UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – LEON

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION Y HUMANIDADES

Departamento de Matemática

# UNIDAD DIDÁCTICA
# LÍMITE Y CONTINUIDAD

TRABAJO MONOGRÁFICO, PRESENTADO POR:

BR. MAURICIO RAMÓN BERRIOS TELLEZ.
BR.ERNESTO JOSÉ GONZÁLEZ VARGAS
BR. MIGUEL ANGEL LÓPEZ PÉREZ

PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MENCIÓN EN MATEMÁTICAS.

TUTOR:

MSC. HÉCTOR BENITO FLORES GUIDO

LEÓN, NOVIEMBRE 2003

# AGRADECIMIENTO

Damos gracias al Señor por la vida que nos ha dado y por todo lo que ha hecho en nosotros para conducirnos hacia uno de nuestros más grandes sueños.

A nuestros padres, quienes han dedicado su amor, sacrificio y todo su trabajo con una lucha inclaudicable para formarnos dignos ante Dios y ante los hombres.

A todos aquellos maestros que de niños nos enseñaron las primeras letras; a todos los que continuaron formando nuestras mentes y corazones dándonos día a día el pan de la enseñanza.

Nuestro agradecimiento y oraciones estarán inclinados a tres grandes seres: a Dios, a nuestros padres y a ustedes abnegados maestros.

# DEDICATORIA

Dedicamos nuestro trabajo a ti ser supremo dador de vida y de todo lo existente en la tierra y los cielos.

A quienes nos engendraron y han dedicado su vida con el afán de vernos llegar a una de nuestras metas.

A quienes han compartido con nosotros: llantos, pobreza, soledad, tristezas y sonrisas.

A aquellos hombres y mujeres que Dios envió a la tierra para llevarnos el pan de la enseñanza.

# INDICE

# INTRODUCCION

# OBJETIVOS

# PRESENTACION DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

# OBJETIVOS DIDÁCTICOS

# CONTENIDOS

# FUNDAMENTO TEORICO

# ESTRATEGIAS METODÓLOGICAS

# ACTIVIDADES

# SISTEMA DE EVALUACIÓN

# PLANIFICACIÓN

# BIBLIOGRAFÍA

# ANEXOS

# AGRADECIMIENTO

# DEDICATORIA

# INDICE

# INTRODUCCIÓN

La preparación de profesionales en todos los campos, no es tarea fácil, para esto se persiguen objetivos tales como formar en ellos eficientes técnicas, para desarrollar bien la tarea de cada día, empleando con eficiencia la base científica de las matemáticas, aplicadas a su actividad profesional. En aras de contribuir a la formación de una visión clara en el campo educativo, hemos planteado con esta idea la presente **Unidad Didáctica sobre Límite y Continuidad,** orientada al Año Común de la UNAN – LEÓN. Confiamos conseguir que el lector asimile la base científica y pedagógica del contenido, el cual está basado en experimentaciones prácticas asociadas a la vida real.

El establecimiento de criterios, la condicionalidad de objetivos y la conceptualización de contenidos dan a esta obra un matiz práctico y transformador del proceso enseñanza aprendizaje. La Unidad Didáctica está diseñada para que el maestro funcione como un facilitador o bien más que "**enseñar**", "**ayuda a los alumnos a aprender**", siendo un facilitador, motiva a los estudiantes a aprender y a desarrollar su pensamiento creativo en la aplicación de límites y continuidad de una función en la asignatura de matemáticas.

Muchos profesores justifican el aprendizaje de los contenidos del currículum escolar, atribuyéndole una cualidad de estímulo en la capacidad de razonamiento, de las facultades para el pensamiento lógico, de la visión especial, etc. Sin embargo, tratamos de hacer conciencia que ésta no es la razón principal que justifica la enseñanza de las matemáticas, puesto que las demás asignaturas también desarrollan de una u otra forma los mencionados aspectos. Una razón importante que avala el aprendizaje de la Unidad de Límites y Continuidad es su trascendencia en otras disciplinas como la física, la medicina, la gestión empresarial, la informática, etc.

En este trabajo monográfico se plantea fortalecer el contenido que se desarrolla en el Año Común como propuestas de mejora en los planteamientos de ejercicios sobre límites y continuidad así mismo las actividades prácticas o trabajos grupales, estarán dirigidos a fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la resolución de los ejercicios, esto como consecuencia conducirá al docente hacer uso de las metodologías activas de forma eficiente, logrando los objetivos planteados e implementar el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como un instrumento pedagógicos en planteamientos didácticos del aprendizaje de Límites y Continuidad en el Año Común de la UNAN - León.

En el desarrollo de la unidad didáctica, se plantean distintas acciones didácticas, pero fundamentalmente el trabajo en pequeños grupos, el que consiste de forma específica en incorporar los conocimientos en actividades promoviendo de esta manera los beneficios cognitivos e incrementando la calidad de los aprendizajes tales como: Desarrollo de habilidades sociales y capacidades de cada alumno; también se tendrán tareas a cumplir como profesor de aula, estableciendo condiciones apropiadas para que mediante el trabajo en grupo los alumnos asimilen el o los  conocimientos y sean cada vez más autónomos y competentes para aprender y como en todo grupo clase la heterogeneidad permite ventajas respecto a la producción de estrategias que se vuelven más variadas y de distinta complejidad, venciendo así, lo que se dice que no todos tendrán la oportunidad de participar u opinar con sus ideas individuales.

# OBJETIVOS

**General:**

Contribuir a la formación de una visión clara en el campo educativo mediante una propuesta de Unidad Didáctica para apoyar la enseñanza del bloque límite y continuidad del Año Común de la UNAN – León.

**Específicos:**

1. Proponer una secuenciación y actividades a desarrollarse en clase mediante el uso de metodologías activa.

2. Fortalecer el contenido que se desarrolla en el Año Común como propuestas de mejora en los planteamientos de ejercicios sobre límites y continuidad.

3. Implementar el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como un instrumento pedagógico en planteamientos didácticos del aprendizaje de límites y continuidad en el Año Común de la UNAN - León.

# PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Para facilitar el trabajo diario de los docentes que laboran para el Año Común de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León (UNAN-León) nos proponemos presentar una Unidad Didáctica que permita interactuar la teoría con la practica, con esta idea presentamos el siguiente trabajo que tiene como único propósito facilitar a los docentes una guía que les permita mejorar el proceso Enseñanza – Aprendizaje al momento de impartir los temas de Limite y Continuidad, mediante la implementación de una metodología activa – participativa donde se haga uso de los recursos y medios didácticos disponibles; teniendo en cuenta los conocimientos previos, las capacidades y habilidades adquiridas por los estudiantes para la construcción de los nuevos conocimientos, analizando su importancia, su relación y aplicación de teoremas a la resolución de ejercicios prácticos a situaciones reales

El estudio de los temas de Limite y Continuidad es de suma importancia, para la enseñanza del cálculo, ya que es fundamental en la aplicación del mismo en otras carreras que se imparten en las diferentes Facultades de la (UNAN-León), a su vez su interés radica en las distintas ciencias de desarrollo científico.

Mediante el estudio de estos temas pretendemos desarrollar en los estudiantes, habilidades de razonamiento lógico, comprensión, generalización, deducción, inducción, etc., así como destrezas en el uso de calculadoras para las distintas resoluciones y graficado que aparecen en el desarrollo de la unidad. Además, fomentaremos el trabajo cooperativo, la solidaridad, el compañerismo y estética.

Los temas a estudiar están ubicado en el Segundo bloque de Fundamentos de Matemática impartido en el segundo semestre lectivo de un año escolar, el cual se encuentra relacionados con otras unidades del mismo fundamento, tales como: Álgebra y Funciones y sus Gráficas, contenidos que le permitirán a los estudiantes comprender y memorizar los nuevos conocimientos.

Los temas de Limite y Continuidad se les imparte a estudiantes que entran por primera vez a la educación superior y cuyas edades tienen un promedio aproximado de 18 años, y está previsto a desarrollarse en 11 horas clase correspondiendo cada hora clase a cien minutos. Además de las 11 actividades propuestas en la forma de desarrollarse, se presenta también una planificación destinada a la temporalización por actividad, adecuando estas once actividades a la forma posible de cómo pueden enfrentarse cada día en aula mediante su aplicación en su extensión extramuros y actividades de evaluación.

Los conocimientos previos que los estudiantes poseen para la adquisición de los nuevos conocimientos, son:

- Operaciones algebraicas.
- Productos Notables.
- Factorización.
- Ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Funciones de variable real.
- Gráfica de funciones
- Racionalizar
- Operaciones con fracciones algebraicas
- Valor absoluto de un número real
- Desigualdades

Para el desarrollo de esta Unidad Didácticas contamos con los siguientes materiales y recursos didácticos:

- Texto auxiliares.
- Documento de Fundamento Matemática del Año Común.
- Hojas de ejercicios.
- Marcadores permanentes y acrílicos.
- Papelógrafo.
- Papel bond blanco.
- Papel milimetrado.
- Regla graduada.
- Escuadra.

- Calculadora.
- Borrador.
- Lápices de colores y de grafito.

La responsabilidad de la preparación de los materiales y recursos necesarios para el desarrollo de esta unidad didáctica son los docentes que imparten El componente de Fundamento de Matemáticas en el año Común, no dejando fuera la creatividad de los estudiantes lo que es una razón importante que avala el aprendizaje de las matemáticas con énfasis en la unidad de Límites y continuidad es su trascendencia en otras disciplinas como la física, la medicina, la gestión empresarial, la informática, etc.

Justificando así el aprendizaje de los contenidos y atribuyéndole una cualidad de estímulo de la capacidad de razonamiento, de las facultades para el pensamiento lógico, de la visión especial, etc.

Hemos hecho énfasis que la matemática es un instrumento fundamental para presentar la información bajo formas diversas, que van desde la utilización de números y letras hasta el uso de gráficos. Pero es también necesario que a la hora de hacer matemáticas hacer conciencia de la utilidad de su estudio, existe también el placer por trabajar sin pensar en objetivos terminales.

Además nos proponemos con el presente trabajo, proveer a los docentes de matemática de nuevas estrategias de enseñanza del contenido de Limite y Continuidad que conduzcan a los estudiantes a apropiarse de los nuevos contenidos de una manera más efectiva.

Es por tanto, que estos contenidos que presenta esta Unidad Didáctica están orientados de acuerdo a como se imparten las actividades, lo mismo que en el tiempo establecido para ellos en Año Común, al igual que su planificación.

Presentaremos de forma inicial los objetivos didácticos que se tomarán como referencia para su mejora en la impartición de cada actividad a tratar.

# OBJETIVOS DIDÁCTICOS

## TABLA DE OBJETIVOS DIDACTICOS

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| Enunciar el concepto de Limite de forma intuitiva.<br>Definir Limite de una función.<br>Enunciar los Teoremas sobre Límite de una función<br>Explicar cada uno de los teoremas sobre límite.<br>Explicar la unicidad del límite.<br>Definir el concepto infinito.<br>Explicar el concepto de límite al infinito.<br>Explicar el concepto de límites infinitos.<br>Definir limites infinitos y limites al infinito.<br>Definir el concepto de limites unilaterales.<br>Explicar el concepto de límites unilaterales.<br>enunciar los teoremas sobre limites infinitos y al infinito.<br>Explicar el limite del producto y el cociente de dos funciones.<br>Definir la continuidad en un número.<br>Enunciar los teoremas sobre continuidad.<br>Definir la continuidad en un intervalo. | Interpretar geométricamente el concepto intuitivos de limite.<br>Interpretar mediante tablas el concepto intuitivo de limite.<br>Construir de manera gráfica el concepto intuitivo de limite.<br>Interpretar los teoremas sobre límite y su relación con el conjunto de los números reales.<br>Aplicar los teoremas de limite en aplicaciones sencillas en la resolución de ejercicios.<br>Interpretar geométricamente el concepto de figuras semejantes.<br>Aplicar la definición de limite de una función a ejercicios concretos.<br>Aplicar los teoremas de limite en la resolución de ejercicios sencillos.<br>Representar gráfica de limite al infinito y limites infinitos.<br>Aplicar los teoremas de limites infinitos y al infinito en la resolución de ejercicios.<br>Interpretar de manera gráfica los ejercicios de limites al infinito y en infinitos.<br>Resolver ejercicios de continuidad de una función en un mismo número. | Valorar la importancia del limite y la continuidad de funciones en su formación profesional.<br>Fomentar en los estudiantes la participación activa desde un enfoque constructivista – humanista para obtener una mejor interacción alumnos – maestro – alumnos.<br>Fomenta la actitud positiva hacia el aprendizaje.<br>Colaborar con sus compañeros en la comprensión de las distintas situaciones prácticas que se les presenten.<br>Responsabilizarse en el trabajo grupal e independiente que le ayuden a consolidar sus conocimientos acerca de la Línea Recta. |

## TABLA DE OBJETIVOS DIDÁCTICOS
**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| | 1. Resolver ejercicios sobre continuidad de una función en un intervalo.<br>2. Resolver ejercicios y problemas de manera general sin especificar la definición o el teorema que se está utilizando.<br>3. Aplicar de manera intuitiva el aprendizaje basado en problemas en la resolución de ejercicios y problemas.<br>4. Aplicar el aprendizaje basado en problemas mediante la solución de problemas prácticos.<br>5. Desarrollar habilidades de razonamiento lógico en la interpretación y resolución de ejercicios y problemas de límite y continuidad. | |

# CONTENIDOS DIDÁCTICOS

## TABLA DE CONTENIDOS

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 1. Límite de funciones.<br>1.1. Concepto de Límite.<br>1.2. Notación de limite de una función.<br>1.3. Definición de limite de una función.<br>1.4. Unicidad del limite de una función.<br>1.5. Teoremas de limites de una función.<br>1.6. Definición de limite al infinito y limite infinito.<br>1.7. Teorema de limite al infinito y limite infinito.<br>1.8. Definición de limites unilaterales.<br>1.9. Otros teoremas sobre limites al infinito e infinitos.<br>2. Teoremas generales sobre limite.<br>2.1. Continuidad de una función en un número.<br>2.2. Teoremas sobre Continuidad.<br>2.3. Definición de continuidad en un Intervalo. | 1. Utilización correcta de los instrumentos geométricos en el trazado de las gráficas de limites y continuidad en el plano cartesiano.<br>2. Interpretación correcta del concepto de limite de una función de variable real.<br>3. Interpretación correcta de los teoremas de limite y continuidad.<br>4. Aplicación de los teoremas de limite y continuidad en la resolución de ejercicios y problemas de fácil interpretación relativos a situaciones concretas.<br>5. Interpretación geométrica de los teoremas de limite y continuidad en funciones de variable real.<br>6. Aplicación de teorema de limites al infinito y en infinito en la resolución de problemas relativos a situaciones concretas.<br>7. Interpretación correcta de los teoremas continuidad en un número y en un intervalo. | 1. Valore la importancia del estudio del Limite y la continuidad en ejercicios y problemas.<br>2. Disposición en la realización de trabajos asignados: individuales, grupales y extra clase.<br>3. Fomentar la toma de decisiones, los juicios y la información lógica y fundamentada.<br>4. Cooperación de todos los integrantes en un trabajo integrado y no dividido en partes.<br>5. Orden, estética, claridad y cientificidad en la presentación de los trabajos asignados.<br>6. Muestre claridad, orden, estética, en la exposición y defensa de las conclusiones obtenidas en los trabajos asignados.<br>7. Muestre hábitos de cortesía, solidaridad y responsabilidad en el trato con sus compañeros.<br>8. Mantenga el diálogo alumno – maestro – alumno. |

# TABLA DE CONTENIDOS

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| | 8. Aplicación de la definición de limite de una función.<br>9. Aplicación correcta de la definición de continuidad.<br>10. Aplicación correcta de los teoremas de continuidad en la resolución de ejercicios.<br>11. Graficado correcto de límites de funciones en sus distintas aplicaciones. | |

# FUNDAMENTO TEÓRICO

## ¿QUÉ SON LOS MÉTODOS ACTIVOS?

El titubeo procede ante todo del sentido mismo de la palabra "activo": se es activo de muchas maneras. El primer sentido que se le atribuyó ha sido el de una actividad material externa; y se bautizan como métodos activos todos aquellos que acompañan las labores escolares de realizaciones concretas: Laboratorios prácticos, elaboración de gráficos, dibujos, modelado, recortado, realizaciones manuales como la construcción en cartón o de un mapa geográfico en relieve, cultivo de las plantas, etc. Y puede darse por seguro que toda realización concreta o manual puede motivar excelentemente el trabajo escolar. Se ha notado que el cuidado de la forma. Y aún el de la ortografía puede ser más fácilmente dado cuando se propone a los alumnos imprimir el texto redactado por ellos mismo o canjearlos por correspondencia con otras escuelas.

