**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA**

**UNAN – LEON**

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES**

**DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

## UNIDAD DIDACTICA

# ALGEBRA VECTORIAL

**TRABAJO MONOGRAFICO, PRESENTADO POR:**

**BR.** ***JOSE GABRIEL TORRES ZELEDON***
**BR.** ***MARIO CESAR MORALES CASANOVA***

**PARA OPTAR AL TITULO DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**
**MENCION EN MATEMATI CAS.**

**TUTOR:**

**Lic.** ***RONALD LOPEZ FLORES***

**LEON, NOVIEMBRE 2003**

# DEDICATORIA

**A Dios sobre todas las cosas, por haberme dado sabiduría, fortaleza y permitirme así llegar a culminar con éxito mi carrera universitaria.**

**A mis padres, que siempre me brindaron apoyo moral y espiritual y, en especial a:**

- **Reyna María Casanova.**
- **Angela Morales.**
- **Martha Irene Osejo Treminio.**

***Mario César Morales Casanova***

# DEDICATORIA

**A Dios, nuestro padre celestial, por iluminar mi camino y darme la fortaleza necesaria para seguir labrando mi futuro.**

**A mis padres, mis hijos y especialmente, a mi esposa VICTORIA DEL CARMEN LOPEZ MUÑOZ que siempre estuvo alentándome para seguir mi camino.**

***José Gabriel Tórres Zeledón***

# AGRADECIMIENTO

Para la realización de este trabajo siempre contamos con personas, amigos y familiares que nos proporcionaron apoyo moral y espiritual.

- A los docentes de la Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades que nos proporcionaron sus conocimientos (científico – pedagógico) durante los cinco años de estudios universitarios.

- Al Licenciado Ronald López Flores, que nos proporcionó de manera sincera su ayuda para la realización y finalización de nuestro trabajo monográfico.

# I N D I C E

# I. INTRODUCCION

A lo largo de la historia, los (as) estudiantes han considerado a las matemáticas como la asignatura que más le atemoriza, la que más miedo le inspira, la que más preocupación le genera y en la que el número de reprobados es mayor con respecto a las otras asignaturas.

Con la finalidad de romper este esquema sobre la percepción que tienen los (as) estudiantes sobre las matemáticas y, estando conscientes del nuevo rol que debemos jugar en el proceso de transformación que actualmente vive el sistema educativo, nos hemos dado a la tarea de elaborar una unidad didáctica referente al Álgebra Vectorial, con el propósito de contribuir a mejorar el proceso enseñanza – aprendizaje, y así, lograr los objetivos que se proponen en las diferentes etapas de elaboración y reelaboración de los conocimientos por parte de los discentes.

Hemos escogido este tema, por su importancia y aplicación en Geometría y Física.

Con el desarrollo de la Unidad Didáctica del Álgebra Vectorial, pretendemos que los (as) estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento, de abstracción, de interpretación, de comprensión, de generalización, de deducción, de inducción, etc., así mismo, fomentaremos el trabajo cooperativo, la solidaridad, la honestidad y la responsabilidad en el cumplimiento de las tareas que se le asignen. Además, pretendemos que el docente sea un guía, un facilitador del aprendizaje de los (as) alumnos (as) y, que tenga en cuenta las necesidades y el nivel cognitivo de los (as) alumnos (as) y las características del centro de estudio con el propósito de que cada uno de los (as) estudiantes logre su independencia, su autonomía y sean constructores de sus propios conocimientos a través de un aprendizaje funcional.

Proponemos una metodología activa – participativa que facilite el proceso enseñanza – aprendizaje de los contenidos del Álgebra Vectorial de forma sencilla y sin complicaciones.

La unidad de Álgebra Vectorial está contemplada desarrollarse en el I semestre del IV año de Educación Secundaria del programa oficial del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), y adecuados a los nuevos enfoques de 1996.

Con nuestro trabajo no estamos queriendo cambiar el desarrollo del contenido, sino que es un avance al desarrollo lógico de los conocimientos científicos y pedagógicos que como maestros debemos mejorar para que el estudiante pueda asimilarlo a través de la aplicación de procedimientos prácticos, de descripción y análisis de situaciones cotidianas.

Es por eso que nuestro aporte va dirigido a los jóvenes y docentes que imparten las Matemáticas en Educación Secundaria, para que sepan dar uso apropiado relativamente en la adquisición  o enseñanza del conocimiento; logrando así el alcance de los objetivos propuestos.

Esperamos que esta Unidad Didáctica sea de provecho para los docentes, en beneficio de nuestros (as) alumnos (as).

# II. OBJETIVOS

## II..1. OBJETIVO GENERAL

Contribuir al mejoramiento del proceso enseñanza – aprendizaje del Álgebra Vectorial, proponiendo alternativas metodólogicas desde una perspectiva constructivista.

## II.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Elaborar una Unidad Didáctica sobre el estudio del Álgebra Vectorial.

2. Aplicar el modelo Constructivista – Humanista para el desarrollo de la Unidad Didáctica.

3. Proponer estrategias de enseñanza - aprendizaje que permita a los (as) estudiantes apropiarse de los conocimientos relativos al Álgebra Vectorial.

## III. PRESENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDACTICA

La presente Unidad Didáctica tiene como principal propósito proveer a los docentes de Matemáticas de Cuarto Año de Educación Secundaria de una programación que les permita:

- Eliminar el azar y la improvisación (en sentido negativo);
- Eliminar los programas incompletos, ya que incita a una reflexión sobre la secuenciación y temporalización;
- Evitar la pérdida de tiempo y la realización de esfuerzo en vano;
- Sistematizar, ordenar y concluir lo programado;
- Ser flexible dando margen a la creatividad y a la reforma de contenidos;
- Adoptar el trabajo pedagógico a las características culturales y ambientales del contexto;

y, por ende, contribuir a la mejora del proceso Enseñanza – Aprendizaje del Álgebra Vectorial, aplicando Metodologías Activas Participativas en que los estudiantes sean el principal protagonista en la construcción de los nuevos conocimientos y el docente un orientador – facilitador, en donde su intervención sea la de establecer las relaciones entre los conocimientos previos y el nuevo contenido, analizando su importancia, aplicabilidad y su relación con otros campos del saber humano, logrando de esta manera que el aprendizaje de los nuevos conocimientos sea significativo y funcional.

Mediante la aplicación de esta Unidad Didáctica (Didáctica del Álgebra Vectorial), pretendemos desarrollar en los estudiantes habilidades de razonamiento, interpretación, comprensión, generalización, inducción, deducción, síntesis, etc., así como destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos. Además, propiciaremos el trabajo cooperativo, la solidaridad, honestidad, fraternidad, orden y estética.

El Álgebra Vectorial se contempla su estudio en el primer semestre del cuarto año de educación secundaria precedida de la unidad de Geometría. Para el desarrollo de este contenido se necesitan 20 horas clases; y, está dirigida a estudiantes cuyas edades oscilan entre lo 15 y 18 años.

El Álgebra Vectorial se relaciona con las unidades del programa vigente de Educación Secundaria, siendo ellas: Aritmética, Álgebra, Funciones y Geometría.

Para el estudio de este tema los estudiantes poseen como conocimientos previos los siguientes:

- ♦ Operaciones aritméticas.
- ♦ Lógica y Teoría de Conjunto.
    - Proposiciones.
    - Operaciones lógicas.
    - Concepto de conjunto. Notación.
    - Relación de pertenencia.
- ♦ Operaciones algebraicas.
- ♦ Ecuaciones lineales con una incógnita.
- ♦ Sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas.
- ♦ Sistema de Coordenadas Rectangulares.
- ♦ Gráfica de ecuaciones.
- ♦ Conocimientos de Geometría Euclidiana:
    - Punto. Recta. Plano.
    - Segmento. Semirrecta. Rayo.
    - Ángulos: Definición. Clasificación.
    - Perpendicularidad y paralelismo.
    - Triángulos: Definición. Clasificación. Rectas y puntos notables.
    - Cuadriláteros: Definición. Clasificación. Propiedades.

Para el desarrollo de esta Unidad Didácticas hay que contar con los siguientes materiales y recursos didácticos:

- ♦ Libro de texto.
- ♦ Folletos.
- ♦ Marcadores permanentes y acrílicos.

- Papelógrafo.
- Regla graduada.
- Escuadra.
- Transportador.
- Compás.
- Calculadora.
- Papel bond blanco.
- Borrador.
- Lápices de colores.
- Lápices de grafito.
- Papel milimetrado.

Siendo los responsables para la utilización, manejo y elaboración de algunos materiales y recursos de esta Unidad Didáctica, son los profesores de matemáticas que imparten clases en cuarto año de educación secundaria, y los estudiantes como participantes.

Además, nos proponemos con el presente trabajo, proveer a los docentes del área de matemática de nuevas estrategias de enseñanza del Álgebra Vectorial, que conduzcan a que el aprendizaje de los nuevos contenidos sea significativo y gratificante para los estudiantes.

## IV. OBJETIVOS DIDACTICOS

**TABLA DE OBJETIVOS DIDACTICOS**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 1. Definir variables escalares y vectoriales, vectores libres, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br>2. Explicar los métodos del triángulo y del paralelogramo para sumar y restar vectores.<br>3. Definir diferencia de vectores.<br>4. Definir vectores colineales, ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales, combinación lineal y base.<br>5. Definir vector, magnitud y dirección de un vector en $\mathbf{R}^2$.<br>6. Definir cada una de las operaciones con vectores en $\mathbf{R}^2$. | 1. Identificar variables escalares y vectoriales.<br>2. Interpretar geométricamente vectores libres, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br>3. Aplicar los conceptos de vectores libres, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto, vector nulo, vector unitario en la resolución de ejercicios.<br>4. Interpretar geométricamente la multiplicación de un vector por un escalar.<br>5. Comprobar geométricamente las propiedades la suma y la multiplicación por un escalar.<br>6. Aplicar las operaciones con vectores libres en la resolución de ejercicios y problemas. | 1. Valorar la importancia del Álgebra Vectorial para interpretar y resolver problemas en el campo de la Física y la Geometría.<br>2. Manifestar hábitos y valores éticos, tales como: Fraternidad, disciplina, honestidad, responsabilidad, orden y limpieza en el cumplimiento de sus tareas escolares.<br>3. Mostrar tenacidad, objetividad y creatividad en la solución de problemas.<br>4. Colaborar con sus compañeros en la comprensión de las distintas situaciones prácticas que se les presenten. |

**TABLA DE OBJETIVOS DIDÁCTICOS**

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 7. Definir en $\mathbf{R}^2$ los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, producto escalar, ángulo entre vectores y distancia entre dos vectores.<br>8. Definir vectores ortogonales, base, base ortogonal y ortonormal entre vectores en $\mathbf{R}^2$. | 7. Deducir las fórmulas para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector en $\mathbf{R}^2$.<br>8. Deducir las ecuaciones para sumar, restar y multiplicar por un escalar en $\mathbf{R}^2$.<br>9. Demostrar y comprobar analíticamente las propiedades la suma y la multiplicación por un escalar en $\mathbf{R}^2$.<br>10. Aplicar las operaciones con vectores en $\mathbf{R}^2$ en la resolución de ejercicios y problemas.<br>11. Expresar un vector coordenado en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>12. Deducir las ecuaciones de la suma, resta y multiplicación por un escalar en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$. | 9. Responsabilizarse en el trabajo grupal e independiente que le ayuden a consolidar sus conocimientos acerca del Álgebra Vectorial.<br>10. Mostrar habilidad y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos. |

## TABLA DE OBJETIVOS DIDÁCTICOS

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| | 13. Aplicar las ecuaciones de suma, restar y multiplicación por un escalar expresados en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en la resolución de ejercicios.<br>14. Aplicar las definiciones de producto escalar, norma, ángulo entre vectores, distancia entre dos vectores, vectores ortogonales, base ortogonal y ortonormal en la resolución de ejercicios.<br>15. Desarrollar habilidades y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>16. Aplicar el razonamiento lógico – matemático en la resolución de ejercicios y problemas. | |

## V. CONTENIDOS

**TABLA DE CONTENIDOS**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 1. Variables escalares y vectoriales.<br>2. Vectores libres en el plano.<br>2.1. Definición. Notación.<br>3. Magnitud de un vector.<br>4. Dirección de un vector.<br>5. Vector opuesto.<br>6. Vector nulo.<br>7. Vector unitario.<br>8. Operaciones con vectores.<br>8.1. Adición de vectores.<br>-Método del triángulo y del paralelogramo.<br>-Propiedades.<br>8.2. Diferencia de vectores.<br>8.3. Multiplicación por un escalar.<br>-Concepto.<br>-Propiedades.<br>9. Vectores colineales.<br>10. Angulo entre dos vectores.<br>11. Desarrollo del vector en el plano en dos vectores no colineales. | 1. Interpretación correcta de los conceptos de variables escalares y vectoriales, vector libre, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br>2. Representación geométrica de vectores libres, vector opuesto, vector nulo, vector unitario en la dirección de un vector.<br>3. Aplicación correcta de los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto, y vector unitario en la resolución de ejercicios.<br>4. Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres.<br>5. Comprobación geométrica de las propiedades de las operaciones con vectores libres. | 1. Valore la importancia del estudio del Álgebra Vectorial.<br>2. Disposición en la realización de trabajos asignados: individuales, grupales y extraclase.<br>3. Presente orden, claridad y cientificidad en la presentación de los trabajos asignados.<br>4. Desarrollo de habilidades y destrezas en el uso y manejo de los instrumentos geométricos.<br>5. Mantenga el diálogo alumno – maestro – alumno. |

**TABLA DE CONTENIDOS**

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| 12. Vectores en $\mathbf{R}^2$.<br>12.1. Concepto. Notación.<br>13. Magnitud de un vector en $\mathbf{R}^2$.<br>14. Dirección de un vector en $\mathbf{R}^2$.<br>15. Operaciones con vectores en $\mathbf{R}^2$.<br>15.1. Adición de vectores.<br>-Definición.<br>-Propiedades.<br>15.2. Diferencia de vectores.<br>15.3. Multiplicación por un escalar.<br>-Definición.<br>Propiedades.<br>16. Producto escalar.<br>17. Angulo entre dos vectores en $\mathbf{R}^2$.<br>18. Distancia entre dos vectores en $\mathbf{R}^2$.<br>19. Vectores ortogonales.<br>20. Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>21. Base ortogonal.<br>22. Base Ortonormal. | 6. Aplicación de las operaciones con vectores libres en la resolución de ejercicios y problemas.<br>7. Diferenciación de vectores colineales y no colineales.<br>8. Determinación de un vector como combinación lineal de los vectores de una base.<br>9. Aplicación de los vectores colineales y no colineales, ángulo entre dos vectores y desarrollo de un vector en dos vectores no colineales en la resolución de ejercicios.<br>10. Deducción de las fórmulas para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector en $\mathbf{R}^2$.<br>11. Deducción de las ecuaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar en $\mathbf{R}^2$. | |

**TABLA DE CONTENIDOS**

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| | 12. Comprobación analítica de las propiedades de la suma y multiplicación por un escalar.<br>13. Aplicación de las ecuaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar en la resolución de ejercicios y problemas.<br>14. Descomposición canónica de un vector.<br>15. Deducción de las ecuaciones de cada una de las operaciones con vectores en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>16. Aplicación de las ecuaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar en la resolución de ejercicios. | |

**TABLA DE CONTENIDOS**

**(Continuación)**

| CONCEPTUALES | PROCEDIMENTALES | ACTITUDINALES |
|---|---|---|
| | 17. Interpretación correcta de los conceptos de producto escalar, ángulo entre dos vectores, distancia entre dos vectores, combinación lineal, base, componentes de un vector con respecto a una base, base ortogonal y ortonormal.<br>18. Aplicación de las fórmulas de producto escalar, norma, ángulo entre dos vectores, distancia entre dos vectores en la resolución de ejercicios.<br>19. Aplicación de los conceptos de combinación lineal, base, base ortogonal y ortonormal en la resolución de ejercicios. | |

## VI. FUNDAMENTO TEORICO

### VI. 1. ASPECTOS PEDAGOGICOS

**Métodos activos**

El método activo en su sentido completo se opone al método receptivo, en el cual el alumno recibe del profesor, maestro o facilitador del manual el conocimiento ya hecho y elaborado, donde sólo tiene que comprender y repetir las soluciones dadas y reproducirlas exactamente en deberes y presenta al alumno los saberes que debe lograr, totalmente organizados, recortados, coordinados y expresados bajo una forma definitiva.

Hay actividad en un sentido más completo y principal para la elaboración misma de su conocimiento y en realizaciones que tanto pueden ser externas como internas, pero que requieren un esfuerzo personal de creación o de búsqueda, Como lo que dice M. Debesse, con los métodos activos se trata de actividades de investigación y de creación. No de aprendido, pero no se olvida tan fácilmente lo que se ha hallado.

