UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEMA

UNIDAD DIDÁCTICA: SEMEJANZA

PRESENTADO POR:

Bra. ***Zeneyda del Carmen Betancourth Rivera***
Bra. ***Ileana del Rosario Olivas Moreno***
Br. ***Yelman Varela Roble***

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MENCIÓN MATEMÁTI CA EDUCATIVA Y COMPUTACIÓN

TUTORES:

M.Sc. ***HÉCTOR BENITO FLORES GUIDO***
Lic. ***RONALD LOPEZ FLORES***

LEÓN, MAYO, 2006

DEDICATORIA

Dedicamos nuestros triunfos y logros:

A Dios

Creador de todas las cosas y nuestro proctector; que nos iluminó en nuestro camino hasta alcanzar nuestra meta.

A Nuestros Padres:

Eslabones y precursores de estímulos con su apoyo condicional.

AGRADECIMIENTO

Al transcurrir cinco años de nuestra vida profesional, con el cual nos hemos interesado en aprender y conocer sobre una disciplina científica – humanística como es la Matemática Educativa y Computación, para lograrlo tuvimos el apoyo de muchas personas que hoy agradecemos:

- *Al claustro de profesores de la Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades que nos capacitaron e instruyeron en los conocimientos científicos y pedagógicos.*
- *A los Licenciados Ronald López Flores y Héctor Flores Guido, tutores de nuestro trabajo monográfico, que con su experiencia y dedicación nos supieron orientar a través de su apoyo incondicional.*
- *A nuestros compañeros de clase que con el intercambio de experiencias y solidaridad nos sirvieron para mejorar días a días nuestros conocimientos.*

I N D I C E

I. INTRODUCCION

Deseando contribuir con nuestro trabajo y conocimiento a esta gran y maravillosa labor de enseñar a los (as) jóvenes nicaragüenses y tratar de que ellos “dominen” las matemáticas es que proponemos en él estrategias metodológicas que contribuyan a ver la asignatura de matemática de una manera integradora del aprender que contemple el desarrollo psicológico del estudiante, esto implica una tarea muy compleja que debería estar en permanente renovación y ajuste; ya que Nicaragua necesita de la formación para la vida, siendo esto motivo de gran preocupación, así como de la búsqueda de caminos de superación del joven o la joven estudiante que permitan el logro de un estimulo positivo del educando.

Al integrar las metodologías y los nuevos contenidos en matemáticas proponemos enseñar con detenimiento y seriamente por vías no tradicionales que requieran una preparación de la documentación amplia y continua; ya que el conocimiento a impartir no podrá ser memorístico ni enciclopedista si no activa y estimule el querer aprender para que el estudiante pueda descubrirlo integrarlo de manera reflexiva.

Todo esto también debe contar con un carácter recreativo, especialmente la geometría. Nos unimos pues a este esfuerzo para cumplir con los objetivos que se ha propuesto el Gobierno de la República de Nicaragua, y el Ministerio de Educación Cultura y Deportes, al impulsar la transformación curricular en la educación secundaria de nuestro país ya que desde hace más de una década, se viene careciendo de un currículo que articule todos los conocimientos, de ahí la importancia del proceso de transformación curricular y la importancia de utilizar un marco conceptual y metodológico que este acorde a esté, tal como el enfoque APA (Aprendo, practico, aplico), el enfoque globalizado, el enfoque constructivista y el enfoque EpC (Enseñanza para la comprensión) este último objeto de nuestra propuesta y que en definitiva nos parece mas a tono con el mundo globalizado, es decir un enfoque moderno.

Así a menudo se dice que la enseñanza de la geometría; en este caso la semejanza esta llena de Teoremas, postulados, axiomas y corolarios que la hacen más difícil de comprender y de aprender por parte de los estudiantes y muy alejada del mundo real, es decir no se observa la aplicación practica de la misma, lo que a nuestro juicio y valoración tiene lógica, ya que si consideramos que la mayoría de los libros de consultas en las bibliotecas escolares no son nada didácticos y algunos desactualizados.

Es por eso que hemos escogido el tema de semejanza correspondiente octavo grado y noveno grado del tercer ciclo por su riqueza en aplicaciones en otras áreas del conocimiento y de la tecnología, tales como, la ingeniería, la arquitectura, las artes plásticas, etc. También nos ha impulsado el deseo de contribuir con el proceso de enseñanza-aprendizaje acerca de la semejanza, al proponer un marco conceptual moderno como es la enseñanza para la comprensión, interactuando activamente con los alumnos, valorando en todo momento los logros de aprendizajes adquiridos por ellos, desarrollando los pensamientos espaciales y sistemas geométricos.

Por tanto la geometría, como rama de la matemática, ha permitido el desarrollo de las sociedades desde la antigüedad ocupando un lugar importante, tales como el problema de la comparación de uno mismo con la altura de árboles, edificios o sombras entre algunos. Por tal razón hemos elaborado la presente Unidad Didáctica, referente a la semejanza, donde se les facilite a los estudiantes el aprendizaje de los contenidos y a los docentes su enseñanza de manera más dinámica y de la vida teniendo una visión más amplia sobre el desarrollo de las sociedades y darle respuestas a este mundo cambiante.

II. ANTECEDENTES

La educación en Nicaragua ha venido experimentando cambios de acuerdo a las políticas educativas de los gobiernos de turno. En la década de los 50, 60 y70 la educación era para unos pocos, ya que en el presupuesto nacional educativo no existían fondos para preparar a maestros y maestras, ni había en el gobierno la visión de estabilidad social y económica. Ya en los años 80 después del triunfo de la Revolución Sandinista hubo mejoría en la educación comenzando por el proceso de alfabetización con la participación de todos los sectores de la población, erradicándose esta casi en su totalidad, contribuyendo a definir los fines, objetivos y principios de la nueva educación.

Iniciando de esta manera en la década de los 90 una política curricular dentro del marco de la educación presentando ideas de reformas a los programas educativos para que fueran más dinámicos, usando métodos activos, tanto en la enseñanza primaria como en la enseñanza secundaria, esta política se mantuvo sin cambios conceptuales en la mentalidad de los Nicaragüenses; sin embargo surgen las ideas por la descentralización y autonomía escolar de los centros educativos, deslindando responsabilidad de los deberes y derechos que gozamos en la constitución política como ciudadanos.

Es por eso que nosotros como docentes del Instituto Autónomo Licenciado Julio César Sánchez, ubicado en la comunidad Asentamiento los Limones, Somotillo, conscientes de la necesidad de avanzar en la transformación curricular en secundaria presentamos la unidad de semejanza como una contribución a esta transformación, la que permitirá dar a conocer nuestro quehacer educativo en cuanto a nuestra área de enseñanza; implementando actividades de aprendizajes de tipo constructivista, esta metodología aplicada a través de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) para explicar la geometría de las semejanzas, ya que a como la presentan los programas diseñados para clases expositivas y nuestro interés que tanto los docentes como los (as) alumnos (as) tengan un papel activo en su aprendizaje, permitiendo esto un desarrollo curricular en los alumnos y alumnas.

III. JUSTIFICACIÓN

La educación de las nuevas generaciones es una labor compleja y sutil de ingeniería humana y trata nada menos en desarrollar y formar el carácter, la inteligencia, la personalidad de las nuevas generaciones, de modo que esta formación los habilite para enfrentar los retos de un mundo complejo, dinámico, informatizado y globalizado.

Es por eso que consideramos que el estudio de la semejanza permitirá a los estudiantes hacerse una interpretación más amplia del entorno, y despertar en los estudiantes su interés por la geometría, pues la geometría ha facilitado el desarrollo de las sociedades desde la antigüedad, por lo cual hemos seleccionado el tema: Semejanza.

Así al iniciar nuestra unidad didáctica con actividades relacionadas con los elementos del teorema de Pitágoras, las Alturas y de Thales nos proporcionan la utilidad de la semejanza y mediante estrategias lúdicas para motivar a los alumnos y crear un ambiente propicio para su aprendizaje.

Durante el estudio de este tema, los alumnos lograrán habilidades de razonamiento lógico, comprensión, deducción y destrezas en el uso de instrumentos geométricos y otros recursos disponibles; también se fomentará el trabajo cooperativo, la solidaridad y el compañerismo, como valores de convivencia en sociedad.

IV. OBJETIVOS

IV.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una Unidad Didáctica que contribuya a la mejora del proceso Enseñanza – Aprendizaje de Semejanza en el contexto de la transformación curricular y con el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión (EpC).

IV.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Proponer el enfoque de la enseñanza para la comprensión, como recurso pedagógico que facilite la enseñanza y la comprensión de la semejanza, para que sea un aprendizaje significativo.

2. Desarrollar hábitos, habilidades y destrezas en la construcción y trazado de figuras geométricas mediante la semejanza a través de sus teoremas, haciendo uso de los recursos disponibles en el entorno.

3. Desarrollar hábitos, habilidades y destrezas en demostraciones sencillas de semejanza y su aplicación en la resolución de ejercicios y problemas.

V. MARCO TEÓRICO

V.1. EN LO TEÓRICO

¿Qué es Comprensión?

La comprensión es poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema; por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo y aplicarlo. Presentar analogías y representarlo de una manera nueva.

¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión?

La Enseñanza para la Comprensión es un enfoque pedagógico; una visión pedagógica, cimentada en las bases del constructivismo; la cual pretende ayudar a los docentes en la creación de una nueva pedagogía, que ayuden a construir comprensiones profundas para el desarrollo de un pensamiento cada vez más complejo, que permita al estudiante resolver problemas de manera flexible y crear productos nuevos y significativos para su cultura y desempeño. Así mismo, al crear su acción sobre los preconceptos que los estudiantes tienen de su entorno, y la manera en que este funciona; además, de la responsabilidad que tiene en la construcción de su propio aprendizaje, aportando significativamente al desarrollo de una pedagogía para la autonomía.

Este enfoque pedagógico: Enseñanza para la Comprensión (EpC), incluye cuatro conceptos claves que propician una pedagogía transformadora al interior de las aulas de clase. Ellos son:

1. Tópicos Generativos.
2. Metas de comprensión.
3. Desempeños de Comprensión.
4. Valoración continua o evaluación diagnóstica continua.

Tópicos Generativos son:

- Conceptos, ideas, preguntas, temas relativos a una disciplina o campo de conocimiento, con ciertas características que los hacen indicados para ser seleccionados como habilitadores de aprendizajes.
- Un nudo desde donde se pueden ramificar líneas de comprensión, permitiendo que diferentes estudiantes puedan, en función de sus propios procesos avanzar en el conocimiento que se propone.

Características

- Son centrales para uno o más dominio o disciplinas.
- Son interesantes para el docente y estudiantes.
- Despiertan la curiosidad del estudiante.
- Son accesibles.
- Permiten establecer numerosas conexiones.
- Se deben redactar con un lenguaje sencillo al nivel de los estudiantes.

Metas de comprensión son:

Son los conceptos, procesos y habilidades que deseamos que comprendan los alumnos y que contribuyen a establecer un centro cuando determinamos hacia dónde habrán de encaminarse.

Estas metas vienen en dos “tamaños”: las que corresponden a una unidad y la que corresponden a un curso. Las metas de comprensión de cada unidad describen cuanto queremos que los alumnos obtengan de su trabajo con un tópico generativo. Las metas de comprensión, conocidas como metas de comprensión abarcadoras o hilos conductores, especifican cuanto se desea que los alumnos obtengan de su trabajo con nosotros a lo largo de un semestre o un año.

En general, **los hilos conductores son:**

- Preguntas claves que orientan en la tarea.
- Referencia que permite recuperar el hilo de lo que realmente es importante hacer.
- Se plantean para el trabajo de un año, o para un conjunto de unidades articulándolas y dándoles sentido.
- Respetar expresión de curiosidad de los estudiantes y que sea expresado su propio lenguaje.
- Expresado de manera llana y precisa.
- Orientan la tarea de la asignatura proponiendo un modelo no academicista.
- Mostrar profundidad, rigurosidad y simpleza asociadas.

Desempeños de Comprensión son:

- Ciclos de acciones y reflexiones.
- Momentos en los cuales los estudiantes pueden reflexionar sobre su crecimiento, ayudan tanto a construir como a demostrar comprensiones.
- Demuestran la comprensión y la profundizan más allá de lo que sabe, reconfiguran, expanden y construyen a partir de los conocimientos previos.
- Son actividades que requieren que los (as) estudiantes usen el conocimiento en nuevas formas y situaciones.
- Facilitan tanto al docente como a los estudiantes la oportunidad de constatar el desarrollo de la comprensión a lo largo del tiempo en situaciones y desafiantes.

Existen tres tipos de Desempeños de Comprensión; estos son:

(a) Exploración o Preliminares.

(b) Investigación Guiada.

(c) Proyecto de Síntesis.

Exploración o Preliminares

Son los desempeños de comprensión que generalmente corresponden al inicio de la unidad. Son desempeños que consisten en explorar abiertamente el territorio; con ellos se reconoce el respeto por la investigación inicial, todavía no estructurada por métodos y conceptos disciplinares.

Características:

- Aparecen al inicio de la unidad y sirve para atraer al dominio de un tópico.
- De final abierto y se los puede abordar en niveles múltiples que involucren.
- Ayudan a ver conexiones entre tópico - propios intereses - experiencias previas.
- Ofrecen información acerca de lo que ya saben y lo que interesa aprender.
- Comprometen a los estudiantes en la práctica de sus comprensiones anteriores y les permiten confrontar algunos de los enigmas que presentan los Tópico Generativos.

Investigación Guiada

Involucran a los estudiantes en el uso de modalidades de investigación centrales para la comprensión de las Metas.

Centrado en:

- Habilidades básicas tales como la observación cuidadosa, el registro preciso de datos; la síntesis de fuentes múltiples, el análisis de datos empíricos para refinar teorías.
- Desarrollar la comprensión de problemas concretos del tópico que para usted son importantes.

Proyecto de Síntesis

Son desempeños que demuestran con claridad el dominio que tienen los estudiantes de las Metas de Comprensión.

Características:

- Invitan a trabajar de forma independiente, a sintetizar las comprensiones desarrolladas a lo largo de la unidad.
- Es un espacio social donde se piensa individualmente, se dan ideas, se construyen grupos para compartir y construir colectivamente.
- Corresponden a la última etapa y permiten que sinteticen y demuestren la comprensión desarrollada durante otros desempeños.

Valoración o Evaluación diagnóstica continuada

La Valoración continua es un conjunto de ciclos de retroalimentación centrada en la comprensión.

Estos ciclos son parte del proceso de Enseñanza – Aprendizaje e incluyen estrategias y herramientas variadas para ayudar a desarrollar la comprensión.

Dentro de estos ciclos hay momentos en donde la valoración puede ser formal, informal, oral o escrita; la realiza el docente, el experto, el compañero o el estudiante mismo. Cuenta con criterios y estándares claros y de calidad.

Evaluación es un proceso continuo de brindar a los estudiantes una respuesta clara sobre su trabajo y que contribuya a mejorar los desempeños de comprensión.

Estos deben ser:

- Claros
- Públicos
- Coherentes con las metas de comprensión.

Competencias

Esta noción corriente fue afinada desde la óptica teórica del conductismo en el sentido de que tales acciones, una vez sencilla, otras veces más complicadas son en definitiva acciones físicas, comportamientos específicos que el alumno tiene que realizar durante el período que está preparándose, y por tal razón es que estas fueron acogidas como una novedad importante y a la vez el espectáculo existente a ese momento, hoy también las universidades y otros centros educativos.

- *Capacidades y competencias:* Las competencias son una especie dentro del género de las capacidades. Estas son potencialidades psíquicas y/o somáticas que los seres humanos poseemos. Así, puede sostenerse que una persona tiene gran capacidad (o pobre capacidad) de pensamiento que posee gran capacidad (o débil capacidad) de percepción, de sentimiento, de voluntad o se puede hablar de capacidad de mover objetos pesados, o para correr, para saltar o para manejar equis instrumento. Las capacidades son dimensionables.

En síntesis, las competencias son una especie dentro de las capacidades. Son, por lo tanto, capacidades como las demás, pero con ciertas características que las tipifican. Las características principales pueden ser:

- *Educación basada en competencias:* Todos los rubros para alcanzar las metas educativas son importantes por igual, además de que unos y otros se vinculan para conseguir un fin, o el logro que establecen las competencias.

La educación basada en competencias es una nueva orientación educativa que pretende dar respuesta a los problemas que enfrenta la sociedad.

V.2. EN LA CIENCIA

SEMEJANZA

Aquí consideraremos figuras que tienen la misma forma pero difieren en el tamaño. Tales figuras se llaman *figuras semejantes*.

