du)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-\int_0^x (xu^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du\ )$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-x\int_0^x u^{-\frac{1}{2}}du+\int_0^x u^{\frac{1}{2}}\,du)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-x\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-2xu^{1/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^x)$$

Regresando a la variable original y evaluando los límites de integración

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-2x(x-t)^{1/2}+\frac{2}{3}(x-t)^{3/2}\Big|_0^x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(\left(-2x(x-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(x-x)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(-2x(x-0)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(x-0)^{\frac{3}{2}}\right))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-\left(-2x(x)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}\right))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(-\left(-2x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ )$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\ )$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{4}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\ )$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

3. Calcular media derivada de la función $f(x)=x^2$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-1/2)}(\frac{d}{dx})^2\int_0^x (x-t)^{2-1/2-1}t^2dt$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{1}{\Gamma(3/2)}(\frac{d}{dx})^2\int_0^x (x-t)^{1/2}t^2dt$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{d}{dx})^2\int_0^x (x-t)^{1/2}t^2dt$$

Cambio de variable

$$u = x - t \to t = x - u$$

$$du = -dt \to -du = dt$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{d}{dx})^2\int_0^x u^{1/2}(x-u)^2.-du$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(-\int_0^x (u^{\frac{1}{2}}(x^2-2xu+u^2))du)$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(-\int_0^x (x^2u^{\frac{1}{2}}-2xu^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{5}{2}})du)$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(-x^2\int_0^x u^{\frac{1}{2}}du - 2x\int_0^x u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_0^x u^{\frac{5}{2}}\,du)$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(-x^2\int_0^x u^{\frac{1}{2}}du - 2x\int_0^x u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_0^x u^{\frac{5}{2}}\,du)$$

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(\left(\frac{-x^2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{2xu^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^x)$$

Regresando a la variable original

$${}_0D_x^{1/2}f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2(\left(\frac{-x^2(x-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{2x(x-t)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{(x-t)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^x)$$

Evaluando los límites de integración

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(-\frac{2}{3}x^2(x-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x}{5}(x-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(x-x)^{\frac{7}{2}} - (-\frac{2}{3}x^2(x-0)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x}{5}(x-0)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(x-0)^{\frac{7}{2}})\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(-(-\frac{2}{3}x^2(x-0)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x}{5}(x-0)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(x-0)^{\frac{7}{2}})\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(-(-\frac{2}{3}x^2(x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x}{5}(x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(x)^{\frac{7}{2}})\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(-(-\frac{2}{3}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7}(x)^{\frac{7}{2}})\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(-(-\frac{16}{105}x^{\frac{7}{2}})\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\frac{16}{105}x^{\frac{7}{2}}\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{7}{2}\frac{16}{105}x^{\frac{7}{2}-1}\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{112}{105\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2} f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2} $$

4.2. Derivadas fraccionaria de (Caputo)

$$ {}_a^cD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\frac{d}{dt})^n f(t)dt, $$

1. Sea la función $f(x) = x$

$$ = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}t $$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} . -du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_0^x$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\pi}} (x-t)^{1/2} \Big|_0^x$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{\pi}} (x-x)^{1/2} - (\frac{-2}{\sqrt{\pi}} (x-0)^{1/2})$$

$$= -(\frac{-2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$$

2. Sea la función $f(x) = x^2$

$${}_0^cD_x^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-1/2)} \int_0^x (x-t)^{2-1/2-1} (\frac{d}{dt})^2 t^2$$

$${}_0^cD_x^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^x (x-t)^{1/2} 2dt$$

$${}_0^cD_x^{1/2} f(x) = \frac{1}{1/2\sqrt{\pi}} 2 \int_0^x (x-t)^{1/2} dt$$

$${}_0^cD_x^{1/2} f(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} 2 \frac{(x-t)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^x$$

$${}_0^cD_x^{1/2} f(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - (-\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})$$

$$ {}_0^cD_x^{1/2} f(x) = -(-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{3}x^{3/2}) $$

$$ {}_0^cD_x^{1/2} f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2} $$

4.3. Derivada fraccionaria de una función cuadrática (Laplace)

En este ejemplo aplicaremos la derivada fraccionaria de Laplace y a su vez comprobaremos el aporte de hizo Lagrange mediante (ley de los exponentes para operadores diferenciales de orden entero) y que son válidos para los de orden fraccionario.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2$.