Por otra parte, toda realización práctica que acompañe al esfuerzo de conceptualización puede favorecer la comprensión de las nociones abstractas. Las construcciones matemáticas de todo orden hechas por los propios alumnos constituyen una especie de experimento del alumno en aquella materia. Y, de acuerdo con ello, esta actividad operatoria puede facilitar la comprensión de los alumnos cuyo espíritu no está bastante maduro para comprender sin dificultades la noción abstracta. Ella puede determinarla y hacerla eficiente para todos.

## EL CONSTRUCTIVISMO Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

El constructivismo es la idea que mantiene que el alumno, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, su conocimiento es una construcción significativa hecha por el mismo.

La didáctica constructivista se basa en el enseñar a pensar y actuar sobre los contenidos significativos y que el conocimiento es construido activamente por los participantes en el proceso educativo. No es pasivamente por ellos.

Para que el conocimiento sea construido se requiere el desarrollo de experiencias acordes con las características y necesidades del sujeto; se considera también, que el conocimiento es construido socialmente por lo que el estudiante debe compartir el conocimiento con otros o manifestar sus ideas, inquietudes ponerlas en común de tal manera que en ese intercambio las pueda afirmar, retroalimentar o bien cambiar, de parecer.

De estos grandes hitos, de la didáctica moderna surgieron los métodos de tópicos, cuestionario, estudio dirigido, Procedimientos socializados y otros de menor sistematización y popularidad. Junto con todos los mencionados, se continuó usando en sectores de mayor conservadurismo de Europa y América, los mencionados anteriormente de conferencias y el libro- texto.

Los métodos activos para la secundaria y nivel superior son propiamente métodos didácticos, sin intervención para nada en la organización escolar. Sólo sirven para enseñar y para aprender.

**Su vinculación a los sistemas pedagógicos modernos**

La metodología activa ha partido de un movimiento de carácter internacional que se denomina nueva educación, antes Educación Progresiva que se encuentra difundido y organizado unitariamente en los países de habla inglesa, francesa y española.

Así, la nueva educación esta vinculada a los movimientos pedagógicos conocidos por determinismo científico, experimentalismo y educación socializada, formas de pedagogía científica siendo estos el carácter de los métodos activos.

**Técnicas y prácticas popularizadas por los métodos activos**

Las de mayor importancia y difusión y que se pueden emplear en cualquier forma de enseñanza, sea esta empírica o técnica sistematizada y con unidad, o sin organización unitaria e integral son:

- La enseñanza bibliográfica.
- El trabajo escolar desarrollado en laboratorios.
- La Dirección en el estudio.
- La enseñanza objetiva (audio – visual).
- La libertad en el trabajo escolar.
- Trabajos por equipo.
- Los procedimientos socializados.

Han reducido la importancia y difusión de la exposición oral del maestro, llevándola a límites mínimos y estas a su vez han intensificado la participación del alumno en dar respuestas, expresar opiniones, en conversar en general, sobre las materias que se estudian, es por eso que se hace necesario integrar los elementos de la enseñan moderna; como son. Asignación de tareas, estudio dirigido y procedimientos socializados.

**Tipología de las clases**

En el análisis del proceso de enseñanza nos referimos a la apropiación de conocimiento, al desarrollo de capacidades y habilidades, a la aplicación de conocimientos, y a la evaluación de conocimientos, capacidades y habilidades, como eslabones del proceso de enseñanza. Estos "eslabones" actúan como funciones didácticas regulares del proceso de enseñanza en su conjunto y no deben interpretarse como una sucesión esquemática de pasos.

Actualmente hay unanimidad de criterios entre los didactas en cuanto a "que no puede haber un conjunto fijo de pasos formales" que se repitan constantemente en un mismo orden. No obstante, el proceso de enseñanza debe analizarse desde el punto de vista de etapas principales, eslabones esenciales, elementos o funciones didácticas, de carácter general y necesario (todas estas denominaciones se encuentran en la literatura pedagógica). En toda enseñanza exitosa considerada a lo largo de un período de tiempo prolongado deben recorrerse, de hecho, todas sus etapas esenciales.

La tarea del maestro consiste, por tanto, en planificar y articular didácticamente todas las unidades o partes del programa de tal modo que tenga lugar un "proceso de enseñanza completo", en el cual todos los eslabones o funciones didácticas se manifiestan en una relación equilibrada; entendiéndose, entonces por tipología de la clase, a la teoría de la clasificación de las clases de acuerdo con su función didáctica principal.

Es así que durante el proceso del planteamiento de la enseñanza, la tipología de la clase facilita al maestro las nociones de reflexión acerca de los puntos más importantes de su clase. Cuando el maestro prepara una unidad extensa, en ningún caso debe limitarse a "distribuir" la materia en las clases disponibles. Mas bien debe reflexionar cuidadosamente acerca de la estructuración didáctica de la unidad. Al hacerlo, el maestro determina las tareas didácticas principales que han de caracterizar a cada clase.

**Factores que determinan la estructura de la clase**

Objetivo de la clase: Por ejemplo, las clases en las que se aspira lograr un efecto emocional elevado requieren una motivación adecuada las clases que han de prestar una contribución esencial a la formación de una concepción científica del mundo han de estructurarse siempre que sea posible de modo que los alumnos no se limiten a adquirir conocimientos sino que, además, tengan oportunidad de aplicarlos.

Contenido de clases: Si se trata de un asunto que sea relativamente conocido por los alumnos a través de sus propias experiencias (por lo menos en cuanto al aspecto externo del fenómeno) el maestro puede limitarse a una breve introducción en forma del diálogo.

Tarea didáctica principal: En las clases que tienen como tarea didáctica principal la aplicación de conocimientos, se recomienda que antes de la aplicación se precisen los conocimientos necesarios. En las clases destinadas principalmente a la sistematización de conocimientos deben señalarse al principio de las mismas las operaciones mentales necesarias para ello.

Métodos de enseñanza: Las clases en las cuales el método predominante es una larga fase de trabajo independiente de los alumnos deben estructurarse de modo tal que al principio de las mismas se establezcan con precisión las tareas de cada alumno o grupo de alumnos y que en la última parte de la clase quede tiempo suficiente para la valoración de los trabajos y el procesamiento de los resultados obtenidos.

**Aprendizaje Basado en Problemas**

Es un enfoque educativo orientado al aprendizaje y a la instrucción en la que los alumnos abordan problemas reales en grupos pequeños bajo la supervisión del profesor, esta técnica esta basada en la elaboración de módulos de trabajo existiendo en ellos una relación interdisciplinaria. Esta técnica es ineficiente cuando el alumno no tiene unos conocimientos previos bien definido de lo que pretende estudiare.

Esto permitirá fomentar el aprendizaje mediante la adquisición de conocimientos, valores, actitudes y habilidades en base a problemas reales basándose principalmente en el entorno, lo que facilitará el aprendizaje por cuenta propia; aumentando además su capacidad de análisis y síntesis lo que le permitirá la resolución de problemas.

En síntesis es un enfoque innovador y desafiante ya que será una nueva forma de usar los materiales educativos y la habilidad didácticas del profesor de forma directiva.

**Pasos para la Aplicación del ABP**

1. Aclarar los términos y conceptos del problema.
2. Definir el problema.
3. Analizar el problema, en este paso se utilizan los conocimientos previos para brindar mayores explicaciones en lo posible.
4. Acomodar las explicaciones propuestas.
5. Se construyen objetivos de aprendizaje o didácticos.
6. Estudio individual mediante diversos recursos.
7. Reporta informe final al grupo.

## LIMITE Y CONTINUIDAD

Dos de los conceptos más importante en el estudio del cálculo y que constituyen la base de más relevancia y que por sus variadas aplicaciones son: las nociones de función y límite de una función, las que serán tratadas específicamente si los valores de f(x) de una función **f** tienden a un número fijo **L,** cuando *x tiende* a un número **a**.

### Conceptualizando Límite

Además de la noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra en la geometría elemental, al establecer o deducir la fórmula que da el área del círculo. Se considera además el área de un polígono regular inscrito con un número *n* cualquiera de lados, se supone después, que *n* crece infinitamente, entonces el área variable tiende así a un límite, y este límite se define como el área del círculo. En este caso, la variable *v* (área), aumenta indefinidamente y la diferencia *a – b;* siendo *a* el área del círculo que va disminuyendo hasta que llega a ser menor que cualquier número positivo *b* escogido de antemano sin importar lo pequeño que este se haya elegido.

### Noción intuitiva de límite

La idea o noción de que una función f(x) tiende a un número **L**, cuando x tiende al numero ***a*** se define, en general, de la siguiente forma.

Si f(x) puede aproximarse arbitrariamente a un número finito **L** , tomando *x* un valor grande pero distinto de un número *a,* entonces $\underset{x \to a}{Lim}\, f(x) = L$

Conceptualizado y presentado como una noción intuitiva podemos presentar el limite como una sucesión fundamentándolo mediante el siguiente ejemplo.

Si x toma la sucesión infinita de valores,

$$2 + 1,\ 2 + \tfrac{1}{2},\ 2 + \tfrac{1}{4},\ \ldots,\ 2 + \frac{1}{2^n}$$

es evidente entonces, que x→ 2 al crecer *n* es decir, lim x = 2.

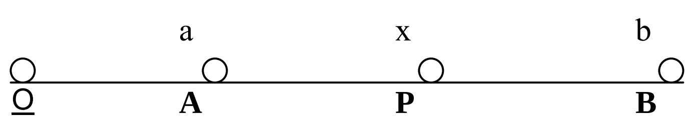
Para mayor claridad a lo anterior afirmado, en nuestro trabajo a desarrollar lo presentaremos como el límite de una función cuando *x* tienda a un número. Se usará además la notación x → $a^-$ para denotar que x tiende a a por la izquierda; y x → $a^+$ para expresar que el límite tiende a *a* por la derecha. De este modo los limites unilaterales $\underset{x \to a}{Lim} f(x) = L$, tiene como valor común L.

Se dice entonces que $\underset{x \to a-}{Lim} f(x) = \underset{x \to a+}{Lim} f(x) = \mathrm{L}$, se concluye que el lím x → a de f(x) existe y se escribe $\underset{x \to a+}{Lim} f(x) = \mathrm{L}$.

### Definición de límite de una función

### Variación continua

Se dice que una variable *a* varía de una manera continua en un intervalo [ a , b ] cuando *x* aumenta desde el valor *a* hasta el valor *b* de tal manera que toma todos los valores intermedios entre a y b en el orden de sus magnitudes; o cuando x disminuye desde x = b hasta x = a tomando sucesivamente todos los valores intermedios.




### Función

Una función *f(x)* de un conjunto *x* a un conjunto *y*, es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto *x* un único elemento del conjunto *y*.

### Dominio

Es el conjunto de todos los valores de x.

### Ámbito o contradominio

Es el conjunto de todos los valores resultantes de x.

**Gráfica de una función**

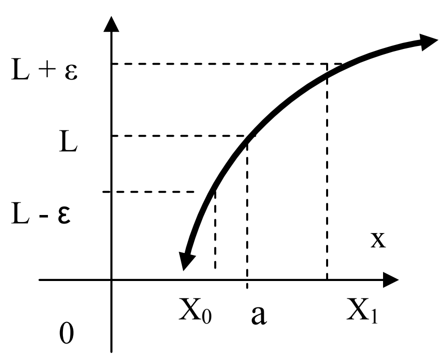
Es el conjunto de todos los puntos ( x , y ) ubicados en el plano $R^2$ para el cual (x , y ) es una pareja ordenada de f.

**Definición de Límite**

Si una función puede aproximarse arbitrariamente a un número finito L, tomando a x suficientemente cercano, pero distinto de un número a, tanto por el lado izquierdo como por el derecho de a, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$, significando que para todo ε > 0 existe una δ > 0 tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Continuando con el objeto de introducir la noción matemática asociada con los límites, y desarrollar una idea intuitiva de los límites desde un punto de vista geométrico, podemos presentar el siguiente gráfico:



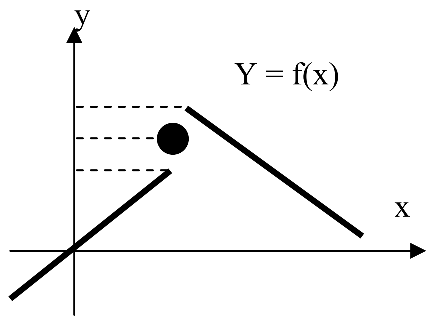

Dada una función, analizada en un intervalo $X_0$ hasta $X_1$, se afirma que el limite de la función depende del Valor **L** al cual tiende.

**LIMITES LATERALES**

- Si el valor de f(x) tiende al número $L_1$ cuando x tiende a *a* por el lado derecho, se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$

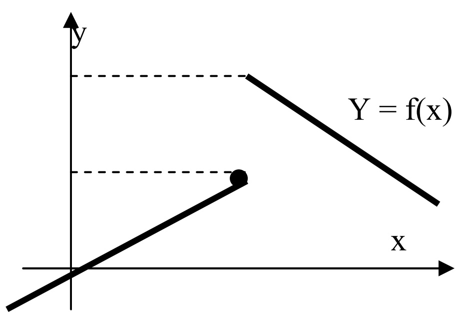
- Si el valor de f(x) tiende al numero $L_2$ cuando x tiende a $x_0$ por el lado izquierdo, se escribe $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

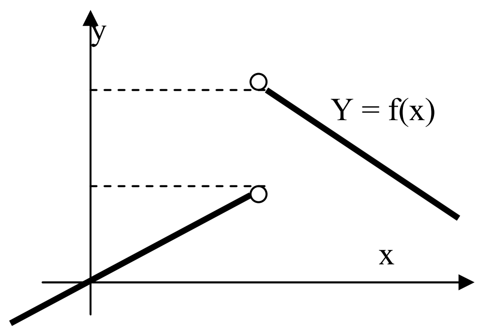
Se representan geométricamente, mediante la gráfica siguiente y se lee, el límite de f(x) cuando x tiende a $x_0$ por la, izquierda o por la derecha.



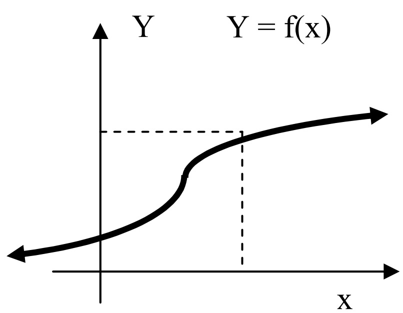

- Si el límite por el lado izquierdo es el mismo que el límite por el lado derecho, es decir,

$\lim_{x \to a_0^-} f(x) = \lim_{x \to a_0^+} f(x) = \mathbf{L}$, entonces se escribe $\lim_{x \to a_0} f(x) = \mathbf{L}$




- El límite de una función cuando la variable tiende a un punto no depende del valor de la función en el punto.