Una fotografía de una persona o de una estructura muestra una imagen considerablemente menor que el objeto fotografiado, pero la forma de la imagen es precisamente la del objeto. Y cuando se amplifica una fotografía, se mantiene esta forma; es decir, todas las partes de la fotografía se amplifican en el mismo factor. En términos matemáticos, se dice que las imágenes en las dos fotografías son semejantes.

Los ingenieros diseñadores y los arquitectos trabajan continuamente con figuras semejantes. Una estructura que se acaba diseñar, primero se traza a escala sobre un papel. El diseño es mucho menor que la propia estructura, pero todas las partes tienen la forma del producto terminado.

En la industria automotriz y de construcción de aviones, generalmente primero se construyen modelos pequeños de los automóviles y aviones nuevos. Estos modelos corresponderán en forma y detalle con el producto final. El topógrafo aplica continuamente las propiedades de los triángulos semejantes en su trabajo.

La comunicación de ideas en la actualidad frecuentemente se basa en la comparación de números y cantidades. Cuando se dice que una persona tiene una estatura de 1.80 metros, se está comparando su altura con la de una unidad menor, llamada *metro*.

El químico y el físico continuamente comparan las cantidades medidas en el laboratorio. El ama de casa esta comparando cuando mide las cantidades de los ingredientes para hacer un pastel. El arquitecto con sus escalas y el dibujante con sus diseños, están comparando longitudes de rectas en los dibujos con las longitudes reales correspondientes en el producto terminado.

1. PROPORCIONALIDAD

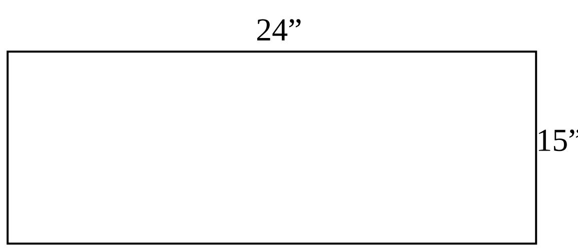
1.1. Razón

- Razón de dos cantidades homogéneas: es el número que expresa la medida de una de ellas cuando se toma la otra por unidad.
- La razón de dos cantidades homogéneas es igual al cociente de los números que resultan de medirlas con una misma unidad.

Es importante destacar que una razón es un cociente de medidas de cantidades semejantes. La razón de la medida de un segmento rectilíneo a la de un ángulo no tiene significado; no son cantidades del mismo tipo. Podemos hallar la razón de la medida de un segmento rectilíneo a la medida de un segundo segmento rectilíneo o también la razón de la medida de un ángulo a la medida de un segundo ángulo. Sin embargo, no importa qué unidad de longitud se use para medir los segmentos, la razón de sus medidas es el mismo número siempre se use la misma unidad para los dos.

Una razón es una fracción y todas las reglas que gobiernan una fracción se aplican a las razones. Una razón se denota con una raya de fracción, una diagonal, el signo de división o con el símbolo : (que se lee "es a"). Por ejemplo, la razón de 4 a 5 es $\frac{4}{5}$, 4/5, 4 ÷ 5m o bien, 4 : 5. El 4 y 5 se llaman términos de la razón.

Una razón siempre es un número abstracto; es decir, no tiene unidades. Es un número que no depende de las unidades de medición de las cuales proviene. Así, en la figura siguiente



la razón de ancho a largo es 15 a 24, o bien, 5 : 8.

1.2. Proporciones

Considérense las fotografías siguientes.

5 cm

4 cm

10 cm

8 cm

Ambas son fotografías de un mismo objeto, pero una es más grande que la otra. Las fotografías tienen la misma forma. Si se comparan las razones entre el ancho y el largo de cada foto, se observa que las razones son iguales.

$$\frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}}$$

Esta igualdad se denomina proporción, porque se compone de dos razones iguales, $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$.

Definición

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

(Es importante recordar que un denominador no puede ser igual a cero.)

Propiedades de las proporciones

1. En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

2. En una proporción, pueden intercambiarse el segundo y tercer términos para obtener una proporción válida.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

3. En una proporción, pueden invertirse las razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

4. Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos cantidades, cualesquiera de los dos pares puede usarse como los medios y el otro par como los extremos de una proporción.

$$a\cdot b=c\cdot d \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{d}{b}$$

5. Si los numeradores de una proporción son iguales pero distintos de cero, los denominadores son iguales.

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\ \wedge\ a=b \Rightarrow x=y$$

6. Si tres términos de una proporción son iguales a los tres términos correspondientes de otra proporción, los términos remanentes son iguales.

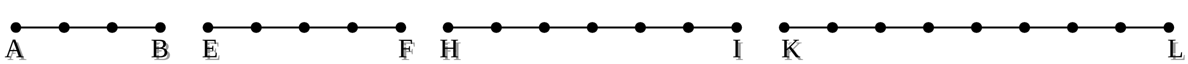
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\ \wedge\ \frac{a}{b}=\frac{c}{y} \Rightarrow x=y$$

7. Si cuatro cantidades están en proporción, los términos están en proporción por adición o sustracción; es decir, la suma (o diferencia) del primero y segundo términos es al segundo término como la suma (o la diferencia) del tercero y cuarto términos es al cuarto término.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \wedge\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

1.3. Segmentos proporcionales.

De la siguiente figura



deducimos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ \text{y}\ \frac{\overline{EF}}{\overline{KL}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{KL}} = \frac{1}{2}$$

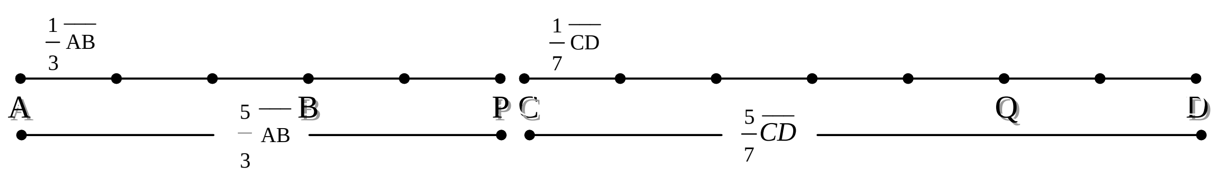
En consecuencia, se dice que los *segmentos son proporcionales*.

1.4. División de un segmento en una razón dada.

Si queremos construir el duplo, el triplo o en general, el múltiplo según k (donde k es un número natural mayor que 1) del segmento $\overline{AB}$, entonces hablaremos de múltiplos de $\overline{AB}$. Para ello prolongamos el segmento $\overline{AB}$ a partir de A o B y sobre esta prolongación transportamos el segmento $\overline{AB}$ con el compás k – 1 veces. Pero también se quiere hallar a veces el múltiplo de un segmento cuando k no sea un número natural, sino un número racional (o irracional) positivo cualesquiera.

Para $k = \frac{1}{3}$, esto significaría, por ejemplo, que tendríamos que construir la tercera parte. Para $k = \frac{5}{3}$, esto significaría que tendríamos que construir la tercera parte de $\overline{AB}$ y quintuplicar ésta. En esta forma se puede proceder con todo número racional k. Así tenemos que para k < 1 se obtiene un segmento menor; para k > 1, uno mayor.

De la siguiente figura



deducimos

- $\overline{AP} = \frac{5}{3}\overline{AB}$ y $\overline{CQ} = \frac{5}{7}\overline{CD}$
- Para Q se cumple que $\frac{\overline{CQ}}{\overline{QD}} = \frac{5}{2}$

También se dice que Q divide a $\overline{CD}$ en la razón 5 : 2, y lo divide interiormente.

Análogamente, se cumple para P:

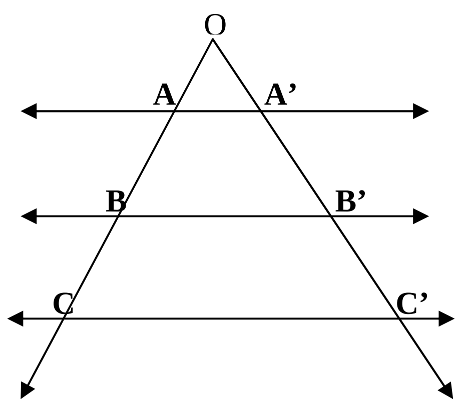
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2}$$

Pero P está situado fuera de $\overline{AB}$, por lo que se dice que P divide exteriormente al segmento $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2.

3. TEOREMA DE THALES

Teorema de Thales:

Un sistema de rectas paralelas determinan sobre dos rectas concurrentes, segmentos proporcionales.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

2. ESCALAS

- Escala es el cociente entre cada longitud del dibujo y la longitud real que representa y suele indicarse mediante una fracción de numerador l.
- Escala grafica es la relación entre las dimensiones de la pieza en el dibujo y sus dimensiones reales.
- Escala natural es cuando los dibujos o figuras y el original son de igual tamaño.

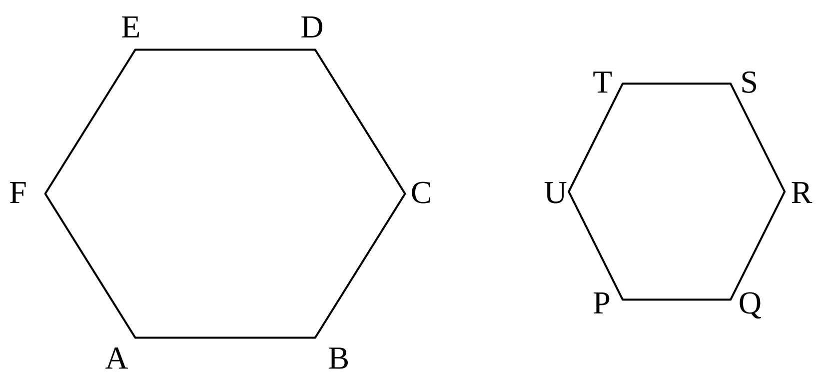
3. POLÍGONOS SEMEJANTES

Definición

Dos *Polígonos son semejantes* si existe una correspondencia de sus vértices para lo cual los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

El símbolo para “semejante a” o “es semejante a” es ~.

En la siguiente figura



los polígonos ABCDEF y PQRSTU son semejantes si:

1. $\angle A \cong \angle P$; $\angle B \cong \angle Q$; $\angle C \cong \angle R$; $\angle D \cong \angle S$; $\angle E \cong \angle T$; $\angle F \cong \angle U$

2. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{RS}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{ST}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{TU}}$

Recíprocamente, si dos polígonos son semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

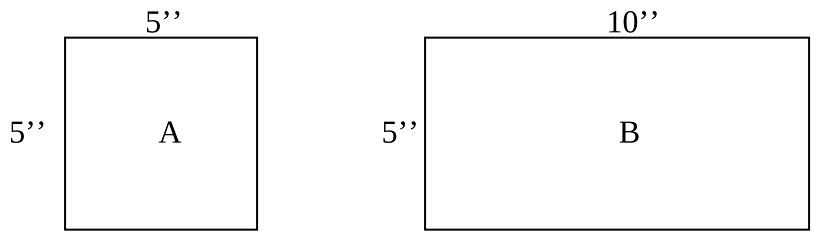
La razón de dos lados correspondientes cualesquiera de dos polígonos semejantes se llama *razón de semejanza*.

Es importante observar que la definición de polígonos semejantes tiene dos partes. Para que dos polígonos sean semejantes, debe cumplirse que:

1. Los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y
2. Los lados correspondientes deben ser proporcionales.

En general, cuando se satisface completamente una de estas condiciones, no necesariamente se concluye que la segunda condición se satisface completamente.

En la siguiente figura



el cuadrado A y el rectángulo B tienen los ángulos de uno congruentes a los ángulos correspondientes del otro, pero obviamente no son semejantes.

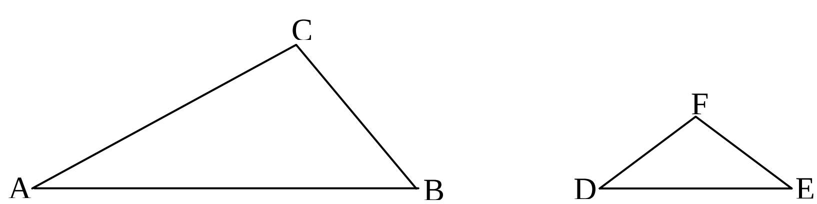
5. SEMEJANZA DE TRIANGULOS

5.1. Definición

Definición

Dos *triángulos son semejantes* si existe una correspondencia de sus vértices para lo cual los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

En la siguiente figura



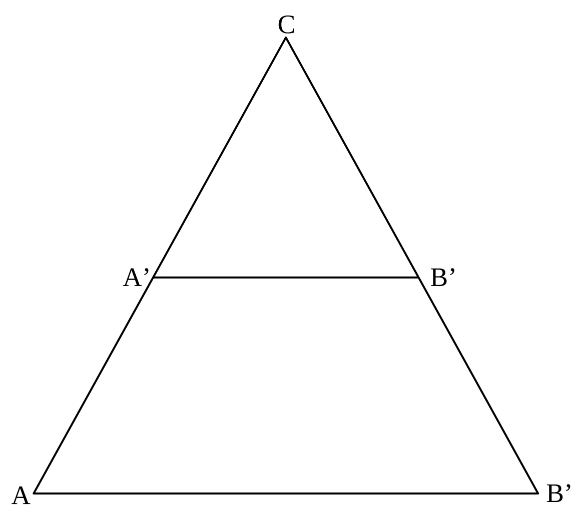
si $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$; $\angle C \cong \angle F$ y $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, entonces los triángulos ABC y DEF son semejantes, y escribimos $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$.

Para el caso de triángulos semejantes ocurre que, los ángulos de uno de los triángulos no pueden ser congruentes a los ángulos de un segundo triángulo sin que los lados correspondientes no estén en proporción. Inversamente, dos triángulos no pueden tener sus lados correspondientes proporcionales sin que los ángulos correspondientes sean congruentes.

5.2. Teorema fundamental de semejanza

Teorema fundamental de semejanza:

Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primer triángulo.



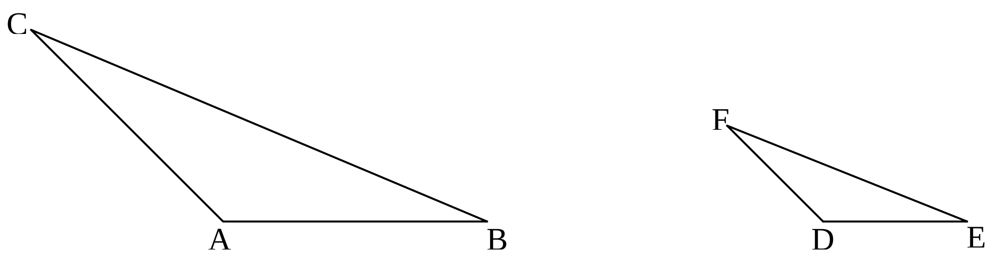
Δ ABC ~ Δ A’B’C

A estos triángulos se le llama triángulos en posición de Thales.

5.3. Teoremas de semejanza

Teorema de semejanza AAA:

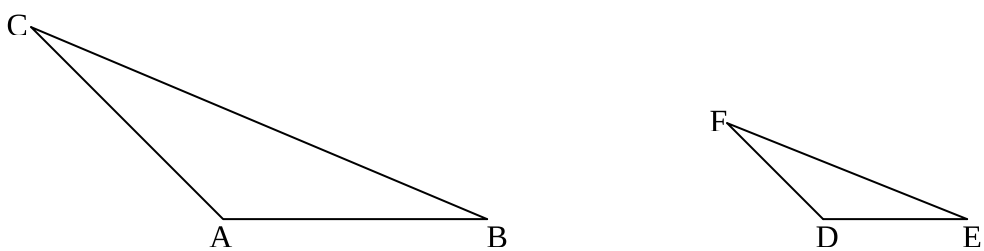
Si dos triángulos tienen los tres ángulos de uno respectivamente congruentes a los tres ángulos del otro, los triángulos son semejantes.



$$\angle A \cong \angle D;\ \angle B \cong \angle E;\ \angle C \cong \angle F \quad \Rightarrow \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$$

Teorema de semejanza LAL:

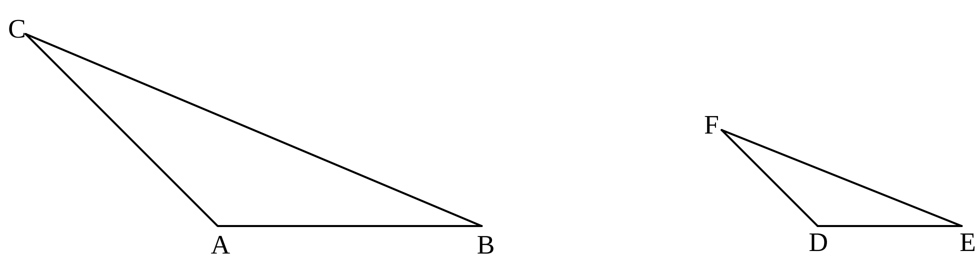
Si dos triángulos tienen un ángulo de uno congruente a un ángulo del otro y los lados que incluyen estos ángulos son proporcionales, los triángulos son semejantes.



$$\angle A \cong \angle D;\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$$

Teorema de semejanza LLL:

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, son semejantes.