$$ m = 2\ y\ n = 1/2 $$

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^{1/2} x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-1/2+1)}x^{2-1/2} $$

$$ = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)}x^{3/2} $$

$$ = \frac{2!}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}x^{3/2} $$

$$ = \frac{2}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}x^{3/2} $$

$$ = \frac{2}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}x^{3/2} $$

$$ = \frac{2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{3/2} $$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} x^{3/2}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2}$$

Calculando nuevamente media derivada a la función resultante tenemos:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{1/2} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2} = \frac{\Gamma(3/2+1)}{\Gamma(3/2-1/2+1)} x^{3/2-1/2}$$

$$= \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)} x$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{1!} x$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{1!} x$$

$$= \frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)x$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})x$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}x$$

Finalmente

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{8}{3\sqrt{\pi}}.\frac{3\sqrt{\pi}}{4} x = 2x$$

4.4. Newton Raphson Fraccional.

Este método nos permite encontrar las raíces tanto reales como complejas de un polinomio. Antes de continuar es necesario definir la siguiente notación

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) \quad \textbf{98)}$$

Donde el operador d^α/dx^α denota cualquier derivada fraccionaria sobre la variable x, que cumple la siguiente condición de continuidad respecto al orden de la derivada

$$\lim_{\alpha \to 1} f^{(\alpha)}(x) = f^1(x) \quad \textbf{99)}$$

Considerando una función $\Phi: (R/Z)xC \to C$ luego, tomando como base la idea del método clásico, y considerando cualquier derivada fraccionaria que cumpla la condición (97) podemos definir el método de Newton Raphson Fraccional de la siguiente manera:

$$x_{i+1} = \Phi(\alpha, x_i) = x_i - \left(f^{(\alpha)}(x_i)\right)^{-1} f(x_i), \quad i = 0,1,2 \ldots \quad \textbf{100)}$$

Para que la expresión anterior tenga sentido, debido a la parte integral que las derivadas fraccionarias suelen tener y que el método se puede utilizar en una amplia variedad de funciones, consideramos en la expresión 100 que la derivada fraccionaria se obtiene para una variable real x, y si el resultado lo permite, esta posteriormente se hace que la variable tienda a una variable compleja x_i, es decir,

$$f^{(\alpha)}(x_i) = f^{(\alpha)}(x)\Big|_{x \to x_i}, x \in R, x_i \in \mathbb{C} \quad \textbf{101)}$$

Para entender por qué el método NRF si $f \in P_n(R)$, tiene la capacidad de ingresar al espacio complejo usando una condición inicial a diferencia del método clásico, basta con observar la derivada fraccionaria de Riemann Liouville con $\alpha = 1/2$ para la función constante y la función identidad.

$${}_0D_x^{\frac{1}{2}} f_0(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$ {}_0D_x^{\frac{1}{2}} f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} $$

CONCLUSIONES

Las propiedades de la función gamma, la derivada y la integral de orden entero son el punto de partida para definir la derivada y la integral fraccionaria

El estudio de derivadas e integrales fraccionarias o de orden arbitrario no está totalmente terminado hay muchos aportes de diferentes matemáticos, pero actualmente no se ha podido dar una interpretación geométrica de la derivada fraccionaria como lo hay para las de orden entero. Sabemos que la primera derivada es velocidad y que la segunda es aceleración, pero lo que está entre velocidad y aceleración no lo sabemos.

La media derivada de Riemann Liouville para una función constante es distinta de cero y la media derivada de Caputo es cero, debido que Riemann Liouville primero medio integra y luego deriva y Caputo deriva y después medio integra.