Por tanto, si se altera el valor de una función f en x = $x_0$, entonces no se altera

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

**TEOREMAS**

**Teoremas acerca de la forma de calcularlos**

Sean $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ Entonces

i. Límite de una suma es ala suma de los límites.

$$\lim_{x \to a} \left[ f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

ii. El límite de un producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x \to a} f(x) * g(x) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \ L_2$$

iii. El límite de un cociente es el cociente de los límites siempre que el límite del denominador sea diferente de cero.

$$\lim_{x \to a} f(x) / g(x) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) = L_1 / L_2, \quad L_2 \neq 0$$

**Límite de una potencia**

Si el limite de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ , entonces

$$\lim_{x \to a} \left[ f(x) \right]^2 = \lim_{x \to a} f(x) * f(x) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} f(x) = L^2$$

Estableciendo el resultado general

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ y *n* un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} \left[ f(x) \right]^n = L^n$$

### Límite de una función polinomial

Si $f(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1x + C_0$

Es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} = (C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1x + C_0)$$

$$= \lim_{x\to a} C_n x^n + \lim_{x\to a} C_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} C_1 x + \lim_{x\to a} C_0$$

$$= C_na^n + C_{n-1}a^{n-1} + \ldots + C_1a + C_0$$

En otras palabras, para calcular el límite de una función polinomial f cuando x tiende al número real *a*, solo se necesita evaluar la función en *a*,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

### Límite de una raíz

El límite de una raíz *n*-ésima de una función, es la raíz *n*-ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz *n*-ésima real.

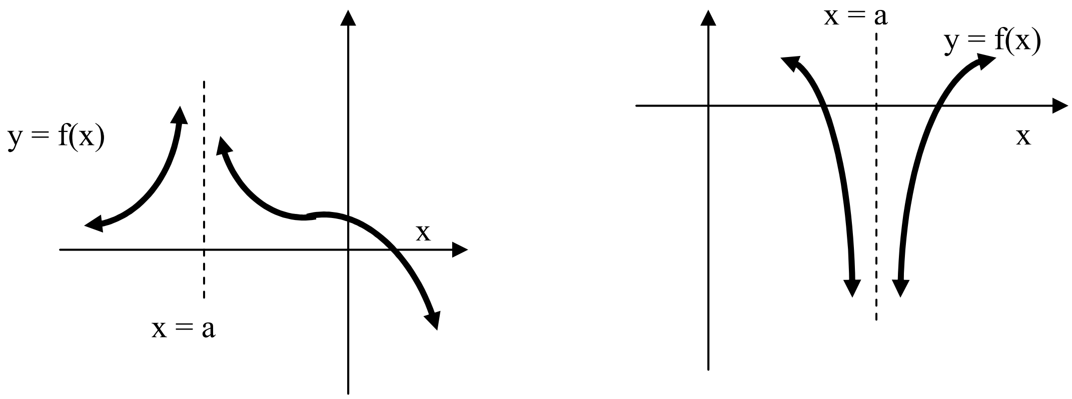
**Teorema**

Sea el $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sea *n* un número positivo. Si L > 0 cuando *n* es cualquier entero positivo, o si L = 0 cuando *n* es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{n}} = L^{\frac{1}{n}}$$

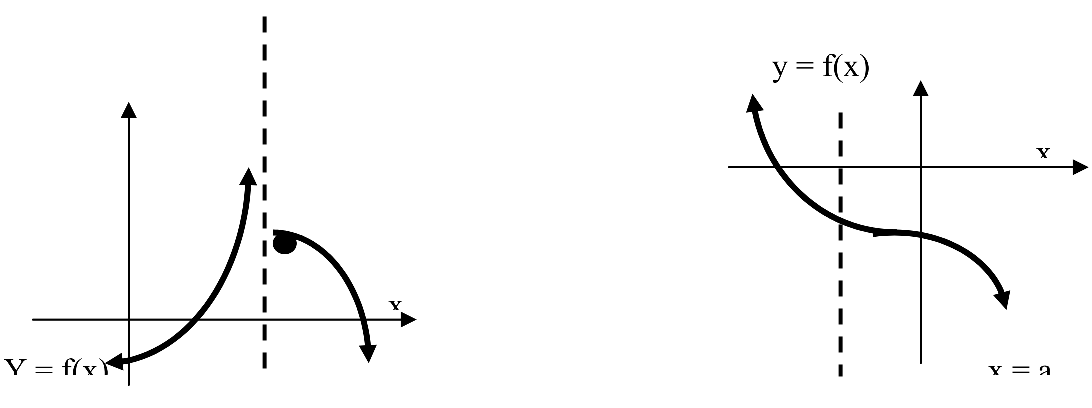
El limite de una función f cuando x tiende al número *a* no existirá siempre que los valores funcionales crezcan o decrezcan son cota cuando x tiene el valor de *a* se denota mediante f(x)→ ∞ , cuando x →a o bien $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

***Los valores funcionales decrecen sin cota cuando x tiende al valor de a***



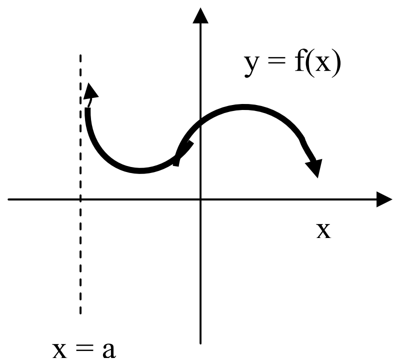

f(x)→ -∞  cuando x →a

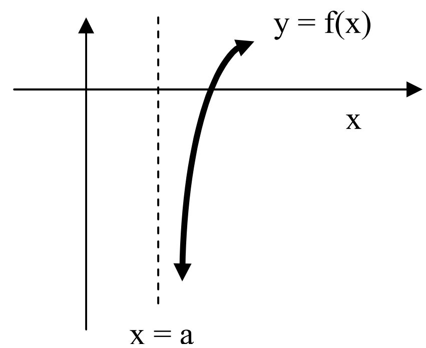
De modo semejante, el comportamiento no acotado de una función cuando x tiende al valor *a* por un lado (asíntotas verticales).




lim f(x) = ∞
x → a$^-$

lim f(x) = - ∞
x → a$^-$




$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Generalmente, cualquier límite representado por las gráficas anteriores y sus respectivas ecuaciones es un límite infinito, entonces la recta x = a es una asíntota vertical de la gráfica de f.

**Teorema**

i. Si *n* es un entero positivo par, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

ii. Si *n* es un entero positivo impar, entonces

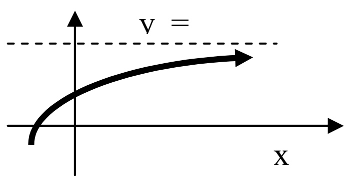
$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

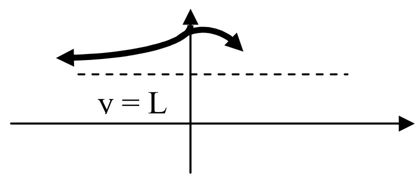
Para funciones racionales, las asíntotas verticales pueden encontrarse mediante simple inspección, suponiendo que f(x) = P(x) / Q(x), en donde P y Q son funciones polinomiales. Si Q(a) = 0 y P(a) ? 0, entonces x = a es una asíntota vertical de la gráfica de f.

## Límites al infinito

Una función f podría aproximarse a un valor constante L al crecer o decrecer sin cota la variable independiente x. Se expresa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ o bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

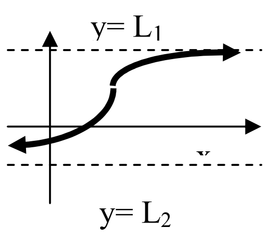
Para denotar un limite al infinito, se muestran los comportamiento de una función f cuando x se hace grande en valor absoluto.

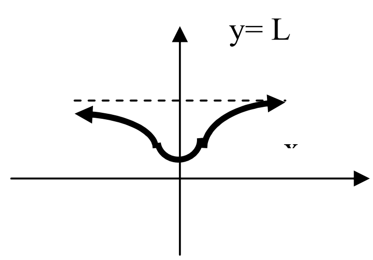



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$



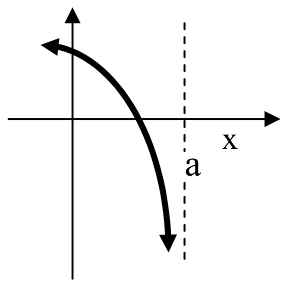

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_1$
ii. $\lim f(x) = L_2$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$
ii. $\lim f(x) = L$

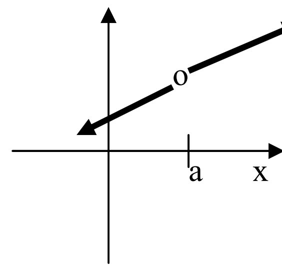
Si $f(x) \to L$ ya sea cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$ entonces se dice que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f, deduciéndose de las figuras anteriores que la función tiene dos asíntotas horizontales $y = L_1$ y $y = L_2$.

## CONTININUIDAD

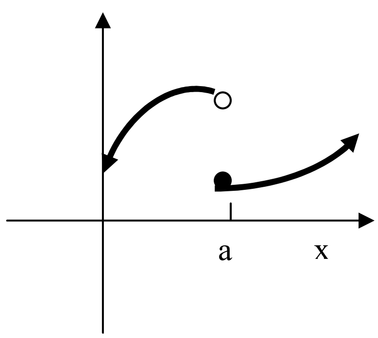
Una función continua se describe a menudo como aquellas cuya gráfica puede dibujarse sin despegar el lápiz del papel, estas se ilustran en algunos ejemplos intuitivos de gráficas de funciones que no son continuas, o sea discontinuas, en un número *a*.



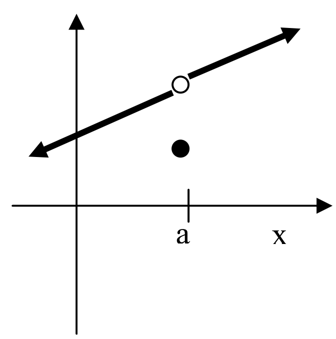

lim f(x) no existe
$x \to a$
y f(a) no está definida




lim f(x) existe
$x \to a$
Pero f(a) no está definida




lim f(x) no existe
$x \to a$
pero f(a) está definida




lim f(x) existe
$x \to a$
f(a) está definida, pero lim f(x) ≠ f(a)

### Continuidad en un número a

Se dice que una función f es continua en un número a si:

i. f(a) está definida
ii. lim f(x) existe
$x \to a$
iii. lim f(x) = f(a)
$x \to a$

### Continuidad en un intervalo

Una función f es continua en un intervalo abierto ( a , b ) si lo es en todo el número del intervalo.

Una función f es continua en un intervalo cerrado [ a , b ] si es continua en ( a , b ), y además $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Las extensiones de estos conceptos a intervalos como ( a , ∞ ), ( - ∞ , b ), ( -∞ , ∞ ), [ a , b), ( a , b], ( - ∞ , b ], [ a , ∞ ) se efectúan de la manera esperada.

Con frecuencia se le da el nombre especial de discontinuidad de una función, en los siguientes casos.

- Si x = a es una asíntota vertical de la grafica de Y = f(x), entonces f tiene una discontinuidad infinita en *a*.
- Si $\underset{x \to a^-}{Lim} f(x) = L1$ y $\underset{x \to a^+}{Lim} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, Entonces f tiene una discontinuidad final o una discontinuidad de salto en ***a*.**
- Si $\underset{x \to a}{Lim} f(x)$ existe, pero f no esta definida en ***a*,** o bien $f(a) \neq \underset{x \to a}{Lim} f(x)$ entonces f tiene una discontinuidad eliminable en ***a***.

# ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

En el desarrollo de la unidad didáctica, utilizaremos distintas acciones didácticas, pero fundamentalmente el trabajo en pequeños grupos, el que consiste de forma específica en incorporar los conocimientos en actividades promoviendo de esta manera los beneficios cognitivos e incrementando la calidad de los aprendizajes tales como: Desarrollo de habilidades sociales y capacidades de cada alumno; también se tendrán tareas a cumplir como profesor de aula, estableciendo condiciones apropiadas para que mediante el trabajo en grupo los alumnos asimilen el o los conocimientos y sean cada vez más autónomos y competentes para aprender y como en todo grupo clase la heterogeneidad permite ventajas respecto a la producción de estrategias que se vuelven más variadas y de distinta complejidad, venciendo así, lo que se dice que no todos tendrán la oportunidad de participar u opinar con sus ideas individuales.

Es así que la estrategia de aprendizaje cooperativo, mediante la enseñanza recíproca es la que nos permite distribuir el esfuerzo cognitivo que supone una tarea compleja, centrándonos solamente en una de las operaciones que la componen para conseguir así una mayor conciencia de cada paso en la mejora educativa. Esta metodología se trata de una técnica que la utilizaremos para la compresión de textos y resolución de problemas; para ejecutar esta técnica utilizaremos los siguientes pasos como una forma de dirigirse a los estudiantes:

a. Selección y composición de los grupos.
b. Reparto de las tareas a realizar.
c. Tiempo de aprendizaje de la tarea.
d. Cambios en las funciones.
e. Evaluación

En este tipo de estrategia, la forma de agrupar a los estudiantes, los recursos y materiales didácticos a utilizar, son con el objetivo de conseguir una buena actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje (motivación, atención, interés, etc.) de los nuevos contenidos, y un buen aprovechamiento del mismo (comprensión, retención, transferencia, etc.)

Para la aplicación de estas acciones didácticas que llevaremos a cabo en el desarrollo de la unidad didáctica, debemos tomar en cuenta:

- Los conocimientos previos de los estudiantes.
- El tiempo disponible para el desarrollo de cada contenido.
- El uso correcto de los recursos y medios didácticos.
- La importancia, relación y aplicación de los contenidos a impartir en otros campos del
- saber humano.

Antes de iniciar el estudio del bloque Limite y Continuidad, se aplicará una prueba diagnóstica para determinar cuál es la situación inicial de los estudiantes, en cuanto a los conocimientos previos necesarios para la comprensión y memorización y reproducción del nuevo conocimiento.

Para el desarrollo de cada una de las actividades propuesta en esta unidad didáctica proponemos formar pequeños grupos en la búsqueda de hacer responsable a cada uno de los integrantes, siendo esta una forma de organización más acorde con la vida real, presentando situaciones concretas y sencillas que induzcan al concepto de límites y continuidad, y que mediante ejemplos apropiados que sirvan cómo un parámetro de introducción al contenido del bloque.

Para lograr estos aprendizajes, se propone a cada pequeño grupo de estudiantes lo siguiente:

- La discusión e interpretación de forma intuitiva de Límite de una Función junto a su representación e interpretación geométrica.
- La interpretación de la definición formal de Límite.
- Aplicación de la definición formal de límite a demostraciones sencillas
- La Interpretación del teorema de la unicidad del Límite.
- Interpretación y comprensión de los teoremas acerca de Límites.
- Interpretación geométrica de la definición intuitiva de los Límites en los que interviene infinito.
- Interpretación y representación de manea geométrica el teorema de las asíntotas verticales.
- Interpretación y representación geométrica de forma intuitiva del Límite al infinito para determinar asíntotas horizontales.
- Resolución de ejercicios y problemas de graficado aplicando las teoremas y su interpretación geométrica.
- Explicar y representar de forma geométrica la continuidad de funciones y discontinuidad de ellas.
- Resolución de ejercicios e interpretación de gráficas continuidad y discontinuidad de una función.
- Establecimiento de las definiciones de limites unilaterales.
- Interpretación geométrica de las definiciones de limites unilaterales y resolución de problemas comprensión sencillos.

Concluyendo que ser partícipe de la motivación de trabajo individual y en colectivo, conducirá al afianzamiento del bloque mediante ejercicios prácticos y problemas relacionados a la vida real lo mismo que la orientación de la realización de trabajos independientes con la finalidad de que los alumnos demuestren sus habilidades individuales.

En fin el docente para desarrollar este bloque tendrá que utilizar todos los medios disponibles a su entorno como material didáctico utilizable y además se le pide recurra a su ingenio en la creación de nuevos medios didácticos para ser utilizados en el proceso de enseñanza aprendizaje.

**Aplicación del ABP:**

1. Se tiene un módulo en forma de unidad didáctica, que tiene una corta duración entre 11 y 14 actividades contenidas en un tiempo de 7 semanas máximo.
2. El nivel de los problemas debe adaptarse al nivel del destinatario y esto se cumple en los contenidos de la unidad didáctica y a la vez se encuentran bien delimitados en su contenido.
3. Aplicada a grupos pequeños, fortaleciendo los sub grupos, mediante el aprendizaje grupal y fortaleciendo la parte cognoscitiva.
4. Para la identificación del problema a resolver, es necesario activar el conocimiento previo sobre el contenido a desarrollar o tratar, esto no se cumple cuando no hay conocimiento previo.
5. Cuando no se tenga el conocimiento previo necesario, entonces se elabora una guía de preguntas para activarlos.
6. Motivar en los alumnos la necesidad de consulta para estimular el estudio individual y fomentar el estudio auto dirigido.