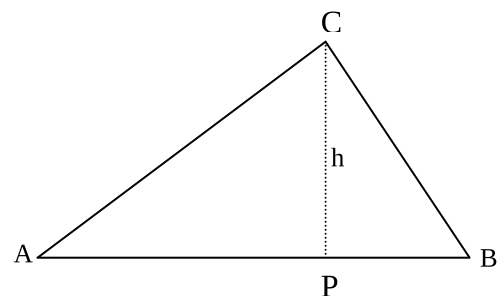


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$$

5.4. Semejanza en los triángulos rectángulos

Teorema de la altura:

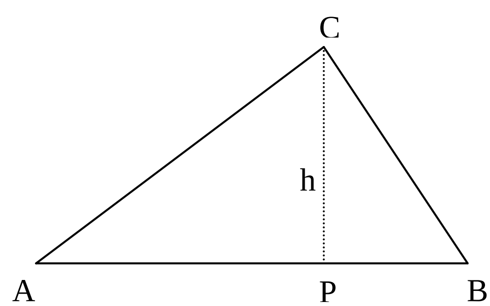
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa.



$$h^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB}$$

Teorema del cateto:

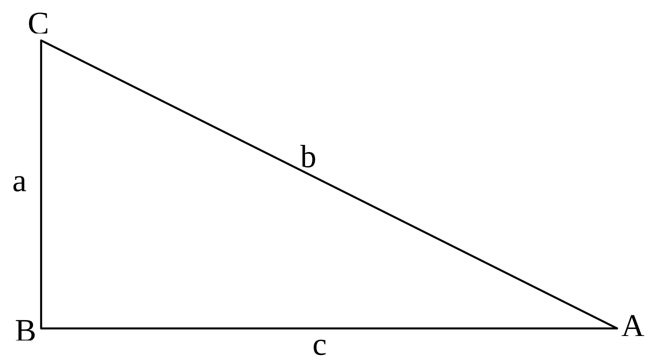
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa por el segmento de hipotenusa correspondiente al cateto.



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \quad \text{o bien} \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{PB}$$

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



$$b^2 = a^2 + c^2$$

V.3. ENFOQUE METODOLÓGICO

El Ministerio de Educación Cultura y Deportes, consciente de la necesidad de la transformación del sistema educativo, ha proporcionado a la educación un carácter privilegiado, brindándole elementos para la vida y para ello la matemática juega un papel fundamental, todo esto basado en el enfoque metodológico conocido como Enseñanza para la Comprensión (EpC) aplicando la competencia a través de sus perfiles de salida.

Las Competencias esenciales para la vida se orientan a la formación de individuos creativos, reflexivos, críticos con capacidades para comprender, interpretar, adaptarse y transformar su realidad.

Los y las docentes, desempeñando el rol de mediadores del proceso de aprendizaje de los y las estudiantes, alcanzarán plenamente este propósito en la medida que se considere a la Matemática; que como objeto de estudio, debe de ser presentado a los estudiantes atendiendo sus intereses y necesidades para que lo construyeran y lo reconstruyan a través de la acción transformadora.

Al iniciar los procesos de reconstrucción de los conceptos matemáticos en todos los grados, los docentes deben de considerar un periodo preparatorio para propiciar a los estudiantes la formación de esos conceptos. Es importante que los estudiantes partan de situaciones de su realidad, para que le encuentren sentido y significado al estudio de los conceptos matemáticos.

Los conceptos matemáticos serán reconstruidos mentalmente por los estudiantes partiendo de sus experiencias y conocimientos previos al nuevo conocimiento y a reconstruirlo apoyándose en la manipulación de objetos concretos, la visualización, juegos y situaciones problemáticas con datos de su realidad que les permitan analizar, reflexionar, explicar, transpolar y extrapolar, generalizar dando sentido y significado al nuevo conocimiento matemático, para después seguir avanzando hacia las formas simbólicas que les faciliten la abstracción.

Todo este proceso seguido en la reconstrucción de nuevos conceptos matemáticos, facilita la comprensión y el razonamiento para luego memorizar reglas y definiciones, desarrollando destrezas en la aplicación de algoritmos y métodos de trabajo.

Una vez que los estudiantes han organizado su aprendizaje en el ámbito de abstracción, necesitan continuar usando esos conceptos y procesos matemáticos para descubrir nuevas generalizaciones y aplicaciones; partiendo de enfoques pedagógicos que le ayuden a repararse para la vida y el trabajo.

Enfoque Pedagógico.

Se desarrollarán enfoques pedagógicos innovadores que contribuyan al fortalecimiento intelectual, afectivo y al desempeño sociocultural del alumno, enfoques mentales que contribuyen a su desempeño dentro y fuera de la escuela, y la ejecución de procesos de aprendizajes comprensivos y funcionales para su aplicación a diversos contextos para el desarrollo de nuevos conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores.

Con estos enfoques se busca el desarrollo de la autonomía intelectual, moral y social de los estudiantes, coadyuvando a que encuentren respuestas a sus preguntas, por medio de la experimentación, el pensamiento crítico, la confrontación de puntos de vista, y asegurando que las actividades educativas tengan sentido para ellos, vinculando el contenido de las disciplinas con la vida real y la solución de problemas de los adolescentes, jóvenes y adultos, sus familias, su comunidad, la nación y el mundo.

Considerar que los estudiantes traen al aula inteligencias múltiples (lingüística, lógica matemática, espacial, corporal – kinestética, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalista); lo cual permite mejores posibilidades a los docentes para desarrollar clases activas y motivadoras, con analogías apropiadas y múltiples representaciones de las ideas esenciales de un tema, que facilitan el aprendizaje de los estudiantes.

Esto será para un aprendizaje cognoscitivo, afectivo o social, los nuevos, el nuevo enfoque pedagógico de la transformación educativa propone que los aprendizajes se realicen a través de todas las fases del ciclo del aprendizaje: la experiencia, la reflexión, la abstracción y la aplicación. Este proceso de aprendizaje no será mecánicamente aplicado en todos los casos por igual, sino que enfatizará en alguna de sus fases, dependiendo del grado académico, la evolución bio-psico-social de los estudiantes y la naturaleza de las áreas y componentes, así como los momentos y contextos locales en donde se realiza el proceso de enseñanza-aprendizaje, para lo cual se brindará a los docentes una unidad didáctica como guía metodológica.

En general, se pasará de un enfoque tradicional del aprendizaje, que se centra en lo frontal y directivo a uno que combina la exposición magistral con procedimientos y estrategias participativas, dialógicas, constructivas, experienciales, que permitan a los alumnos el análisis, la comprensión, la inferencia y resolución de retos y problemas. Se enfatizará en la relación teoría y práctica, el desarrollo de habilidades del pensamiento crítico, hábitos mentales productivos y habilidades y destrezas operativas, así como el fortalecimiento del carácter para mejorar el desempeño de los estudiantes.

Así la transformación educativa estará abierta a otros enfoques pedagógicos funcionales para el desarrollo del área de matemática, específicamente en la semejanza, en lo actitudinal como la personalidad. Estos aportes podrán provenir de la práctica pedagógica en las aulas de clase, así como de otros enfoques y experiencias que lo enriquezcan.

VI. UNIDAD DIDÁCTICA: SEMEJANZA

VI.1. COMPETENCIA DE PERIODO ESCOLAR. EDUCACIÓN SECUNDARIA

Área: Matemática. Noveno Grado

Componente: Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

Pensamiento Métrico y Sistema de medidas

Competencias del III Ciclo

- Construye figuras y cuerpos geométricos fundamentando de forma lógica sus características y propiedades.
- Aplica las mediciones en el trabajo investigativo y uso de tecnología que propicien la solución de problemas de la vida cotidiana.
- Formula y resuelve problemas relacionados con el cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas y volúmenes de cuerpos geométricos.

Competencia de Grado

- Plantea y resuelve problemas relacionados con el teorema de Pitágoras, congruencia y semejanza de triángulos

Indicadores de logro

- Construye triángulos congruentes y semejantes aplicando los criterios respectivos.
- Aplica el teorema de Thales en la semejanza de triángulos.
- Plantea y resuelve problemas prácticos aplicando el teorema de Pitágoras y los criterios de semejanza de triángulos.
- Cumple con su responsabilidad personal dentro del grupo.

Contenidos

- Proporciones.
- Teorema de Thales.
- Escalas.
- Triángulos semejantes.
- Teorema del cateto y de la altura.
- Teorema de Pitágoras.

VI.2. MALLA DE COMPETENCIA DE GRADO

Educación Secundaria. Área: Matemática

Séptimo grado	Octavo grado	**Noveno grado**	Décimo grado	Undécimo grado
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Pensamiento Métrico y Sistema de medidas. • Construye triángulos y cuadriláteros justificando sus características y propiedades, a través del razonamiento lógico.	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Pensamiento Métrico y Sistema de medidas. • Construye polígonos regulares, círculos y sus elementos sus características y propiedades, a través del razonamiento lógico.	**Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.** **Pensamiento Métrico y Sistema de medidas.** • **Plantea y resuelve problemas relacionados con el teorema de Pitágoras, y semejanza de triángulos.**	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Pensamiento Métrico y Sistema de medidas. • Construye cuerpos geométricos, justificando sus características y propiedades, a través del razonamiento lógico.	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Pensamiento Métrico y Sistema de medidas. • Identifica y utiliza las características y propiedades de las figuras cónicas en la resolución de problemas.
• Crea y resuelve problemas relacionados con el perímetro de triángulos y cuadriláteros.	• Plantea y resuelve problemas de su entorno vinculados al área y perímetro de polígonos regulares e irregulares y del círculo.	• **Formula y resuelve problemas en los que aplica la relación entre áreas, ángulos y de un círculo.**	• Plantea y resuelve problemas donde utiliza el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.	

ÁREA: MATEMÁTICA

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	**¿Cuáles son los propósitos?**
En el proceso de búsqueda y construcción de modelos geométricos éstos deben ser extraídos de situaciones del entorno, dándose en un primer momento la visualización de las figuras uni -bi -tridimensionales como un todo, detectando relaciones entre sus partes, y paralelamente se da el trazado usando plantillas e instrumentos. Luego, analizar los componentes básicos de éstos, clasificados mediante el ordenamiento de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar su clasificación. Posteriormente, propiciar el razonamiento deductivo, dándole sentido a definiciones, axiomas y teoremas previos al razonamiento abstracto. Finalmente, se debe dar un razonamiento deductivo riguroso donde los y las estudiantes realizan demostraciones aplicando axiomas, definiciones y teoremas.	1. Desarrollar el pensamiento creativo, imaginativo, espacial y la formulación y discusión de conjeturas. 2. Comunicar la información espacial que se percibe al observar los objetos uni - bi - tridimensionales. 3. Construir sistemas conceptuales para la codificación del dominio del espacio y a la expresión externa de estos sistemas, a través de múltiples sistemas simbólicos. 4. Brindar las herramientas necesarias para el desarrollo y la comprensión de otras ciencias. 5. Aportar un lenguaje matemático para el desarrollo y comprensión de otras ciencias. 6. Facilitar la comprensión y comunicación con el resto del mundo.

VI.3. ACTIVIDADES

Actividad No. 1

Con la realización de esta actividad induciremos a los (as) estudiantes a que comprendan el concepto de figuras semejantes.

Materiales

1. Papel milimetrado.
2. Geoplano.
3. Hules de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Lapiceros.

Introducción

Explicación por parte del profesor acerca de la importancia y aplicación de figuras semejantes en otros campos del saber humano. Realización de las actividades propuestas con la orientación y guía del profesor.

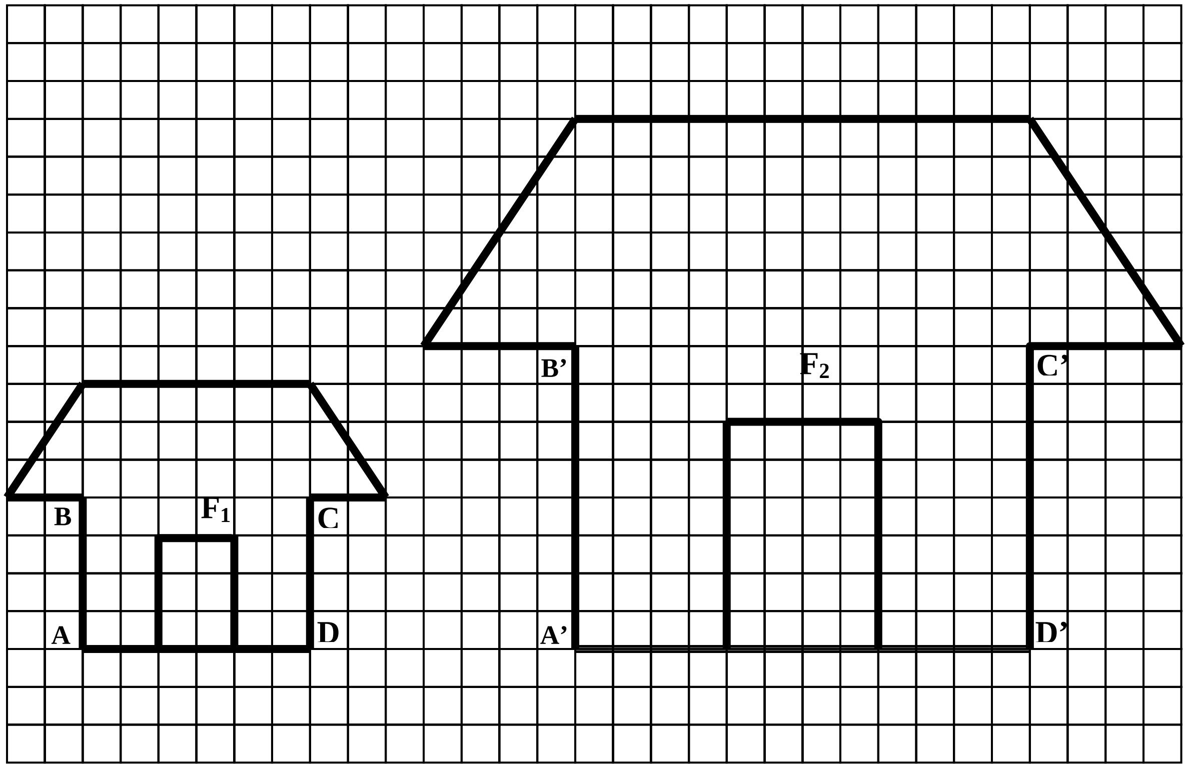
Desarrollo

Existen numerosas situaciones que pueden llevarnos al estudio de figuras semejantes, es decir, de formas iguales, como son, por ejemplo, la ampliación y reducción de dibujos, fotografías o fotocopias, los dibujos a escala (desde sencillos planos a mapas diversos), las maquetas (barcos, coches, aviones, proyectos urbanísticos, reproducciones de una ciudad o de una región, etc.). En esta actividad, induciremos al estudiante a que reconozca si dos o más figuras tienen la misma forma, aplicando criterios visuales y geométricos.

SITUACIÓN 1. Enmarcar una ampliación fotográfica.

Presentarle a cada grupo de estudiantes una serie de marcos rectangulares, donde ellos tienen que determinar cuáles de las fotografías tamaño pasaporte encajan perfectamente.

SITUACIÓN 2. Reproducción de modelos a través de una escala.



Suponiendo que las dimensiones de cada cuadrito son de un centímetro, responda a las siguientes preguntas.