**Constructivismo y aprendizaje:**

La didáctica constructivista se basa en que el conocimiento es construido activamente por los participantes en el proceso educativo y para que el conocimiento sea construido se requiere del desarrollo de experiencias acordes con las características y necesidades del sujeto; considérese también, que el conocimiento es construido socialmente por lo que el estudiante debe compartirlo con otras personas o manifestar sus ideas e inquietudes y ponerlas en común de tal manera que en ese intercambio las pueda afirmar, retroalimentar o bien cambiar, de parecer.

**Fases del aprendizaje**

Son los que nos constituyen los conocimientos de toda la educación, ya que tiene que motivar y ejercitar a todos los sentidos: La vista, el oído, el gusto, estímulos y sensaciones que los discentes experimentan al observar, contemplar paisajes naturales, escuchar música, entornar canciones, analizar o resolver problemas, etc. Las experiencias directas se dan en todo momento y dependiendo de la edad o nivel educativo en que se esté desenvolviendo, acciones que están asociadas de alguna manera con el mundo material y social que rodea al discente.

Además se sabe que el aprendizaje se genera significativamente cuando el estudiante desarrolla una vivencia con una serie de elementos concretos los cuales manipula, bajo la supervisión del facilitador, quien hace posible la construcción del nuevo conocimiento.

**Carácter de los métodos activos**

Base científica: Los métodos activos surgen como consecuencia de la comprobación científica de algún fenómeno o la necesidad de encauzarlo dentro del campo de la pedagogía de acuerdo a los principios de la ciencia.

Algunos principios que sirven de fundamento a dichos métodos:

- La concepción biológica.
- La enseñanza enfocada a las características psíquicas del alumno.
- La medición científica para comprobar el adelanto y la capacidad (test, pruebas objetivas)

**Psicología educativa y la labor docente**

Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, esto, porque dominó una perspectiva conductista de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia.

La experiencia humana no solo implica pensamiento, sino también afectividad y únicamente cuando se consideran en conjunto se capacita al individuo para enriquecer el significado de su experiencia.

Para entender la labor educativa, es necesario tener en consideración otros tres elementos del proceso educativo: los profesores y su manera de enseñar; la estructura de los conocimientos que conforman el currículo y el modo en que éste se produce y el entramado social en el que se desarrolla el proceso educativo.

**Procedimientos socializados**

Es un producto natural de los cambios en psicología y filosofía de la educación. Es la expresión más interesante de la actividad con la cual se cumple también el viejo precepto pestalociano de la expresión es así que en un aula de clase es socializado cuando prevalece un espíritu de trabajo cooperativo. Los procedimientos socializados se cumplen en la última parte de la clase, tenga esta la duración de un período o de varios sucesivos.

**Papel del maestro y del estudiante**

El profesor y el maestro como facilitadores en el aprendizaje activo es más que impartir conocimiento. Otra manera de decirlo es que es más que enseñar es ayudar a los alumnos a aprender en fin un facilitador significa motivar a los estudiantes a aprender y a desarrollar su pensamiento creativo.

## PROCESO ENSEÑANZA–APRENDIZAJE

**Tipología de las clases**

En el análisis del proceso de enseñanza nos referimos a la apropiación de conocimiento, al desarrollo de capacidades y habilidades, a la aplicación de conocimientos, y a la evaluación de conocimientos, capacidades y habilidades, como eslabones del proceso de enseñanza. Estos “eslabones” actúan como funciones didácticas regulares del proceso de enseñanza en su conjunto y no deben interpretarse como una sucesión esquemática de pasos.

Así entendemos por tipología de la clase a la teoría de la clasificación de las clases de acuerdo con su función didáctica principal. Esa función didáctica principal, determina el tipo a que esta pertenece “eslabón” del proceso de enseñanza que predomina en cada clase.

## Tipos de clases

Para clasificar las clases en distintos tipos debemos tomar en consideración los siguientes criterios:

- El tipo de clase debe estar determinado por una función didáctica esencial.
- El tipo de clase no debe considerarse como un tipo “puro”, que solo tiene en cuenta una función didáctica, solamente destaca la tarea didáctica principal dentro de otras tareas adicionales.

## Materiales educativos

Es el conjunto formado por el medio y el mensaje contenido. Un medio si permite comunicar algún contenido o mensaje educativo, entonces será considerado un material educativo.

Por otra parte el material educativo también es un excelente auxiliar para la creación de climas de aprendizaje grupal, ya que permiten la posibilidad de compartir con otros, de aportar las opiniones de cada uno y de sentirse escuchados como miembros activos de grupos de iguales, situación que naturalmente produce efectos significativos en y como las personas se perciben a sí mismas, aumentando su autoestima y profundizando las relaciones socio-afectivas y cognitivas.

## Importancia de los materiales educativos

- Facilitan la adquisición y la fijación del Proceso de Enseñanza Aprendizaje.
- Enriquecen las experiencias sensoriales, base del aprendizaje constructivista.
- Motivan el aprendizaje significativo de las matemáticas.
- Facilitan la comprensión de los contenidos.
- Estimulan la imaginación, la capacidad de análisis y de abstracción de los educandos.

## Los medios

Son canales para comunicar los mensajes y alcanzar los fines concretos.

**Factores que determinan la estructura de la clase.**

Al realizar el planeamiento de la clase han de considerarse los siguientes factores determinantes de su estructura:

- Objetivo de la clase: las clases en las que se aspira lograr un efecto emocional elevado requiere de una motivación adecuada en las clases y que han de prestar una contribución esencial a la formación de una concepción científica del mundo y han de estructurarse siempre que sea posible de modo que los alumnos no se limiten a adquirir conocimientos sino que, además, tengan oportunidad de aplicarlos.

- Contenido de clases: Si se trata de un asunto que sea relativamente conocido por los alumnos a través de sus propias experiencias (por lo menos en cuanto al aspecto externo del fenómeno) el maestro puede limitarse a una breve introducción en forma de diálogo.

- Tarea didáctica principal: En las clases que tienen como tarea didáctica principal la aplicación de conocimientos, se recomienda que antes de la aplicación se precisen los conocimientos necesarios esto en las clases destinadas principalmente a la sistematización de conocimientos.

## VI.2. ASPECTOS TEÓRICOS DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

El álgebra Vectorial es el estudio del Álgebra por medio de métodos analíticos. El método del Álgebra Vectorial consiste en relacionar cantidades que poseen tanto magnitud como dirección, además cada problema de álgebra Vectorial pude ser usado en el desarrollo físico de la aceleración y el desplazamiento usando algebraicamente procedimientos que consisten en resolver problemas más prácticos para lo cual es necesario tener en cuenta sólo unas cuantas fórmulas básicas y para la mayor ventaja de los métodos a usar es la de ser directos, rápidos y efectivos.

Hay que tener siempre presente que la solución de un problema de Algebra Vectorial se tiene que tomar en cuenta el trabajo con sistemas coordenados específicamente en las rectangulares y el desarrollo del álgebra en sus diferentes algoritmos de resolución.

## VECTORES LIBRES EN EL PLANO

### VARIABLES VECTORIALES Y ESCALARES

En la mecánica, en la física y en muchas ciencias técnicas se estudian magnitudes de distinto género. Unas magnitudes (longitud, área, volumen, masa, densidad, temperatura, etc.) se definen completamente por un solo valor numérico, una vez escogida la unidad de medida. Tales magnitudes se denominan *variables escalares* (numéricas)

Otras magnitudes (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) se definen no sólo por el valor numérico, sino también por la orientación en el espacio. Tales magnitudes se denominan *variables vectoriales*.

La variable vectorial se expresa geométricamente por medio de un segmento de determinada longitud y dirección. Al mismo tiempo, la longitud del segmento, según la unidad de escala escogida, es igual al valor numérico de la variable vectorial, y la dirección coincide con la dirección de esta variable.

### VECTORES

En cualquier segmento rectilíneo, si uno de sus puntos extremos se toma como punto inicial y el otro, como punto final, el segmento en cuestión se le llama *dirigido*. Los segmentos dirigidos habitualmente se denotan con dos letras con flechas, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \text{etc.}$, donde la primera letra denota el origen del segmento y la segunda, el extremo del segmento.

Dos segmentos dirigidos se consideran *iguales* si tienen longitudes iguales, son paralelos y están orientados en un mismo sentido. Por ejemplo, en la figura 1, ABCD es un paralelogramo, los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales, ya que m $\overline{AB}$ = m $\overline{DC}$ ; $\overrightarrow{AB} \mid\mid \overrightarrow{DC}$; y los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ están orientados en el mismo sentido.

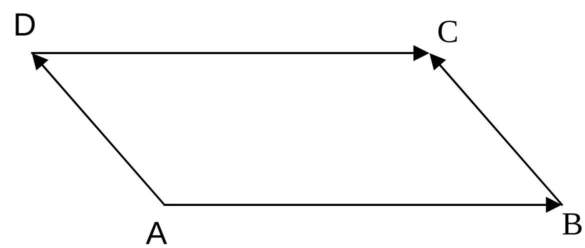



**Figura 1**

Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ no son iguales, ya que no son paralelos. Los segmentos dirigidos, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tampoco son iguales, ya que tienen el sentido opuesto, aunque son paralelos y de la misma longitud.

Los segmentos dirigidos con la noción de igualdad introducida se denominan *vectores*.

Conforme a la definición todos los segmentos dirigidos iguales entre sí representan un mismo vector. Por ejemplo, si un vector representado en la figura 1 como un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, se denota **a** (o $\vec{a}$ ), entonces **a** (o $\vec{a}$ ) = $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

La magnitud o longitud del vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ denotada $\left\| \vec{a} \right\| = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$ .

La dirección del vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, es la dirección definida por el rayo $\overrightarrow{AB}$, y se denota dir $\vec{a}$ = dir $\overrightarrow{AB}$.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores tales que dibujados desde un mismo punto inicial forman un ángulo de $180^{\circ}$ escribiremos que dir $\vec{b}$ = - dir $\vec{a}$, y diremos que la dirección de $\vec{b}$ es opuesta a la dirección de $\vec{a}$ (Ver figura 2).

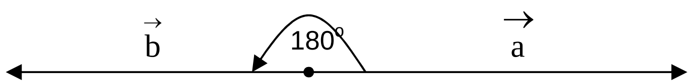



**Figura 2**

Un vector, cuya magnitud (o longitud) es igual a cero, se denomina *vector nulo* y se designa $\vec{0}$. Es evidente, que el origen del vector nulo coincide con su extremo: $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$.

Así pues, *cada vector* $\vec{a} \neq \vec{0}$ se define completamente por la *longitud* y la *dirección*. *El vector nulo no tiene dirección.*

Un vector cuya magnitud (o longitud) es igual a 1 se llama *vector unitario*.

Para cualquier vector $\vec{a} \neq \vec{0}$, definimos - $\vec{a}$ (se lee: vector opuesto de $\vec{a}$) como el vector tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $\left\| -\vec{a} \right\| = \left\| \vec{a} \right\|$.
2. $\text{dir}\left(-\vec{a}\right) = -\,\text{dir}\left(\vec{a}\right)$

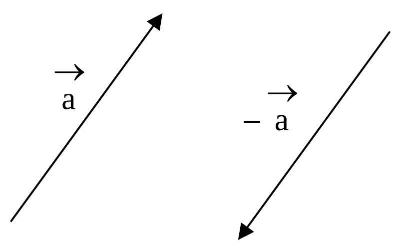



**Figura 3**

## SUMA DE VECTORES

Existen dos procedimientos que se pueden emplear para la suma de vectores.

1. Sean dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Figura 4). Se dibuja el vector $\vec{a}$ y desde su punto terminal, se dibuja el vector $\vec{b}$, el vector $\vec{a} + \vec{b}$ es el vector que va desde el punto inicial de $\vec{a}$ hasta el punto terminal de $\vec{b}$. Este procedimiento de suma de vectores se conoce como *Regla del triángulo*.

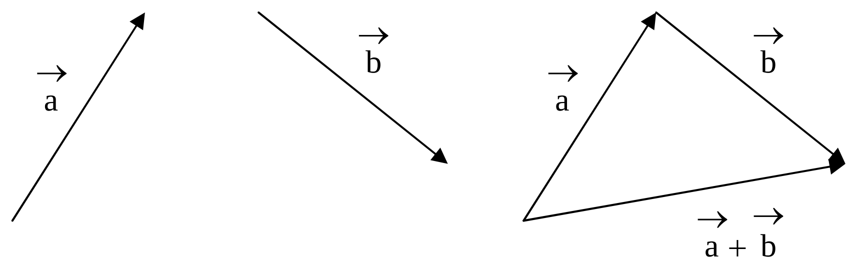



**Figura 4**

2. Un procedimiento alternativo equivalente es la *regla del paralelogramo*. Sean dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Figura 5). Dibujamos los representantes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ desde el mismo punto (se hacen coincidir los puntos iniciales de $\vec{a}$ y $\vec{b}$) y se trazan paralelas a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ desde los puntos extremos de ambos vectores, completando el paralelogramo; la diagonal trazada desde el punto común hasta donde se interceptan las paralelas trazadas representa la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

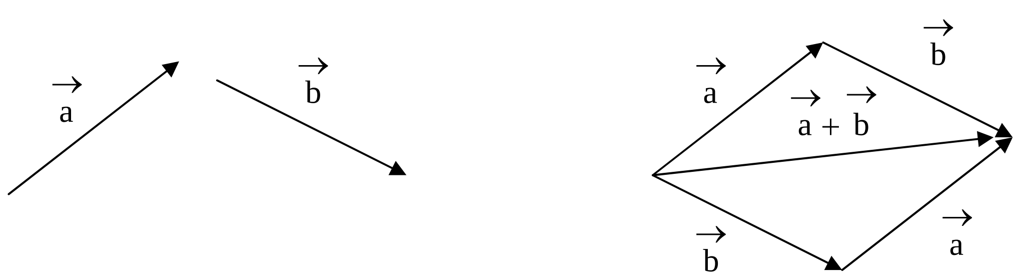



**Figura 5**

PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

1. Propiedad de conmutatividad:

   Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

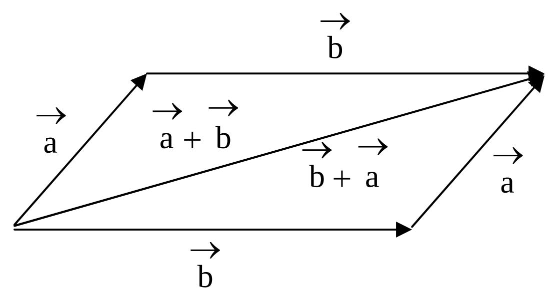



**Figura 6**

2. Propiedad de asociatividad:

   Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$ , $\vec{b}$ y $\vec{c}$ :

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

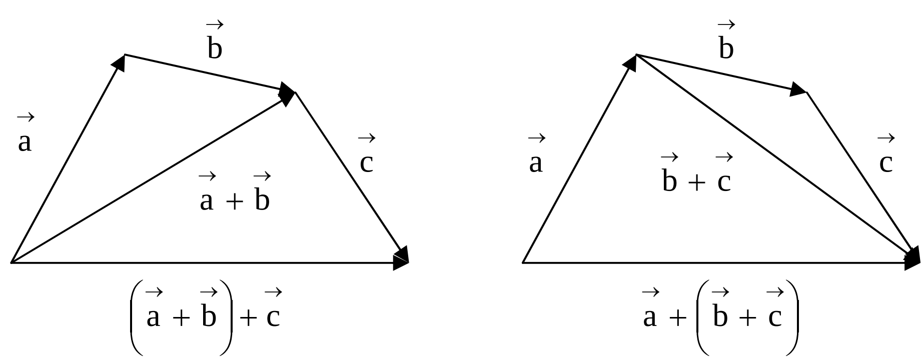



**Figura 7**

## DIFERENCIA O RESTA DE VECTORES

Como todo vector libre tiene un vector opuesto podemos definir la resta de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, como:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

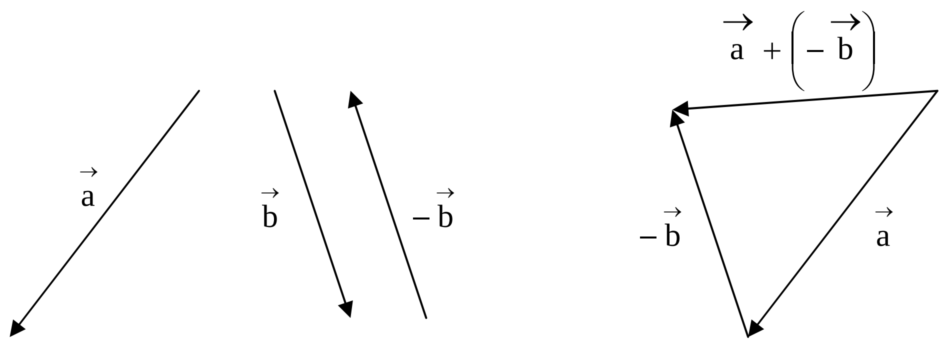



**Figura 8**

Una forma alternativa de hacer la resta de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es:

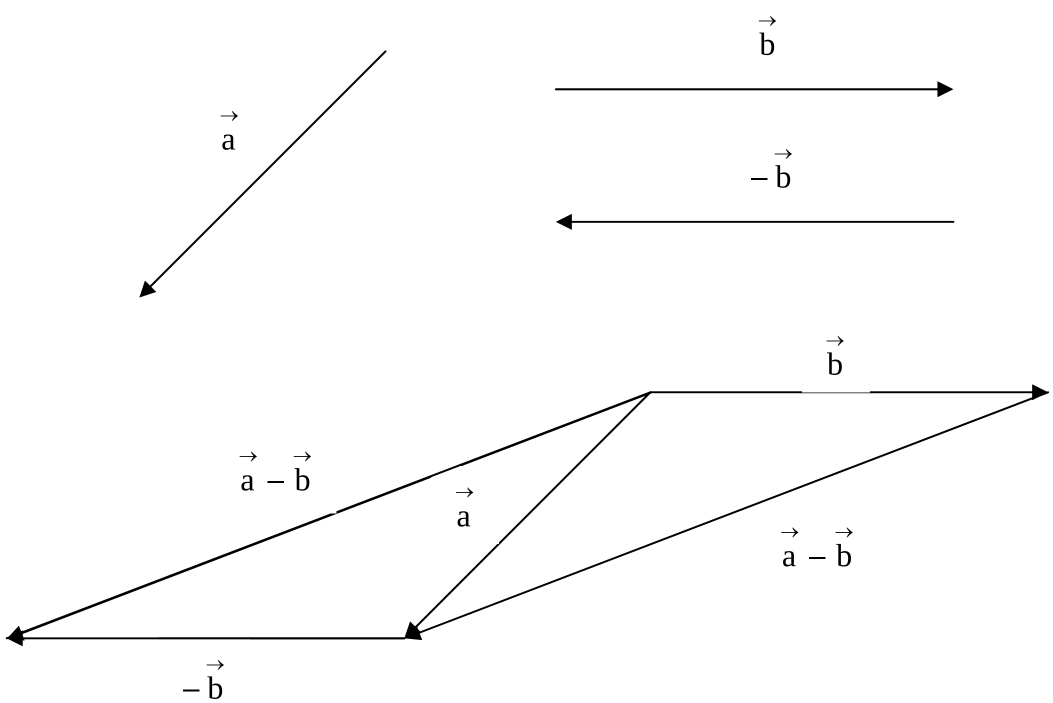



**Figura 9**

La figura 9 se obtiene al completar el paralelogramo en la figura 8; por lo tanto, para hacer la diferencia de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se procede así:

1. Construimos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de tal manera que sus puntos iniciales coincidan.
2. El vector diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ es un vector que tiene por punto inicial el punto terminal del vector $\vec{b}$ (vector sustraendo) y por punto terminal al punto terminal del vector $\vec{a}$ (vector minuendo).

**MULTIPLICACION DE UN VECTOR POR UN NUMERO REAL**

Sean $\lambda$ un número real (escalar) y $\vec{a}$ un vector libre no nulo. El producto de $\lambda$ por $\vec{a}$, denotado por $\lambda \vec{a}$, es un vector que cumple las siguientes condiciones:

1. Si $\lambda > 0$, entonces $\left\| \lambda \vec{a} \right\| = \lambda \left\| \vec{a} \right\|$ y dir $(\lambda \vec{a}) =$ dir $\vec{a}$.
2. Si $\lambda < 0$, entonces $\left\| \lambda \vec{a} \right\| = |\lambda| \left\| \vec{a} \right\|$ y dir $(\lambda \vec{a}) = -$ dir $\vec{a}$.
3. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

La figura 10, representa el producto $\lambda \vec{a}$ cuando $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$:

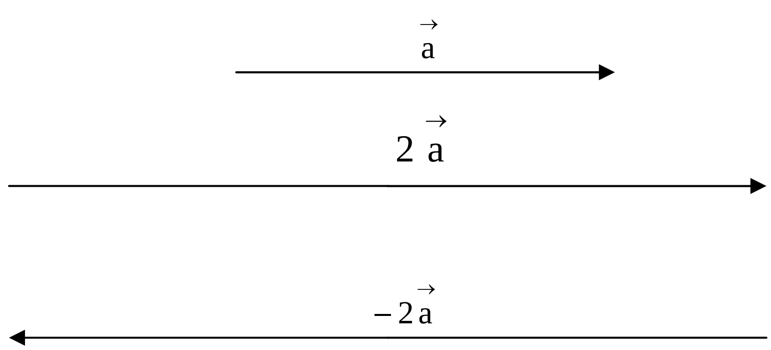



**Figura 10**

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y dos escalares $\alpha$ y $\beta$ Entonces,

1. El producto $\alpha \vec{a}$ es un vector determinado de manera única.
2. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$ (Asociatividad)
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ (Distributividad respecto al factor escalar)
4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ (Distributividad respecto al factor vectorial)
5. $1\vec{a} = \vec{a}$ .

**VECTORES COLINEALES**

Dos vectores no nulos, cuyas direcciones coinciden o son opuestas, se denominan *colineales*.

Así, por ejemplo, en la figura 11 los vectores $\vec{BC}$ y $\vec{AD}$ son colineales, y los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, no lo son.

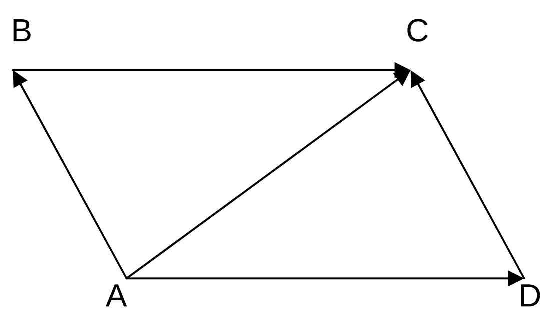



**Figura 11**

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales, se dice también que el vector $\vec{a}$ es colineal al vector $\vec{b}$, y el vector $\vec{b}$ es colineal al vector $\vec{a}$ .

El vector nulo se considera colineal a cualquier vector.

## CRITERIO DE COLINEALIDAD

Una condición necesaria y suficiente para que el vector $\vec{a}$ sea colineal al vector $\vec{b}$ no nulo es que exista un número real k, que satisfaga la condición

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

## ANGULOS ENTRE DOS VECTORES

Se denomina *ángulo entre dos vectores* no nulos, el ángulo entre las direcciones de estos vectores . El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (Figura 12) se denota $\angle\left(\vec{a}\ ;\ \vec{b}\right)$.

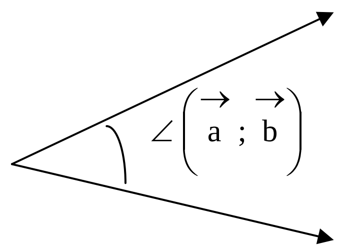



**Figura 12**

Si el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual a $90^{\circ}$, estos vectores se denominan perpendiculares (u ortogonales) y se escribe: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

## DESARROLLO DE UN VECTOR LIBRE EN VECTORES NO COLINEALES

Se dice que el vector $\vec{a}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, si puede ser expresado en la forma

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{a}_n$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son números reales cualesquiera.

Así, el vector $\vec{a} = 3 \cdot \vec{a}_1 - 5 \cdot \vec{a}_2 + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_3$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$.

Teorema:

Cualquier vector $\vec{c}$ en el plano puede ser definido, además, de un modo único, en forma de combinación lineal de cualesquiera dos vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

$$\vec{c} = x\cdot \vec{a} + y\cdot \vec{b}$$

donde x e y son números reales cualesquiera.

Si el vector $\vec{c}$ es colineal a uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (por ejemplo, el vector $\vec{a}$), entonces para cierto número real x tenemos

$$\vec{c} = x\,\vec{a} = x\cdot \vec{a} + 0\cdot \vec{b}$$

Si el vector $\vec{c}$ no es colineal al vector $\vec{a}$ ni al vector $\vec{b}$ (Figura 13), entonces existen números reales x e y, únicos, tales que

$$\vec{c} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$$

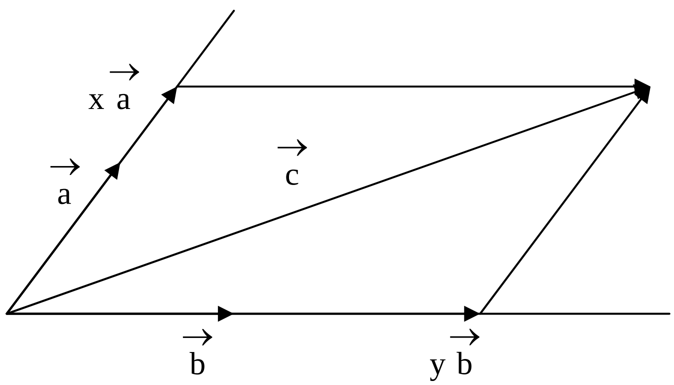



**Figura 13**

Si un vector está representado como una combinación lineal de ciertos vectores se dice, que el vector está *desarrollado según estos vectores*.

Se denomina *base* en el plano cualesquiera dos vectores no colineales de este plano, tomados en un orden determinado.

Sea que $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ forman una base y $\vec{a}$ , un vector libre arbitrario, entonces existen, y son únicos, dos números reales x e y, tales que

$$\vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$$

Los números x e y se denominan *componentes* del vector $\vec{a}$ en la base dada.

Una base $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ es *ortogonal* si $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. Una base $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ es *ortonormal* si $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ y, además, $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son unitarios.

## VECTORES EN $R^2$

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres en el plano (Ver figura 14)

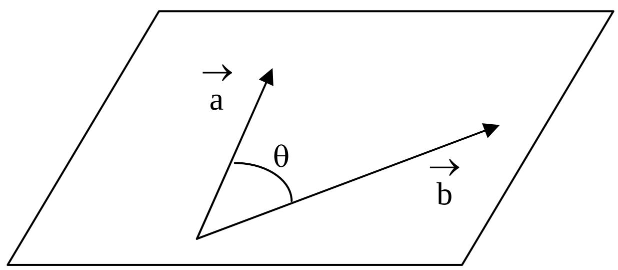



**Figura 14**

Vamos a referir estos vectores a un sistema de coordenadas cartesianas, con el fin de identificar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como vectores de posición de los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. (Véase figura 15)

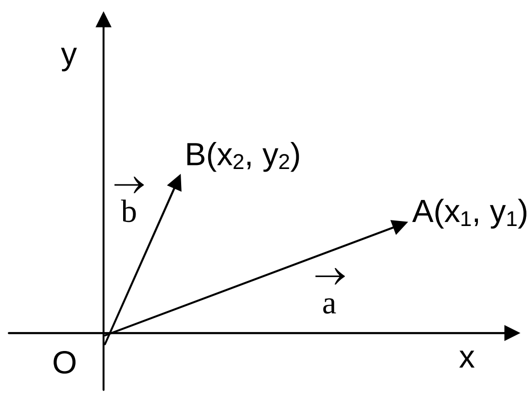



**Figura 15**

La notación para vectores en $\mathbf{R}^2$, es $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ para evitar confusión con la notación para intervalos abiertos.

**NORMA (O MAGNITUD)**

Sea $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ un vector cualesquiera en $\mathbf{R}^2$. Traslademos $\vec{a}$ como vector de posición al plano xy, se sigue que al vector $\vec{a}$ le corresponde un punto que lo denotamos por $A\langle x_1, y_1 \rangle$. Desde el punto A tracemos una perpendicular hacia el semieje positivo x; y, designemos al pie de la perpendicular por P. Entonces, tenemos el triángulo rectángulo OPA. Aplicando el teorema de Pitágoras, resulta $\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2$. Como $\overline{OP} = x_1$, y $\overline{AP} = y_1$, resulta $\overline{OA}^2 = x_1^2 + y_1^2$, de donde $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Siendo $\overline{OA}$ la longitud del vector posición $\vec{a}$, la cual llamamos norma y lo representamos por $\left\| \vec{a} \right\|$.

Concluimos que si $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ un vector cualesquiera en $\mathbf{R}^2$, entonces la norma de $\vec{a}$ representada por $\left\| \vec{a} \right\|$ está dada por $\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

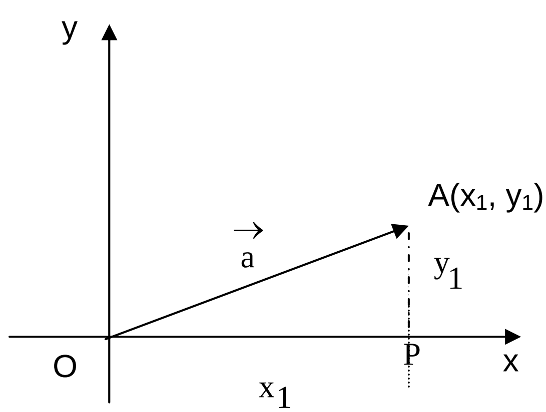



**Figura 16**

## DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN $R^2$

Sea $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ un vector cualesquiera en $\mathbf{R}^2$. Entonces, la dirección de $\vec{a}$ está dada por el número real θ, tal que

$$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1}$$

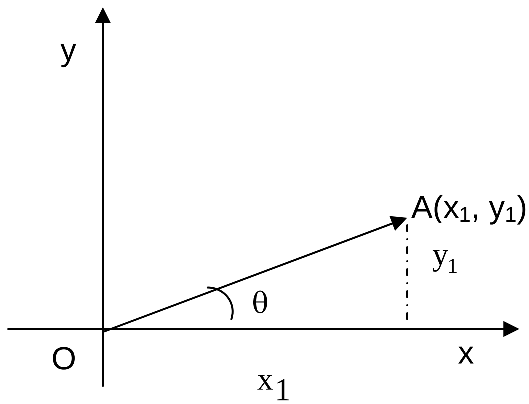



**Figura 17**

## ADICIÓN DE VECTORES EN $R^2$

Sean $\vec{a} = \langle a, b \rangle$ y $\vec{b} = \langle c, d \rangle$ vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

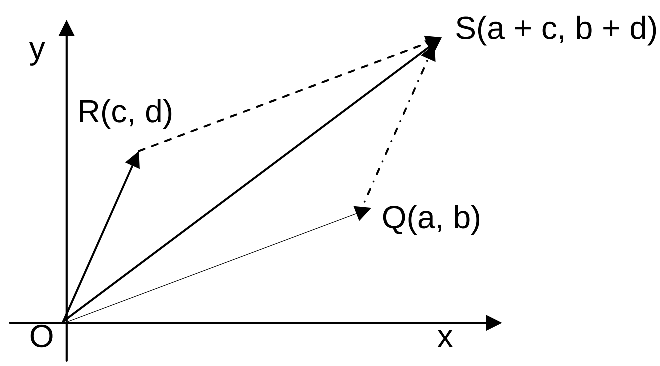



**Figura 18**

Por definición, el vector nulo $\vec{0}$ es igual a $\langle 0, 0 \rangle$. Así mismo, si $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$, entonces definimos $-\vec{a} = \langle -x_1, -y_1 \rangle$.

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE VECTORES EN $\mathbf{R}^2$

Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

**SUSTRACCIÓN O RESTA DE VECTORES EN $\mathbf{R}^2$**

Sean $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ dos vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

$$\vec{a} - \vec{b} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$$

**MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR**

Sea $\lambda$ un número real y sea $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ un vector en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

$$\lambda \vec{a} = \langle \lambda x_1, \lambda y_1 \rangle$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sean $\alpha$ y $\beta$ números reales, y sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

1. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$.
2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$.
3. $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$.
4. $1 \vec{a} = \vec{a}$.

**PRODUCTO ESCALAR**

Sean $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ dos vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces, el producto escalar $\vec{a} \bullet \vec{b}$, está dado por

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

**ANGULO ENTRE DOS VECTORES**

El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el número real θ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$.

2. $0^0 \leq \theta \leq 180^0$

**DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES**

Sean $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ vectores cualesquiera en $\mathbf{R}^2$. Entonces, la distancia entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ denotada por d( $\vec{a}$ , $\vec{b}$ ) está dada por

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**VECTORES ORTOGONALES**

Sean $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$ dos vectores en $\mathbf{R}^2$. Entonces,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

**VECTORES $\vec{i}$ Y $\vec{j}$**

Por definición,

$\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$; $\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$

Un vector unitario es un vector de magnitud igual a 1. Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{a} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ son unitarios.

Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ se pueden usar para denotar de manera alternativa a un vector.

Concretamente, si $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$, entonces

$$\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, 0 \rangle + \langle 0, y_1 \rangle = x_1 \cdot \langle 1, 0 \rangle + y_1 \cdot \langle 0, 1 \rangle = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}.$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$$

En este caso, se dice que el vector $\vec{a}$ está expresado en términos de los vectores canónicos $\vec{i}$ y $\vec{j}$; y, a la descomposición se le llama canónica.