# Clase No.1

**Objetivos:**

1. Interpretar el concepto de límite, a partir de la gráfica de funciones.
2. Interpretar el concepto de límite, a partir del comportamiento del valor de una función, cuando el argumento x se aproxima a un número real a.
3. Enunciar la definición de límite de una función.
4. Aplicar la definición de límite de una función, en la resolución de ejercicios.

**Tema:**

Límite de funciones

**Sumario:**

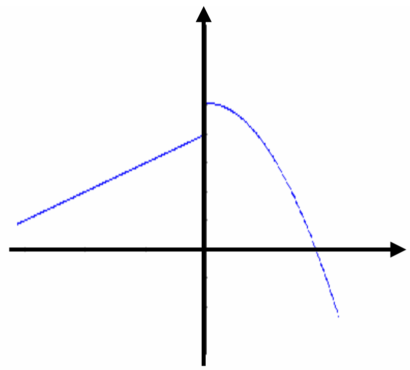
1. Noción intuitiva de límite
2. Definición de límite

**Estrategias metodológicas:**

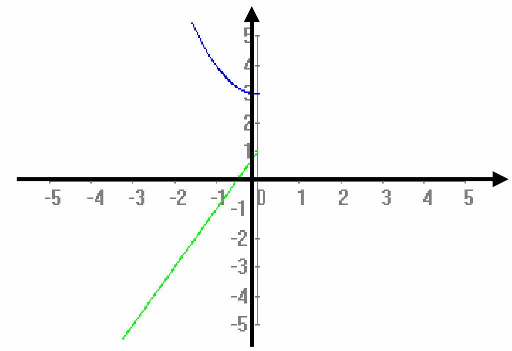
- ♦ El docente iniciará la clase, presentando en Papelógrafo (de ser posible) diferentes ejemplos de gráficos de funciones con el propósito de que los estudiantes interpreten de manera intuitiva el concepto de límite de una función.
- ♦ Se le orientará a los estudiantes a que completen los valores presentados en la tabla; que discutan y analicen a partir de las tablas, el valor al cual se aproxima f(x) cuando el argumento x se aproxima a un número a.
- ♦ En conjunto profesor – alumnos, se formulará la definición de límite de una función.
- ♦ El profesor presentará la definición de límite de una función auxiliándose de una gráfica, puntualizando la interpretación correcta de la notación.
- ♦ Promover la discusión, a partir de ejemplos, para que los estudiantes comprendan en qué situaciones se afirma que el límite de una función no existe.
- ♦ Motivar a los estudiantes para que planteen inquietudes y /o dudas surgidas en el desarrollo de la clase.

## Actividades a Desarrollar:

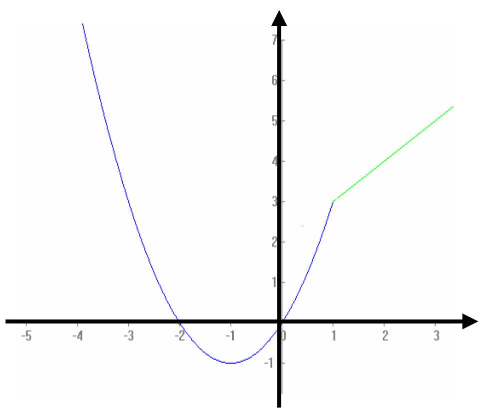
1. Discutan y analicen el comportamiento de f(x), a partir de su gráfico, cuando el argumento x se aproxime a un número real a.



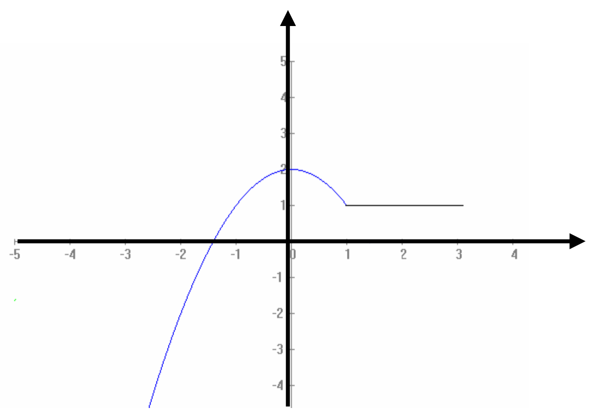
a = 0
**Figura 1**



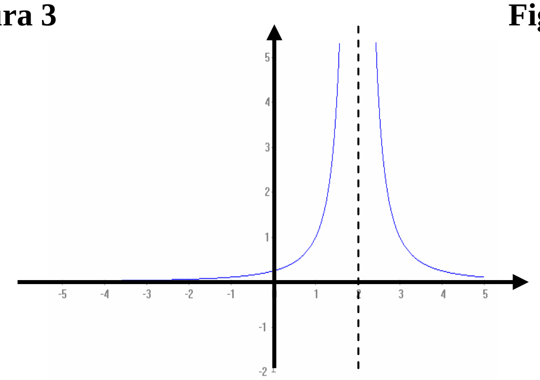
a = 0
**Figura 2**



a = 1
**Figura 3**



a = 1
**Figura 4**



a = 2
**Figura 5**

2. Complete la siguiente tabla:

| $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2 | 1.5 | 1.25 | 1.1 | 1.01 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 | 1.00001 | 1.000001 |
| f(x) | | | | | | | | | | |
| f(x) – 3 | | | | | | | | | | |
| x – 1 | | | | | | | | | | |
| x | -1 | 0 | 0.5 | 0.25 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 0.999999 |
| f(x) | | | | | | | | | | |
| f(x) – 3 | | | | | | | | | | |
| x – 1 | | | | | | | | | | |

(a) ¿A qué valor se aproxima f(x), cuando x se aproxima a 1 para valores mayores que 1 y menores que 1?

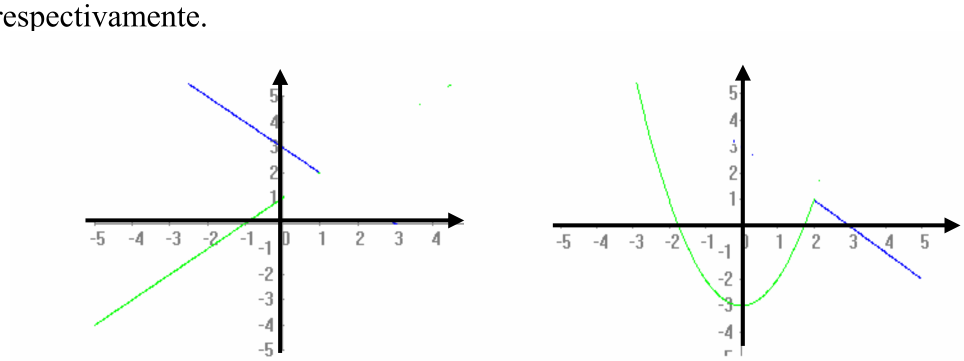
(b) ¿A qué valor se aproxima f(x) – 3, cuando x se aproxima a 1 a través de valores mayores que 1 y menores que 1?

(c) Establezca la relación entre f(x) – 3 y x – 1.

3. Formular la definición de límite (de manera intuitiva y formalmente).

**Evaluación:**

1. Las ilustraciones (a) y (b) representan un croquis del gráfico de f(x) y g(x), respectivamente.




(a) (b)

Responda:

(i) ¿Existe el límite de f(x)? ¿Por qué? ¿Existe el límite de g(x)? ¿Por qué?

2.Si x – a tiende a cero, entonces ¿a qué valor tiende f(x) – L?

2. Evaluar cualitativamente, en función del logro de los objetivos de la clase.

# Clase No. 2

## Clase Práctica

**Objetivos:**

1. Interpretar gráficamente si el límite de una función existe.
2. Aplicar la definición de límite para demostrar que el límite de f(x) existe o no existe.
3. Participar activamente y colaborar con el desarrollo de la clase.
4. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la resolución de los ejercicios.

**Tema:**

Limite de una función.

**Sumario:**

1. Ejercicios sobre:
   (a) Noción intuitiva de límite.
   (b) Definición de límite.

**Estrategias metodológicas:**

**PARA LA PARTE CORRESPONDIENTE A LA NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE**

1. El profesor debe orientar a los estudiantes que formen una tabla de valores, en donde se refleje los valores del argumento x próximo (mayores y menores) al número real para lo cuál la función dada no tiene sentido y los valores de f(x).

2. A partir de la tabla, tracen la gráfica de la función dada, y analicen si el límite de la función existe, y cuál es su valor.

3. Presentar a los estudiantes varias gráficas con el propósito de que discutan y analicen si el límite de cada función existe o no.

## PARA LA PARTE CORRESPONDIENTE A LA DEFINICIÓN DE LIMITE

Se seleccionará un ejercicio de lo que se proponen para que sea realizado en conjunto (profesor – alumnos). Seguidamente se orientará a los estudiantes que resuelvan los ejercicios que se les indique

**Actividades a realizar:**

1. Para la noción intuitiva de límite.

   (a) Haga una tabla de valores para las funciones siguientes:

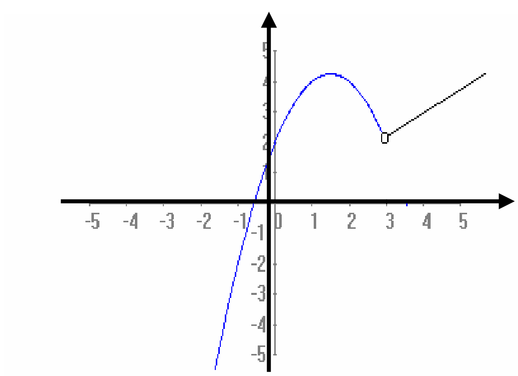
   (i) $f(x) = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ (ii) $g(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

   Para la realización de la tabla, considere:

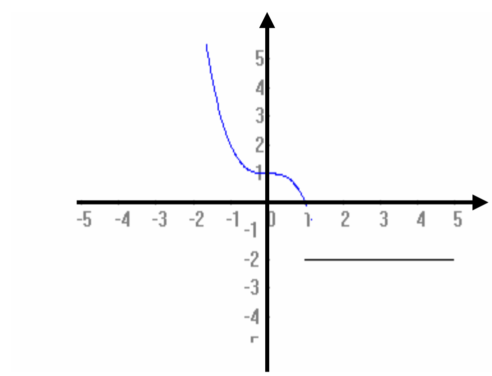
   -El valor de x para el cual la función no está definida.

   -Asignen para x valores mayores y menores que dicho valor encontrado pero próximo a él.

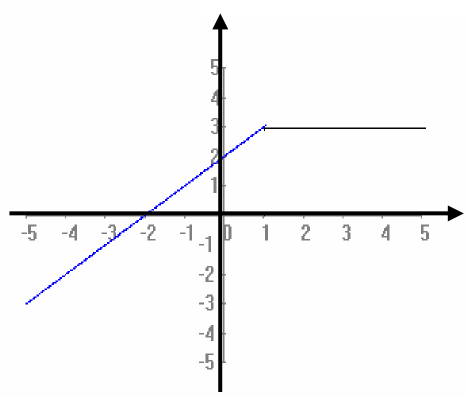
   (b) A partir de los gráficos dados, discutan y analicen si el límite existe o no.



$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$



$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$



$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

2. Para la definición de límite.

(i) Sea f la función definida por f(x) = x – 1.

(a) Utilice una figura con $\varepsilon = 0.03$ para determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - 4| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 3| < 0.03$$

(b) Confirme analíticamente la elección de $\delta$.

(ii) Sea f la función definida por $f(x) = x^2 - 1$.

(a) Utilice una figura con $\varepsilon = 0.001$ para determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - 3| < \delta \text{ entonces } |f(x) - 8| < 0.001$$

(b) Confirme analíticamente la elección de $\delta$.

(iii) Demuestre los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to -1} (1 - 3x) = 4$

(c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

(d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = 3$

**Evaluación:**

1. Valorar la participación de los alumnos en la actividad práctica desarrollada.
2. Se evaluará la solidaridad, honestidad y cambio de roles de cada grupo.
3. Participación correcta y oportuna al momento del plenario.

**Trabajo extra clase:**

Orientar trabajo independiente, proponiendo ejercicios (2 de cada tipo) para revisarlos al inicio de la siguiente clase.

# Clase No. 3

**Objetivos:**

1. Analizar en conjunto (profesor – alumnos) los teoremas de límites.
2. Ejemplificar los teorema de límites.
3. Aplicar los teoremas de límites en la resolución de ejercicios.
4. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la resolución de los ejercicios.

**Tema:**

Limite de una función.

**Sumario:**

1. Teoremas de limites.
2. Ejercicios.

**Estrategias metodológicas:**

1. El profesor enunciará, explicará y ejemplificará cada uno de los teoremas sobre límites.
2. El profesor orientará la solución de (por lo menos dos ejercicios) por grupo, motivándolos a competencia e invitarlos al cambio de roles de cada miembro.
3. El profesor asignará un tiempo estipulado para cada ejercicio y después se hará un plenario (si el tiempo lo permite) para aclarar dudas en cuanto al procedimiento algebraico utilizado en la resolución de los ejercicios planteados.
4. Entregar una hoja de ejercicios propuestos para que sean resueltos en la próxima sesión.

**Desarrollo:**

**TEOREMAS DE LÍMITES**

**Teorema 1.** Límite de una constante.

Si c es una constante, entonces para cualquier número a, entonces, es $\lim_{x\to a} c = c$

*Ejemplos*

(a) $\lim_{x\to -1}(-19) = -19$ (b) $\lim_{x\to 2} 7 = 7$ (c) $\lim_{x\to 0} 0 = 0$

**Teorema 2.** Límite de la función identidad.

$\lim_{x\to a} x = a$

*Ejemplos*

(a) $\lim_{x\to -1} x = -1$ (b) $\lim_{x\to 5} x = 5$ (c) $\lim_{x\to -3} x = -3$

**Teorema 3.** Límite de la función lineal.

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces $\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$

*Ejemplo*

(a) $\lim_{x\to -1}(2-3x) = 2-3(-1) = 2+3 = 5$

(b) $\lim_{x\to 2}(5x-2) = 5\cdot 2-2 = 10-2 = 8$

**Teorema 4.** Límite de la suma y la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L\pm M$

**Teorema 5.** Límite de la suma y la diferencia de n funciones.

Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$, ..., $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$ entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \Lambda \pm f_n(x)\right] = L_1 \pm L_2 \pm \Lambda \pm L_n$$

**Teorema 6.** Límite del producto de dos funciones.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L\cdot M$

*Ejemplo*

(a) $\lim\limits_{x \to 2} x(2x-1) = \left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)\left(\lim\limits_{x \to 2} (2x-1)\right)$ (Teorema 5)

$= 2\cdot(2\cdot 2 - 1)$ (Teoremas 2 y 3)

$= 6$

**Teorema 7.** Límite del producto de n funciones.

. Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ..., $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$ entonces

$$\lim_{x \to a}\left[ f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \Lambda \cdot f_n(x)\right] = L_1 \cdot L_2 \cdot \Lambda \cdot L_n$$

**Teorema 8.** Límite de la n-ésima potencia de una función.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$.

*Ejemplo*

$\lim\limits_{x \to -1}(1+5x)^4 = \left[\lim\limits_{x \to -1} (1+5x)\right]^4$ (Teorema 8)

$= [\ 1 + 5(-1)]^4$ (Teorema 3)

$= (-4)^4$

$= 256$

**Teorema 9.** Límite del cociente de dos funciones.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$.

*Ejemplo*

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{1-3x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x}{\lim\limits_{x \to 2} (1-3x)}$ (Teorema 9)

$= \dfrac{2}{1-3\cdot 2}$ (Teoremas 2 y 3)

$= \dfrac{2}{-5}$

**Teorema 10.** Límite de la raíz n-ésima de una función.

Si n es un número entero positivo, y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

con la restricción de que si n es par, $L \geq 0$.