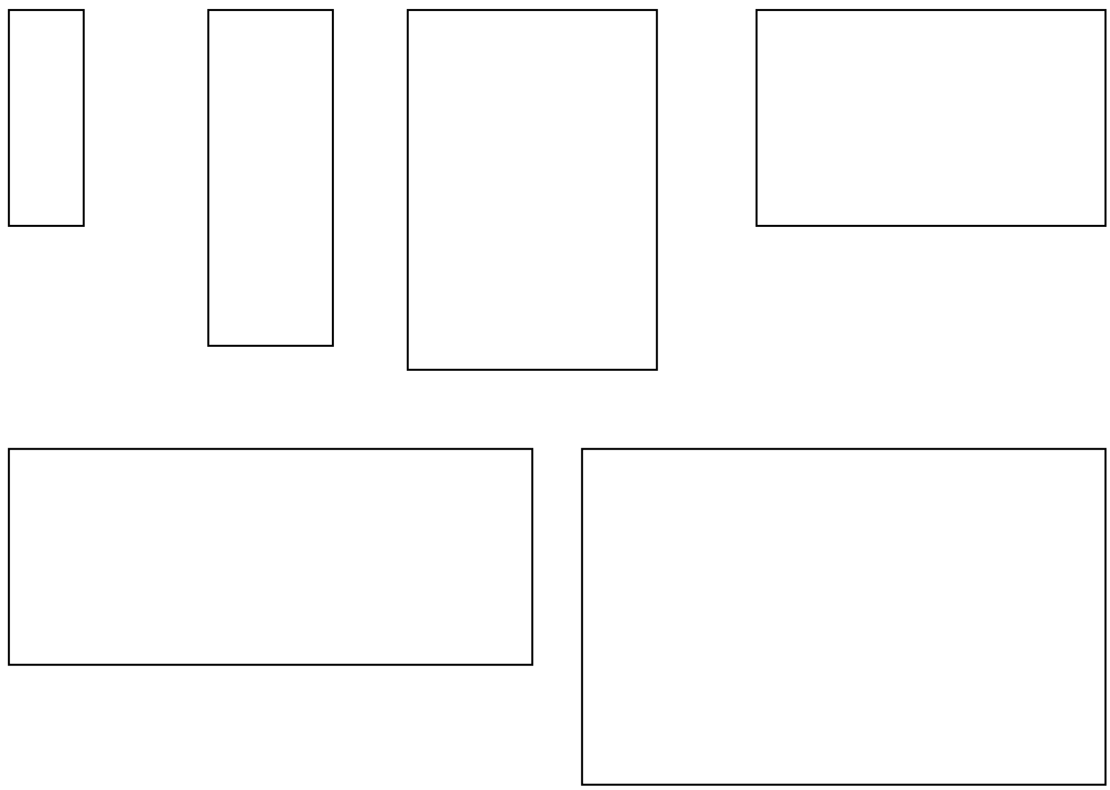
1. ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{A'B'}$ de la figura F_2?
2. ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$ de la figura F_1
3. Determine la razón de la figura F_2 a la figura F_1

$$\frac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \frac{2}{1}\text{; o sea, } 2 : 1$$

SITUACIÓN 3. Rectángulos semejantes.

Descubrimiento de propiedades geométricas de la semejanza de rectángulos.

1. Recorta los rectángulos y dibuja las diagonales, por detrás de cada uno de ellos.



2. Coloca los rectángulos con la cara blanca hacia arriba y agrúpalos de manera que los rectángulos tengan la misma forma.
3. Toma los rectángulos y superponlos de varias maneras:
   (a) Con un vértice en común y correspondiéndose los largos y cortos de cada uno, ¿qué observas?
   (b) Con el centro en común y correspondiéndose los lados cortos y largos, ¿qué observas?
   (c) Traza una recta y coloca sobre ella dos rectángulos de manera que sus bases estén sobre la misma recta. Une los vértices correspondientes de cada rectángulo por medios de recta y prolonga éstas, ¿qué sucede?

De la discusión y el análisis de las tres situaciones descritas, solicitar a cada grupo de estudiantes a que formulen el concepto de figuras semejantes.

Actividad No. 2

Esta actividad está orientada a rememorar y aplicar los conceptos de proporción.

Materiales

1. Papel cuadriculado.
2. Regla graduada.
3. Escuadra.
4. Lapiceros.
5. Hoja de ejercicios.

Introducción

Mediante la técnica lluvia de ideas rememorar el concepto de razón, proporción y sus propiedades con el propósito de aplicarlo en la resolución de ejercicios.

Desarrollo

1. Las medidas de dos ángulos complementarios están en una razón de $\frac{2}{3}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.

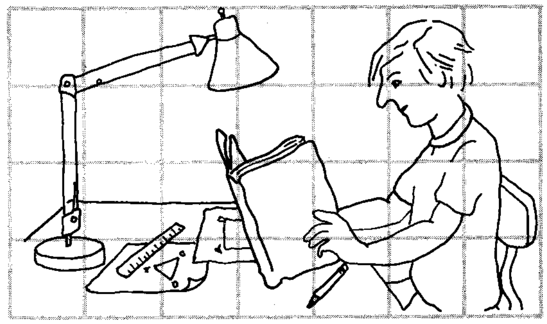
2. Si dos calculadoras cuestan 28 dólares, ¿cuánto costarán cinco calculadoras?

3. Dos números están en la razón de 2 : 3. ¿Cuál es la razón de sus cuadrados?

4. Las medidas de dos ángulos suplementarios están en la razón de $\frac{3}{5}$. Encuéntrense las medidas de los ángulos.

5. Las áreas de dos triángulos están en una razón de 4 a 9. El triángulo más pequeño tiene un área de 50 cm^2. Encuéntrese el área del triángulo grande.

6. A este dibujo se le sobrepuso una cuadrícula de 1 cm^2. Dibújese una copia más grande del dibujo con una cuadrícula de 2 cm^2.



Actividad No. 3

Esta actividad está encaminada a que los (as) estudiantes comprendan el concepto de segmentos proporcionales y apliquen el procedimiento para dividir un segmento en segmentos proporcionales a varios segmentos dados.

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de grafito.
4. Lápices de colores.
5. Borrador.
6. Regla graduada.
7. Escuadra.
8. Compás.

Introducción

Se formarán grupos de cuatro estudiantes. Trazar en la pizarra dos segmentos de medida arbitraria y distinta.

A B C D

Pasar un estudiante a la pizarra para que determine la razón del segmento AB al segmento CD.

Desarrollo

a. Segmentos proporcionales.

Orientar a cada grupo de estudiantes a que realicen las siguientes actividades:

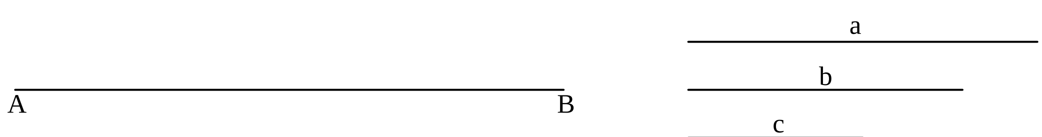
1. Tracen cuatro segmentos de longitudes 6, 9, 10 y 15 centímetros y desígnelos por $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, respectivamente.
2. Coloque en el espacio en blanco el símbolo = o ≠.

(a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$ (b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$

3. En cuál de los casos presentados en 2. se establece una proporción.
4. ¿Qué nombre reciben los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, así como los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.
5. Inducirlo a que formulen el concepto de segmentos proporcionales.

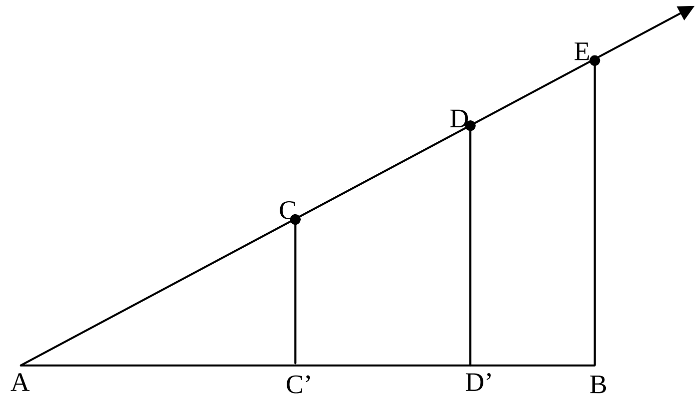
b. División de un segmento en segmentos proporcionales a varios segmentos dados.

Para esta actividad se entregará a cada grupo de estudiantes una hoja de papel bond blanco donde aparezcan dibujados el segmento AB y tres segmentos cuyas longitudes estén representadas por las letras a, b y c, respectivamente. También estarán las orientaciones a seguir para dividir el segmento AB en segmentos proporcionales a los tres segmentos dados.



1. Trace el segmento AB en el centro del papel.
2. Trace una semirrecta desde el punto A que no contenga a $\overline{AB}$.
3. Con la ayuda del compás trace los segmentos cuyas longitudes son a, b y c, respectivamente en la semirrecta de origen A, sucesivamente.
4. A los puntos de división de la semirrecta representarlos por las letras C, D y E, respectivamente.
5. Una los puntos B y E con un segmento rectilíneo.
6. Tracen paralelas a $\overline{BE}$ por los puntos de división C y D.
7. Represente los puntos de intersección de las paralelas trazadas con $\overline{AB}$ por las letras C’ y D’, respectivamente.

Un esquema gráfico de lo realizado es:



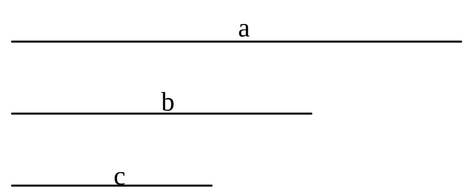
Plantee la proporcionalidad de los segmentos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'B}}$$

8. Compruébelo analíticamente.

c. Construcción de un segmento que forme proporción con tres segmentos dados (cuarta proporcional)

A cada grupo de estudiantes se les entregará una hoja de papel blanco donde aparezcan dibujados tres segmentos cuyas longitudes la representamos por a, b y c, respectivamente. Además, se orientan los pasos a seguir para la construcción de la cuarta proporcional.



1. Trace un ángulo agudo y denótelo por $\angle$ BAC.
2. Transportar los segmentos cuyas longitudes son a y c sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, sucesivamente.
3. A los puntos de división de $\overrightarrow{AB}$, represéntelos por las letras D y F, respectivamente.
4. Transportar el segmento cuya longitud es b en la semirrecta $\overrightarrow{AC}$.

5. Al punto de división de $\overrightarrow{AC}$, represéntelo por la letra E.

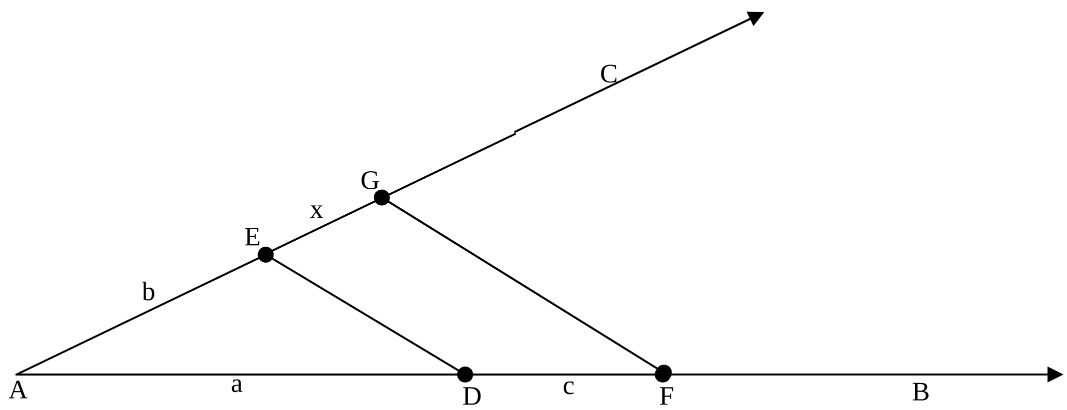
6. Trace $\overline{DE}$.

7. Trace paralela a $\overline{DE}$ por el punto de división F.

8. Designe por G al punto de intersección de la paralela trazada y $\overrightarrow{AC}$.

9. $\overline{EG}$ es la cuarta proporcional de los segmentos AD, AE y DF.

Un esquema gráfico de lo realizado es:



Actividad No. 4

En esta actividad aprenderemos a construir múltiplos de un segmento y a obtener la razón en que un punto divide a un segmento dado.

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Regla graduada.
3. Escuadra.
4. Compás.
5. Lapiceros.

Introducción

1. Explique brevemente el concepto de segmentos proporcionales.
2. Para establecer la proporcionalidad entre segmentos, ¿cuántos segmentos se necesitan?
3. Formación de grupos de cuatro estudiantes.

Desarrollo

La construcción de múltiplos de un segmento sentará la base para obtener la razón en que un punto divide a un segmento en una razón dada.

A cada grupo de estudiantes le entregamos una hoja de papel bond blanco donde aparezca dibujado un segmento AB, y las orientaciones a seguir para la construcción de múltiplos del segmento AB ($k\cdot \overline{AB}$) donde k es un número natural; k es un número racional mayor que 1 o bien k es un número racional menor que 1.

A B

A. k es un número natural.

Descripción del procedimiento:

Prolongamos $\overline{\text{AB}}$ a partir de A o B con el compás n – 1 veces.

Construyan $3\cdot \overline{\text{AB}}$.

B. k es un número racional.

En este caso, sucede que k < 1 o bien k > 1.

B.1. Para k < 1, tomemos $k = \frac{5}{6}$. Esto significa que debemos dividir $\overline{AB}$ en seis segmentos congruentes y tomar cinco de ellos a partir de A o B.

B.2. Para k > 1, tomamos $k = \frac{5}{3}$. Esto significa que debemos construir la tercera parte de $\overline{AB}$ y quintuplicar entonces ésta.

El gráfico que resulta tanto en B.1. como en B.2., son:

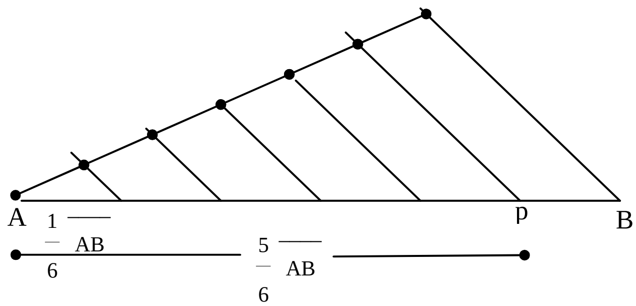


Figura B.1

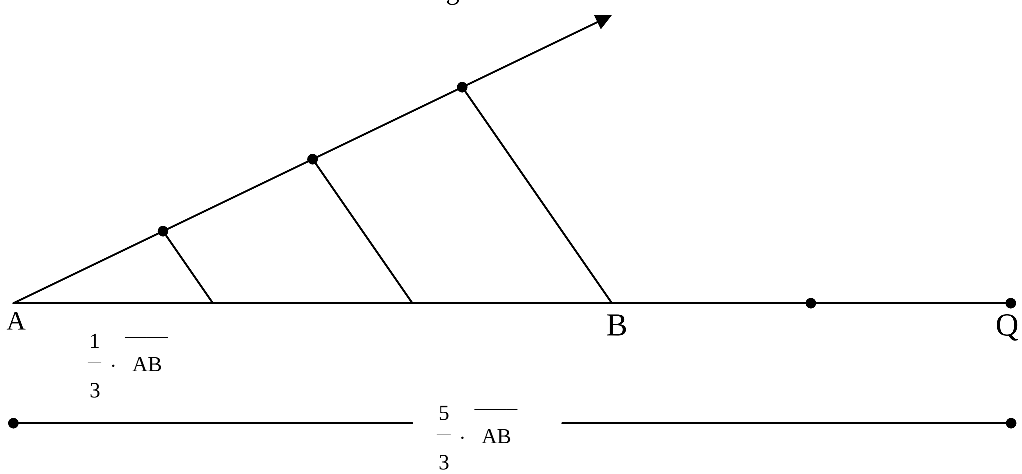


Figura B.2

Complete en términos del segmento AB:

En B.1.:

(i) $\overline{AP}$ = (ii) $\overline{PB}$ =

En B.2.:

(i) $\overline{AQ}$ = (ii) $\overline{QB}$ =

¿En qué razón divide el punto Q al segmento AB?

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\frac{5}{6} \cdot \overline{AB}}{\frac{1}{6}\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

¿En qué razón divide el punto P al segmento AB?

$$r = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\frac{5}{3} \cdot \overline{AB}}{\frac{2}{3}\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{2}$$

Si $k \in \mathbf{Q}$ y $k < 1$, ¿el punto P es interno o externo a $\overline{AB}$?

Si $k \in \mathbf{Q}$ y $k > 1$, ¿el punto P es interno o externo a $\overline{AB}$?

Actividad No. 5

Esta actividad está dedicada al estudio del Teorema de Thales, y tiene como propósito inducir a los (as) estudiantes a que formulen dicho teorema y que lo apliquen en la resolución de ejercicios.

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada o escalímetro.
4. Escuadra.
5. Calculadora.