En la figura 19 (i) se ilustran los vectores correspondientes a $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$.

Como $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son vectores unitarios, podemos representar a $x_1 \vec{a}$ y $y_1 \vec{a}$ por vectores horizontal y vertical de magnitudes $\left| x_1 \cdot \vec{i} \right|$ y $\left| y_1 \cdot \vec{j} \right|$, respectivamente, como se ilustra en la figura 19 (ii). Puede considerarse que el vector $\vec{a}$ es la suma de estos vectores. Por esta razón, a $x_1$ se le llama componente horizontal y a $y_1$ se le llama componente vertical del vector $\vec{a}$.

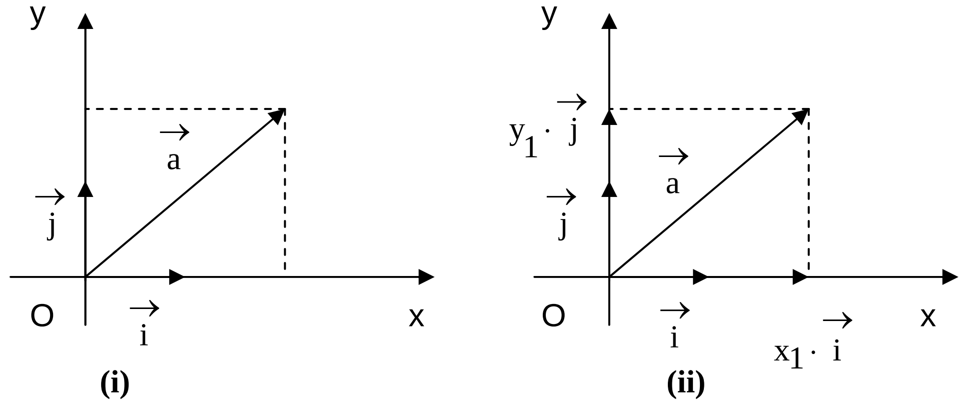



**Figura 19**

Al vector suma $x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$ se le llama *combinación lineal* de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Si $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$ y $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$, entonces podemos emplear esta notación para suma, resta y multiplicación por un escalar, como se indica a continuación:

*Suma:* $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j}$.

*Resta:* $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\,\vec{i} + (y_1 - y_2)\,\vec{j}$.

*Multiplicación por un escalar:* $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1)\,\vec{i} + (\lambda y_1)\,\vec{j}$

**BASE**

El conjunto formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es una base si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no colineales.

También, diremos que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base si de $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0}$ resulta $x = y = 0$.

**BASE ORTOGONAL**

La base { $\vec{a}$ , $\vec{b}$ } en $\mathbf{R}^2$ es ortogonal si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores ortogonales.

El conjunto { $\vec{i}$ , $\vec{j}$ } constituye una base ortogonal, pues los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales.

**BASE ORTONORMAL**

La base { $\vec{a}$ , $\vec{b}$ } en $\mathbf{R}^2$ es ortonornal si y sólo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores ortogonales y unitarios.

El conjunto { $\vec{i}$ , $\vec{j}$ } constituye una base ortonormal, pues los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son ortogonales, y además, son vectores unitarios.

## VII. ESTRATEGIAS METODÓLOGICAS

Es la oportunidad para evidenciar que, la Educación, es la clave para lograr un modelo de convivencia solidario y justo para todos, con un nuevo tejido de relaciones y valores de convivencia capaz de insertar a Nicaragua de mejor manera en el concierto global de forma democrática y participativa; es así que al traducir en cambios y logros efectivos de todo el aparato educativo nacional exige el establecimiento de metas y estrategias operativas ubicadas en el tiempo y espacio sustentándolas en cálculos aproximados de costos e inversión, en recursos humanos, físicos y económicos, recogiendo el sentido dinámico de los principios, objetivos y políticas que orienten la definición de las metas y estrategias operativas.

Es por eso que se piensa en la actualidad que las limitaciones en el sistema educativo provocan un alto porcentaje de estudiantes egresados en diferentes etapas del sistema sin dominar conocimientos y competencias fundamentales para una vida productiva en la sociedad para que interactúen con los distintos elementos, es por ello que el sistema educativo no puede funcionar con solo criterios de homogeneidad, sino que debe funcionar para la multidimensionalidad; y para ello debe darse el mayor tiempo a la interacción pedagógica centrándose en la participación y quehacer del alumno, en su trabajo personal y en grupo.

Así, el buen educador debe asegurarse de cuales son los habilidades e intereses del alumno, teniendo para ello que darse cuenta del tiempo que requiere cada alumno para aprender, para esto se proponen algunos cambios.

Y partiendo desde una perspectiva constructivista la construcción del conocimiento es en último término de la persona que aprende y de las estrategias de las que dispone para aprender, es por tanto que nuestro trabajo está fundamentado principalmente en el enfoque Constructivista – Humanista, por lo cual el docente es facilitador de la responsabilidad fundamental del estudiante, el aprendizaje. Por tal razón, se debe considerar una metodología adecuada, analizando aquellos factores que condicionan e inciden favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes. Necesariamente se deben seleccionar adecuadamente las estrategias metodológicas para tal fin, las que son recomendaciones básicas para poner en práctica unas ciertas técnicas de aplicación metodológicas; teniendo en cuenta éstas las condiciones favorables y desfavorables como factores negativos que se lo impiden. En fin una estrategia metodológica es una técnica bien planificada que favorece el aprendizaje de los nuevos conocimientos, aprovechando todos los medios y recursos disponibles que para lograr un aprendizaje significativo de los temas relacionados con El Álgebra Vectorial, proponemos para ello una metodología diferente en la que se debe tener en cuenta aspectos como:

1. Los conocimientos previos de los estudiantes.

2. Tiempo disponible para el desarrollo de cada tema.

3. Uso correcto de materiales y medios de enseñanza para la construcción de los nuevos conocimientos.

4. Uso y manejo correcto de los instrumentos geométricos.

5. Importancia y aplicabilidad del Álgebra Vectorial.

6. Espacio disponibles para su implementación esto en relación con el medio.

Además las acciones didácticas que llevaremos a cabo se realizan principalmente en el aula. Contando éste de tres elementos básicos que son: las intervenciones del docente, las intervenciones de los grupos de trabajo y, los debates y discusiones en grupo de las situaciones planteadas.

Antes de dar inicio al estudio del Álgebra Vectorial, indagaremos acerca de los conocimientos previos que poseen los estudiantes y en aquellos donde presenten dificultades, con el objetivo de tomar decisiones al momento de introducir los nuevos conocimientos.

Para el estudio del Álgebra Vectorial, proponemos la interpretación y el análisis de las definiciones de segmentos dirigidos, vector libre, operaciones con vectores, operaciones con escalares, plano cartesiano, magnitud ángulo de inclinación y vectores unitarios, así como su interpretación geométrica en un sistema de coordenadas rectangulares. Deduciremos las fórmulas correspondientes al tratamiento que corresponde al álgebra vectorial para la aplicabilidad en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación desde una forma vectorial, insistiendo además en la actitud y habilidad que deben adquirir los estudiantes para diferenciar los distintos conceptos y ecuaciones a utilizar, así como la capacidad para interpretar y resolver dichas situaciones.

La Unidad Didáctica presenta la siguiente organización:

a. Induciremos a los estudiantes a que formulen e interpreten las definiciones correspondientes.

b. Presentación de situaciones sencillas que induzcan a los estudiantes a deducir las fórmulas y ecuaciones correspondientes a los temas referentes al Algebra Vectorial.

c. Impulsaremos el trabajo colectivo en la discusión y resolución de ejercicios y problemas que conlleven a la consolidación de los nuevos conocimientos.

d. Orientaremos la realización de trabajo independiente con la finalidad de que los estudiantes consoliden los nuevos conocimientos, y demuestren el desarrollo de sus habilidades.

e. Propiciaremos el trabajo individual y colectivo con el propósito de que los estudiantes desarrollen habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.

f. Fomentaremos en los estudiantes la aplicación del conocimiento lógico – matemático en la interpretación y resolución de ejercicios.

g. Insistiremos en que, al final de la discusión de una situación propuesta, establezcamos los conceptos y elementos más destacados de los diferentes contenidos que vamos desarrollando, y a la vez resumiendo.

Estos cambios son y serán posible, hoy en día gracias a los avances realizados en la tecnología y en la investigación educativa, los cuales permiten proponer, quizás por primera vez en la historia, una solución sistémica para los problemas planteados.

Es así que de acuerdo a todo lo planteado en esta parte de nuestra unidad didáctica y de resultados de estudios y análisis compartido de los mismos, producen cuotas fundadas de optimismo, a la par que dejan una sentida preocupación de fondo; en conclusión las reformas educativas actualmente vigente en Centroamérica y América Latina nos dejan ese optimismo fundado y una fundada preocupación que exigen una atención política permanente en los desarrollos curriculares en la época actual en que nos desarrollamos y desenvolvemos en nuestro actuar docente.

## VIII. ACTIVIDADES

Para el desarrollo de la Unidad Didáctica de Algebra Vectorial proponemos la siguiente distribución de actividades, con el propósito de alcanzar los objetivos propuestos.

| Act. No. | CONTENIDOS | Horas Clases |
|---|---|---|
| 1 | Prueba Diagnóstica | 1 |
| 2 | Importancia del Algebra Vectorial. Variables escalares y vectoriales. | 1 |
| | **VECTORES LIBRES EN EL PLANO** | |
| 3 | Definición. Notación. Magnitud y dirección de un vector. | 1 |
| 4 | Vector opuesto. Vector nulo. Vector unitario. | 1 |
| 5 | Ejercicios sobre Actividades Números 3 y 4. | 1 |
| 6 | Suma y Resta de vectores. | 1 |
| 7 | Ejercicios sobre Actividad Número 6. | 1 |
| 8 | Multiplicación por un escalar. | 1 |
| 9 | Ejercicios sobre Actividad Número 8. | 1 |
| 10 | Vectores colineales. Angulo entre dos vectores. Desarrollo de un vector en dos vectores no colineales. | 1 |
| 11 | Ejercicios sobre Actividad Número 10. | 1 |
| | **VECTORES EN $R^2$** | |
| 12 | Concepto. Notación. Magnitud y dirección. | 1 |
| 13 | Suma y resta de vectores. | 1 |
| 14 | Multiplicación por un escalar. | 1 |
| 15 | Ejercicios sobre Actividades Números 12, 13 y 14. | 1 |
| 16 | Producto escalar. Angulo entre dos vectores. Distancia entre dos vectores. | 1 |
| 17 | Ejercicios sobre Actividad Número 16. | 1 |
| 18 | Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. | 1 |
| 19 | Base. Base ortogonal. Base ortonormal. | 1 |
| 20 | Ejercicios sobre Actividades Números 18 y 19. | 1 |

**Actividad No. 1**

**Prueba Diagnóstica**

**Objetivo**

Conocer los conocimientos previos que son necesarios para el desarrollo de la Unidad Didáctica.

**Colegio o Instituto**______________________________________________________

**Nombre**_________________________________________________**Fecha**___________

**Año:** ____________ **Sección:** _________ **Número:** _______

En los siguientes enunciados, englobe la alternativa correcta.

1. Si m $\overline{AB}$ = 3 m y m $\overline{BC}$ = $\frac{5}{3}$ m, entonces ¿cuál es la medida del segmento AC?

   (a) $\frac{17}{3}$ m (b) $\frac{14}{3}$ m (c) $\frac{13}{3}$ m (d) $\frac{19}{3}$ m

2. En un triángulo cualquiera dos de sus ángulos miden $30^0$ y $45^0$. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

   (a) $105^0$ (b) $115^0$ (c) $85^0$ (d) $95^0$

3. Haga un esquema donde se muestre la clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos.

4. Haga un esquema donde se muestre la clasificación de los cuadriláteros.

5. De acuerdo a la fórmula $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ el valor de c es:

   (a) $\frac{ab}{b-a}$ (b) $\frac{a}{b}$ (c) $\frac{a+b}{a-b}$ (d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

6. Dada la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$. El valor de b, siendo c = 5 y a = 3, es:

   (a) 5 (b) 6 (c) 4 (d) 3

7. Esperanza sube una escalera de dos en dos. Carlos de tres en tres, si para subirla tienen que dar 20 pasos ambos. ¿Cuantos peldaños hay en la escalera?

   (a) 48 (b) 60 (c) 24 (d) 16 (e) 18

## Actividad No. 2

**Objetivos**

1. Explicar la importancia del Algebra Vectorial en otros campos del saber humano.
2. Definir variables escalares y vectoriales.

**Sumario**

§..1. Importancia del Algebra Vectorial.

§.2. Variables escalares y vectoriales.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Cinta métrica.

**Introducción**

El profesor justificará la unidad de Algebra Vectorial en el programa de matemáticas de IV Año de Educación Secundaria.

**Desarrollo**

§.1. Importancia del Algebra Vectorial.

El profesor explicará qué estudia el Algebra Vectorial, su importancia y su aplicabilidad en la Geometría y la Física.

§.2. Variables escalares y vectoriales.

A partir de la discusión y análisis de las siguientes preguntas, inducir a los (as) estudiantes a que formulen las definiciones de variables escalares y vectoriales.

1. Midan la longitud de uno de sus cuadernos.
2. Midan el ancho de la pizarra.

3. Si una persona se desplaza del Asilo de Subtiava hacia la Catedral, ¿qué distancia aproximada recorrió? y ¿en qué orientación lo hizo?
4. Si una persona viaja de León a Managua, ¿qué distancia recorrió? y ¿en qué orientación lo hizo?

**Evaluación**

1. Participación, disciplina y orden en el trabajo grupal realizado.
2. Entregar por escrito, la diferencia entre variables escalares y vectoriales.

## Actividad No. 3

**Objetivos**

1. Definir vector libre.
2. Definir magnitud de un vector.
3. Definir dirección de un vector.
4. Representar geométricamente vectores libres.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

§.1. Definición. Notación.

§.2. Magnitud de un vector.

§.3. Dirección de un vector.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Borrador.
4. Regla.
5. Escuadra.

**Introducción**

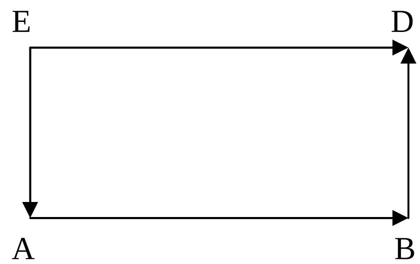
En esta actividad daremos inicio al estudio de los vectores libres desde un punto de vista geométrico.

**Desarrollo**

Para formular el concepto de vector libre, orientaremos la discusión y análisis de las siguientes preguntas:

1. Si a cualquier segmento, uno de sus extremos se le toma como punto inicial y al otro extremo, como punto final, ¿qué nombre recibe dicho segmento? ¿Cómo se denota? Ilústrelo gráficamente.

2. En base a la ilustración siguiente



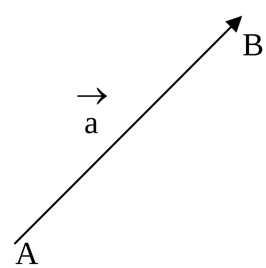

solicitarle a los (as) estudiantes a que discutan, analicen y respondan las siguientes preguntas:

   (a) ¿Cuáles segmentos dirigidos tienen la misma longitud?
   (b) ¿Cuáles segmentos dirigidos son paralelos?
   (c) ¿Cuáles segmentos dirigidos están orientados en el mismo sentido?
   (d) ¿Cuáles segmentos dirigidos cumplen (a), (b) y (c)?
   (e) ¿Qué relación pueden establecer entre los segmentos dirigidos de la parte (d)?

Con la ayuda del profesor y en base a las conclusiones obtenidas, los estudiantes estarán en la capacidad de formular la definición de vector libre.

> "Los segmentos dirigidos con la noción de igualdad introducida se denominan *vectores*"

Para denotar vectores libres utilizamos letras latinas con una saeta encima. Por ejemplo, si el punto inicial y terminal del vector $\vec{a}$ son A y B respectivamente, también podemos escribir $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Su representación geométrica es



Concluiremos esta actividad, estableciendo que:

(i) Si $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, entonces la magnitud del vector $\vec{a}$, denotada por $\left\| \vec{a} \right\|$ es la longitud del segmento rectilíneo $\overrightarrow{AB}$.

(ii) La dirección del vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, denotado por dir $\vec{a}$ es la dirección del rayo $\overrightarrow{AB}$. También podemos decir que la dirección del vector $\vec{a}$ está dada por el ángulo que forma el vector $\vec{a}$ y la horizontal imaginaria que pasa por el origen del vector $\vec{a}$.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina y orden en las tareas asignadas.
2. Comprobar la precisión que tienen los (as) estudiantes para trazar vectores libres mediante la entrega por escrito del siguiente ejercicio:

   "Trace un vector libre de magnitud ocho centímetros y con orientación sur"

## Actividad No. 4

**Objetivos**

1. Definir vector opuesto.
2. Definir vector nulo.
3. Definir vector unitario.
4. Representar geométricamente vectores opuestos, y vectores unitarios en la dirección de un vector.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

§.1. Vector opuesto.