La derivada fraccionaria tiene un campo amplio de aplicaciones en diferentes áreas donde es más eficaz en muchos casos que una derivada de orden entero como lo es para el método Newton Raphson Fraccional con condiciones iniciales reales que puede calcular raíces reales y complejas.

RECOMENDACIONES

Finalizando este trabajo monográfico, consideramos apropiado brindar ciertas recomendaciones:

- Motivar al estudiante del último año de la carrera a que profundicen en investigaciones relacionadas con las derivadas e integrales de orden arbitrario.

- Aplicación del método Newton Raphson Fraccional usando un software para calcular las raíces reales y complejas de una función.
- Trabajar con derivadas e integrales fraccionarias aplicando el método Newton Raphson en ecuaciones diferenciales.
- Aplicación de derivada fraccionaria en fractales.

REFERENCIAS

Ladino, J. (2021). *Extension de la derivada de orden natural a un orden real.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional Facultad de Ciencia y Tecnología.

López, A., & Vega, J. (2008). *Trabajo Académicamente Dirigido: Introducción al Cálculo Fraccionario.* Madrid Universidad Complutense. Facultad de Ciencias Matemáticas.

Martín, M. R. (2020). *Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios.* Universidad Complutense Madrid.

Mora, W. (2015). *Introduución a los Métodos Númericos* (primera ed.). Revista digital Matematica, educacion e internet.

Nisar, K., Ahmad, S., Ullah, A., & Shah, K. (2021). *Mathematical analysis of SIRD model of COVID-19 with Caputo fractional derivative based on real data.* journal homepage: www.elsevier.com/locate/rinp.

Sánchez, J. (2011). *Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional.* ISSN 2174-0410.

School of Mathematics, I. U. (2019). *Numerical analysis of time fractional Black–Scholes European option pricing model arising in financial market.* Ahmad Golbabai.

Torres, A., & Brambila, F. (2017). *Introduccion al calculo fraccional.* ciudad de Mexico, Mexico: 1ra ed.

Torres, A., & Brambila, F. (2021). *Fractional Newton-Raphson Method.*

Torres, A., Brambila, F., & Brito, B. (2021). *Notas de Cálculo Diferencial.* Facultad de Ciencias-UNAM.

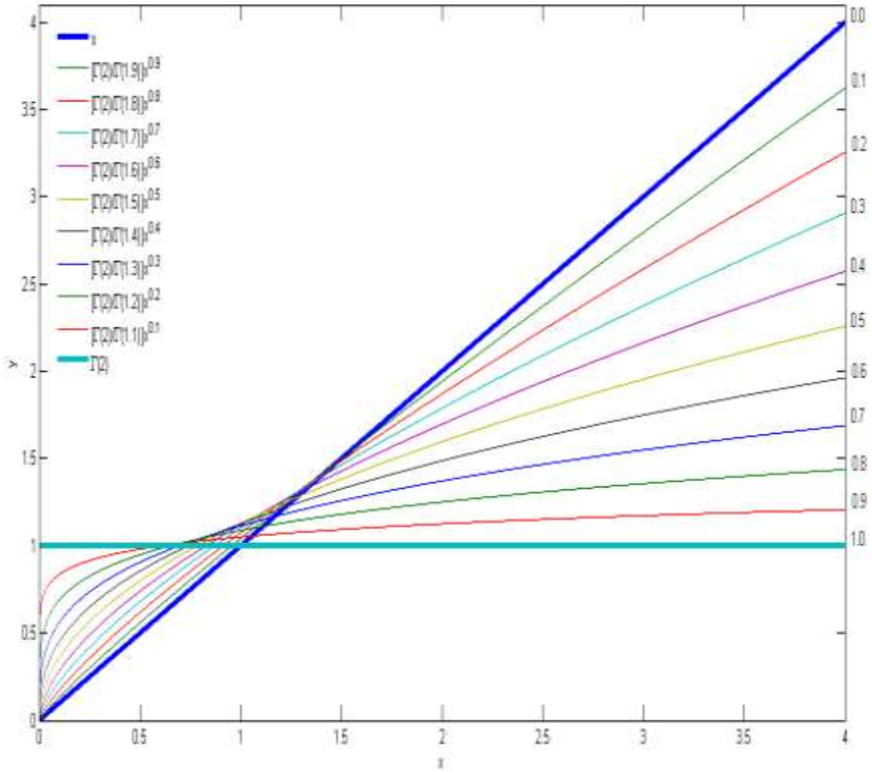
Vargas, J. (2018). *https://www.researchgate.net*.