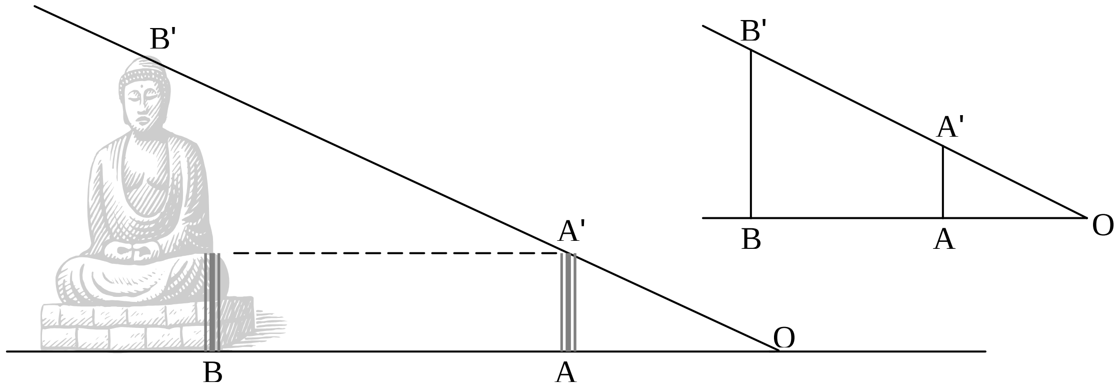
Introducción

Formar grupo de cuatro estudiantes.

Desarrollo

Es sabido que el Sol incide con igual inclinación sobre los cuerpos en un determinado momento y lugar; esto lo ilustramos en la siguiente fotografía de la estatua de un Buda.

Observando la fotografía de un Buda en un muelle de cierta ciudad junto a un bote de vela al fondo y utilizando la regla milimetrada o un escalímetro compara las alturas del Buda completo y su rodilla derecha con sus respectivas sombras producidas por las velas de una lancha deportiva de unos 4.5 m. de altura en el mismo momento y lugar.



Ahora bien, ya nos hemos percatado de que las sombras miden el doble de sus alturas, por lo que

$$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{AA'} \quad \text{y} \quad \overline{OB} = 2 \cdot \overline{BB'}$$

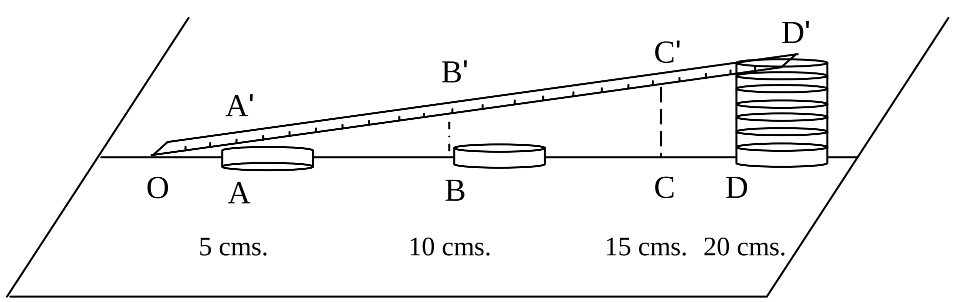
por tanto:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB'}} = 2$$

¿Qué nombre recibe $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$? ¿Y el valor 2?

<u>*Aproximémonos al Teorema de Tales*</u>

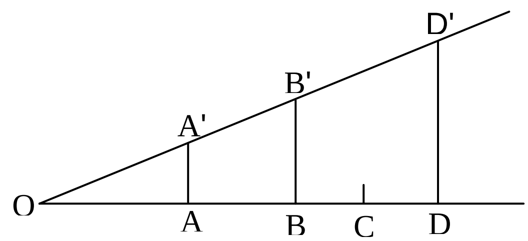
Sobre una hoja de papel similar a la que se presenta la imagen traza un segmento de 20 cm de longitud y señala los puntos A, B y C situados a 5, 10 y 15 respectivamente del extremo O de dicho segmento.



En el otro extremo, apila doce monedas de un córdoba y deja apoyar una regla tal como muestra la imagen anterior.

a. ¿Cuántas monedas puedes apilar por debajo de la regla en B, punto medio del segmento? ¿Y en el punto A? No dejes de comprobarlo.

b. Observando el esquema adjunto que corresponde a la situación planteada anteriormente, completa la siguiente relación de proporcionalidad:



$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\_} = \frac{\_\_}{\overline{OD}}$$

¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

¿A qué distancia del punto O cabrá exactamente una sola moneda? ¿Cuántas monedas caben en el punto C?

c. La razón entre el número de monedas de la columna en D y su distancia al origen es:

$$\frac{\text{No. de monedas}}{\text{distancia al origen}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

¿Cuál es la razón para las otras columnas? ¿Es la misma en todos los casos?

d. Mide las distancias de los segmentos de recta OA', OB', OC' y OD y busca la razón entre el número de monedas de cada columna y estas distancias, y deduce que apilando monedas cada 5 cm en la recta horizontal, quedan determinados en la recta oblicua segmentos iguales entre sí.

De lo anterior podemos deducir que: si varias paralelas determinan segmentos iguales sobre una recta r, determinan segmentos iguales sobre cualquier otra recta r' a la que corten.

1. En la imagen inicial comprueba, usando la regla, que la relación de proporcionalidad entre el tamaño de los cuerpos y sus sombras respectivas es la misma para todos ellos.

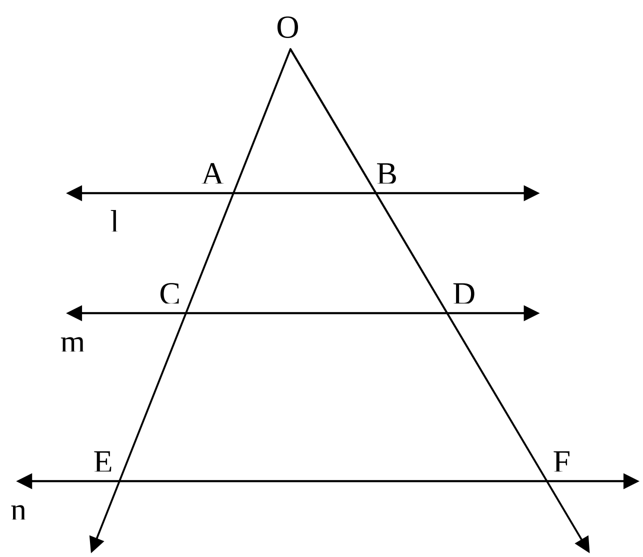
Este argumento le permitió a Tales en uno de sus viajes a Egipto medir la altura de una pirámide aprovechando el momento en que su propia sombra medía tanto como su estatura. ¿Con qué razón de proporcionalidad trabajó?

Deduzcamos el teorema de Thales

Orientar a cada grupo de estudiantes a que realicen las siguientes actividades con el fin de formular el teorema de Thales.

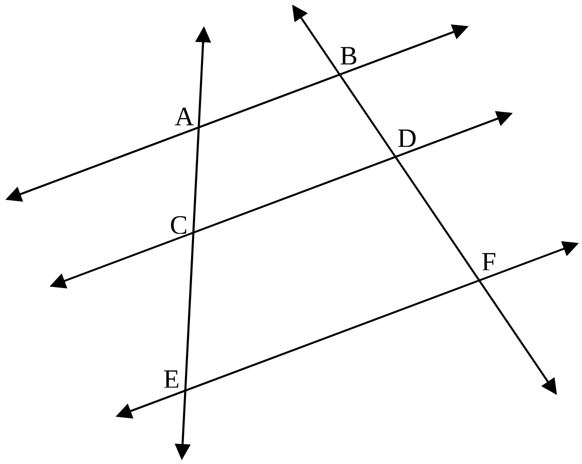
1. Tracen un ángulo agudo con vértice O.
2. Tracen dos rectas paralelas que corten a los lados del ángulo.
3. Señale los puntos de intersección de las rectas paralelas con los lados del ángulo por las letras A, B, C, D, E y F, y a las rectas paralelas por las letras l, m y n, respectivamente.

Un esquema gráfico de lo realizado, es:



4. Midan los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$.
5. Obtengan las razones $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ y $\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$. ¿Son iguales las razones?
6. ¿Qué nombre reciben los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$? Fundamente su respuesta.

A continuación, el profesor le entregará a cada grupo de estudiantes una hoja de papel donde aparezca dibujada la siguiente figura



y, orientarle a cada grupo que realicen los pasos 4., 5. y 6. ¿Qué conclusión obtienen?

Concluimos:

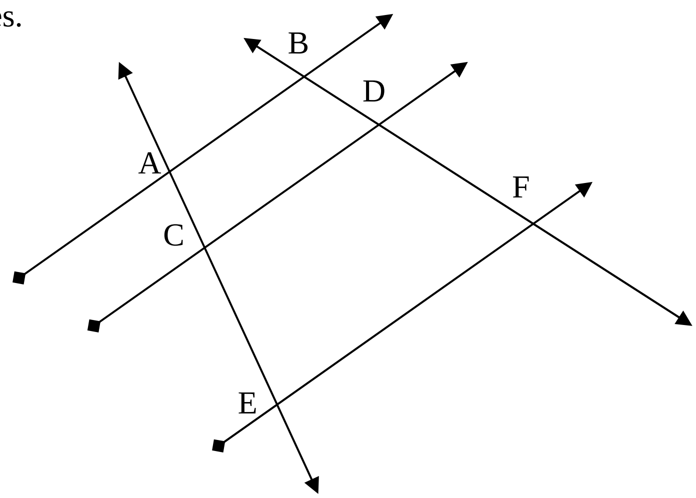
En ambas actividades se tienen:

1. Dos transversales.
2. Un sistema de rectas paralelas, y determinan segmentos proporcionales.

Por último, orientaremos a cada grupo a que formulen el teorema de Thales.

Torema de Thales

Un sistema de rectas paralelas determina sobre dos rectas concurrentes segmentos proporcionales.

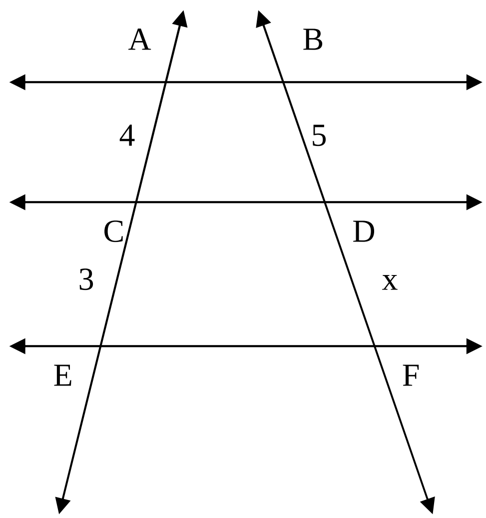


$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$$

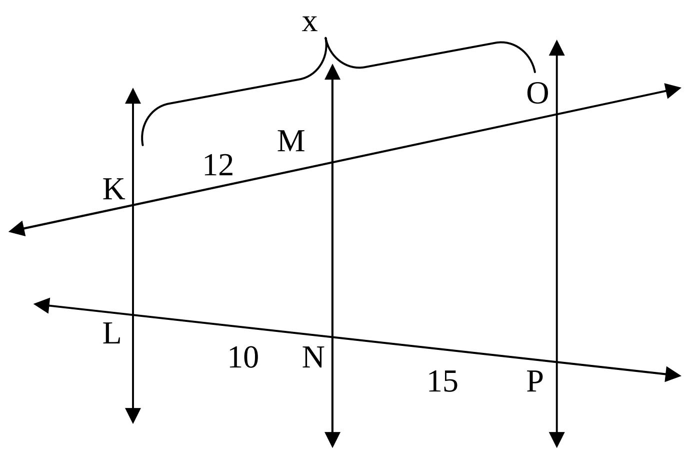
Este teorema se cumple para cualquier número de rectas paralelas y para cualquier posición de las transversales.

C. Ejercicios.

1. Hallar el valor de x:



2. Hallar el valor de y:



3. Calcula la altura de tu casa de habitación o la altura de tu centro de estudio o la altura de la torre de la iglesia de tu comunidad, pueblo o ciudad midiendo su sombra y teniendo presente tu altura y la longitud de tu sombra.

Actividad No. 6

En esta actividad estudiaremos "Escalas", las cuales nos sirven para ampliar y reducir figuras. Además, explicaremos su importancia y aplicación.

Materiales

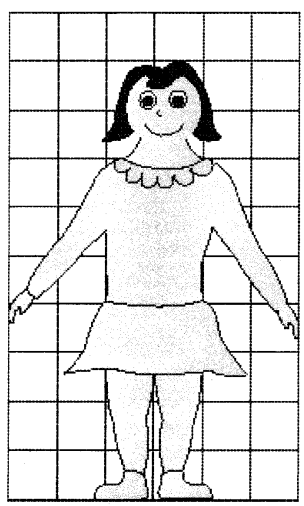
1. Documento.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Calculadora.

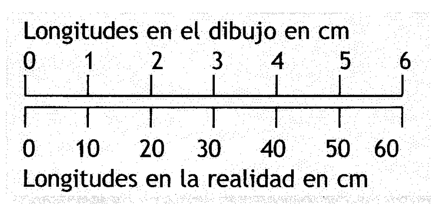
Introducción

Formar grupo de cuatro estudiantes. Esta actividad será realizada en conjunto profesor – alu,m@s.

Desarrollo

Cuando necesitamos hacer un dibujo que se vea como la realidad que queremos representar pero más pequeño o más grande hacemos un dibujo a escala, que es un dibujo proporcional a la realidad en longitudes. En el siguiente dibujo se representa una muñeca plana de cartón que se usa para exhibir ropa de niña en un aparador; la muñeca mide en la posición en la que está 90 cm de alto y 60 cm de ancho. Un centímetro en el dibujo representa 10 cm de la realidad y decimos que está hecho en una escala de 1 a 10. Esto también se suele escribir así: la escala es de 1 : 10.





Del dibujo podemos recuperar las medidas de la muñeca. Pongamos algunas de ellas en una tabla:

	Dibujo	Muñeca
Ancho de la cintura	2 cm	20 cm
Altura del tronco	3 cm	30 cm
Ancho de las piernas	1 cm	10 cm
Largo de la falda	1.5 cm	15 cm
Largo del pie	1.1 cm	11 cm

Observe que todas las medidas que pusimos en la tabla están en la misma proporción:

$$\frac{2}{20} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = \frac{1.5}{15} = \frac{1.1}{11}$$

Aquí la constante de proporcionalidad es un décimo, es decir $\frac{1}{10}$. Cada longitud del dibujo es la décima parte de la longitud original; o bien, cada longitud en la muñeca es de diez veces la correspondiente longitud en el dibujo.

Para hacer el dibujo se consideran las medidas que conocemos de la muñeca, las relaciones entre sus partes, su posición y la escala a la que la queremos dibujar. Aquí, por ejemplo, se consideró para dibujar el brazo que vemos a la derecha que el codo está 10 cm arriba del nivel de la cintura y que del codo al hombro hay 25 cm, de esta manera en el dibujo el codo queda 1 cm arriba del nivel de la cintura y del codo al hombro hay 2.5 cm.