§.2. Vector nulo.

§.3. Vector unitario.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla.
4. Escuadra.
5. Lápices de colores.

**Introducción**

Seleccionar dos estudiantes al azar y realizarles las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la representación geométrica de un vector libre en el plano?
2. ¿Todos los segmentos dirigidos iguales entre sí, representan o no el mismo vector?
3. ¿A qué se le llama magnitud y dirección de un vector libre?

**Desarrollo**

§.1. Vector opuesto.

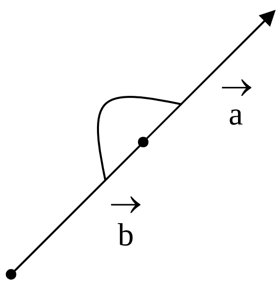
Orientar a los grupos de trabajos a que realicen las siguientes actividades con el propósito de formular la definición de vector opuesto.

1. Trace un vector libre $\vec{a}$ de magnitud siete centímetros y con un ángulo de inclinación de $60^0$.
2. Trace un vector $\vec{b}$ que cumpla:

   (i) El origen de $\vec{b}$ coincida con el de $\vec{a}$.

   (ii) $\left\| \vec{a} \right\| = \left\| \vec{b} \right\|$

   (iii) La orientación de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean opuestas.
3. Haga una ilustración de lo realizado en 1. y 2.




4. ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?
5. ¿Qué relación existe entre dir $\vec{a}$ y dir $\vec{b}$.
6. ¿Qué relación existe entre $\left\| \vec{a} \right\|$ y $\left\| \vec{b} \right\|$?
7. ¿Qué nombre reciben los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

En base a las conclusiones obtenidas, formulen la definición de vector opuesto.

“El vector $\vec{b}$ es opuesto al vector $\vec{a}$ si cumple las siguientes condiciones:

(i) $\left\| \vec{a} \right\| = \left\| \vec{b} \right\|$.

(ii) dir $\vec{b}$ = dir $\vec{a}$.

El vector opuesto de $\vec{a}$ se denota por $-\vec{a}$.

§.2. Vector nulo.

Discutan, analicen y respondan a lo siguiente:

1. Si el origen y el extremo de un vector coinciden, ¿cuál es su magnitud?
2. ¿Qué nombre reciben los vectores que cumplen 1?
3. Defina vector nulo.

La notación del vector nulo (cero) es $\vec{a} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

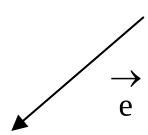
§.3. Vector unitario.

Realizar la siguiente pregunta a cada uno de los grupos de trabajo.

1. Si la magnitud de un vector es igual a uno, ¿qué nombre recibe dicho vector?
2. Defina vector unitario.

La notación que utilizaremos para el vector unitario es $\vec{e}$. En este caso, es $\left\| \vec{e} \right\| = 1$

3. Resolver los siguientes ejercicios:
   (a) Graficar un vector unitario en la dirección del vector $\left\| \vec{c} \right\|$, siendo $\left\| \vec{c} \right\| = 7$ cm, forma un ángulo de $32^0$ con la horizontal.
   (b) Graficar el vector $\vec{c}$ de magnitud cinco unidades en la dirección del vector unitario $\vec{e}$ que se muestra a continuación




**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo y estética en el desarrollo de las actividades propuestas.
2. Comprobar la precisión al trazar vectores opuestos, mediante la realización del siguiente ejercicio, el cuál será entregado por escrito en la próxima actividad.

   “Trazar el vector opuesto al vector $\vec{a}$ cuya magnitud es 10 centímetros y forma un ángulo de $36^0$ con la horizontal.

## Actividad No. 5

## Clase Práctica No. 1

**Objetivo**

Aplicar los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector, vector opuesto y vector unitario en la resolución de ejercicios.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

Ejercicios

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla.
5. Escuadra.
6. Transportador.

**Introducción**

Estará orientada a recordar aquellos aspectos teóricos necesarios para el desarrollo de la clase práctica y, se hará, mediante la realización de las siguientes preguntas:

1. Defina vector libre.
2. Defina magnitud y dirección de un vector libre.
3. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir el vector opuesto a $\vec{a}$ ?
4. Defina vector unitario.

**Desarrollo**

Resolver en grupo los siguientes ejercicios, los cuales serán entregados por escrito al finalizar la actividad.

1. Represente por medio de vectores los desplazamientos de dos personas que parten de un mismo punto. Una de ella, recorre 50 kilómetros formando un ángulo de $37^0$ con la

horizontal; y, la otra, recorre 20 kilómetros formando un ángulo de $148^0$ con la horizontal. Tome la siguiente escala: 1 cm = 4 km.

2. Represente geométricamente:
   (a) Un vector con orientación oeste.
   (b) Un vector con orientación norte.
   (c) Un vector con orientación este.

3. Represente geométricamente el opuesto de los siguientes vectores:
   (a) $\vec{a}$ con $\left\| \vec{a} \right\| = 7$ cm y $\theta = 47^0$.
   (b) $\vec{b}$ con $\left\| \vec{b} \right\| = 3$ cm y $\theta = 150^0$.
   (c) $\vec{c}$ con $\left\| \vec{c} \right\| = 9$ cm y $\theta = 0^0$.

   ($\theta$ es el ángulo formado por los vectores dados con la horizontal)

**Evaluación**

1. Participación, compañerismo y disciplina en el desarrollo de la clase práctica.
2. Comprobar la habilidad y destreza en el uso de instrumentos geométricos en el trazado de vectores.
3. Presentación y dominio cognitivo en la resolución de los ejercicios propuestos.

## Actividad No. 6

**Objetivos**

1. Explicar la regla del triángulo y del paralelogramo para sumar y restar vectores.
2. Enunciar las propiedades de la suma de vectores.
3. Comprobar geométricamente la propiedad asociativa de la suma de vectores.
4. Definir diferencia de vectores.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

§.1. Suma de vectores.

§.2. Diferencia de vectores.

**Materiales**

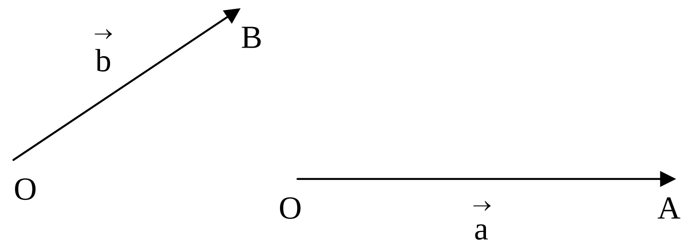
1. Papelógrafo.
2. Marcadores permanentes.
3. Lapiceros.
4. Regla.
5. Escuadra.

**Introducción**

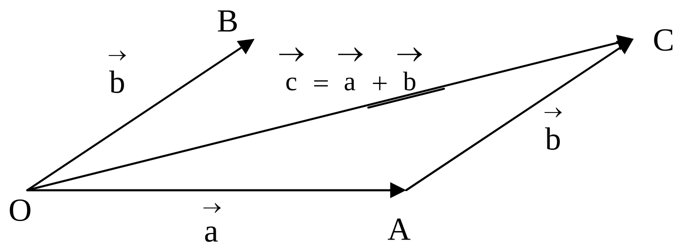
El desarrollo de esta actividad estará a cargo del profesor y, consistirá en una exposición de los métodos del triángulo y del paralelogramo para sumar y restar vectores; así como, la comprobación geométrica de la propiedad asociativa de la suma de vectores libres.

**Desarrollo**

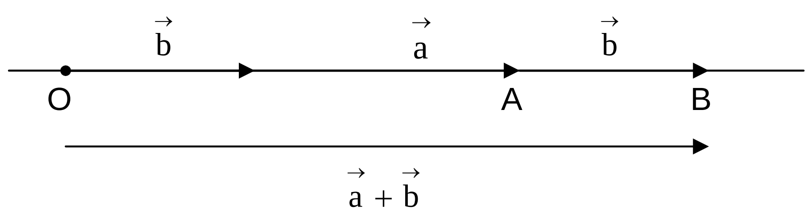
Sean dados dos vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

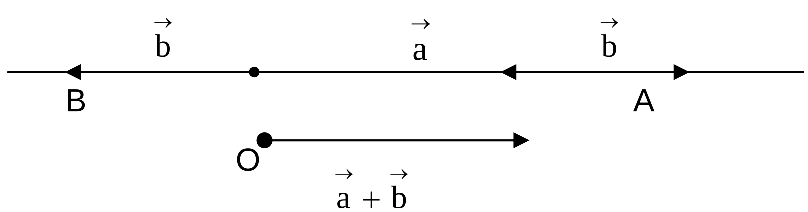


Para sumar geométricamente los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ procedemos de la siguiente manera: Trazamos del punto A el segmento AC, tal que $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Entonces, el vector $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ se denomina suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y se designa por $\vec{a} + \vec{b}$.



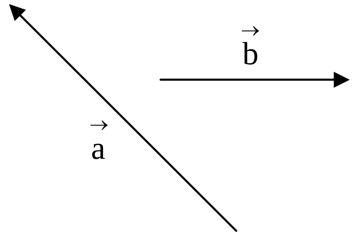

Así pues, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$. Esta igualdad se denomina regla del triángulo de adición de dos vectores. Es evidente que esta regla es válida en el caso, cuando los puntos O, A y B se encuentren en una misma línea recta.

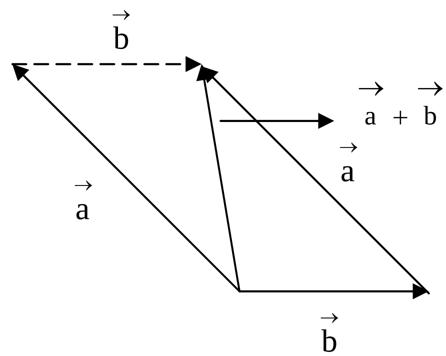



“Explique con sus propias palabras la regla del triángulo”

Otro procedimiento alternativo equivalente es la regla del paralelogramo. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dibujemos los representantes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ desde el mismo punto (se hacen coincidir los puntos iniciales de $\vec{a}$ y $\vec{b}$) y se completa el paralelogramo, la diagonal trazada desde el punto común representa la suma $\vec{a} + \vec{b}$.




Propiedades de la adición de vectores

1. Propiedad de conmutatividad

   Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ :

   $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2. Propiedad de asociatividad

   Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$ , $\vec{b}$ y $\vec{c}$ :

   $$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

3. Existencia del neutro aditivo.

   El vector nulo es el neutro aditivo para la adición de vectores.

   $$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

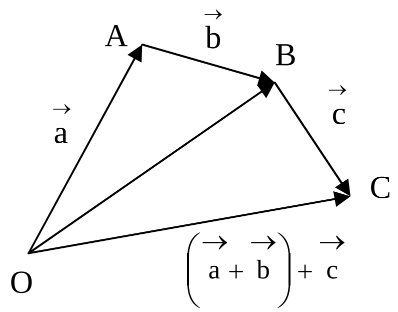
4. Existencia del inverso aditivo.

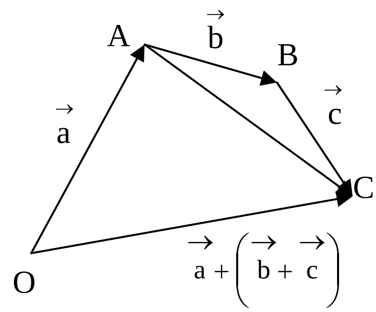
   Cualesquiera que sea $\vec{a}$ , existe $-\vec{a}$ tal que

   $$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Comprobación geométrica de la propiedad asociativa:

Tracemos desde cierto punto O el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ del punto A, el vector $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ y, por último, tracemos el vector $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ desde el punto B. Unamos con el segmento $\overline{OC}$ los puntos O y C.




Entonces,

(i) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$;

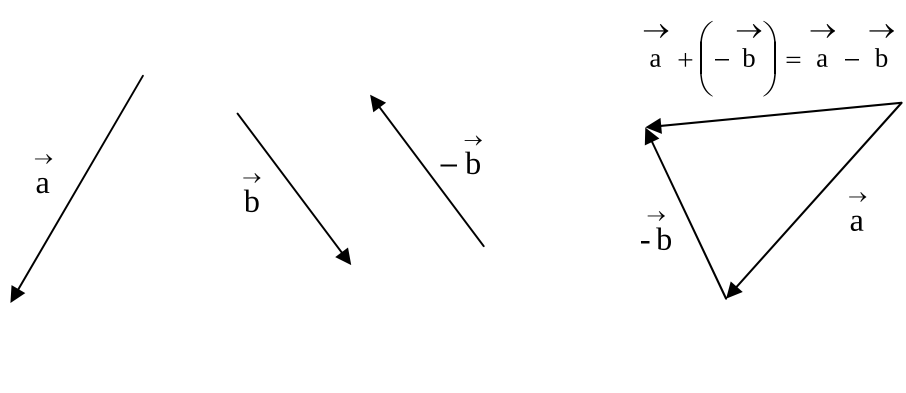
(ii) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

§.2. Diferencia de vectores

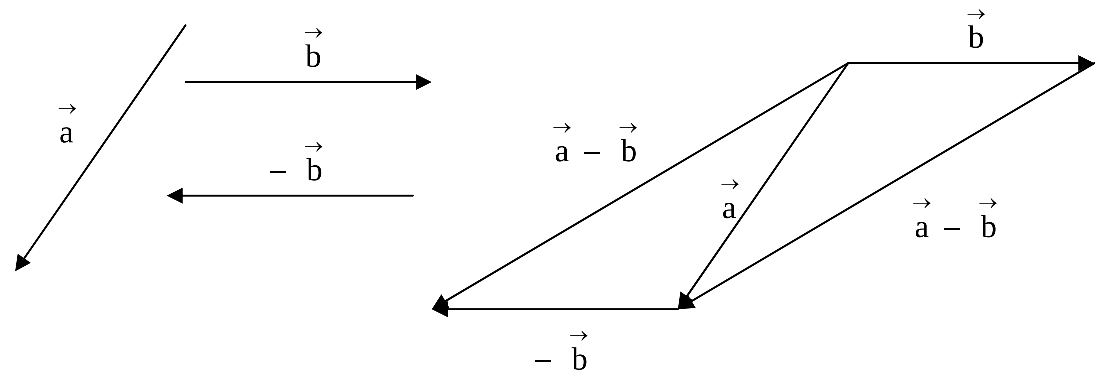
Como todo vector libre tiene inverso aditivo podemos definir la resta de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, así

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

Geométricamente



Otra forma alternativa de hacer la resta de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

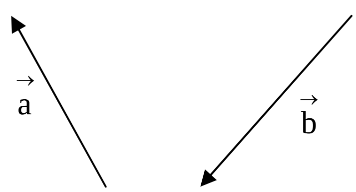



"Explique con sus propias palabras el procedimiento para restar vectores libres"

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, orden y aseo.
2. Entregar por escrito:

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$




Represente geométricamente: (a) $\vec{a} + \vec{b}$ : (b) $\vec{a} - \vec{b}$

**Actividad No. 7**

**Clase Práctica No. 2**

**Objetivos**

Aplicar las reglas del triángulo y del paralelogramo en la resolución de ejercicios y problemas.

**Tema**

Suma y resta de vectores libres.

**Sumario**

§.1. Ejercicios.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.

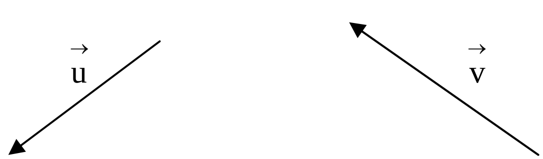
**Introducción**

Para sumar y restar geométricamente vectores libres utilizamos las reglas del triángulo y del paralelogramo. Expliquen brevemente en qué consisten dichas reglas.

**Desarrollo**

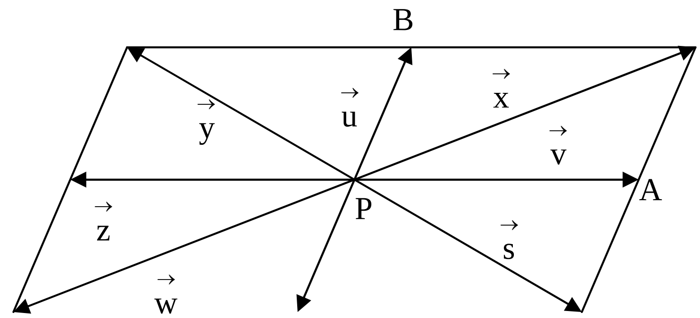
Resolver en grupo los siguientes ejercicios, los cuales serán entregados por escrito al finalizar la actividad.