Wheeler, N. (1997). *CONSTRUCTION & PHYSICAL APPLICATION OF THE FRACTIONAL CALCULUS.* Reed College Physics Department.

ANEXOS

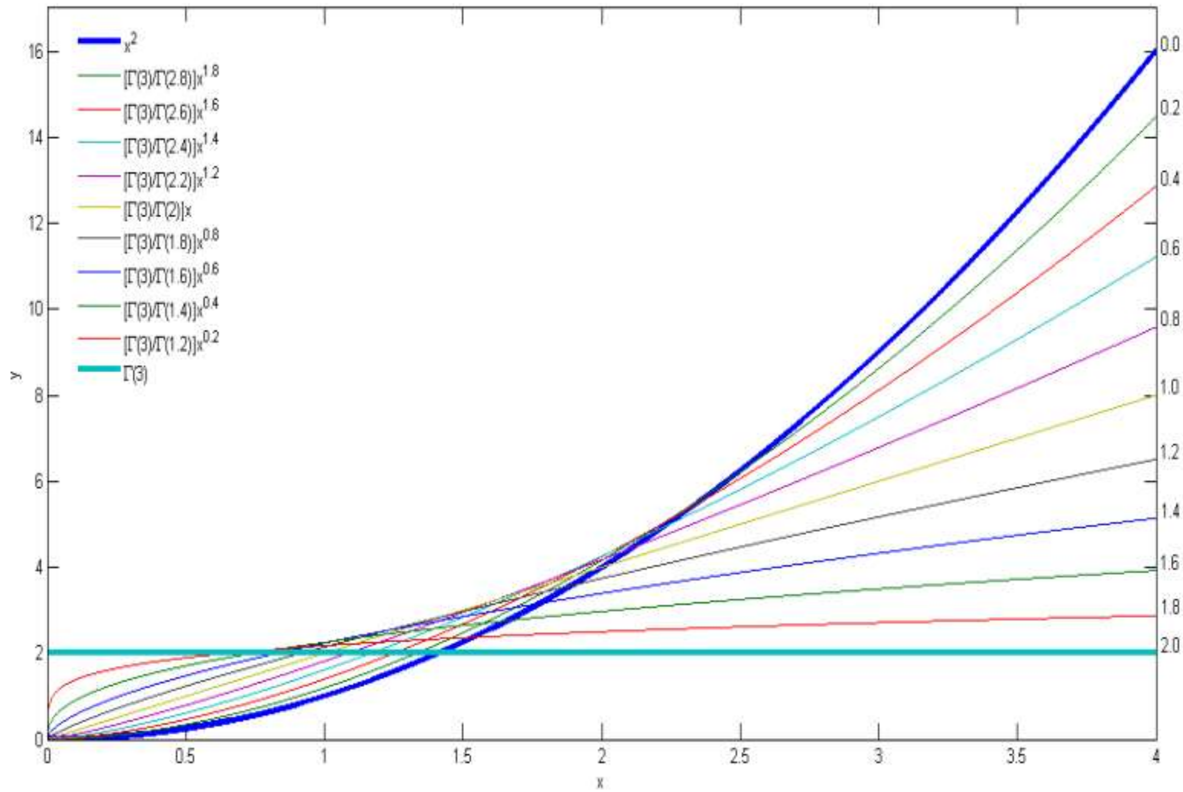
Anexo.1

$F(x) = x$



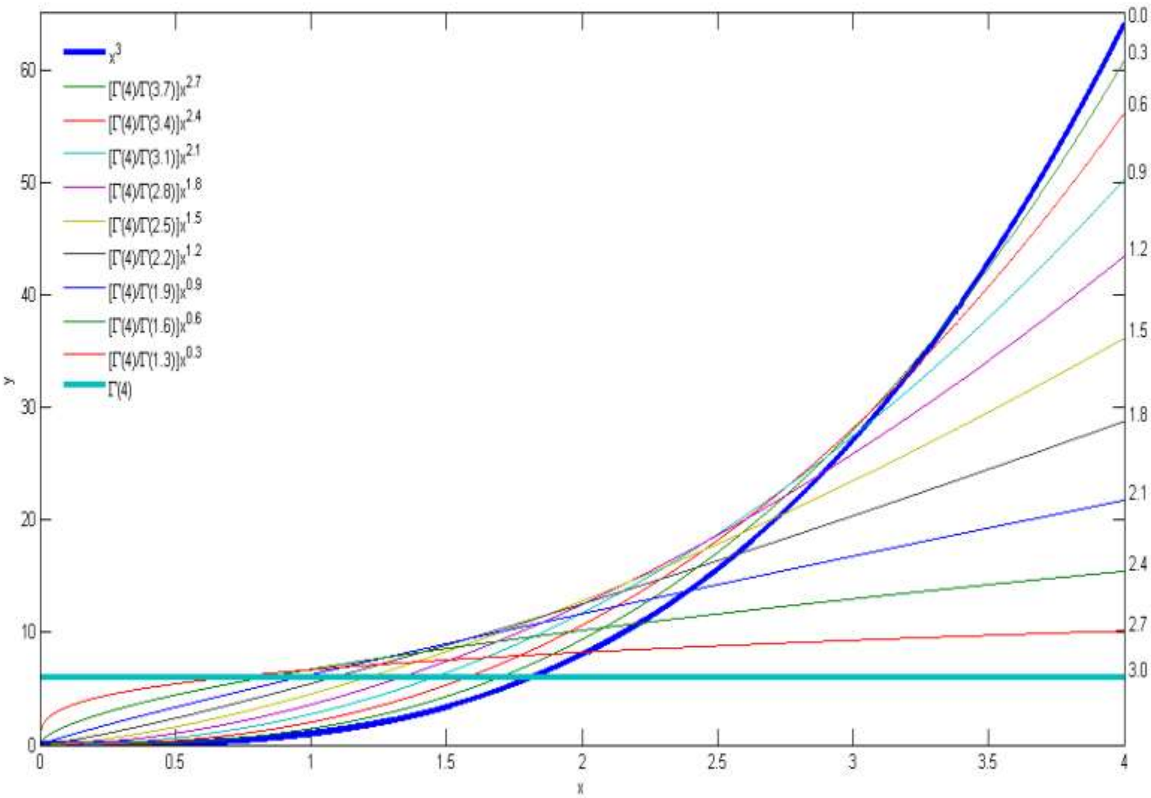
Anex0.2

$$f(x) = x^2$$


x^2
$[\Gamma(3)/\Gamma(2.8)]x^{1.8}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(2.6)]x^{1.6}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(2.4)]x^{1.4}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(2.2)]x^{1.2}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(2)]x$
$[\Gamma(3)/\Gamma(1.8)]x^{0.8}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(1.6)]x^{0.6}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(1.4)]x^{0.4}$
$[\Gamma(3)/\Gamma(1.2)]x^{0.2}$
$\Gamma(3)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
y
x

Anexo.3

$$f(x) = x^3$$



x^3
$[\Gamma(4)/\Gamma(3.7)]x^{2.7}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(3.4)]x^{2.4}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(3.1)]x^{2.1}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(2.8)]x^{1.8}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(2.5)]x^{1.5}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(2.2)]x^{1.2}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(1.9)]x^{0.9}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(1.6)]x^{0.6}$
$[\Gamma(4)/\Gamma(1.3)]x^{0.3}$
$\Gamma(4)$
0.0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3.0
y
x