**Teorema 11**

Si $a > 0$ y n es un entero positivo, o si $a < 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

**Teorema 12** Unicidad del límite.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.

**EJERCICIOS**

Aplique los teoremas dados para calcular los siguientes límites

(a) $\lim_{x \to 3} \left(2x^2 - 3x + 1\right)$

*Solución)*

$\lim_{x \to 3} \left(2x^2 - 3x + 1\right) = \lim_{x \to 3} \left(2x^2\right) - \lim_{x \to 3} \left(3x\right) + \lim_{x \to 3} 1$ (Teorema 5)

$= \left(\lim_{x \to 3} 2\right) \cdot \left(\lim_{x \to 3} x^2\right) - \left(\lim_{x \to 3} 3\right) \cdot \left(\lim_{x \to 3} x\right) \cdot + \lim_{x \to 3} 1$ (Teorema 6)

$= \left(\lim_{x \to 3} 2\right) \cdot \left(\lim_{x \to 3} x\right)^2 - \left(\lim_{x \to 3} 3\right) \cdot \left(\lim_{x \to 3} x\right) \cdot + \lim_{x \to 3} 1$

(Teoremas 8)

$$= 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \qquad \text{(Teoremas 1 y 2)}$$

$$= 18 - 9 + 1$$

$$= 10$$

(b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1}}$

*Solución)*

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{\frac{x^3 - 3x + 3}{x^2 + 1}} = \sqrt{\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 3}{x^2 + 1}} \qquad \text{(Teorema 10)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to -2} \left(x^3 - 3x + 3\right)}{\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 + 1\right)}} \qquad \text{(Teorema 9)}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to -2} x^3 - \lim\limits_{x \to -2} 3x + \lim\limits_{x \to -2} 3}{\lim\limits_{x \to -2} x^2 + \lim\limits_{x \to -2} 1}} \qquad \text{(Teorema 5)}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^3 - \left(\lim\limits_{x \to -2} 3\right)\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right) + \lim\limits_{x \to -2} 3}{\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^2 + \lim\limits_{x \to -2} 1}}$$

(Teoremas 6 y 8)

$$= \sqrt{\frac{(-2)^2 - 3(-2) + 3}{(-2)^2 + 1}} \qquad \text{(Teoremas 1 y 2)}$$

$$= \sqrt{\frac{-8 + 6 + 3}{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

## Tarea

Calculen los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ (b) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

## Metodología de evaluación:

1. Se evaluará la solidaridad, honestidad y cambio de roles de cada grupo.
2. Participación correcta y oportuna al momento del plenario.

# Clase No. 4

## Clase Práctica

**Objetivos:**

1. Aplicar los teoremas de límites en la resolución de ejercicios.
2. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la resolución de los ejercicios.

**Tema:**

Limite de una función.

**Sumario:**

1. Ejercicios sobre teoremas de límites

**Estrategias metodológicas:**

1. El profesor explicará que en algunos casos, al evaluar límites aplicando los teoremas, se obtienen resultados de la forma $\frac{0}{0}$, llamada forma indeterminada, y para calcular estos tipos de límites, se simplifica, factorizando o racionalizando en otros casos.
2. Se entregará a cada grupo de trabajos cuatro ejercicios los cuales serán entregados al finalizar la clase.

**Ejercicios:**

Determine el límite si existe y cuando sea posible, indique los teoremas de limite que se aplican.

1. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$
2. $\lim_{x \to -4} (3x + 2)$
3. $\lim_{x \to -3} (1 - 7x)$
4. $\lim_{x \to 2} (3 + 5x)$
5. $\lim_{x \to -2} (3 - 7x)$
6. $\lim_{x \to -7} (1 - 5x)$
7. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 1)$
8. $\lim_{x \to -2} (2x^2 + x - 1)$
9. $\lim_{x \to -4} (x^2 - 3x + 1)$

10. $\lim_{x\to 3}(x^2-3x+1)$

11. $\lim_{x\to -1}(1-3x+2x^2)$

12. $\lim_{x\to -5}(2x^2-4x+5)$

13. $\lim_{x\to -5}(2x^2-4x+5)$

14. $\lim_{x\to -1}(3x^2+3x-5)$

15. $\lim_{x\to -4}(2-x+2x^2)$

16. $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{8x-1}$

17. $\lim_{x\to -1}\frac{4-3x}{8x-1}$

18. $\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{1-x}$

19. $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$

20. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{2-x^2}$

21. $\lim_{x\to -2}\frac{3-2x^2}{1+x}$

22. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

23. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

24. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$

25. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x}$

26. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-4}$

27. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$

28. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$

29. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}$

30. $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} =$

31. $\text{Lim}_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

32. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

33. $\text{lm}_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

34. $\lim_{x\to -2}x\sqrt{x+4}\sqrt[3]{x-6}$

35. $\lim_{x\to 10}\sqrt{\frac{10x}{2x+5}}$

36. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x-2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{x}{x+5}}$

37. $\lim_{x\to 2}x^2\sqrt{x^2+5x+2}$

38. $\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{1}{x-1}\right)$

39. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

40. $\text{Lim}_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{6}{x^2+2x-8}\right]$

41. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

**Evaluación:**

1. Valorar la participación de los alumnos en la actividad práctica desarrollada.
2. Se evaluará la solidaridad, honestidad.

# Clase No. 5

## Trabajo Grupal

**Objetivos:**

1. Determinar si el límite de una función existe, a partir de la interpretación de una tabla de valores y de una gráfica.
2. Encontrar el valor de $\delta$ que satisface la definición de límite de f(x)
3. Aplicar la definición de limite para demostrar que el valor del limite es el número real L.
4. Aplicar los teoremas en la resolución de ejercicios de limite de una función.
5. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la solución de cada uno de los ejercicios.

**Tema:**

Límite de una función

**Sumario:**

Ejercicios sobre:

(a) Noción intuitiva de límite.

(b) Definición de límite.

(c) Teoremas de límites.

**Metodología:**

Pretendemos con esta clase que los estudiantes consoliden los conocimientos relacionados a la noción intuitiva de límite, definición de límite y teoremas de límite, mediante la resolución de ejercicios. A la vez, lo motivaremos para que planteen inquietudes y/o dudas surgidas en el desarrollo de la clase.

## Ejercicios

## NOCIÓN DE LÍMITE

1. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$.

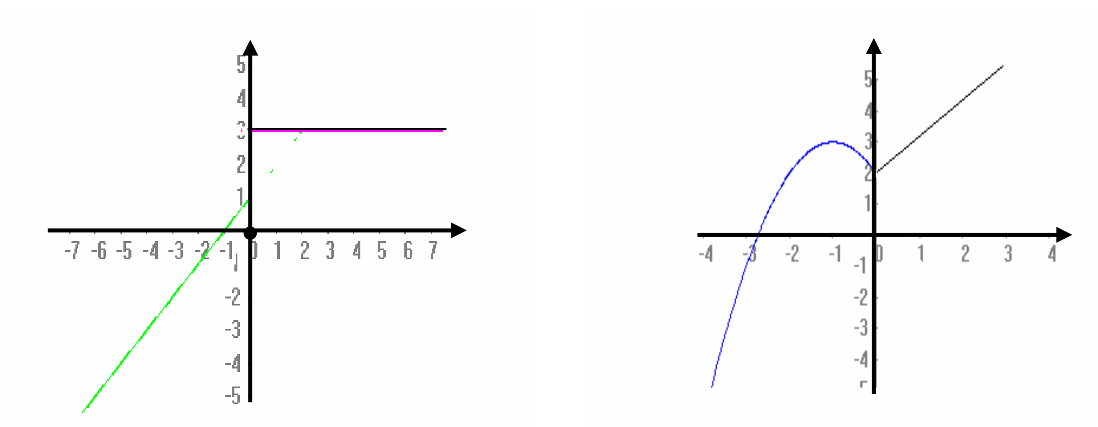
   (a) Haga una tabla de valores para valores de x lo suficientemente próximo a 4, tanto para valores mayores y menores que 4.

   (b) A partir de la tabla de valores, determine el valor al cuál se aproxima f(x), para valores próximos a 4.

2. Las ilustraciones siguientes muestran un croquis del gráfico de las funciones f(x) y g(x), respectivamente.

   (a) Determine si $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. Fundamente su respuesta.

   (b) Determine si $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe. Fundamente su respuesta.




(a) (b)

## DEFINICION DE LIMITE

1. Sea f la función definida por f(x) = 1 – 3x.

   (a) Utilice una figura con ε = 0.0001 para determinar una δ > 0 tal que

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |f(x) + 5| < 0.0001$$

2. Demuestre el siguiente límite

$$\lim_{x \to -1} (2 - 3x) = 5$$

## TEOREMAS DE LIMITES

1. Evalúe los siguientes límites;

(a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5)$ (b) $\lim_{x \to -4} \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x^2 - 16}}$ (c) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x + h}}{h}$

**Evaluación:**

3. Valorar la participación de los alumnos en la actividad práctica desarrollada.
4. Se evaluará la solidaridad, honestidad e interés individual y colectivo.

# Clase No. 6

**Objetivos:**

1. Interpretar el concepto de límite lateral.
2. Analizar la definición de limite por la derecha y limite por la izquierda de una función.
3. Comprender el concepto de límite infinito.
4. Analizar las definiciones de valores de función que crecen o decrecen indefinidamente.
5. Interpretar el concepto de asíntota vertical.
6. Participar activamente en el desarrollo de la actividad docente.

**Tema:**

Límite de funciones

**Sumario:**

1. Limites Laterales.
   1.1.Definición de límite por la derecha.
   1.2. Definición de límite por la izquierda.
2. Límites infinitos.
   2.1.Definiciones.

**Estrategias metodológicas:**

1. Se hará uso de papelógrafo para Introducir gráfica y analíticamente el concepto de limite lateral de una función.
2. Presentar en un papelógrafo la gráfica de una función cualesquiera que nos permita formular en conjunto (profesor y estudiantes) las definiciones de límite por la izquierda y por la derecha. Proponer distintos gráficos que muestren que en algunos casos los límites laterales son iguales y en otros son distintos.
3. Explicar la definición formal de límite por la derecha y por la izquierda.

4. Resolver gráficamente y analíticamente ejercicios relacionados a límites laterales.
5. Introducir el concepto de límite infinito a partir de gráfico y de tabla de valores de una función cualesquiera.
6. Introducir el concepto de límites infinitos laterales a partir de gráfico y de tabla de valores de una función cualesquiera.

**Actividades a desarrollar:**

1. Límites laterales.

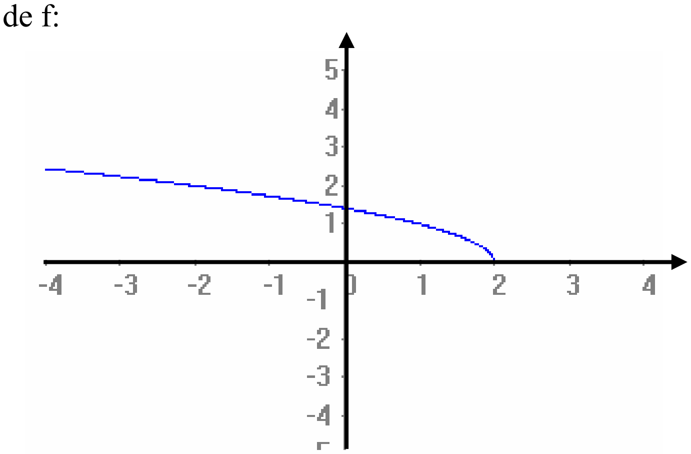
(a) Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

Esta función está definida cuando $2 - x > 0$; es decir, $x < 2$. Analicemos el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima a 2 a través de valores menores que 2. Para esto, hagamos una tabla de valores tomando valores de x lo suficientemente cercano a 2 pero menores que 2.

| $f(x) = \sqrt{2-x}$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 | 1.99999 |
| F(x) | 1 | 0.8660 | 0.7071 | 0.5 | 0.3162 | 0.1 | 0.0316 | 0.00316 | 0.00031 |

Tracemos la gráfica de f:




Observemos que, tanto en la tabla de valores como en el gráfico de la función f, los valores de f(x) se aproximan a 0, a través de valores menores que 2 pero lo suficientemente cercano a 2: y se escribe $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2-x}$. A este tipo de límite se le llama límite por la izquierda.

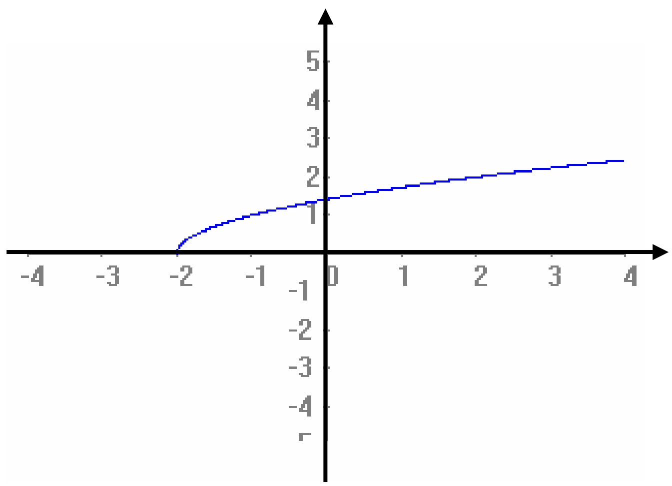
(b) Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{2 + x}$$

Esta función está definida cuando 2 + x > 0; es decir, x > –2. Analicemos el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima a 2 a través de valores mayores que – 2. Para esto, hagamos una tabla de valores tomando valores de x lo suficientemente cercano a –2 pero mayores que –2.

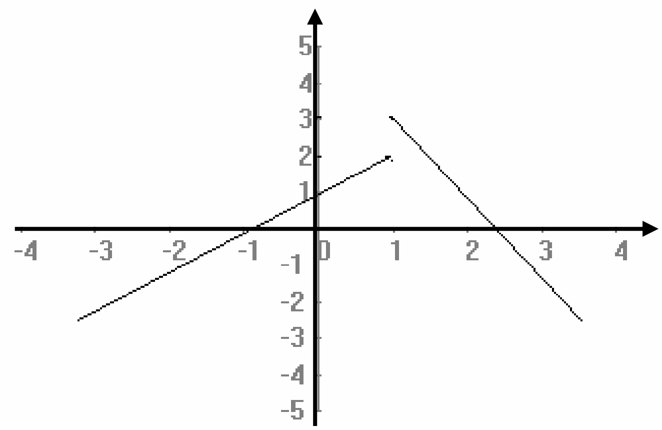
| $f(x) = \sqrt{2 + x}$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -1 | -1.25 | -1.5 | -1.75 | -1.9 | -1.99 | -1.999 | -1.9999 | -1.99999 |
| F(x) | 1 | 0.8660 | 0.7071 | 0.5 | 0.3162 | 0.1 | 0.0316 | 0.00316 | 0.00031 |

Tracemos la gráfica de f:




Observemos que, tanto en la tabla de valores como en el gráfico de la función f, los valores de f(x) se aproximan a 0, a través de valores mayores que –2 pero lo suficientemente cercano a –2: y se escribe $\lim\limits_{x \to 2^{+}} \sqrt{2 + x}$. A este tipo de límite se le llama límite por la derecha.

A continuación, presentar en papelógrafo el gráfico de una función cualesquiera con el propósito de que en conjunto profesor y estudiantes formulemos la definiciones de límite por la izquierda y por la derecha.




Del gráfico podemos observar que:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \quad y \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

Ambos límites son diferentes; entonces, concluimos que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

Definición: Límite por la derecha.

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto (a, c). Entonces, el límite de f(x) conforme x tiende a a por la derecha es L, lo que se denotará por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta$$

Definición: Límite por la izquierda.