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$



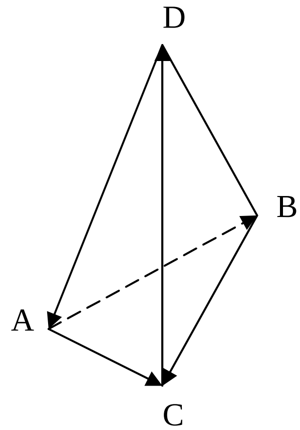

Determine gráficamente: (a) $\vec{u} + \vec{v}$ ; (b) $\vec{v} - \vec{u}$

2. De nombre a los vectores que no están en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$. Asuma que los segmentos que se ven paralelos lo son. Todas las flechas tienen su punto inicial en el centro del paralelogramo, o punto P.




3. Dibuje un triángulo con lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$. ¿Por qué $\left| \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \right| \le \|\vec{a} - \vec{b}\|$.

4. Se da la pirámide triangular ABCD.




Determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

5. El agua de un río fluye de norte a sur a una velocidad de 4 km/h. Un bote cruzando el río a una velocidad de 12 km/h y con una dirección de 30° al suroeste. Emplee el diagrama a escala para aproximar la dirección y la velocidad del bote con relación a la tierra.

6. Una fuerza de 30 Newtons es aplicada a un objeto. Una segunda fuerza de 20 Newtons es aplicada al mismo objeto formando un ángulo de $90^0$ con la primera fuerza. Use una escala para aproximar gráficamente la magnitud y la dirección resultante (con relación a la primera fuerza).

**Evaluación**

1. Participación, compañerismo, disciplina, honestidad en el desarrollo de la clase práctica.
2. Valorar tenacidad, objetividad y creatividad en la solución de ejercicios y problemas.
3. Valorar la habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.

## Actividad No. 8

**Objetivos**

1. Definir la multiplicación por un escalar.
2. Interpretar geométricamente la multiplicación por un escalar.
3. Enunciar las propiedades de la multiplicación por un escalar.
4. Comprobar geométricamente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de escalares.

**Tema**

Operaciones con vectores libres

**Sumario**

§.1. Multiplicación por un escalar.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Papelografo.
3. Marcadores.
4. Lapiceros.
5. Regla graduada.
6. Escuadra.

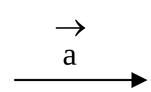
**Introducción**

En esta actividad formularemos el concepto de multiplicación por un escalar a partir de la suma de vectores libres. Seguidamente, se enunciarán las propiedades de la multiplicación por un escalar y comprobaremos geométricamente la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de escalares.

**Desarrollo**

Se elaborará en conjunto la definición de la multiplicación por un escalar.

Dado el vector libre $\vec{a}$



Realice y represente geométricamente:

(a) $\vec{a} + \vec{a}$, y represéntelo por $2\,\vec{a}$. O sea, $2\,\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$.

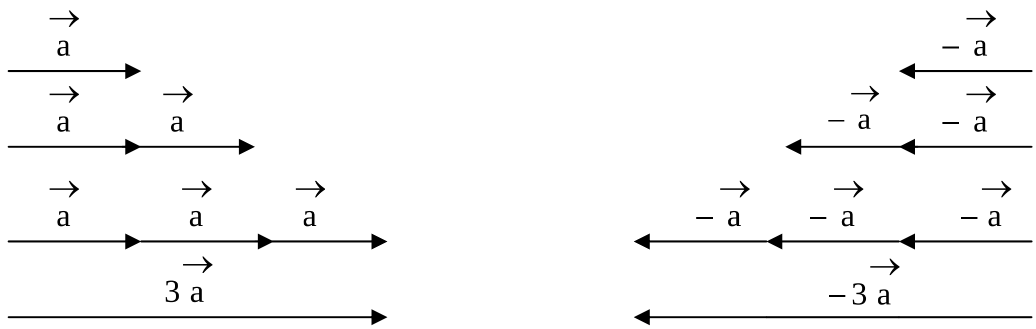
(b) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$, y represéntelo por $3\,\vec{a}$. O sea, $3\,\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$.

(c) $\left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right)$, y represéntelo por $(-2)\,\vec{a}$. O sea, $(-2)\,\vec{a} = \left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right)$.

(d) $\left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right)$, y represéntelo por $(-3)\,\vec{a}$. O sea,

$$(-3)\,\vec{a} = \left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right) + \left(-\vec{a}\right)$$

Una ilustración gráfica de lo realizado es




A partir de la ilustración gráfica, deduzcamos las relaciones que se dan entre:

(a) Las magnitudes de $2\,\vec{a}$ y $3\,\vec{a}$ con respecto a la magnitud de $\vec{a}$.

(b) Las magnitudes de $(-2)\,\vec{a}$ y $(-3)\,\vec{a}$ con respecto a la magnitud de $\vec{a}$.

(c) Las direcciones de $2\,\vec{a}$ y $3\,\vec{a}$ con respecto a la dirección de $\vec{a}$.

(d) Las direcciones de $(-2)\,\vec{a}$ y $(-3)\,\vec{a}$ con respecto a la dirección de $\vec{a}$.

Un resumen de las relaciones obtenidas es:

(a) $\left\| 2\,\vec{a} \right\| = 2 \cdot \left\| \vec{a} \right\|$ ; $\left\| 3\,\vec{a} \right\| = 3 \cdot \left\| \vec{a} \right\|$ .

(b) $\left\| (-2)\,\vec{a} \right\| = \left| -2 \right| \cdot \left\| \vec{a} \right\| = 2 \cdot \left\| \vec{a} \right\|$ ; $\left\| (-3)\,\vec{a} \right\| = \left| -3 \right| \cdot \left\| \vec{a} \right\| = 3 \cdot \left\| \vec{a} \right\|$ .

(c) $\operatorname{dir}(2\,\vec{a}) = \operatorname{dir}(3\,\vec{a}) = \operatorname{dir}\,\vec{a}$.

(d) $\operatorname{dir}\,(-2)\,\vec{a} = \operatorname{dir}\,(-3)\,\vec{a} = -\operatorname{dir}\,\vec{a}$.

En base al resumen presentado, formulemos la siguiente definición.

Definición (Multiplicación por un escalar)

Si $\lambda$ es un número real (escalar) y $\vec{a}$ es un vector libres, entonces $\lambda \vec{a}$ es un vector que cumple una de las siguientes condiciones:

1. Si $\lambda > 0$, entonces dir $(\lambda \vec{a})$ = dir $\vec{a}$ y $\left\| \lambda \vec{a} \right\| = \lambda \left\| \vec{a} \right\|$.
2. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.
3. Si $\lambda < 0$, entonces dir $(\lambda \vec{a})$ = - dir $\vec{a}$ y $\left\| \lambda \vec{a} \right\| = |\lambda| \cdot \left\| \vec{a} \right\|$.

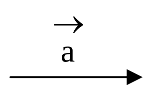
PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y dos escalares $\alpha$ y $\beta$. Entonces,

1. El producto $\alpha \vec{a}$ es un vector determinado de modo único.
2. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$.
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$.
4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$.

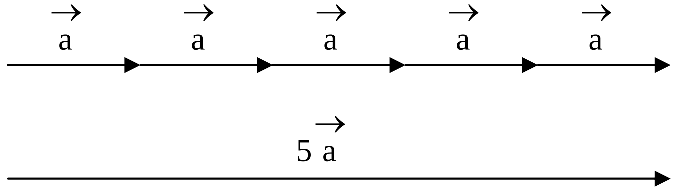
Comprobemos geométricamente la propiedad 2,para el caso en que . $\alpha = 2$ y $\beta = 3$.

Dado el vector $\vec{a}$

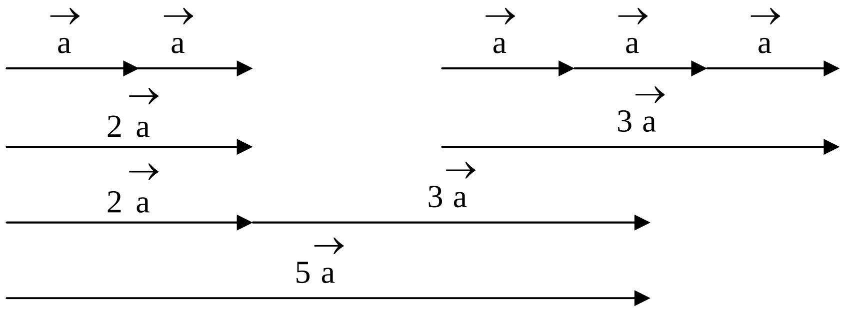



se tiene que

(a) $(2 + 3)\vec{a} = 5\vec{a}$



(b) $2\,\vec{a} + 3\,\vec{a}$




De (a) y (b), se obtiene la igualdad

$$(2 + 3)\,\vec{a} = 2\,\vec{a} + 3\,\vec{a}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo y honestidad en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis de los estudiantes para interpretar geométricamente la multiplicación por un escalar.

## Actividad No. 9

**Objetivos**

Aplicar la definición de la multiplicación por un escalar en la resolución de ejercicios.

**Tema**

Multiplicación por un escalar.

**Sumario**

§.1. Ejercicios.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.

**Introducción**

Rememorar los siguientes conceptos:

1. Magnitud y dirección de un vector.
2. Método del triángulo.
3. La definición de multiplicación por un escalar.

**Desarrollo**

Resolver en grupo los siguientes ejercicios, los cuales serán entregados por escrito al finalizar la actividad.

1. Si $\vec{a}$ es un vector libre tal que $\left\|\vec{a}\right\| = 4$ cm y su dirección $\theta = 51^0$.

   (a) Represente geométricamente los vectores $2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{a}$.

   (b) Encuentre $\left\|2\vec{a}\right\|$ y $\left\|\frac{1}{2}\vec{a}\right\|$.

   (c) Encuentre las direcciones de $2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{a}$.

2. Escriba las razones que justifican cada paso en la demostración de la siguiente propiedad

$$(\alpha\beta)\vec{a} = .\ \alpha(\beta\vec{a}) \text{ para } \alpha > 0,\ \beta < 0$$

Demostración)

(i) Las magnitudes son iguales.

$$\left\|(\alpha\beta)\vec{a}\right\| = |\alpha\beta| \cdot \left\|\vec{a}\right\| \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$= |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \left\|\vec{a}\right\| \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$= |\alpha| \cdot \left\|\beta\vec{a}\right\| \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$= \left\|(\alpha\beta)\vec{a}\right\| \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Los restantes casos para $\alpha$ y $\beta$ se demuestran de manera análoga.

(ii) Tienen las mismas direcciones.

dir $(\alpha\beta)\vec{a}$ = -dir $\vec{a}$ __________________________

dir $(\alpha\beta)\vec{a}$ = dir $(\beta\vec{a})$ ________________________

dir $(\alpha\beta)\vec{a}$ = dir $((\alpha\beta)\vec{a})$______________________

Los restantes casos para $\alpha$ y $\beta$ se demuestran de manera análoga.

3. Utilice una escala para comprobar geométricamente que

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

para $\alpha = 2$ y $\beta = -3$.

4. Comprobar geométricamente que

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$$

cuando $\alpha = -2$, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores libres tales que $\left\|\vec{a}\right\| = 2$ cm., $\left\|\vec{b}\right\| = 3$ cm., y las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $21^0$ y $75^0$, respectivamente.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo y honestidad durante el desarrollo de la clase práctica.
2. Valorar tenacidad, objetividad, creatividad e interpretación en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.

**Autopreparación**

Demostrar la siguiente proposición

$$\alpha\,\vec{a} = \vec{0} \text{ implica } \alpha = 0 \text{ o bien } \vec{a} = \vec{0}$$

## Actividad No. 10

**Objetivos**

1. Definir vectores colineales.
2. Establecer el criterio de colinealidad.
3. Explicar el concepto de ángulo entre dos vectores.
4. Definir vectores ortogonales.
5. Desarrollar un vector libre en dos vectores no colineales.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

§.1. Vectores colineales.

§.2. Angulo entre dos vectores.

§.3. Desarrollo de un vector en dos vectores no colineales.

**Materiales**

1. Papelógrafo.
2. Marcadores.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.
6. Tizas blancas y de colores.

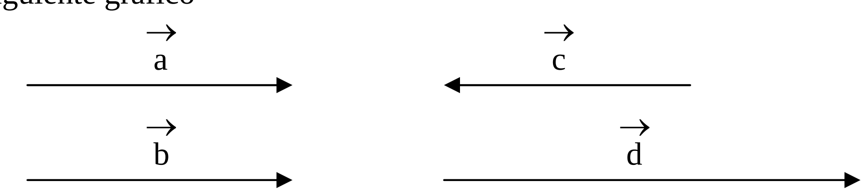
**Introducción**

Aclarar dudas surgidas en la demostración de la proposición $\alpha \vec{a} = \vec{0}$ implica $\alpha = 0$ o bien $\vec{a} = \vec{0}$; en caso contrario, demostrarla.

**Desarrollo**

§.1. Vectores colineales.

Observen el siguiente gráfico



Del gráfico observado, establezcan las relaciones entre las direcciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y, $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

A estos dos vectores cuyas direcciones coinciden o son opuestas se le llaman vectores colineales.

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son colineales, se dice también que $\vec{a}$ es colineal a $\vec{b}$, y $\vec{b}$ es colineal a $\vec{a}$.

El vector nulo se considera colineal a cualquier vector.

CRITERIO DE COLINEALIDAD

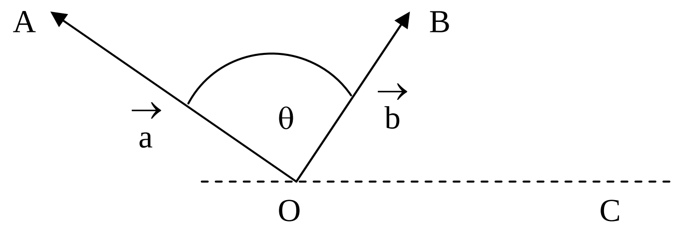
Para que el vector $\vec{a}$ sea colineal al vector $\vec{b}$ no nulo, es necesario y suficiente que exista un número k, que satisfaga la condición $\vec{a} = k\,\vec{b}$.

Trazar en la pizarra dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $\left\|\vec{a}\right\| = 2$ cm, y $\left\|\vec{b}\right\| = 6$ cm, y que tengan direcciones opuestas.


¿Es el vector $\vec{a}$ colineal al vector $\vec{b}$? Explique su respuesta.

§.2. Angulo entre dos vectores.

Tracemos en el plano dos vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ cuyos orígenes coincidan, y cuyas direcciones estén dadas por $150^0$ y $70^0$, respectivamente.




La dirección de $\vec{a}$ está dada por el ángulo $\angle$ COA = $150^0$ y la dirección de $\vec{b}$ está dada por el ángulo $\angle$ COB = $70^0$. ¿Cuál es la medida del ángulo θ? Compruébelo con un transportador. ¿Qué nombre recibe el ángulo θ?

Se denomina ángulo entre dos vectores no nulos, el ángulo entre las direcciones de estos vectores. El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por cualquier letra del alfabeto griego o por $\angle(\vec{a}\ ;\ \vec{b})$ .

Si el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de $90^0$, ¿qué nombre reciben dichos vectores?

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales (o perpendiculares) si $\angle(\vec{a}\ ;\ \vec{b}) = 90^0$, se escribe $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

§.3. Desarrollo de un vector en dos vectores no colineales.

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no colineales. ¿Para qué valores de x e y se satisface la condición $x\cdot \vec{a} + y\cdot \vec{b} = \vec{0}$ ?

Diremos que el vector $\vec{a}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, si puede ser expresado en la forma

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \vec{a}_n$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales.

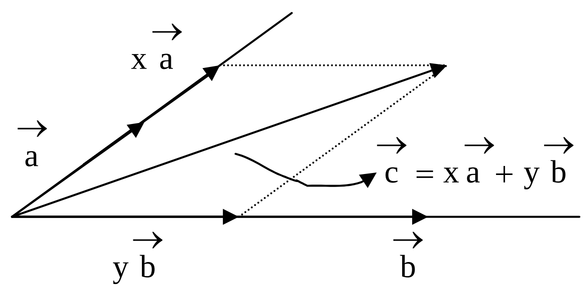
Así, el vector $\vec{a} = (-2)\cdot\vec{a}_1 + 3\cdot\vec{a}_2 + 7\cdot\vec{a}_3$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ y $\vec{a}_3$.

Teorema

Cualquier vector $\vec{c}$ en el plano puede ser definido, además, de un modo único, en forma de combinación lineal de cualesquiera dos vectores no colineales $\vec{a}$ y $\vec{b}$;

$$\vec{c} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$$

Gráficamente,




Si un vector está representado como una combinación lineal de ciertos vectores, se dice que el vector está desarrollado según estos vectores.

Concluiremos esta actividad, explicando los conceptos de base y coordenadas de un vector con respecto a una base.

Se denomina base en el plano cualesquiera dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no colineales de este plano, tomados en un orden determinado. También, podemos decir que, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es una base si de la relación $x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} = \vec{0}$ resulta $x = y = 0$.