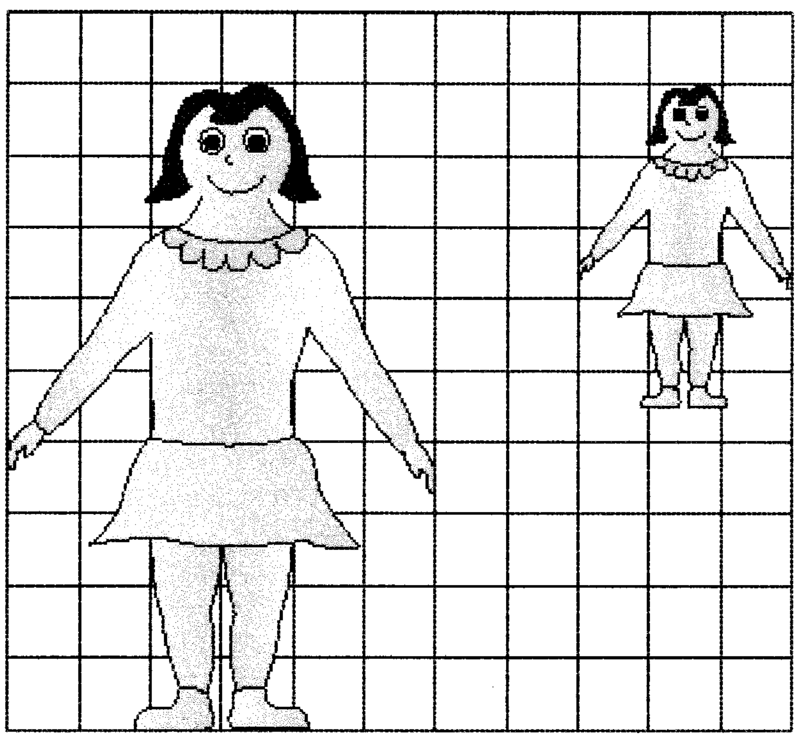
Podemos volver a dibujar la misma muñeca con otra escala si queremos un dibujo más grande o más chico. Hagamos una reducción del dibujo que tenemos: para ello tomamos una escala más chica; es decir, una constante de proporcionalidad que sea un número menor que un décimo; probemos con un vigésimo, es decir con una escala de 1 a 20. Con esta escala cada medida en el dibujo debe ser una vigésima parte de la medida de la muñeca. Consideremos las mismas medidas que antes y calculemos las que tendrá el dibujo dividiendo cada medida de la muñeca entre 20:

	Dibujo	Muñeca
Ancho de la cintura	20 cm	1 cm
Altura del tronco	30 cm	1.50 cm
Ancho de las piernas	10 cm	0.50 cm
Largo de la falda	15 cm	0.75 cm
Largo del pie	11 cm	0.55 cm

Observe que también aquí se tiene la misma proporción entre las medidas del dibujo y las de la muñeca y la constante de proporcionalidad es un vigésimo, es decir la escala que escogimos:

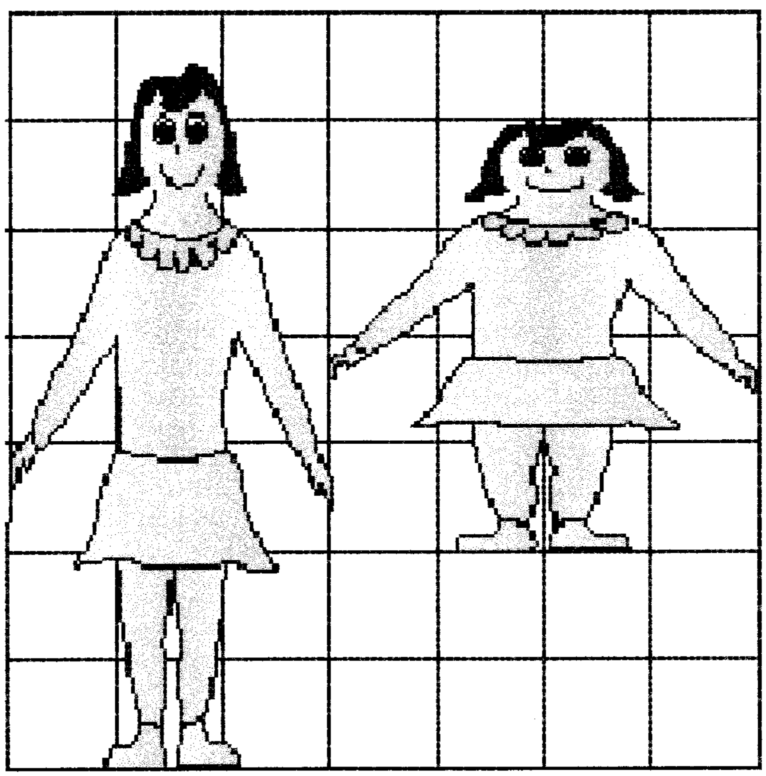
$$\frac{1}{20}=\frac{1.5}{30}=\frac{0.5}{10}=\frac{0.75}{15}=\frac{0.55}{11}$$

También podemos calcular de antemano la altura que debe tener el codo con respecto al nivel de la cintura y el largo del codo al hombro: $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0.5$ y $\frac{25}{20}=\frac{5}{4}=1.25$. Podemos ahora dibujar la muñeca con esta nueva escala eligiendo el punto de partida que queremos:



Las escalas son muy importantes y se usan mucho porque se necesita representar muchas cosas que no caben en un papel. Se hacen dibujos a escala como el croquis de un departamento o de un barrio, planos de ciudades, mapas de países, planos de aparatos, instructivos para armar muebles, etc. Lo fundamental en un dibujo a escala es que se conservan las propiedades y características geométricas de los objetos en el dibujo: las longitudes son proporcionales y los ángulos son los mismos.

También se pueden hacer dibujos que no estén a escala pero no son tan útiles. A continuación le mostramos dos dibujos de la misma muñeca que presentamos antes pero que no están a escala:



Observe cómo en estos dibujos cambian las formas de los objetos, por ejemplo la forma de la falda o la de la cabeza. Lo que ha cambiado es que son distintos los ángulos en estas figuras. A partir de ellas no podemos saber cuáles son las medidas de la muñeca original, porque no hay proporcionalidad.

Ejercicio 1

(a) Considere el dibujo de la muñeca en escala de 1 a 10 para llenar la tabla siguiente:

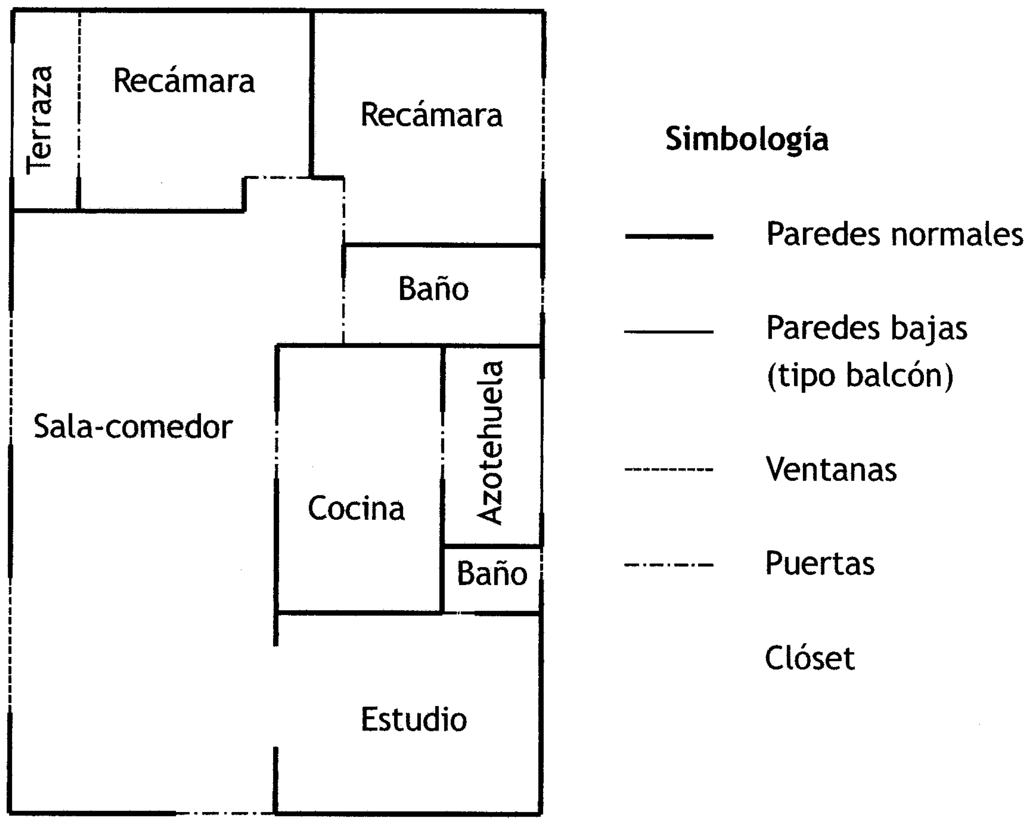
	Dibujo	Muñeca
Ancho total del modelo		
Altura de la muñeca		
Boca de la manga		
Ancho del cuello		
Distancia entre los ojos		

(b) Considere el dibujo de la muñeca en escala de 1 a 20 para llenar la tabla siguiente:

	Dibujo	Muñeca
Ancho total del modelo		
Altura de la muñeca		
Boca de la manga		
Ancho del cuello		
Distancia entre los ojos		

Ejercicio 2

El siguiente croquis corresponde a una casa. Está en una escala de 1 : 100.



(a) ¿Cuánto mide de largo la casa? ¿Y de ancho? ¿Qué área tiene en total?

(b) ¿Qué dimensiones tiene la cocina?

(c) ¿Qué dimensiones tiene cada uno de los dos baños?

(d) ¿Qué dimensiones tienen los clósets? ¿Qué área tiene cada uno de ellos?

(e) ¿Cuál de las dos recámaras tiene mayor área? ¿Qué área tiene?

(f) ¿Qué longitud total tienen las ventanas de la casa?

(g) Si se desea poner contra una pared un mueble que mide 4 m de largo, ¿cabe en la casa? Si sí, ¿dónde?

Actividad No. 7

Materiales

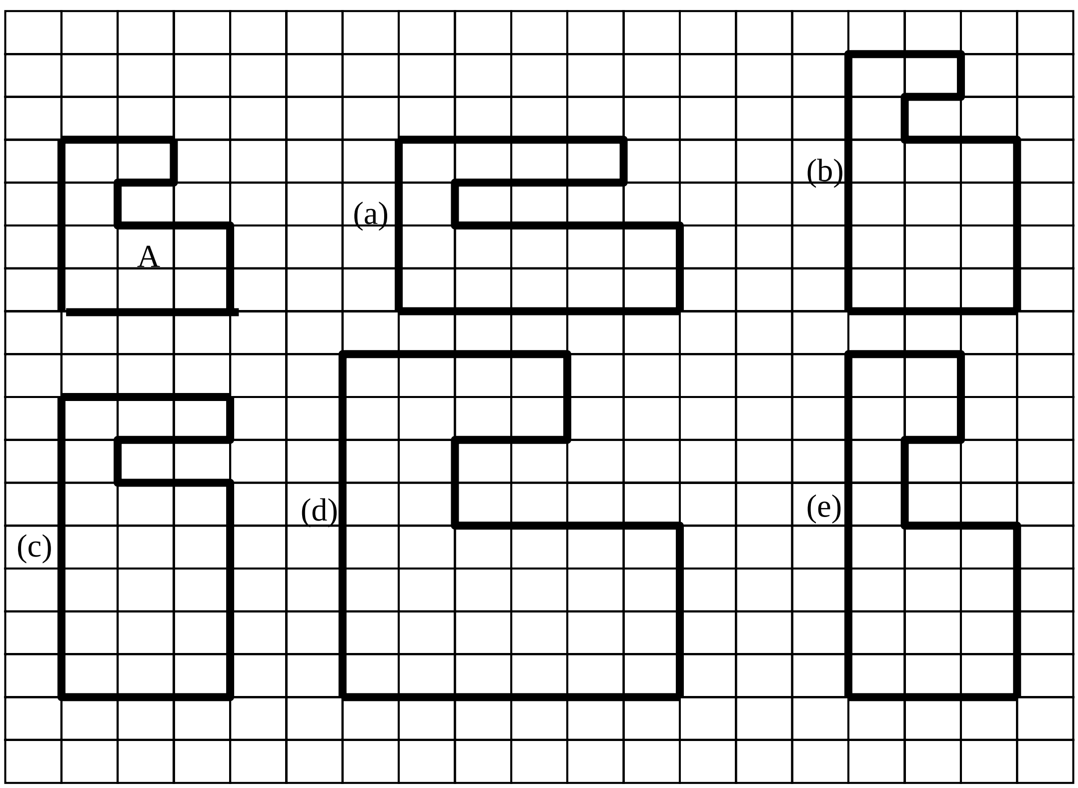
1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Papel milimetrado.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Transportador.

Introducción

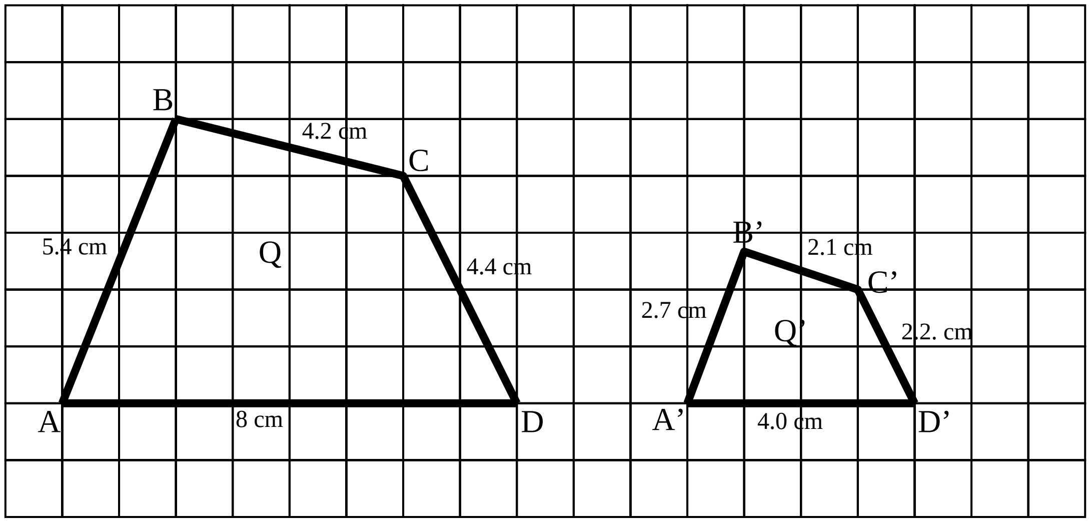
Esta actividad está encaminada a definir polígonos semejantes, a partir de la congruencia de ángulos y la proporcionalidad de los lados correspondientes. Formaremos grupos de cuatro estudiantes.

Desarrollo

A. ¿Cuáles de las siguientes figuras son ampliaciones de A? Explique la respuesta para cada caso.



B. Observen los dos cuadriláteros siguientes: Tienen la misma forma y por eso decimos que son semejantes.



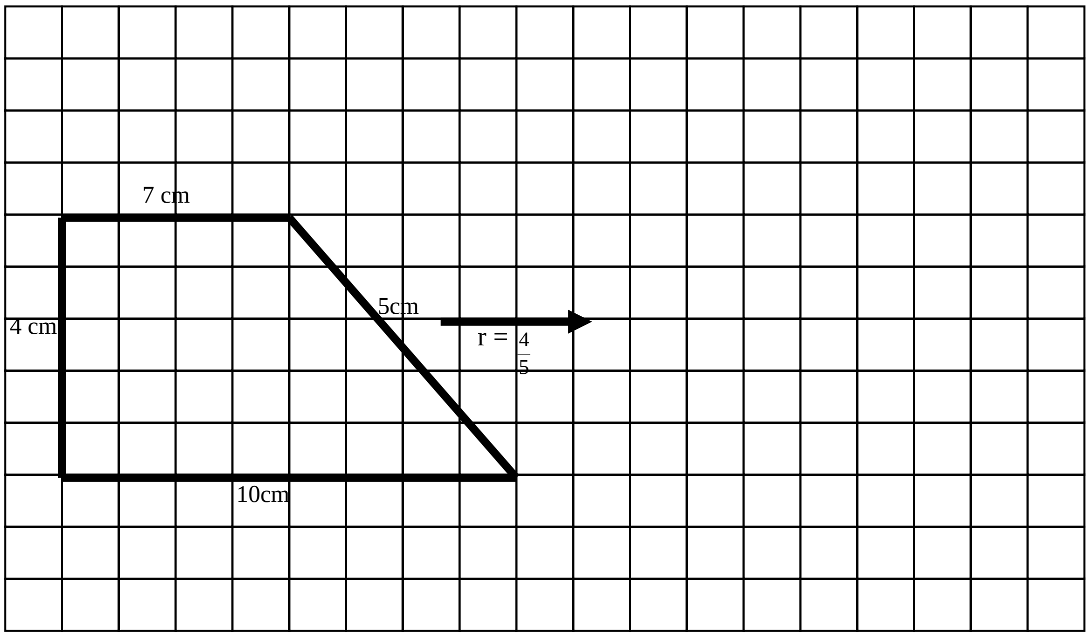
1. Mide los ángulos, por medio de un transportador y escribe las igualdades que obtengas. (Pueden recortarse y superponerse)

2. Calculen las razones de los lados correspondientes $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}, \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$ y $\frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$. ¿Qué relación hay entre los lados de las dos figuras?

Sobre la base de las discusiones y a los resultados obtenidos en A. y B., formulen la definición de polígonos semejantes. El símbolo de semejanza es “~”. Para los cuadriláteros ABCD y A’B’C’D’, escribimos cuadrilátero ABCD ~ cuadrilátero A’B’C’D’, que se lee: cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero A’B’C’D’.

C. Que resuelvan el siguiente ejercicios. Esto lo harán individualmente, y será entregado al profesor al terminar la actividad.

Trace un trapecio semejante al dado y cuya razón de semejanza es $r = \frac{4}{5}$.



Actividad No. 8

Esta actividad está dedicada al estudio de una de las aplicaciones del concepto de semejanza, los métodos para ampliar y reducir figuras.