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto (a, c) Entonces, el límite de f(x) conforme x tiende a a por la derecha es L, lo que se denotará por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < a - x < \delta$$

**Ejemplo**

Sea f definida por

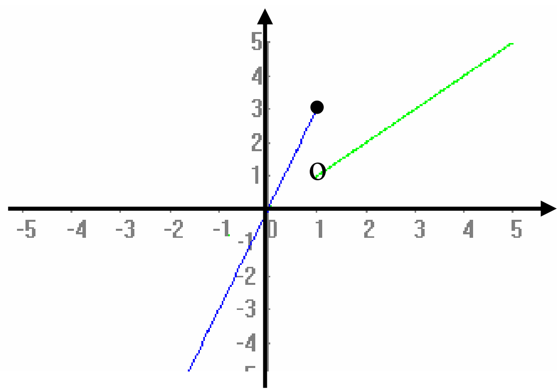
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Evalúe los siguientes límites, si existen.

(a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$  (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$  (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Solución)

(i) Gráficamente.




(a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$  (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe, ya que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

(ii) Analíticamente

(a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x = 3(1) = 3$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe, ya que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

Límites infinitos:

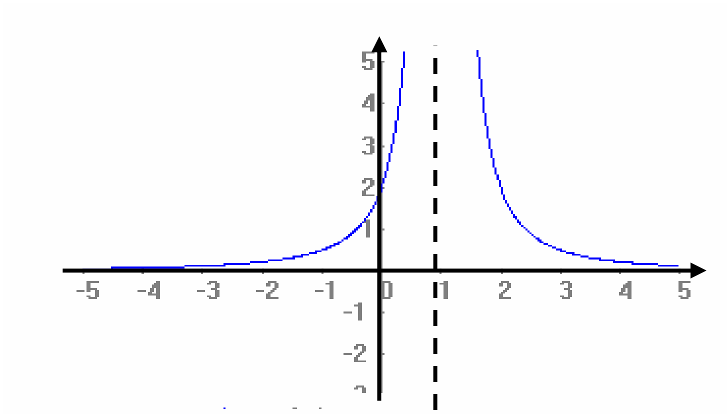
Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Esta función no está definida para x = 1. La ecuación x = 1 se le llama asíntota vertical. Analicemos el comportamiento de los valores de f(x) conforme x se aproxima lo suficientemente cercano a 1, a través de valores mayores y menores que 1. Resumamos dicho comportamiento en una tabla de valores.

| $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1.1 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 | 1.00001 | 1.000001 | 1.0000001 |
| f(x) | | | | | | | |
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 0.999999 | 0.9999999 |
| f(x) | | | | | | | |

Tracemos su gráfico




De la tabla de valores y del gráfico observamos que los valores de f(x) crecen indefinidamente conforme x se aproxima a 1 por la izquierda (valores menores que 1) y por la derecha (valores mayores que 1).

Escribimos en este caso

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$ ; se sigue que, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$

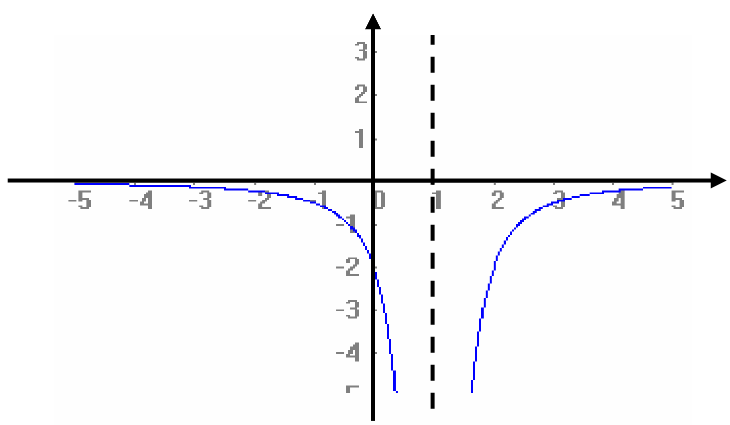
Sea f la función definida por

$$f(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}\ .$$

Esta función no está definida para x = 1. La ecuación x = 1 se le llama asíntota vertical. Analicemos el comportamiento de los valores de f(x) conforme x se aproxima lo suficientemente cercano a 1, a través de valores mayores y menores que 1. Resumamos dicho comportamiento en una tabla de valores.

| $f(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1.1 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 | 1.00001 | 1.000001 | 1.0000001 |
| F(x) | | | | | | | |
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 0.999999 | 0.9999999 |
| F(x) | | | | | | | |

**Tracemos la gráfica de f**




De la tabla de valores y del gráfico observamos que los valores de f(x) decrecen indefinidamente conforme x se aproxima a 1 por la izquierda (valores menores que 1) y por la derecha (valores mayores que 1).

Escribimos en este caso

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-2}{(x-1)^2}=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{-2}{(x-1)^2}=-\infty$$

Como $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$; se sigue que, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$.

Para este ejercicio se puede observar que el límite sí existe y es infinito exceptuando el numero. Los límites así planteados se le llaman límites infinitos.

Definición: Valores de función que crecen sin límites.

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo I que contenga a "a" excepto posiblemente el mismo número "a". A medida que x se aproxime a "a", f(x) crece sin límite, lo cual se denota por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

si para cualquier N > 0, existe una $\delta > 0$, tal que f(x) > N, siempre que $0 < |x - a| < \delta$

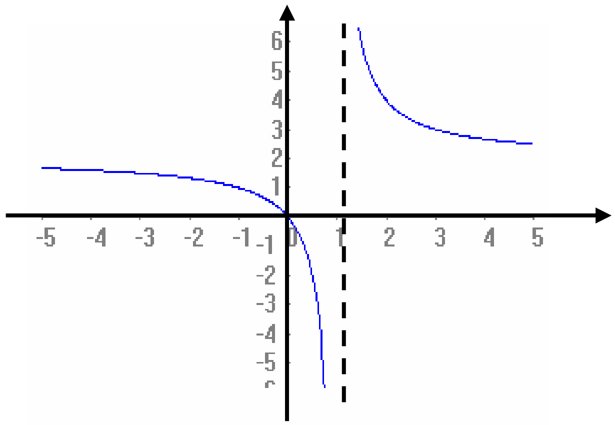
Definición: Valores de la función que decrecen sin límites.

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo I que contenga a "a" excepto posiblemente el mismo número "a". A medida que x se aproxime a "a", f(x) decrece sin límite, lo cual se denota por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

si para cualquier N < 0, existe una $\delta > 0$, tal que f(x) < N, siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Analicemos el comportamiento de f(x) conforme x se acerca a 1 para valores mayores y menores que 1.

| $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1.1 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 | 1.00001 | 1.000001 | 1.0000001 |
| f(x) | | | | | | | |
| x | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 | 0.99999 | 0.999999 | 0.9999999 |
| f(x) | | | | | | | |




De la tabla de valores y del gráfico, observamos que:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Definición: Límites infinitos laterales.

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si f está definida para cada número de algún intervalo abierto (a, c) y para cualquier número N > 0, existe una δ > 0, tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \text{ entonces } f(x) > N$$

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si f está definida para cada número de algún intervalo abierto (a, c) y para cualquier número N < 0, existe una δ > 0, tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \text{ entonces } f(x) < N$$

**Evaluación:**

1. Valorar cualitativamente la participación de los estudiantes en desarrollo de la clase, en función del logro de los objetivos.
2. Realice el siguiente ejercicio.

   Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -1 + x & \text{si} \quad -2 < x \end{cases}$. Determine los siguientes límites, si existen.

   (a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -2} f(x)$

# Clase No. 7

**Objetivos:**

1. Enunciar los teoremas de límites infinitos.
2. Ejemplificar los teoremas de límites infinitos.
3. Analizar los conceptos de límites al infinito en conjunto con el profesor**.**
4. Diferenciar los conceptos de límite infinito y límite al infinito de una función.
5. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en el desarrollo de la clase.

**Tema:**

Límite de funciones.

**Sumario:**

1. Límites infinitos.
   1.1.Teoremas.
2. Límites al infinito.
   2.1. Definición.
   2.2. Teorema.

**Estrategias metodológicas:**

1. El profesor presentará en papelógrafo, los teoremas de límites infinitos, así como ejemplos que ilustren la aplicación de dichos teoremas para que sean analizado en conjunto (profesor – estudiantes).
2. Se discutirá y analizará en conjunto (profesor – estudiantes) el comportamiento de los valores de f(x) cuando el argumento x crece o decrece indefinidamente. Este mismo análisis se hará gráficamente.
3. El profesor denotará y definirá límite al infinito
4. En conjunto (profesor – estudiantes) se analizará el teorema que se aplicará para evaluar límites al infinito.
5. El profesor presentará en un papelógrafo ejemplos de límites infinitos y al infinito para que sean discutidos y analizados en conjunto (profesor y estudiantes.
6. Orientar a los alumnos a la solución de ejercicios de límites laterales, límites infinitos y al infinito.

### Teoremas de límites infinitos

**Teorema 13**

Si r es cualquier entero positivo, entonces

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplos

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^5} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^5} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$

**Teorema 14**

Sí a es cualquier número real y si el $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(ii) Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

El teorema es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

**Ejemplos.**

Obtenga el valor del límite indicado

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^3} = +\infty$ Teorema 15 (i)

(b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-1}{(x-3)^3} = -\infty$ Teorema 15 (iii)

(c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^3} = -\infty$ Teorema 15 (ii)

(d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-2}{(x-3)^3} = +\infty$ Teorema 15 (iv)

**Teorema 15**

(i) Sí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$**,** donde c es cualquier constante , entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = +\infty\,.$$

(ii) Sí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$**,** donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = -\infty\,.$$

El teorema es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

**Ejemplo.**

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$; se sigue que

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right] = +\infty$$

**Teorema 16.**

Sí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$**,** donde c es cualquier constante, distinta de 0, entonces

(i) Si $c > 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = +\infty$

(ii) Sí $c < 0$, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = -\infty$

Estos teoremas también se cumplen, si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

**Ejemplos**

Evalúe los siguientes límites, si existen.

(a) Como $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5}{(x-3)^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+4}{x-4} = -7$; se sigue que

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{5}{(x-3)^2}\cdot\frac{x+4}{x-4}\right] = (+\infty)\cdot(-7) = -\infty$$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{(x-2)^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$; se sigue que

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{x+2}{(x-2)^2}\cdot(x+2)\right] = (+\infty)\cdot(4) = +\infty$$

**Teorema 17**

Sí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, distinta de 0, entonces

(i) Si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

(ii) Si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Estos teoremas también se cumplen, si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^{+}$" o "$x \to a^{-}$".

**Ejemplos.**

Evalúe los siguientes límites, si existen.

(a) Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = (4-4)/(2-2) = 0/0 = -\infty$ y

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-3}{x+2} = (2-3)/(2+2) = -\dfrac{1}{4}$; se sigue que

$$\lim_{x \to 2^-} \left[ \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} \cdot \frac{x-3}{x+4} \right] = (-\infty) \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) = +\infty$$

(b) Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{5}{4}$; se sigue que

$$\lim_{x \to 2^-} \left[ \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} \cdot \frac{x+3}{x+4} \right] = (-\infty) \cdot \left( \frac{5}{4} \right) = -\infty$$

**Límites al infinito**

En este acápite consideraremos límites de funciones cuando la variable independiente crece o decrece sin límite.

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

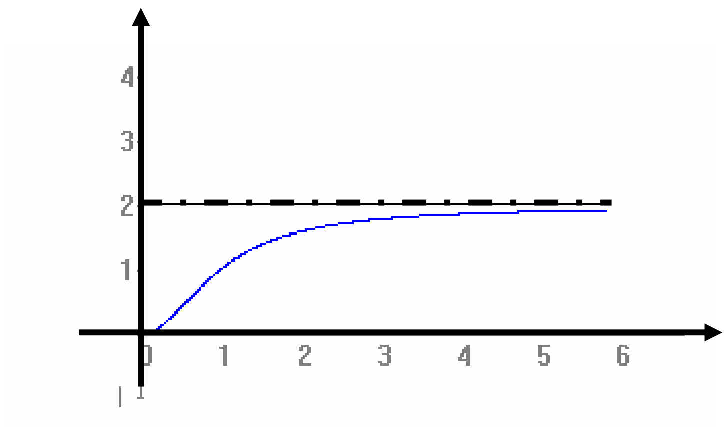
Considere que x toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, y así sucesivamente, permitiendo que x crezca sin límite. Resuma estos valores de f(x) en una tabla de valores.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | | |

Observe en la tabla que conforme x crece, a través de valores positivos, los valores de función cada vez se acercan más a 2. Analicemos la diferencia 2 – f(x), a medida que x crece sin cota. A qué conclusión llegan.

Su gráfico:




Observamos que el gráfico de f(x) se aproxima a la recta x = 2, conforme el argumento x crece sin cota, a través de valores positivos.

Definición: Definición del límite de f(x) cuando x crece sin límite.

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto (a, +∞). El límite de f(x) cuando x crece sin límite es L, lo que se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para cualquier ε > 0, sin importar que tan pequeña sea, existe una N > 0, tal que

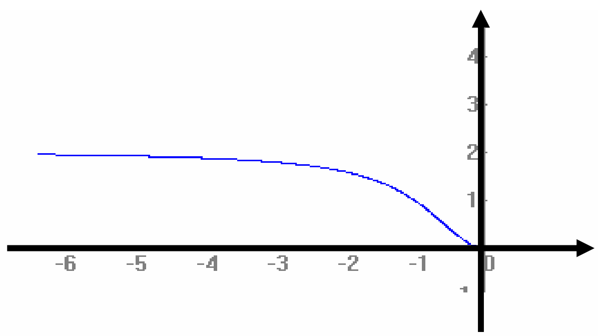
$$\text{si } x > N \text{ entonces } \left| f(x) - L \right| < \in$$

Consideremos la misma función de modo que x tome los valores –1, –2, –3, –4, –5, –10, –100, –1000, y así sucesivamente. Resuma estos valores de f(x) en una tabla de valores.

| $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | –1 | –2 | –3 | –4 | –5 | –10 | –100 | –1000 |
| f(x) | | | | | | | | |

Observe en la tabla que conforme x decrece, a través de valores negativos, los valores de función cada vez se acercan más a 2. Analicemos la diferencia 2 – f(x), a medida que x decrece sin cota. A qué conclusión llegan.

Su gráfico




Observamos que el gráfico de f(x) se aproxima a la recta x = 2, conforme el argumento x decrece sin cota, a través de valores negativos.

Definición: Definición del límite de f(x) cuando x decrece sin límite.

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto (–∞a, a). El límite de f(x) cuando x crece sin límite es L, lo que se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon < 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $N < 0$, tal que

$$\text{si } x < N \text{ entonces } \left| f(x) - L \right| < \in$$

El siguiente teorema se aplica en el cálculo de límites al infinito.

**Teorema 18.**

Si r es cualquier número entero positivo, entonces:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

**Ejemplo:**

Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$. Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**Solución:**

Se divide el numerador y el denominador entre la potencia más grande de x que ocurre en el numerador o denominador, la cual es $x^3$. Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^3} - \dfrac{x}{x^3} + \dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{4x^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}}{4 - \dfrac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(4 - \dfrac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{4 - 0} = \frac{0}{4} = 0$$

**Ejemplo:**

Sea $f(x) = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$. Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Solución)

Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo del radical, se divide el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{\dfrac{2x^2}{x^2} - \dfrac{5}{2x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Puesto que $x \to -\infty$, $x < 0$; por tanto, $|x| = -x$. Se tiene entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3x}{-x}+\frac{4}{-x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3-\frac{4}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-3-\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-3-\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}(-3) - \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty}(2) - \lim\limits_{x \to -\infty}\frac{5}{x^2}}} = \frac{-3-0}{\sqrt{2-0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

## Evaluación

1. Capacidad de análisis y abstracción de los conceptos de límites infinitos y límites al infinito.
2. Habilidad de interpretación en la resolución de ejercicios resueltos.
3. Participación, solidaridad, honestidad, orden y limpieza en el desarrollo de la clase.
4. Resumen de teoremas en cortes de cartulina de 7 cm x 13 cm.