Sea que $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ es cierta base y $\vec{a}$, un vector cualquiera, entonces según el teorema existen y son únicos, dos números reales x e y, tales que

$$\vec{a} = x\,\vec{e_1} + y\,\vec{e_2}$$

Los números x e y se denominan coordenadas del vector $\vec{a}$ en la base dada. En este caso, se escribe $\vec{a} = (x ; y)$.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Entregar por escrito la siguiente pregunta

   ¿Cuál es la medida del ángulo que forman dos vectores colineales?

**Actividad No. 11**

**Clase Práctica No. 4**

**Objetivo**

1. Aplicar los conceptos de vectores colineales y ángulo entre dos vectores en la resolución de ejercicios.
2. Expresar un vector como combinación lineal de dos vectores dados.

**Tema**

Vectores libres en el plano.

**Sumario**

§.1. Ejercicios.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Transportador.

**Introducción**

Rememorar aquellos conceptos que serán utilizados en el desarrollo de la clase práctica.

**Desarrollo**

Resolver en grupo los siguientes ejercicios, los cuales serán entregado por escrito al finalizar la clase práctica.

1. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$ y $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ son colineales.

2. Represente geométricamente en el plano dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que cumplan las siguientes condiciones:

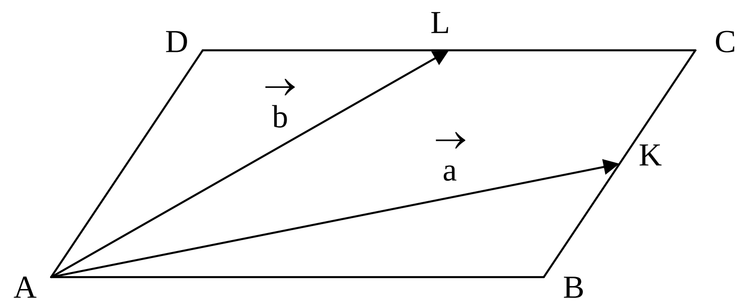
   (a) Los orígenes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincidan.

   (b) $\left\| \vec{a} \right\| = 7$ cm; $\left\| \vec{b} \right\| = 5$ cm.

(c) Las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ estén determinadas por los ángulos $70^0$ y $38^0$.

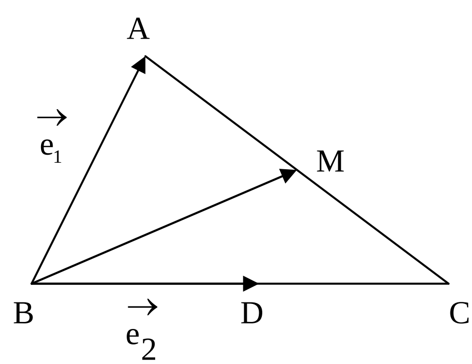
¿Cuál es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ?

3. Se da el paralelogramo ABCD. Los puntos K y L son los puntos medios de los lados BC y CD. Desarróllese el vector $\overrightarrow{BC}$ en términos de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AL}$.




4. En $\Delta$ ABC, D es el punto medio del lado BC, $\overline{BM}$ es una mediana del triángulo ABC. Hállense las coordenadas del vector $\overrightarrow{BM}$ respecto a las bases $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$, siendo

$\vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}$ y $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BD}$.




Indicación: Complete el paralelogramo y al cuarto vértice denótelo por N y represente el vector $\vec{e}_2 = \overrightarrow{MN}$..

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, orden y honestidad en el desarrollo de la clase práctica.
2. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
3. Valorar tenacidad, objetividad, creatividad e interpretación en la resolución de ejercicios.

## Actividad No. 12

**Objetivos**

1. Explicar el concepto de vector en $\mathbf{R}^2$.
2. Deducir las fórmulas para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector en $\mathbf{R}^2$.

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Concepto. Notación.

§.2. Magnitud y dirección.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.
6. Marcadores.

**Introducción**

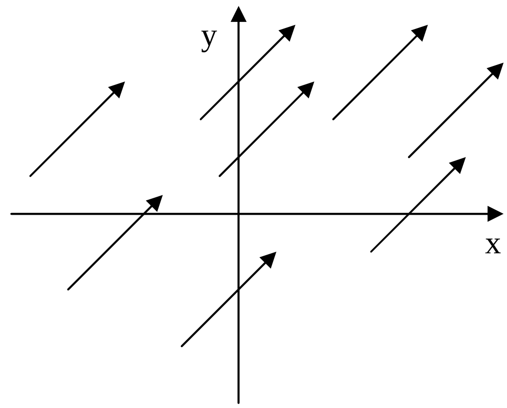
A partir de esta actividad damos inicio al estudio de los vectores en $\mathbf{R}^2$, identificando cada vector libre como vector de posición en el plano xy. Todos los aspectos teóricos estudiados en el conjunto de los vectores libres nos serán de mucha utilidad en el estudio del conjunto de los vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Desarrollo**

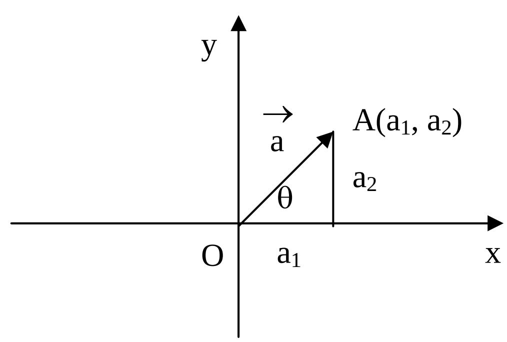
Esta actividad la hemos dividido en dos momentos. El primer momento, estará a cargo del docente y consiste en explicar el concepto de vector en $\mathbf{R}^2$ y, el de establecer las diferencias entre vectores coordenados y vectores de posición. El segundo momento, estará a cargo de los estudiantes y consistirá en la deducción de las fórmulas para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector coordenado.

A. Primer momento.

Presentarle a los estudiantes la siguiente ilustración.




Todos estos segmentos de rectas dirigidas representan el mismo vector. Tomemos uno de ellos y trasladémoslo al plano xy de tal forma que su origen coincida con el origen del plano xy. Denotemos por $\vec{a}$ el segmento de recta dirigido y por A su punto extremo cuyas coordenadas cartesianas la representamos por $a_1$ y $a_2$; es decir, el punto extremo de $\vec{a}$ es $A(a_1, a_2)$. Al vector $\vec{a}$ se le conoce como vector de posición del punto A.




La notación que utilizaremos para vectores coordenados, es $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, donde $a_1$ y $a_2$ son las componentes del vector. Se utiliza esa notación para evitar confusión con los pares ordenados.

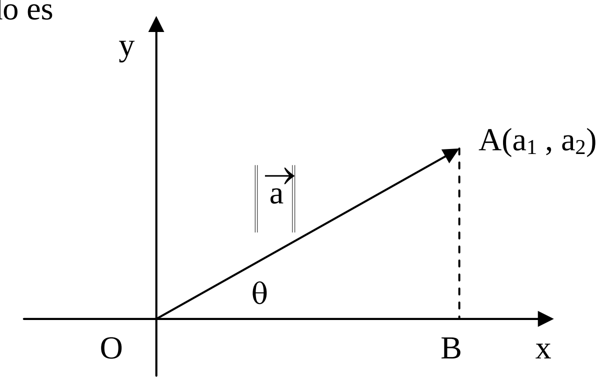
Concluimos este momento preguntándole a los estudiantes, la diferencia entre vectores coordenados y vectores de posición.

B. Segundo momento.

Orientar la formación de los grupos con el propósito de inducirlo a que deduzcan las fórmulas para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector coordenado.

1. Tracen en el plano xy un vector $\vec{a}$ cuyo punto extremo sea el punto $A(a_1, a_2)$.
2. Forme el triángulo OBA, rectángulo en B.
3. ¿Cuál es la longitud del lado OB y BA?

Una ilustración de lo realizado es




4. Use el teorema de Pitágoras para determinar la magnitud $\|\vec{a}\|$ del vector $\vec{a}$, y la razón trigonométrica tangente para determinar su dirección.

Obtendrán:

La magnitud del vector $\vec{a}$, es

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

y la dirección del vector $\vec{a}$, es

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, orden y honestidad en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
3. Comprobar habilidad en el procedimiento utilizado para deducir las fórmulas de la magnitud y dirección de un vector coordenado.

## Actividad No. 13

**Objetivos**

1. Deducir las fórmulas para sumar y restar de vectores en $\mathbf{R}^2$.
2. Enunciar las propiedades de la adición de vectores en $\mathbf{R}^2$.
3. Comprobar analíticamente algunas de las propiedades de la suma de vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Tema**

Operaciones con vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Adición de vectores.

§.2. Diferencia de vectores.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.
6. Marcadores.

**Introducción**

Esta actividad la iniciamos formulándoles las siguientes preguntas a los estudiantes:

1. ¿Cuál es la diferencia entre vectores coordenados y vectores de posición?
2. ¿Cómo se obtiene la magnitud de un vector coordenado?
3. ¿Cómo se obtiene la dirección de un vector coordenado?

**Desarrollo**

Orientar a los grupos de trabajo a que realicen las siguientes actividades, con el propósito de que ellos formulen la definición de suma y resta de vectores coordenados.

A. Adición de vectores en $\mathbf{R}^2$.

1. Trace en el plano xy, los vectores $\vec{a} = \langle 2,5 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 6,3 \rangle$.

2. Utilice la regla del paralelogramo para sumar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

3. Determine las coordenadas del punto extremo de $\vec{a} + \vec{b}$.

4. Generalice el resultado, si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, están dado por $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$.

B. Diferencia de vectores en $\mathbf{R}^2$.

1. Trace en el plano xy, los vectores $\vec{a} = \langle 7,5 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 4,2 \rangle$.

2. Represente geométricamente la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Obtenga las coordenadas del punto extremo del vector $\vec{a} - \vec{b}$.

4. Generalice el resultado, si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, están dado por $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$.

C. Propiedades de la suma de vectores en $\mathbf{R}^2$.

Presentarle a los estudiantes en un papelógrafo las propiedades de la suma de vectores .

Sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y $\vec{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$ vectores coordenados cualesquiera. Entonces,

(a) Propiedad conmutativa.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

(b) Propiedad asociativa.

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(c) El vector nulo $\vec{0}$, dado por $\vec{0} = \langle 0,0 \rangle$ es el neutro aditivo para la adición de vectores; es decir,

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

(d) El inverso aditivo de $\vec{a}$ es $-\vec{a} = \left\langle a_1, a_2 \right\rangle$, ya que

$$\vec{a} + \left( -\vec{a} \right) = \left( -\vec{a} \right) + \vec{a} = \vec{0}$$

Comprobemos analíticamente la propiedad conmutativa.

Sean $\vec{a} = \left\langle -2, 3 \right\rangle$, $\vec{b} = \left\langle -3, -5 \right\rangle$. Entonces,

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \left\langle -2, 3 \right\rangle + \left\langle -3, -5 \right\rangle =$

$= \left\langle (-2) + (-3), 3 + (-5) \right\rangle =$

$= \left\langle -5, -2 \right\rangle$

(ii) $\vec{b} + \vec{a} = \left\langle -3, -5 \right\rangle + \left\langle -2, 3 \right\rangle =$

$= \left\langle (-3) + (-2), (-5) + 3 \right\rangle =$

$= \left\langle -5, -2 \right\rangle$

De (i) y (ii), se establece la igualdad,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, orden y honestidad en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
3. Comprobar la habilidad del razonamiento lógico – matemático, para inferir las definiciones de suma y resta de vectores coordenados.

**Autopreparación**

Compruebe analíticamente la propiedad asociativa de la adición de vectores en $\mathbf{R}^2$.

## Actividad No. 14

**Objetivos**

1. Deducir la fórmula para multiplicar un vector por un escalar en $\mathbf{R}^2$.
2. Enunciar las propiedades de la multiplicación por un escalar en $\mathbf{R}^2$.
3. Comprobar analíticamente algunas de las propiedades de la multiplicación por un escalar.

**Tema**

Operaciones con vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Multiplicación por un escalar.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.
6. Marcadores.

**Introducción**

Esta actividad la iniciamos formulándoles las siguientes preguntas a los estudiantes:

¿Cómo se obtiene la suma de dos vectores coordenados?

**Desarrollo**

Orientar a los grupos de trabajo a que realicen las siguientes actividades, con el propósito de que ellos formulen la definición de la multiplicación por un escalar.

1. Trace en el plano xy, el vector $\vec{a} = \langle 4, 2 \rangle$.
2. Represente geométricamente el vector $2\vec{a}$.
3. Determine el punto extremo del vector $2\vec{a}$.
4. Generalice el resultado, si el escalar es cualquier número real $\alpha$, y $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$.

5. Representen geométricamente, el producto $\alpha \vec{a}$, para (a) $\alpha = 3$; (b) $\alpha = -2$; (c) $\alpha = \frac{1}{3}$ y (d) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

6. Discutan, analicen las representaciones geométricas de los productos $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{a}$ y $\frac{1}{3}\vec{a}$ con respecto a la representación geométrica de $\vec{a}$

7. ¿Qué resultados obtiene? Generalicen los resultados.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

Sean $\alpha$ y $\beta$ números reales cualesquiera, y sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores coordenados cualesquiera. Entonces,

1. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
4. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Comprobemos analíticamente la propiedad 1.

Sean $\alpha = 2$ $\beta = -3$ y $\vec{a} = \langle -2, -4 \rangle$. Entonces,

(i) $\alpha(\beta\vec{a}) = 2[(-3)\cdot\langle -2, -4 \rangle] = 2\langle (-3)(-2), (-3)(-4) \rangle =$

$= 2\langle 6, 12 \rangle = \langle (2)(6), (2)(12) \rangle = \langle 12, 24 \rangle$

(ii) $(\alpha\beta)\vec{a}$ .$= (2)(-3)\langle -2, -4 \rangle = (-6)\langle -2, -4 \rangle = \langle (-6)(-2), (-6)(-4) \rangle =$

$= \langle 12, 24 \rangle$

De (i) y (ii) se obtiene la igualdad

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, orden y honestidad en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
3. Valorar la capacidad de análisis, de interpretación y de generalización para inferir la definición de la multiplicación por un escalar.

**Autopreparación**

Compruebe analíticamente las propiedades 2. y 3. de la multiplicación por un escalar.

## Actividad No. 15

## Clase Práctica No. 5

**Objetivos**

1. Aplicar la definición de vector coordenado, magnitud y dirección de un vector coordenado y cada una de las operaciones con vectores coordenados en la resolución de ejercicios.
2. Demostrar algunas de las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar.

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Ejercicios sobre:

- Vectores coordenados.
- Magnitud y dirección de un vector coordenado.
- Operaciones con vectores coordenados.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Transportador.

**Introducción**

Rememorar:

(a) Vector coordenado y vector de posición.

(b) Magnitud y dirección de un vector coordenado.

(c) Las definiciones de cada una de las operaciones con vectores coordenados.

**Desarrollo**

Realizar en grupo los siguientes ejercicios:

1. Trace en el plano xy los siguientes vectores $\vec{a} = \langle 2, \ 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle -3, \ 4 \rangle$ y $\vec{c} = \langle 2, \ 5 \rangle$. Determine la magnitud y dirección y compruébelo haciendo uso de regla graduada (o escuadra) y transportador.

2. Dados los vectores $\vec{a} = \langle -3, \ -5 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, \ -2 \rangle$ y $\vec{c} = \langle 2, \ 4 \rangle$. Determine:

$$(-2)\cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{c} - 4 \cdot \vec{b}$$

3. En la demostración de la siguiente propiedad $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$, coloque en el espacio en blanco la razón que justifica cada paso.

Sean $\vec{a} = \langle a, \ b \rangle$, $\vec{b} = \langle c, \ d \rangle$ y $\vec{c} = \langle e, \ f \rangle$ vectores coordenados cualesquiera. Entonces,

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \left(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle\right) + \langle e, f \rangle$ ________________________________

$= \langle a + c, \ \ b + d \rangle + \langle e, f \rangle$ ________________________________

$= \langle (a + c) + e, \ \ (b + d) + f \rangle$ ________________________________

$= \langle a + (c + e), \ \ b + (d + f) \rangle$ ________________________________

$= \langle a, \ \ b \rangle + \langle c + e, d + f \rangle$ ________________________________

$= \langle a, \ \ b \rangle + \left(\langle c, d \rangle + \langle e, f \rangle\right)$ ________________________________

$= \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ ________________________________

4. En la demostración de la siguiente propiedad $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$, coloque en el espacio en blanco la razón que justifica cada paso.