Materiales

1. Regla.
2. Escuadra.
3. Compás.
4. Tiras de cartón.
5. Tiras de madera de 20 centímetros.
6. Papelógrafo.
7. Tornillo, arandela y tuercas.
8. Estilete.
9. Lapiceros.
10. Fotografía.

Introducción

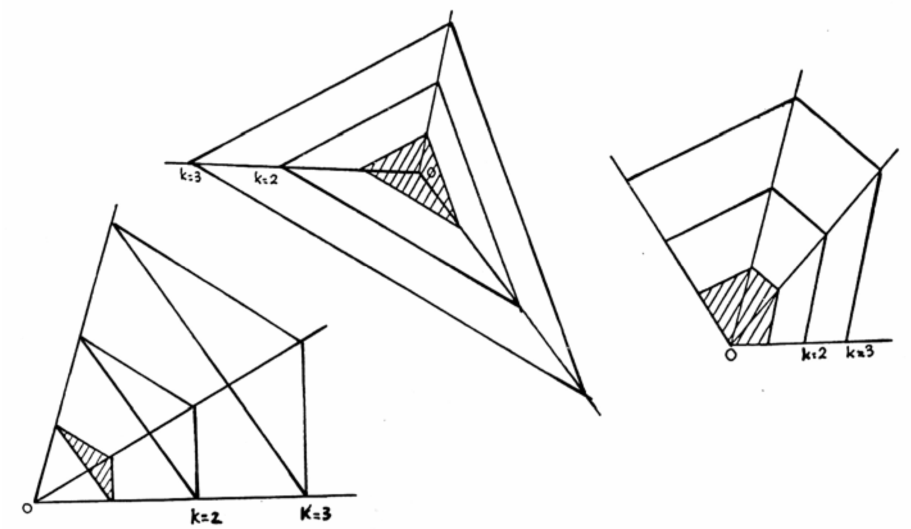
Formar grupo de cuatro estudiantes. Esta actividad será realizada en conjunto profesor – alumn@s.

Desarrollo

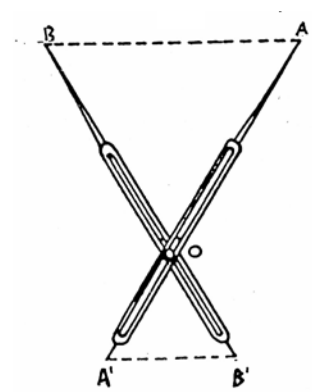
Existen diversos métodos para ampliar y reducir figuras. El más simple consiste en utilizar cuadrículas: se traza una cuadrícula sobre el dibujo que se quiere ampliar o reducir y, sobre el papel que se va a utilizar la ampliación o reducción, se marca una segunda cuadrícula que mantiene con la primera una razón igual a la que se desea aumentar el dibujo. Cuadro a cuadro, se copia el dibujo, obteniéndose otro semejante. Una vez hecho el nuevo dibujo, puede comprobarse que el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de un dibujo y el que resulta de unir los puntos correspondientes del otro están en la misma razón que los lados de los cuadrados que forman las dos cuadrículas.

Utilizando una misma cuadrícula y trabajando con figuras poligonales cuyos vértices estén sobre vértices de la cuadrícula, también es posible ampliar figuras en razones simples.

La construcción de figuras homotéticas (figuras que se obtienen a partir de otras mediante trasformaciones geométricas con una razón de semejanza |k|) puede considerarse también como un método de ampliación de figuras. Pueden realizarse construcciones distintas, según la razón de homotecia (k) y la posición del centro de homotecia respecto a la figura. Una actividad interesante para realizar con los (as) alumnos (as) consiste en pegar una fotografía en una hoja grande de papel y realizar un dibujo homotético a partir de las figuras de la fotografía (con una razón de homotecia lo mayor posible).



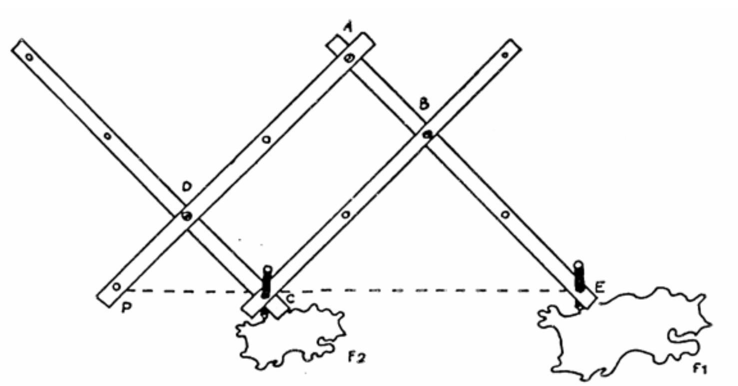
El compás de reducción



El compás de reducción es un instrumento que sirve para ampliar o reducir segmentos, siempre en una misma proporción. Se trata de un doble compás cuyos brazos tienen sendas ranuras que permiten situar el punto O de forma que cada uno de los dos brazos queda dividido en dos partes, según una razón determinada. Las ranuras tienen unas divisiones señaladas con los números 2, 3, 4, ..., que indican dónde se debe fijar la articulación para obtener la ampliación o reducción deseada. Puede proponerse su construcción, con dos pequeñas reglas de unos 20 cm y luego ampliar o reducir figuras poligonales dadas. Este ejercicio planteará la necesidad de triangular el polígono ya que de lo contrario podrían resultar figuras con los lados proporcionales pero no semejantes.

El pantógrafo

El pantógrafo es un sencillo instrumento que permite obtener directamente figuras semejantes. En esencia, es un paralelogramo articulado ABCD con dos lados prolongados de forma que DP = DC t VE = BC y, por tanto, se deduce que: AP = AE.



Comprueba que los triángulos DPC y APE siempre son semejantes, que los puntos P, C y E siempre están alineados y que cualquiera que sea el valor que tomen los ángulos del paralelogramo ABCD, al mover el pantógrafo PA : PD = PE : PC.

Así pues, fijando el punto P y pasando sobre la figura f_1 la punta colocada en E, el lápiz colocado en C nos dibujará una figura semejante (f_2) con razón k = PA : PD.

De la misma manera, si fijamos C, las figuras descritas por P y E serán semejantes y su razón será la misma k = PA : PD.

Si cambiamos la punta de seguimiento del dibujo original y el lápiz de lugar, la razón de semejanza será inversa.

Además, el pantógrafo permite variar k, variando la razón entre las longitudes del paralelogramo.

Construcción de un pantógrafo

Podemos construir un pantógrafo rudimentario de la manera siguiente:

- Corta cuatro tiras iguales de cartón y señala, en todas ellas, un punto cerca de cada extremo y a la misma distancia en todas las tiras.
- Señala también un punto intermedio, por ejemplo a $\frac{1}{3}$ de la distancia entre los puntos extremos.
- Colócalas tal como indica la figura del principio de la página, únelas por medio de tornillos con tuercas, por ejemplo de tal manera que sea posible la articulación del paralelogramo ABCD formado.

Si fijamos el punto P a la mesa, y colocamos un lápiz en el agujero hecho en C, y un estilete, u otro lápiz, en el punto E, observaremos que al mover el estilete E, el lápiz señalará siempre un punto en C sobre la recta PE a distancia $\frac{1}{3}$ de PE. Es decir, el lápiz dibujará una figura semejante a la seguida por E, pero cuyo tamaño ha sido reducido a una tercera parte ya que la razón de semejanza es precisamente $k = \frac{1}{3}$.

Del mismo modo, se pueden construir pantógrafos que permitan operar con las razones $\frac{1}{2}$ y 2, $\frac{1}{4}$ y 4, ... Cada grupo de la clase puede construir uno diferente.

Comprobación del funcionamiento

Utilizando los pantógrafos construidos (o los que venden en las tiendas) dibuja una copia de una figura cualquiera, ampliándola y reduciéndola con las razones 2 y $\frac{1}{3}$. El dibujo, el papel de la copia y el punto fijo del pantógrafo deben estar muy bien sujetos a la mesa, pues cualquier movimiento hará desfigurar la copia.

Mide un par de ángulos correspondientes en las dos figuras y comprueba que son iguales.

Mide longitudes correspondiente y comprueba que son proporcionales. ¿Cuál es la razón de semejanza?

La figura a reproducir no tiene porqué ser necesariamente una figura geométrica, pueden ampliar o reducir cualquier dibujo.

Actividad No. 9

En esta actividad se enunciará el teorema fundamental de semejanza, los teoremas de semejanza y su aplicación en la resolución de ejercicios.

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.

Introducción

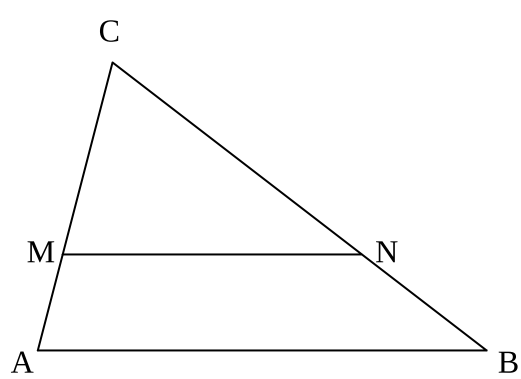
¿Cuándo dos triángulos son semejantes? Formación de grupos de cuatro estudiantes.

Desarrollo

A. Teorema fundamental de semejanza.

1. Trace un triángulo acutángulo y represente los vértices por A, B y C.
2. Trace una paralela al lado AB.
3. Los puntos de división de los lados AC y BC por M y N, respectivamente.

La siguiente ilustración muestra los pasos 1. y 2.



4. ¿Cuántos triángulos se forman? Nómbrelo.
5. Determine si Δ ABC ~ Δ MNC.

Recordarle que para que se cumpla la semejanza de dichos triángulos debe verificarse que:

(a) Los ángulos correspondientes son congruentes.

(b) Los lados correspondientes deben ser proporcionales.

Con la ayuda del profesor formular una proposición que involucre a todo el procedimiento descrito anteriormente, y concluir que dicha proposición corresponde al teorema fundamental de semejanza.

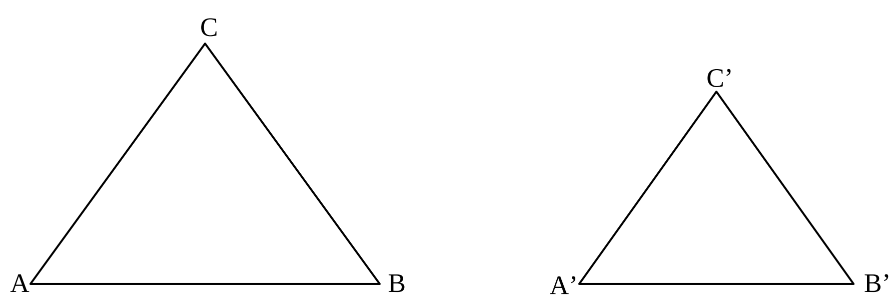
Teorema fundamental de semejanza:

Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero.

B. Teoremas de semejanza

I. Teorema de semejanza AAA.

1. Trace dos triángulos cuyos lados midan 8 centímetros y 4 centímetros.



2. ¿Qué nombre reciben dichos triángulos? Fundamente su respuesta.

3. ¿Son congruentes los ángulos correspondientes? Fundamente su respuesta.

4. ¿Son proporcionales sus lados correspondientes? Fundamente su respuesta.

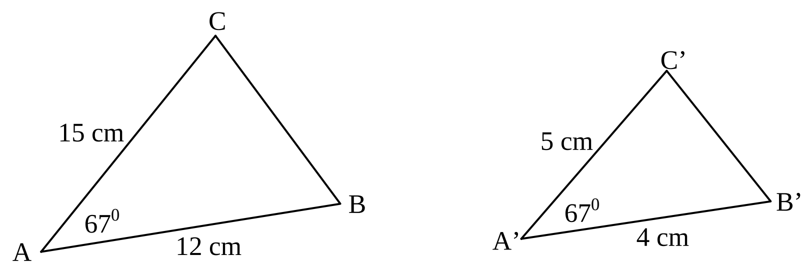
5. Sobre la base de las respuestas obtenida en 3. y 4. ¿A qué conclusión llegan?

"Basta que dos triángulos sean equiángulos para que ellos sean semejantes"

6. Enuncie el teorema Angulo – Angulo – Angulo (AAA)

II. Teorema de semejanza LAL.

- Tracen un triángulo tal que dos de sus lados midan 15 cm y 12 cm, y el ángulo comprendido entre ellos mida 67^o.
- Tracen un triángulo tal que dos de sus lados midan 5 cm y 4 cm, y el ángulo comprendido entre ellos mida 67^o.

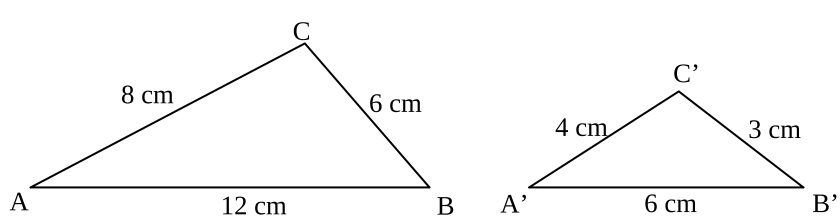


- Determine si los lados correspondientes son proporcionales.
- Sobre la base de lo realizado, ¿a qué conclusión llegan?

  "Basta que dos triángulos tengan dos lados proporcionales y congruente el ángulo comprendido entre dichos lados para que ellos sean semejantes".
- Enuncie el teorema de semejanza Lado – Angulo – Lado (LAL).

III. Teorema de semejanza LLL.

- Trace un triángulo cuyos lados midan 12, 8 y 6 centímetros.
- Trace un triángulo cuyos lados midan 6, 4 y 3 centímetros.



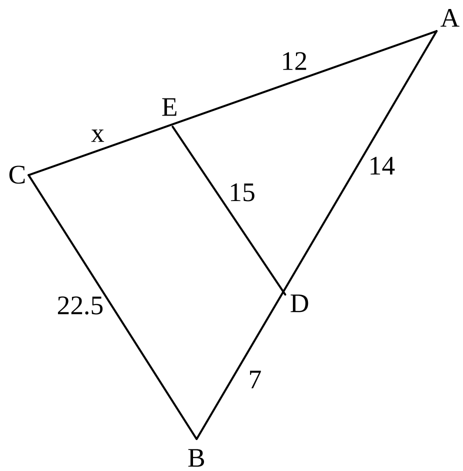
- ¿Son congruentes los ángulos correspondientes? Fundamente su respuesta.
- ¿Son proporcionales los lados correspondientes? Fundamente su respuesta.
- Sobre la base de lo realizado, ¿a qué conclusión llegan?

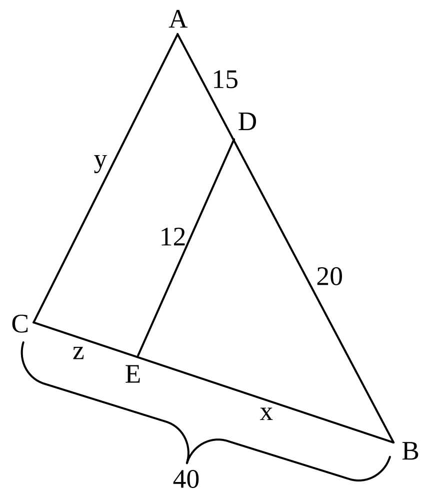
  "Basta que los lados correspondientes de dos triángulos sean proporcionales para que los triángulos sean semejantes".

Enuncie el teorema de semejanza Lado- Lado – Lado (LLL).

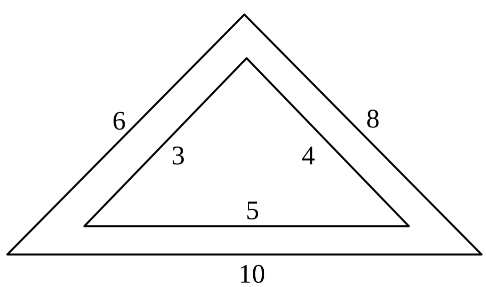
C. Ejercicios

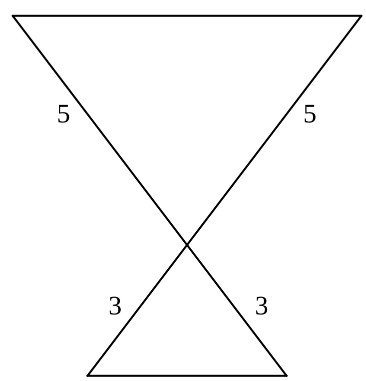
1. En las siguientes figuras, halle el valor de las cantidades desconocidas.





2. En cada uno de los siguientes pares de triángulos, indíquese si los dos triángulos son semejantes o no, si lo son cítese el teorema o la definición que justifica la conclusión.