# Clase No. 8

## Clase Práctica

**Objetivos:**

1. Determinar el límite lateral de una función.
2. Interpretar analítica y gráficamente el límite lateral de una función.
3. Aplicar los teoremas de límites infinitos y límites al infinito en la resolución de ejercicios.
4. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden, limpieza e interés en el desarrollo de la clase práctica.

**Tema:**

Limite de una función.

**Sumario:**

1. Ejercicios de límites laterales.
2. Ejercicios de límites infinitos.
3. Ejercicios de límites infinitos.

**Estrategias metodológicas:**

1. Presentar en papelógrafo los teoremas de límites infinitos y al infinito.
2. Proponer ejercicios en forma progresiva, a fin de que los estudiantes se motiven y adquieran habilidad para la aplicación correcta de los teoremas de límites infinitos y al infinito.
3. Sugerir que de cada tipo de ejercicios, se resuelvan al inicio en forma conjunta (profesor – estudiantes); seguidamente, orientar a los estudiantes que resuelvan los ejercicios que se propongan bajo la orientación del profesor.

## Ejercicios:

## LIMITES LATERALES

En los ejercicios 1 – 6, evalúe los siguientes límites, si existen.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}$
3. $\lim\limits_{x\to -3^+} \left(1+\sqrt{3+x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{(x-2)(x+)}$
5. $\lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{|x-7|}{x-7}$
6. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$

En los ejercicios 7 – 12, evalúense los límites que se indican. Trace la gráfica de cada función.

7. $f(t)=\begin{cases} t+4 & \text{si} \quad t\le -4 \\ 4-t & \text{si} \quad -4<t \end{cases}$; $\lim\limits_{t\to -4^+} f(t)$; $\lim\limits_{t\to -4^-} f(t)$; $\lim\limits_{t\to -4} f(t)$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 8-2x & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

9. $g(t)=\begin{cases} 2t+3 & \text{si} \quad t<1 \\ 4 & si \quad t=1 \\ t^2+2 & \text{si} \quad 1<t \end{cases}$; $\lim\limits_{t\to 1^+} g(t)$; $\lim\limits_{t\to 1^-} g(t)$; $\lim\limits_{t\to 1} g(t)$

10. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

11. $F(x)=\begin{cases} |x-1| & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \\ |1-x| & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$; $\lim\limits_{t\to 1^-} F(x)$; $\lim\limits_{t\to 1} F(x)$

12. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad -2\le x\le \text{-}2 \\ -2 & \text{si} \quad -2<x \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{t\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{t\to 2} f(x)$

## LIMITES INFINITOS

Determine los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{t \to 2^+} \dfrac{t+2}{t^2-4}$
2. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$
7. $\lim\limits_{t \to -4^-} \left( \dfrac{2}{t^2+3t-4} - \dfrac{3}{t+4} \right)$
8. $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{-t+2}{(t-2)^2}$
9. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$
10. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sqrt{3+y^2}}{y^2}$
11. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$
12. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3-3}{x^2+x^3}$

## LIMITES AL INFINITO

Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2t+1}{5t-2}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$
4. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^2-3y}{y+1}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$
6. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^3-4}{5y+3}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( 3x + \dfrac{1}{x^2} \right)$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$
9. $\lim\limits_{w \to +\infty} \dfrac{\sqrt{w^2-2w+3}}{w+5}$
10. $\lim\limits_{t \to +\infty} \left( \dfrac{2}{t^2} - 4t \right)$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{r^2+4}}{r+4}$
12. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{\sqrt{y^4+1}}{2y^2-3}$

**Evaluación:**

1. Se evaluará solidaridad, honestidad, participación e interés de los estudiantes en el desarrollo de la clase práctica.
2. Evaluar cualitativamente la habilidad y destreza demostrada en la resolución de ejercicios, así como el trazado de gráfica.
3. Participación correcta y oportuna al momento del desarrollo de la clase práctica.

# Clase No. 9

## Trabajo Grupal

**Objetivos:**

1. Evaluar límites laterales de funciones dadas y trazar su gráfica.
2. Aplicar los teoremas de límites infinitos y al infinito en la resolución de ejercicios.

**Tema:**

Limite de una función.

**Sumario:**

1. Ejercicios de límites laterales.
2. Ejercicios de límites infinitos.
3. Ejercicios de límites infinitos.

**Estrategias metodológicas:**

Asignar de acuerdo al criterio del docente ejercicios de los tres tipos, los que se deben resolver en grupo, tomando en cuenta las posibilidades de tiempo; que se haga exposición en la pizarra de algunos de los ejercicios resueltos.

**Ejercicios:**

**LIMITES LATERALES**

Evalúen los siguientes límites, si existen. Trace la gráfica.

1. $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4 - x}$
2. $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{\dfrac{4x}{x - 4}}$
3. $\lim\limits_{x \to 7^+} \dfrac{7 - x}{|x - 7|}$
4. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{|x - 5|}{x - 5}$

5. Sea. $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3-x & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$. Determine: $\lim\limits_{tx\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

6. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & si \quad x=1 \\ 3-x & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{t\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{t\to 1} f(x)$

**LIMITES INFINITOS**

Determine los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{(x-3)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2-2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x^2+7x}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^-} \dfrac{1}{5x-3}$

5. $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^+} \dfrac{x^3}{4-9x^2}$

**LIMITES AL INFINITO**

Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4-7x}{2+3x}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+11}{\sqrt{x+1}}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x}{x^2+9}$

4. $\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4y+1}}{10-3y}$

5. $\lim\limits_{y\to -\infty} \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{4y-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^4+3x^2-1}{x^3+x}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6-7x}{(3+2x)}$

**Evaluación:**

Tomar en cuenta la labor desarrollada por los estudiantes en el trabajo en equipo, evaluando compañerismo, presentación de su trabajo, orden y disciplina en el aula, así como la exposición de los ejercicios.

# Clase No. 10

**Objetivos:**

1. Explicar el concepto de continuidad de una función en un número.
2. Diferenciar funciones continuas y discontinuas.
3. Explicar los tipos de discontinuidades.
4. Enunciar y ejemplificar los teoremas de continuidad.
5. Definir continuidad de una función en un intervalo.
6. Desarrollar habilidades y destrezas en la resolución de ejercicios.
7. Mostrar interés, orden, interés y espíritu de cooperación en la participación activa durante el desarrollo de la clase.

**Tema:**

Continuidad de una función.

**Sumario:**

1. Continuidad de una función en un número.
2. Continuidad de una función en un intervalo.

**Estrategias metodológicas:**

1. A partir de la discusión y el análisis de gráfico de funciones promover la participación conjunta (profesor – estudiantes) para llegar a la formulación de la definición de continuidad de una función en un número, así como los distintos tipos de discontinuidades.
2. Análisis y discusión de ejemplos relativos a funciones continuas y discontinuas, y aplicación de los teoremas de continuidad.
3. Introducir el concepto de continuidad de una función en un intervalo mediante ejemplo.
4. Análisis y discusión de ejemplos relativos a funciones continuas en un intervalo.

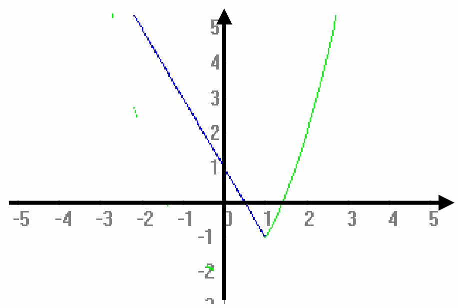
## Actividades a desarrollar:

1. Continuidad de una función en un número.

El concepto de continuidad, discontinuidad y los tipos de discontinuidades se hará mediante el análisis de las siguientes ilustraciones. Gráficamente, cuál de ellas no tiene salto y cuál tiene salto. ¿Está definida f en 1; g en 2 y h en 2? ¿Existe el límite de f(x) cuando x tiende a 1? ¿Existe el límite de g(x) cuando x tiende a 2? ¿Existe el límite de h(x) cuando x tiende a 2? En qué el límite de la función cuando x tiende a un número real a es igual a la función definida en dicho número.

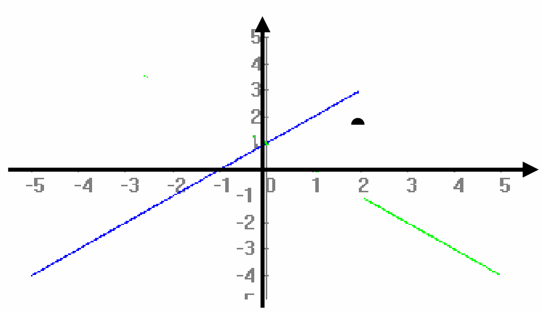
(a) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

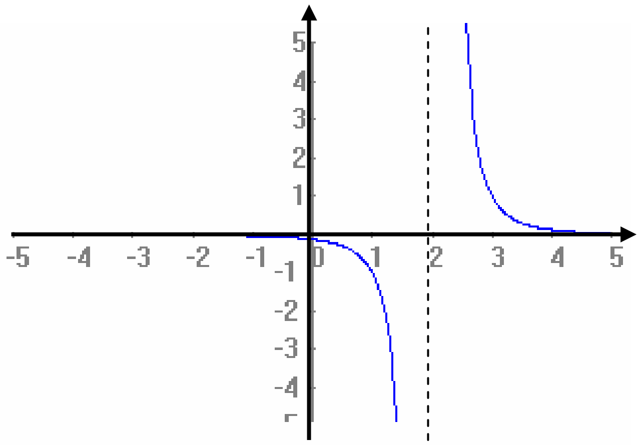



(b) Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & si \quad x = 2 \\ 1-x & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$



(c) Sea h la función definida por $h(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$




Definición: Continuidad de una función en un número.

Se dice que la función f es continua en el número a si y sólo si satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) f(a) existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe $= f(a)3$

También, diremos que una función f es continua en un número a si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ f(a)

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es discontinua en a. Existen tres tipos de discontinuidades: removible (o eliminable), esencial (o no removible) e infinita. (Reafirmar cada una de ellas mediante la participación de los estudiantes)

## Ejemplos:

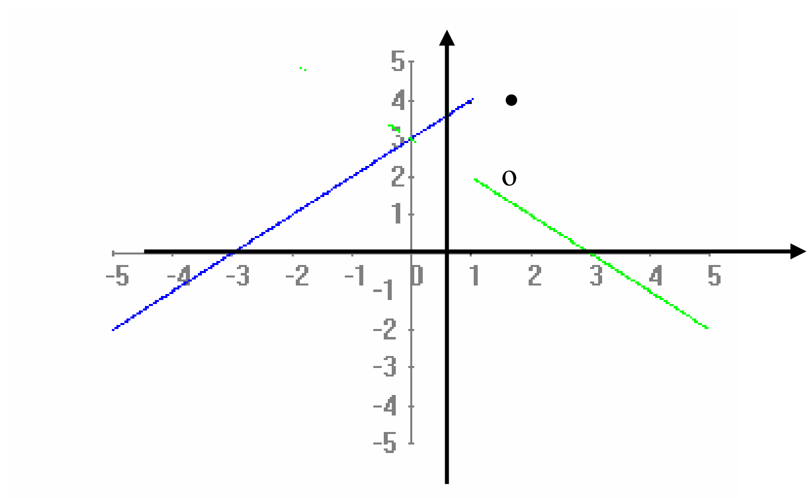
(a) Discutir la continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

en el número 3. Trace la gráfica.

## Solución:

Su gráfico:




Del gráfico se observa que la función f es discontinua en 1. Comprobémoslo analíticamente, haciendo uso de la definición de continuidad de una función en un número.

(a) f(1) = 3 + 1 = 4. Esto es, f está definida en 1.

(b) Para verificar si el límite de f existe cuando x tiende a 1; es necesario, determinar el límite por la derecha y por la izquierda cuando conforme x se aproxima a 1 través de valores menores que 1; y conforme x se aproxima a 1 a través de valores mayores que 1. Si ambos límites son iguales el límite de la función existe.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 + x) = 4$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$. Como

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$; se sigue que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

Por lo tanto, la función f es discontinua en 1, y corresponde a una discontinuidad esencial (no removible) ¿Por qué?

**Teorema 1.**

Si f y g son funciones continuas en un número a, entonces:

(i) $f \pm g$ es continua en a;

(ii) $f \cdot g$ es continua en a;

(iii) $f/g$ es continua en a, si $g(a) \neq 0$.

**Teorema 2**

Una función polinomial es continua en todo número.

**Ejemplo:**

Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$, entonces f es una función polinomial, y por el teorema 2, f es continua en todo número. Esto es, si a es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-2x^2 + 3x - 1) = -2a^2 + 3a + 1 = f(a),$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; y en consecuencia, f es continua en todo número a.

**Teorema 3**

Una función racional es continua en todo su dominio.

**Ejemplo:**

Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$$

**Solución:**

El dominio de f es el conjunto **R** de los números reales excepto aquellos para los que $x^2 - 4 = 0$.

Como $x^2 - 4 = 0$, se sigue que $x = \pm 2$, y el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto –2 y 2. Debido a que f es una función racional, por el teorema 3, f es continua en todos los números reales diferentes de –2 y 2.

**Teorema 4.**

La función raíz cuadrada es continua en todo su dominio.

**Ejemplo:**

Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

**Solución:**

El dominio de f es el conjunto **R** de los números reales x tales que $25 - x^2 \geq 0$. Resolviendo esta inecuación, se obtiene que el dominio de f es el conjunto de los números reales x tales que $x \in [-5. 5]$. Debido a que f es una función raíz cuadrada, por el teorema 4, f es continua en todos los números reales que pertenecen al intervalo abierto (-5, 5).

**Teorema 5**

Límite de una función compuesta.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

**Teorema 6**

Continuidad de una función compuesta.

Si la función g es continua en a y la función f es continua en g(a), entonces la función compuesta f o g es continua en a.

2. Continuidad de una función en un intervalo.

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Esta función tiene por dominio [-3, 3). Por el teorema 4, la función f es continua en todo número del intervalo abierto (-3, 3), se dice que la función f es continua en el intervalo abierto (-3, 3).

Definición: Continuidad en un intervalo abierto.

Se dice que una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Para la continuidad en un intervalo cerrado debe extenderse el concepto de continuidad a continuidad a los extremos del intervalo cerrado.

Definición: Continuidad por la derecha.

Se dice que la función f es continua por la derecha en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) f(a) existe.

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe.

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Definición: Continuidad por la izquierda.

Se dice que la función f es continua por la izquierda en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(iv) f(a) existe.

(v) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe.

(vi) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

**Ejemplo:**

Verifique la función h definida por $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en el intervalo cerrado [-2, 2].

**Solución:**

1. h es continua en (-2, 2).

Para todo c $\in$ (-2, 2), h está definida. Además,

$$\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - c^2} = f(c)$$

Por lo tanto,

h es continua en c $\in$ (-2, 2)

2. Continuidad por la izquierda.

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$$

3. Continuidad por la derecha.

$$\lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$$

Por lo tanto, la función h es continua en [-2, 2]

**Definición**: Continuidad en un intervalo semiabierto.

(i) Una función cuyo dominio incluye el intervalo semiabierto [a. b) es continua en [a, b) si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la derecha en a.

(ii) Una función cuyo dominio incluye el intervalo semiabierto (a. b] es continua en (a, b] si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la izquierda en b.

**Ejemplo:**

Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

**Solución:**

Primero se determina el dominio de f. La función f está definida en todo número excepto cuando $x = 3$ o cuando $25 - x^2 < 0$ [esto es, cuando $x > 5$ o $x < -5$]. Por tanto, el dominio de f es $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como $\lim_{x \to -5^+} f(x) = 0 = f(-5)$ y $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 0 = f(5)$; se sigue que, f es continua por la derecha en –5 y continua por la izquierda en 5. Además, f es continua en los intervalos $(-5, 3)$ y $(3, 5)$. En consecuencia, f es continua en $[-5, 3) \cup (3, 5]$.

**Evaluación:**

1. El profesor evaluará mediante preguntas de control la comprensión del tema.
2. El profesor evaluará la habilidad de interpretación y análisis de los contenidos desarrollados en la clase.
3. Evaluar cualitativamente la participación activa de los estudiantes en función de los objetivos propuestos.