Resuelva los siguientes problemas:

1. Para hallar la altura de un asta de bandera, un joven cuyos ojos se encuentran a 1.65 metros del suelo coloca una vara de 3 metros de largo clavada en el piso a 15 metros de distancia del asta. Entonces, retrocediendo 2.55 metros, encuentra que puede ver la punta del asta alineada con la punta de la vara. ¿Cuál es la altura del asta?
2. Un muchacho observa que la sombra de un árbol tiene 15.68 metros de largo cuando el de su sombra es de 1.95 metros. Si la altura del muchacho es de 1.73 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Actividad No. 10

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Calculadora.

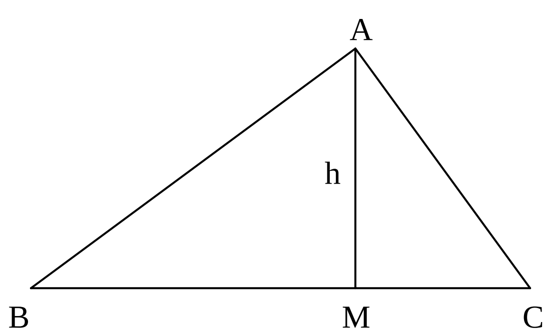
Introducción

En esta actividad abordaremos dos propiedades importantes de los triángulos rectángulos expresadas en los teoremas del cateto y de la altura. Además, lo interpretaremos geométricamente y lo aplicaremos en la resolución de ejercicios. Formación de grupos de cuatro estudiantes.

Desarrollo

A. Semejanza de triángulos rectángulos.

1. Trace un triángulo rectángulo en A.
2. Trace la altura desde el vértice A.



3. ¿Son semejantes los triángulos BMC y CMA? Fundamente su respuesta.
4. ¿Son semejantes los triángulos rectángulos BMC y CMA al triángulo rectángulo BAC? Fundamente su respuesta.
5. Sobre la base de las conclusiones obtenidas formule una proposición geométrica que resuma las actividades anteriores.

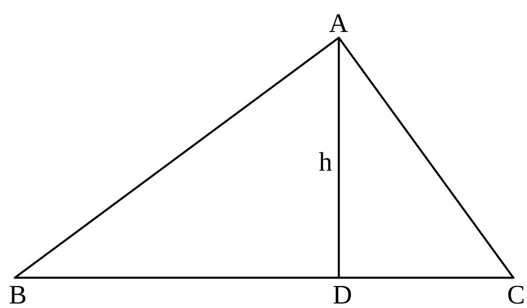
"La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo dado y también mutuamente semejantes".

B. Teorema de la altura.

"La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre las medidas de los segmentos de la hipotenusa"

Orientar a cada grupo de estudiantes a que realicen:

1. Representen geométricamente el teorema de la altura.
2. Obtengan las relaciones algebraicas que se da según el teorema de la altura.



$$\Delta\ ADC \sim \Delta\ ADB$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$$

O también

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{BD}$$

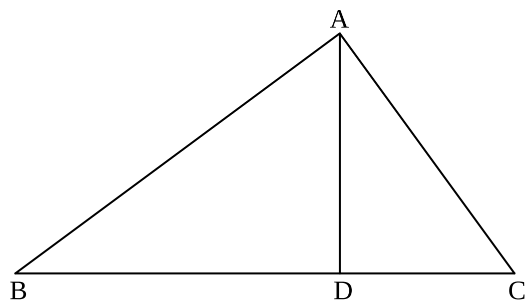
C. Teorema del cateto.

"Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la medida de la hipotenusa y la medida del segmento de la hipotenusa interceptado por la altura y que es adyacente a ese cateto".

Orientar a cada grupo de estudiantes a que realicen:

1. La representación geométrica.

2. Obtengan las relaciones algebraicas que se verifican según el teorema del cateto.



$$\Delta\ BAC \sim \Delta\ ADB; \ \ \Delta\ BAC \sim \Delta\ ADC$$

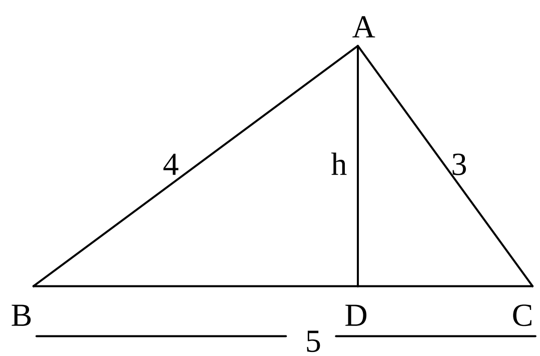
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}; \ \ \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

O también,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}; \ \ \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

D. Ejercicios

Encontrar la altura del triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura.



Actividad No. 11

En esta actividad abordaremos una propiedad característica de los triángulos rectángulos, la cual es muy útil en actividades como la carpintería y la construcción.

Materiales

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Calculadora.

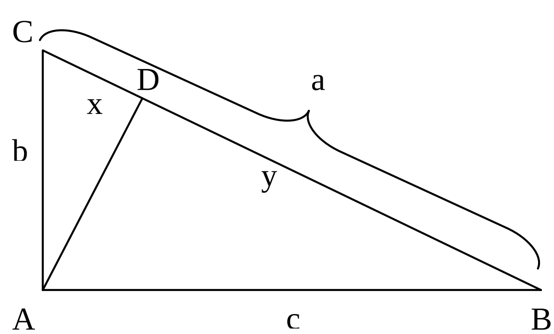
Introducción

Formación de grupos de cuatro estudiantes.

Desarrollo

Orientar a cada grupo de trabajo a que realicen las siguientes actividades:

1. Dibuje un triángulo rectángulo en A. Designe los otros dos vértices por B y C, y los lados opuestos a cada vértice por sus correspondientes letras minúsculas.
2. Trace la altura en A y al pie de la perpendicular represéntelo por D.
3. Represente por x e y los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BD}$.



4. Aplique el teorema del cateto para obtener b y c.

$$b^2 = a \cdot x$$

$$c^2 = a \cdot y$$

5. Sumen ambas igualdades.

$$b^2 + c^2 = a \cdot x + a \cdot y$$

6. Distribuya en el lado derecho de la igualdad

$$b^2 + c^2 = a \cdot (x + y)$$

7. Como x + y = a, se obtiene

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

8. Multiplique

$$b^2 + c^2 = a^2$$

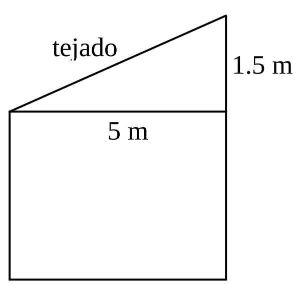
9. Traduzca literalmente la relación obtenida en 8.

Indicar a los (as) estudiantes que el enunciado corresponde al teorema de Pitágoras.

10. Enuncien correctamente el teorema de Pitágoras.

Ejercicios resueltos

11. Supongamos que queremos colocar un tejado inclinado sobre una casa, sabemos que el largo de la habitación sobre el que lo queremos colocar mide 5 metros, y que queremos que la altura máxima en uno de los extremos sea de 1.5 metros, como se indica en la figura. ¿Qué largo tendrá el tejado?

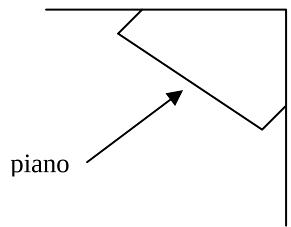


El tejado es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden respectivamente 5 m y 1.5 m, por lo que, su cuadrado será igual a:

$$5^2 + 1.5^2 = 25 + 2.25 = 27.25$$

Entonces, la longitud del tejado en metros es $\sqrt{27.25} \approx 5.22$ m.

12. Se quiere colocar un piano que mide 1.54 m de largo contra una esquina, de tal forma que los dos tramos de pared que queden detrás del piano midan lo mismo; ¿cuánto miden esos tramos?



Si esos tramos miden t, sabemos que $t^2 + t^2 = 1.54^2$, o sea que $2 \cdot t^2 = 2.3716$. De ahí sabemos entonces que $t^2 = 2.3716 \div 2 = 1.1858$. Si extraemos la raíz cuadrada de 1.1858 encontramos la longitud que buscamos: $t = \sqrt{1.1858} \approx 1.09$. Es decir, cada uno de los tramos de pared que quedan detrás del piano mide un metro con 9 centímetros.

En el teorema de Pitágoras partimos de un triángulo rectángulo y encontramos una propiedad acerca de la longitud de sus lados. Ahora enunciaremos el teorema recíproco del teorema de Pitágoras, que también es cierto:

> "Si en un triángulo el cuadrado del lado más grande es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados más pequeños, entonces el triángulo es rectángulo"

Ejemplifiquemos ahora este teorema. Un triángulo tiene lados que miden respectivamente 9 cm, 4.8 cm y 10.2 cm. El lado más grande es el que mide 10.2 cm, y $10.2^2 = 104.04$. Los lados chicos miden 9 y 4.8 cm, y observamos que:

$$9^2 + 4.8^2 = 81 + 23.04 = 104.04$$

Entonces afirmamos que éste es un triángulo rectángulo.

Usted puede verificarlo trazándolo con su regla y su compás.

Le recordamos los pasos para hacerlo:

(a) Trace un segmento que mida 10.2 cm.

(b) Abra el compás de tal modo que la distancia entre las dos puntos sea de 9 cm.

(c) Con la punta del compás en uno de los extremos del segmento trazado, marque un arco.

(d) Ahora ajuste el compás de tal modo que la distancia entre las dos puntas sea de 4.8 cm.

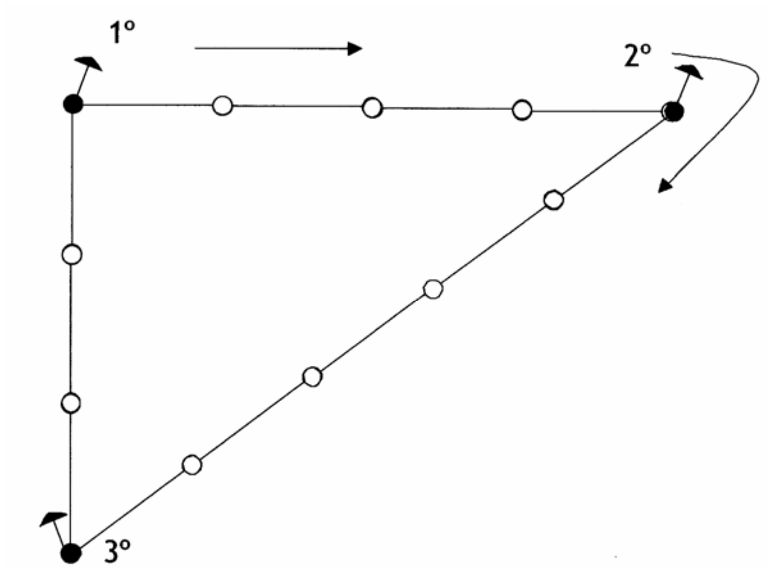
(e) Con la punta del compás en el otro extremo del segmento trazado, marque un arco que se cruce con el primero.

(f) Utilizando la regla, una ambos extremos del segmento con el cruce de los dos arcos.

Ahora usted ha trazado un triángulo cuyos lados miden 10.2 cm, 9.0 cm y 4.8 cm, ¿es recto?

El recíproco del teorema de Pitágoras es una herramienta útil para construir ángulos rectos, cuando no se cuenta con una escuadra o con un transportador. Por ejemplo, algunos albañiles usan el método que se explica a continuación:

En una cuerda se hacen 13 marcas o nudos, todos a la misma distancia unos de otros. Después se clavan al suelo las siguientes marcas, formando un triángulo con la cuerda estirada:



La primera marca y la última juntas; la cuarta marca a la derecha de esas dos y la quinta marca a la derecha de la anterior.

(a) En el método de la cuerda utilizado por algunos albañiles, ¿cuánto miden los lados del triángulo formado? ¿Por qué se forma un ángulo recto? ¿Entre cuáles lados se forma?

(b) Aplique ese método utilizando un cordel fino y verifique que se forma un ángulo recto.

Ejercicios

En cada uno de los siguientes incisos, indique si el triángulo ABC es un triángulo rectángulo o no. En caso de que sí lo sea, indique en qué vértice se forma un ángulo recto y qué lado es la hipotenusa.

	Longitud del lado AB	Longitud del lado BC	Longitud del lado AC
(a)	5.0 cm	16.0 cm	11.0 cm
(b)	14.0 cm	10.5 cm	17.5 cm
(c)	8.0 cm	8.0 cm	8.0 cm
(d)	5.0 cm	4.0 cm	3.0 cm
(e)	6.5 cm	2.9 cm	4.3 cm
(f)	3.0 cm	5.5 cm	5.7 cm
(g)	9.0 cm	10.6 cm	5.6 cm

Actividad No. 12.

Esta está dedicada a evaluar si los (as) alumnos (as) comprendieron el tema de semejanza. Se realizará individualmente.

Mide la altura de un árbol con una regla

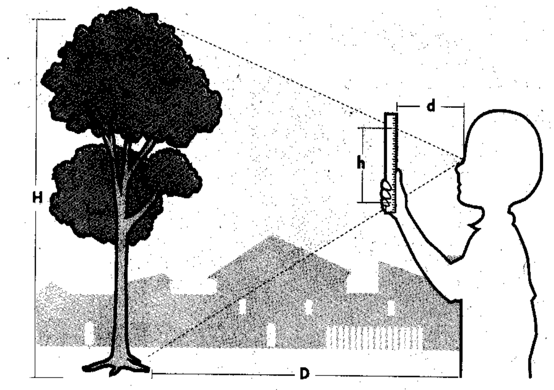
Materiales

1. Regla.
2. Papel.
3. Lápiz.
4. Cinta métrica.
5. Calculadora.

Procedimiento.

1. Seleccione un árbol, no importando el lugar de selección.
2. Colóquese a una cierta distancia del árbol y mídala con la cinta métrica, distancia conocida del objeto y cuya altura H si se quiere medir, en este caso el árbol. Llame D a esa distancia
3. Extienda el brazo mientras sostiene la regla verticalmente a la altura de los ojos. Llame d a la distancia entre la mano y el ojo.
4. Cierre uno de los ojos y con el restante determine a cuantos centímetros de la regla corresponde a la altura del árbol. A esa longitud en la regla la denominamos h.
5. Por semejanza de triángulos se obtiene que $\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$. De esta relación se obtiene que la altura del árbol es H = $h\left(\frac{D}{d}\right)$ ¿Medir la altura de un árbol con una regla?

Ilustración



VII. RECOMENDACIONES

1. Implementar talleres y capacitaciones sobre los nuevos enfoques pedagógicos que se están implementando en los centros de Educación Secundaria.

2. Implementar capacitaciones en el área de Geometría con el propósito de mejorar la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de semejanza.

3. Incrementar la práctica motivadora del alumno y su implicación en el proceso de aprendizaje, desde el punto de vista cognitivo.

4. Seguir relacionando los contenidos de Semejanza con su entorno y la vida diaria para afianzar sus conocimientos.

5. Implementar el trabajo compartido entre docentes del centro donde se ponga en práctica el documento y resolver ejercicios y problemas relativos a situaciones concretas de manera conjunta.

6. Plantear nuevas propuestas de problemas que tomen como punto de partida, el entorno y las necesidades comunitarias.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

- Vizmanos, José. Anzola, Máximo. (2000). **Algoritmo 2000**, **matemáticas**. Ediciones SM. Madrid, España.

- Antúnez, S. (1992). **Del Proyecto Educativo al Aula**. Editorial Graó. Barcelona, España

- MECD. **Reforma de Educación Secundaria** (Marzo, 2004). Enseñanza para la Comprensión. Managua, Nicaragua.

- Folleto: Enseñanza para la Comprensión. Segundo Proyecto Cero, 2004.

- Hacia la construcción de Nuevos Métodos y Estrategias en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua. Abril 1999.

- Presentación. Estrategia de Matemática. Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Managua 2005.

- Clemens, et al. (2000). **Geometría.** Addison Wesley Longman de México, S.A de C.V. México, D.F.

- Hemmerling, Edwin. (1991), **Geometría Elemental.** Editorial Limusa, México, D.F.

- Miyares – Escalona. **Geometría.** Matemática, Segundo Curso. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

- Azcarane – Berubu et al. **Proporcionalidad geométrica.** Matemática 6. Ministerio de Educación y Ciencia. Dirección General de Renovación Pedagógica.

- Martínez Recio, A. **La Enseñanza de la Geometría.** Editorial Síntesis. Madrid, España.

- Selby, Peter. **Geometría y Trigonometría.** Editorial Limusa. México D.F.