# Clase No. 11

**Objetivos**

1. Aplicar la definición de continuidad de una función en un número en la resolución de ejercicios.
2. Aplicar las definiciones de continuidad en un intervalo en la resolución de ejercicios.
3. Participar activamente y colaborar con el desarrollo de la clase.
4. Fomentar la solidaridad, honestidad, orden y limpieza en la resolución de los ejercicios.

**Tema:**

Continuidad de una función.

**Sumario:**

Ejercicios de continuidad.

**Estrategias metodológicas:**

1. El profesor orientará en los subgrupos de trabajo que se discutan y socialicen la resolución de cada uno de los ejercicios propuestos.
2. Cada subgrupo expondrá en plenario un ejercicio asignado por el profesor. Se aclararán dudas y dificultades surgidas en las diferentes exposiciones de los estudiantes.

**Ejercicios:**

**CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN NÚMERO.**

Determine si cada una de las funciones siguientes es continua o discontinua en el número indicado. Si es discontinua, diga si es removible o esencial. Trace la gráfica.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}; \quad a = -3$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}; \quad a = 4$

3. $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$; $a = 5$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-25}$; $a = \pm 5$

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$ ; $a = 0$

6. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1-x & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$ ; $a = 1$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x = 2 \\ 4-x^2 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$ ; $a = 2$

8. $f(x) = \begin{cases} 6+x & \text{si} \quad x < -2 \\ 2-x & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$ ; $a = \pm 2$

## CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

Determine el dominio de la función, y después determine para cual de los intervalos indicados es continua la función.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$; (3, 7), [-6, 4], (-∞, 0), (-5, +∞), [-5, +∞), [-10, -5]

2. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$; (-∞, 0], [0, +-∞), (0, 2), [2, +-∞), (2, +-∞)

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; (0, 1), (-1, 1), [0, 1], (-1, 0], (-∞, -1], (1, +∞)

4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$; (0, 4), (-2, 2), (-∞, -2], (2, +∞), [-4, 4], (-2, 2]

5. $g(x) = \sqrt{x^2-9}$; (-∞, -3), (-∞, -3], (3, +∞), [3, +∞), (-3, 3)

6. $g(x) = \sqrt{16-x^2}$ : (-4, 4), [-4, 4], (-4, 4], [-4, 4)

7. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad -2 \le x < 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$ ; $[-2,3]$

8. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -4 \le x \le -2 \\ 2-x & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \end{cases}$ ; $[-4,1]$

**Evaluación**

1. Valorar la capacidad de interpretación y resolución de los ejercicios propuestos.
2. Valorar la colaboración, participación y argumentación en la resolución y exposición de los ejercicios propuestos.

# SISTEMA DE EVALUACIÓN

Como la evaluación es un aspecto fundamental de toda institución educativa, nos proponemos en esta unidad didáctica constatar en el transcurso y desarrollo de las actividades planificadas, el progreso de los estudiantes con relación a las metas propuestas; todo esto ayudará al docente a detectar si en las actividades la estrategia utilizada y los recursos usados fueron los más adecuados, en caso contrario, realizar los ajustes necesarios. Esta forma de evaluación estará dirigida tanto al docente como tutor en su ejercicio tutorial como a estudiantes en su desarrollo como actores de sui propio conocimiento.

**En función del profesor se evaluará:**

- Las estrategia de enseñanza utilizada.
- Los recursos y medios didácticos empleados.
- Si orienta correctamente el desarrollo de cada actividad propuesta.
- Si aclara la importancia y aplicación que tienen los temas a estudiar con relación a otros
- campos del saber humano.

**En función de los estudiantes se evaluará:**

- Aspectos cognoscitivos:
    - Conocimientos (Definiciones y Teoremas)
    - Habilidades (Razonamiento lógico, graficado y resolución de ejercicios y problemas)
- Aspectos afectivos:
    - Actitud hacia las funciones y sus gráficas, teoremas y demostraciones (reconocimiento de su utilidad, funcionabilidad y aplicabilidad)
- Aspectos manipulativos:
    - Habilidades prácticas (mediciones, trazado y construcciones)

Para el cumplimiento de estas actividades proponemos aplicar los tres momentos de la evaluación: Diagnóstica o inicial, formativa o de proceso y sumativa o de resultado.

## EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Este tipo de evaluación nos permitirá indagar sobre aquellos conocimientos que los estudiantes ya poseen y que son necesarios para la construcción de los nuevos conocimientos, esto se logrará proponiendo algunas actividades individuales o de grupo; así, como conocer que capacidades, habilidades y destrezas adquirieron en años anteriores, esto nos permitirá activar el conocimiento previo que ellos poseen. Por último, conocer las actitudes que tienen ellos acerca del aprendizaje de las matemáticas ya que para ello debe de haber estímulo y motivación. Para este tipo de evaluación proponemos la realización de una prueba escrita antes de dar inicio al estudio de limite y continuidad de figuras funciones. A partir de esta evaluación podremos saber lo que el alumno conoce sobre el tema a desarrollar y aprovechar esta información a la hora de formar los pequeños grupos de trabajo. De esta forma los aprendizajes se vuelven más significativos para los alumnos porque les ven una utilidad práctica o de aplicación en su vida cotidiana.

En fin, con la realización de esta prueba conoceremos cuáles son aquellos conocimientos que poseen o no los estudiantes para la construcción de los nuevos conocimientos, y sobre la base de las deficiencias detectadas orientar actividades (círculo de estudio, trabajo extraclase, visitas a bibliotecas, etc.) que permitan superarlas.

## EVALUACIÓN FORMATIVA

Con esta forma de evaluación pretendemos darle seguimiento en forma constante y sistemática a todo el proceso de aprendizaje de los estudiantes, incidiendo positivamente en él. Además se establecerán los medios de verificación que permitan determinar a lo largo del curso, los progresos reales de los alumnos.

Además nos permitirá proporcionarles a ellos ( alumnos ) medios y oportunidades para subsanar sus deficiencias de aprendizaje, en forma oportuna.

Mediante esta forma de evaluación el profesor va recogiendo información pasando de grupo en grupo mientras trabajan, también se atenderá las demandas de los grupos y de los alumnos que se lo soliciten si se lo consideran apropiado también pueden irse deteniendo entre tarea y tarea para comprobar que se ha avanzado correctamente. En este proceso de evaluación mediante los pequeños grupos formados nos permitirá valorar las transferencia de habilidades a problemas similares y a la vez garantizar que son capaces de aplicarlas.

**Formas de evaluación formativas**

1. Las llamadas presentaciones orales o exposiciones, las cuales constituyen una herramienta metodológica valiosa en el aprendizaje de los contenidos y como forma de integración grupa.
2. Otro aspecto a destacar son los reportes por escrito, o ensayos donde se pretende un grado de investigación de los alumnos y por ende las consultas.

En esta forma de evaluación destacamos los siguientes aspectos:

- ♦ Comprensión y memorización de los nuevos conocimientos.
- ♦ Habilidades matemáticas.
- ♦ Destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
- ♦ Valoración de los estudiantes acerca de la función del tema en estudio en el quehacer cotidiano, la ciencia y la tecnología.
- ♦ Capacidad para trabajar individual y colectivamente, así como la preferencia por un tipo de actividad.

Los instrumentos que utilizaremos en esta forma de evaluación, son:

1. Guía de observación para los trabajos en pequeños grupos y los trabajos prácticos (trabajos escritos y exposiciones) de los estudiantes con el objetivo de conocer aspectos afectivos relacionados con el aprendizaje de los contenidos relativos a congruencia y semejanza de figuras geométricas.

2. Cuestionario de preguntas concretas dirigida a los estudiantes con el fin de determinar cuáles aspectos están incidiendo negativamente en el proceso enseñanza – aprendizaje, que nos permitan reorientar nuestras acciones que conlleven a superar dichas deficiencias en pro del mejoramiento de nuestra práctica educativa.

3. La realización de pruebas sencillas (orales o escritas) para conocer lo que han captado los estudiantes al final de cada actividad.

## EVALUACIÓN SUMATIVA

Al finalizar las tareas es conveniente reservar un tiempo para comprobar qué han aprendido los alumnos en relación con los objetivos previstos, tanto de la unidad estudiada como del trabajo en pequeños grupos.

Con esta forma de evaluación mediremos el grado de asimilación y adquisición de los conocimientos que han tenido los estudiantes con respecto a los contenidos impartidos. Estos nos proponemos evaluarlos mediante la resolución de ejercicios, lo mismo que problemas relativos a situaciones concretas, la capacidad de interpretar, aplicar definiciones y teoremas, destreza adquirida en el uso y manejo de instrumentos geométricos, así como la de razonar lógicamente las distintas formas de resolverlo y las habilidades en el graficado.. Este tipo de evaluación la haremos mediante la aplicación de una prueba escrita, la que será aplicada por el docente, esta de forma individual y plantillas para las grupales.

### Formas de evaluación sumativas

1. Una de las tradicionales formas de evaluación la constituyen la prueba escrita la cual es sumativa.
2. Pruebas prácticas como laboratorios, trabajos de campo, entre otras
3. Las llamadas presentaciones orales o exposiciones, las cuales constituyen una herramienta metodológica valiosa en el aprendizaje de los contenidos y como forma de integración grupa.

4. Otro aspecto a destacar son los reportes por escrito, o ensayos donde se pretende un grado de investigación de los alumnos y por ende las consultas.

En conclusión profesores y alumnos deben realizar la evaluación, percibiendo los procesos de verificación, no solo como requisitos formales, generadores de angustia y ansiedad, sino como medio indispensable de su valoración en su desarrollo como estudiante y como miembro de una sociedad.

**PLANIFICACIÓN**
**BLOQUE: LÍMITE Y CONTINUIDAD**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **CONCEPTUALES**<br>Definir intuitivamente límite de una función -<br>Definir continuidad de una función..<br>Enunciar los teoremas para calcular límites.<br>PROCEDIMENTALES<br>Interpretar geométricamente las definiciones limite y continuidad.<br>Diferenciar los limites al infinito con los límites en infinitos.<br>Diferenciar la continuidad de la continuidad.<br>Interpretar geométricamente los teoremas acerca de límite de manera intuitiva.<br>Graficar en $R^2$ figuras donde intervengan el limite y la continuidad.<br>Aplicar las definiciones y teoremas en la resolución de ejercicios y problemas de graficado.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>Participar activamente en el aula de clase resolviendo ejercicios y problemas relacionados con el límite y la continuidad.<br>mostrar interés, responsabilidad , | **CONCEPTUALES**<br>Noción intuitiva de límite.<br>Definición de límite y continuidad<br>Definición de continuidad, discontinuidad y continuidad en un número y en un intervalo.<br>PROCEDIMENTALES<br>Interpretación geométrico de limite de una función.<br>Interpretación geométrica de los teoremas acerca de limite de una función.<br>Clasificación e identificación de los teoremas de limite de una función..<br>Aplicación de las definiciones y teoremas acerca de limiten la resolución de ejercicios a Problemas sencillos. | Aplicación y de prueba diagnóstica para explorar ideas previas a su aprendizaje.<br>Búsqueda de información consistente que conlleve a valorar la importancia del aprendizaje del limite de una función.<br>Identificar en el entorno lugares donde sea posible la aplicación del límite cono función.<br>Inducir a los estudiantes a que interpreten y formulen correctamente las definiciones y teoremas de limite de una función.; unilaterales. Infinitos y al infinito, lo mismo que la continuidad y discontinuidad.<br><br>Conferencias cortas y exposiciones por parte de los alumnos de temas específicos.<br>Estudios de casos específicamente a aquellos relacionados con la discontinuidad esencial o removible.<br>Seminarios en la aplicabilidad de resolución de problemas en los pequeños grupos formados utilizando el trabajo cooperativo.<br>Realización de trabajos individuales y grupales mediante clases prácticas de resolución de ejercicios y problemas. | Documentos de apoyo brindado por los profesores del Año común<br>Folleto.<br>Hoja de ejercicios.<br>Papel bond blanco.<br>Marcadores.<br>Papelógrafos.<br>Regla graduada.<br>Calculadora.<br>Estuche geométrico. | En los trabajos grupales evaluar orden, aseo, estética, responsabilidad, participación, compañerismo y cientificidad en los resultados obtenidos.<br>Presentar, exponer y defender de manera individual y grupal las conclusiones obtenidas de los trabajos asignados.<br>Verificar el uso del lenguaje algebraico , geométrico y funcional.<br>Preguntas de comprobación.<br>Clases Prácticas.<br>Pruebas Cortas.<br>Prueba de bloque.<br>Prueba diagnóstica.<br>Revisión de trabajos asignados de forma extramuros. | 22 horas |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| comportamiento, estética en la realización de trabajos individuales y grupales orientados.<br>Valorar la importancia del estudio de límite y continuidad.<br>Fomentar el trabajo en equipo, el compañerismo, la solidaridad y el respeto de y con sus compañeros.<br>Adquirir habilidad y destrezas en el uso y manejo de materiales e instrumentos geométricos para el trazado de gráficas..<br>Adquirir habilidades de razonamiento lógico en la resolución de ejercicios y problemas de límite.<br>Adquirir habilidades y destrezas en la interpretación y resolución de ejercicios y problemas. | | | | | |

## PLANIFICACIÓN TEÓRICA

La planificación es un proceso que comprende la selección de alternativas tendientes a satisfacer las necesidades del docente, así como las tareas que en función de ellas será necesario llevar a cabo, incluidas las formas y los medios que resulten más convenientes.

### La importancia de la planificación radica en:

- Dirigir y orientar el desarrollo de los contenidos en función de los objetivos; es decir, enfoca la atención hacia los mismos.
- Reduce al mínimo la improvisación, eliminando la incertidumbre y el cambio.
- Facilita medir la acción individual y colectiva.
- Permite establecer una organización de trabajo de una forma más eficiente.
- Ayuda a integrar los esfuerzos de todos sus componentes para lograr el objetivo planteado.

## PLANIFICACIÓN TEMPORIZADA

| ACTIVIDAD NO. | CONTENIDO | ACTIVIDAD DE EXTENSIÓN | OBSERVACIONES |
|---|---|---|---|
| 1 | Noción intuitiva y definición de límite | Refuerzo mediante consultas. | Orientar determinados ejercicios y problemas para la consulta establecida. |
| 2 | Teoremas para calcularlos | Teórico-práctico | Teorema referidos a límites |
| 3 | Clase práctica de la actividad 1 y 2 | Se orienta trabajo grupal uno. | Evaluación |
| 4 | Limites unilaterales | Prueba individual de actividades 1,2y 3 | Evaluación |
| 5 | Limites en infinito y al infinito. | Refuerzo mediante consultas. | Orientar determinados ejercicios y problemas para la consulta establecida. |
| 6 | Clase práctica | Prueba individual de las actividades 4 y5 | Evaluación |
| 7 | Clase práctica | Trabajo grupal de las actividades 4,5y 6 | Evaluación |
| 8 | Continuidad de una función y en un número | Conferencia | |
| 9 | Continuidad de una función y en un número | Trabajo práctico en aula. | Orientar determinados ejercicios y problemas para la consulta establecida. |
| 10 | Continuidad en un intervalo. | Conferencia | |
| 11 | Continuidad en un intervalo. | Trabajo práctico en aula | Trabajo extramuros evaluado. |
| PRUEBA DE BLOQUE | | | |

# BIBLIOGRAFÍA


- Antúnez, S. (1992). **Del Proyecto Educativo al Aula**. Editorial Graó. Barcelona, España.

- García, J.M. **Bases Pedagógicas de la Evaluación**. Ministerios de Educación, Cultura y Deporte (MECD).

- Morales Molina, Xavier.(Julio / agosto del 2003).**Estrategias para trabajar en grupos en el aula.**

- Zill, Dennis G. ( 1987).**Cálculo con Geometría Analítica.**

- Antón, Howard.(1991). **Cálculo y geometría Analítica. Tomo I.**

- Granville, William Antony.(1991). **Cálculo Diferencial e Integral.**

- Colectivo de profesores del Año Común.(2000). **Apuntes de Fundamentos de Matemática I.**