Sea $\alpha \in \mathbf{R}$ y sean $\vec{a} = \langle a, \ b \rangle$ y $\vec{b} = \langle c, \ d \rangle$ vectores coordenados cualesquiera. Entonces,

$\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \left(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle\right)$ ________________________________

$= \alpha \cdot \langle a + c, b + d \rangle$ ________________________________

$= \langle \alpha(a + c), \alpha(b + d) \rangle$ ________________________________

$= \langle \alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d \rangle$ ________________________________

$$= \langle \alpha a, \alpha b \rangle + \langle \alpha c, \alpha d \rangle \underline{\hspace{8cm}}$$

$$= \alpha \cdot \langle a, b \rangle + \alpha \cdot \langle c, d \rangle \underline{\hspace{8cm}}$$

$$= \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \underline{\hspace{10cm}}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad y orden en el desarrollo de la clase práctica.
2. Valorar habilidad y destreza en el uso y manejo de instrumentos geométricos.
3. Valorar tenacidad, objetividad, creatividad e interpretación en la resolución de ejercicios.
4. Comprobar la capacidad de abstracción en la demostración de propiedades.

## Actividad No. 16

**Objetivo**

1. Definir producto escalar.
2. Deducir la fórmula para obtener el ángulo entre dos vectores.
3. Definir vectores ortogonales.
4. Deducir la fórmula para el cálculo de la distancia entre dos vectores.

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Producto escalar.

§.2. Angulo entre dos vectores.

§.3. Distancia entre dos vectores.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Transportador.
7. Calculadora.

**Introducción**

Esta actividad será desarrollada por el docente y, consistirá en definir producto escalar, ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales y distancia entre dos vectores. Además, deduciremos las fórmulas para el cálculo del ángulo que forman dos vectores y la distancia entre dos vectores coordenados. Realizaremos las siguientes preguntas con el objetivo de tener presente los conceptos de magnitud y ángulo entre dos vectores, los cuales serán aplicados en el desarrollo de la actividad.

Si $\overrightarrow{a} = \langle 4, -3 \rangle$, ¿cuál es el valor de $\left\| \overrightarrow{a} \right\|$?

Defina ángulo entre dos vectores.

**Desarrollo**

§.1. Producto escalar.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores coordenados cualesquiera . Definimos el producto escalar de ellos como la suma de los productos de las componentes correspondientes.

Definición (Producto escalar)

Sean $\vec{a} = \langle x_1, x_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle y_1, y_2 \rangle$ dos vectores coordenados cualesquiera. El producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el cual se denota por $\vec{a} \bullet \vec{b}$, está dado por

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{a} = \langle -3, 4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 2, -5 \rangle$. Encuentre $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

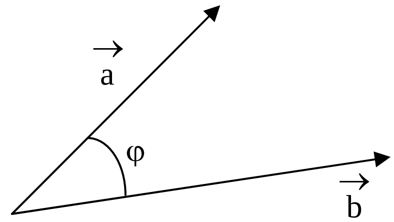
Solución)

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \langle -3, 4 \rangle \bullet \langle 2, -5 \rangle = (-3)(2) + (4)(-5) = -6 + (-20) = -26$

En conclusión, afirmamos que el producto escalar es una operación definida en el conjunto de los vectores coordenados y cuyo resultado es siempre un número real cualquiera.

§.2. Angulo entre dos vectores.

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, a como se muestran en la siguiente figura




El símbolo φ denota el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y está determinado por las orientaciones ambos vectores.

Definición (Angulo entre dos vectores)

Sea $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores coordenados cualesquiera. Angulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el número real φ que satisface:

(i) $0^0 \leq \varphi \leq 180^0$.

(ii) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$

Ejemplo

Encuentre el ángulo que forman los vectores $\vec{c} = \langle -1,2 \rangle$ y $\vec{d} = \langle -4,-2 \rangle$.

Solución)

Para determinar el ángulo que forman los vectores dados, aplicamos la parte (ii) de la definición.

$\vec{c} = \langle -1,2 \rangle$ y $\vec{d} = \langle -4,-2 \rangle$

(1) $\vec{c} \bullet \vec{d}$

$\vec{c} \bullet \vec{d} = \langle -1,2 \rangle \bullet \langle -4,-2 \rangle = (-1)(-4) + (2)(-2) = 2 + (-4) = 0$

(2) Calculemos las magnitudes de los vectores dados.

$\left\|\vec{c}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, y

$\left\|\vec{d}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

(3) Apliquemos la condición (ii) de la definición.

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{c} \bullet \vec{d}}{\left\|\vec{c}\right\| \cdot \left\|\vec{d}\right\|} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{0}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0 \Rightarrow \varphi \approx 90^0$

Por lo tanto, el ángulo que forman los vectores es de $90^0$. ¿Qué nombre reciben dichos vectores?

Formule la definición de vectores ortogonales en base al producto escalar.

Definición (Vectores ortogonales)

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores coordenados cualesquiera. Diremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.

Simbólicamente

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

§.3. Distancia entre dos vectores.

Sea $\vec{a} = \langle x_1, x_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle y_1, y_2 \rangle$ dos vectores coordenados cualesquiera. La distancia entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, denotada por $d(\vec{a}, \vec{b})$, se define por

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \qquad (1)$$

También, podemos decir que

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \qquad (2)$$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3,\text{-}1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 2,4 \rangle$, encuentre $d(\vec{a}, \vec{b})$.

Solución)

Para encontrar la distancia entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se utiliza (1) o bien (2).

Utilicemos (1):

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\| \Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \langle 3,-1 \rangle - \langle 2,4 \rangle \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \left\langle 2-3, 4-(-1) \right\rangle \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \left\langle -1, 5 \right\rangle \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1+25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{26}$$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo y orden en el desarrollo de la actividad.
2. En la próxima actividad, entregar el siguiente ejercicio, en donde se evaluará presentación, estética y cientificidad:

   Encuentre el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = \left\langle -1, -2 \right\rangle$ y $\vec{b} = \left\langle -2, 3 \right\rangle$ y, compruébelo geométricamente.

## Actividad No. 17

## Clase Práctica No. 6

**Objetivo**

Aplicar los conceptos de producto escalar, ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales y distancia entre dos vectores en la resolución de ejercicios.

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Ejercicios.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Transportador.
7. Calculadora.

**Introducción**

Presentarle a los estudiantes en un papelógrafo las fórmulas a utilizar en la resolución de ejercicios.

Si $\vec{a} = \langle x_1, x_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle y_1, y_2 \rangle$, entonces

(a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$;

(b) El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es el número real $\varphi$, tal que:

$$0^0 \leq \varphi \leq 180^0 \text{ y } \cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$$

(c) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

(d) $d(\vec{a}, \vec{b}) = \left\| \vec{b} - \vec{a} \right\|$, o bien, $d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

**Desarrollo**

Resolver en grupo los siguientes ejercicios:

1. Determine el producto escalar de los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{a} = \langle -2, -3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -1, -2 \rangle$; (b) $\vec{a} = \langle 5, -1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -3, -2 \rangle$

2. Encuentre el ángulo entre los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{a} = \langle -1, 2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -2, 3 \rangle$; (b) $\vec{a} = \langle -2, -3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -2 \rangle$

   Compruébelo geométricamente.

3. Determine si los siguientes pares de vectores son ortogonales:

   (a) $\vec{a} = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}, -2 \right\rangle$ y $\vec{b} = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$;

   (b) $\vec{a} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{3}{7} \right\rangle$ y $\vec{b} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{4} \right\rangle$

   Compruébelo geométricamente.

4. Encuentre la distancia entre los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{a} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -12, -1 \rangle$; (b) $\vec{a} = \langle 7, -3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -5, -2 \rangle$

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad y orden en el desarrollo de la clase práctica.
2. Comprobar la habilidad y destreza en el manejo de instrumentos geométricos.
3. Valorar la capacidad de análisis e interpretación en la solución de los ejercicios propuestos.
4. Presentación, coherencia en los procedimientos y cientificidad en la resolución de los ejercicios propuestos.

## Actividad No. 18

**Objetivos**

1. Definir los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
2. Expresar un vector en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
3. Expresar las operaciones con vectores en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

**Tema**

Descomposición canónica.

**Sumario**

§.1. Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

§.2. Operaciones con vectores.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla.
4. Escuadra.

**Introducción**

En esta actividad expresaremos un vector coordenado en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, así como cada una de las operaciones con vectores.

**Desarrollo**

Esta actividad la desarrollaremos en dos momentos; el primero, estará a cargo del docente, y consistirá en expresar un vector coordenado en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$, y el segundo momento, estará a cargo de los estudiantes, y consistirá en expresar cada una de las operaciones con vectores en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

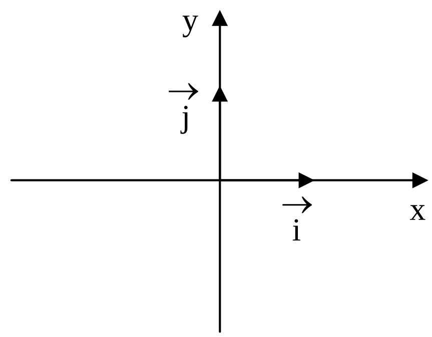
Primer momento:

Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

Definición

$$\vec{i} = \langle 1 , 0 \rangle \quad \text{y} \quad \vec{j} = \langle 0 , 1 \rangle$$

Gráficamente,




Se verifica que:

(a) $\left\| \vec{i} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

(b) $\left\| \vec{j} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$;

Como $\left\| \vec{i} \right\| = 1$ y $\left\| \vec{j} \right\| = 1$; los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son unitarios y reciben el nombre de vectores canónicos.

Del gráfico, podemos observar que los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ forman un ángulo de $90^0$, por lo tanto, ellos son ortogonales. Analíticamente, $\vec{i} \bullet \vec{j} = \langle 1,0 \rangle \bullet \langle 0,1 \rangle$ = (1)(0) + (0)(1) = 0.

Descomposición canónica de un vector.

Sea $\vec{a} = \left\langle x_1 , x_2 \right\rangle$ un vector cualquiera. Entonces,

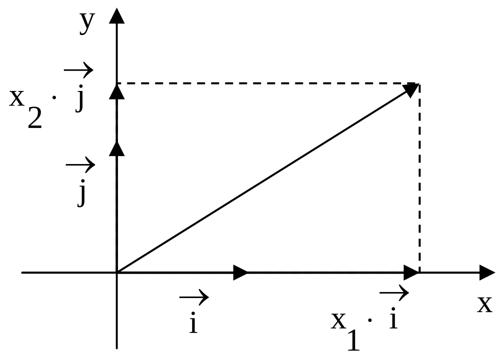
$$\vec{a} = \left\langle x_1 , x_2 \right\rangle = \left\langle x_1 , 0 \right\rangle + \left\langle 0 , x_2 \right\rangle = x_1 \cdot \langle 1,0 \rangle + x_2 \cdot \langle 0,1 \rangle = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j}$$

A esta relación se le llama descomposición canónica del vector $\vec{a}$.

Geométricamente,




Segundo momento.

Este momento estará a cargo de los estudiantes.

A partir de los $\vec{a} = \langle x_1, x_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle y_1, y_2 \rangle$, realicen:

1. Expresen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
2. Expresar cada una de las operaciones con vectores en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
3. Descomponga canónicamente los vectores $\vec{a} = \langle -1, -3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 5, -2 \rangle$ y, a continuación, determine la suma, resta y multiplicación por un escalar.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad y orden en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar objetividad, creatividad y análisis en las actividades asignadas en el segundo momento.

## Actividad No. 19

**Objetivos**

1. Inducir a los estudiantes a que deduzcan la condición que deben cumplir dos vectores coordenados para que constituyan una base.
2. Definir base ortogonal.
3. Definir base ortonormal

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$.

**Sumario**

§.1. Base.

§.2. Base ortogonal.

§.3. Base ortonormal.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Lápices de colores.
4. Regla graduada.
5. Escuadra.
6. Regla graduada.
7. Escuadra.

**Introducción**

Realizar a los estudiantes las siguientes preguntas:

1. Si $\vec{a} = -2\cdot \vec{i} + 5\cdot \vec{j}$ y $\vec{b} = -2\cdot \vec{i} + 5\cdot \vec{j}$, entonces ¿a qué es igual:

   (a) $\vec{a} + \vec{b}$;

   (b) $\vec{a} - \vec{b}$;

   (c) $(-3)\ \vec{b}$ ?

2. ¿Cuándo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base?

**Desarrollo**

Esta actividad será desarrollada en conjunto (profesor – alumnos).

§.1. Base.

Iniciamos este acápite, preguntándole a los estudiantes

¿Cuándo dos vectores constituyen una base?

Sean $\vec{a} = \langle a, b \rangle$ y $\vec{b} = \langle c, d \rangle$ dos vectores cualesquiera.

Consideremos la relación

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0},$$

y, a partir ella, obtengamos los valores de x y de y.

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow x \cdot \langle a, b \rangle + y \cdot \langle c, d \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x \cdot a, x \cdot b \rangle + \langle y \cdot c, y \cdot d \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x \cdot a + y \cdot c, x \cdot b + y \cdot d \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x \cdot a + \cdot y \cdot c = 0 \\ x \cdot b + y \cdot d = 0 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$x = 0, \quad y = 0$$

Es decir,

De $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0}$ resulta $x = 0, \quad y = 0$.

Esta proposición corresponde a la condición de que dos vectores coordenados constituyan una base. A continuación, formulemos la definición de base.

Definición

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base si de $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{0}$ resulta $x = y = 0$

También diremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base siempre y cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean vectores no colineales.

§.2. Base ortogonal.

El concepto de base ortogonal lo introduciremos a partir del siguiente ejercicio.

Dados los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ y $\vec{b} = -2\,\vec{i} - \frac{3}{2}\,\vec{j}$. Solicitarle a cada grupo de estudiantes a que verifiquen:

(a) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base.

(b) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales

Entonces, se llegará a la conclusión de que los vectores dados constituyen una base y además, son ortogonales. Por lo tanto, la base se llama base ortogonal.

Definición

La base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ es ortogonal si, y solo si, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

Solicitarle a los estudiantes que reformulen la definición de base ortogonal haciendo uso del concepto de vectores ortogonales.

§.3. Base ortonormal.

El concepto de base ortonormal lo introduciremos en base al siguiente ejercicio.

Sean los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ y $\vec{b} = -2\,\vec{i} - \frac{3}{2}\,\vec{j}$. Solicitarle a cada grupo de estudiantes que verifiquen:

(a) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constituyen una base.

(b) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales

(c) Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios.

Entonces, se llegará a la conclusión de que los vectores dados constituyen una base, son ortogonales, y además, son unitarios. Por lo tanto, la base se llama base ortonormal.

Definición

La base { $\vec{a}$ , $\vec{b}$ } es ortonormal si, y solo si, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, y además, son unitario

Solicitarle a los estudiantes que reformulen la definición de base ortonormal haciendo uso del concepto de vectores ortogonales y unitarios.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad y orden en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar objetividad, creatividad, análisis e interpretación en la realización de los trabajos asignados en el desarrollo de la actividad.

**Actividad No. 20**

**Clase Práctica No. 7**

**Objetivo**

Aplicar los conceptos de base, base ortogonal y base ortonormal en la resolución de ejercicios.

**Tema**

Vectores en $\mathbf{R}^2$

**Sumario**

§.1. Ejercicios.

**Materiales**

1. Papel bond blanco.
2. Lapiceros.
3. Regla graduada.
4. Escuadra.
5. Calculadora.

**Introducción**

Rememorar los conceptos de:

(a) Base.

(b) Base ortogonal.

(c) Base ortonormal.

**Desarrollo**

Resolver en grupo los siguientes ejercicios, los cuales serán entregados al finalizar la actividad.

1. Compruebe analíticamente y geométricamente si los siguientes pares de vectores constituyen una base.

(a) $\vec{a} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ y $\vec{b} = -5\,\vec{i} - \frac{1}{3}\,\vec{j}$

(b) $\vec{a} = -\frac{1}{5}\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ y $\vec{b} = -3\,\vec{i} - 30\,\vec{j}$

2. Compruebe analíticamente y geométricamente si los siguientes pares de vectores contituyen una base ortogonal.

(a) $\vec{a} = \left\langle \frac{2}{3}, -5 \right\rangle$ y $\vec{b} = -6\,\vec{i} - \frac{4}{5}\,\vec{j}$

(b) $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ y $\vec{b} = -5\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$

3. Compruebe analíticamente si el conjunto formado por los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ constituyen una base ortonormal.

**Evaluación**

1. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad y orden en el desarrollo de la clase práctica.
2. Valorar la capacidad de análisis, interpretación y aplicación de los conceptos aplicados en la resolución de los ejercicios.
3. Valorar la habilidad en el uso y manejo de los instrumentos geométricos.
4. Presentación, coherencia y cientificidad en el trabajo escrito.

## IX. SISTEMA DE EVALUACION

La evaluación cumple las funciones de verificación y retroalimentación del proceso de enseñanza-aprendizaje, proporcionando información sobre su realización. Además permite una mejor adecuación de los propósitos y de los medios de aprendizajes; es por eso que la evaluación es un proceso integral y sistemático que permite juzgar la bondad y eficacia del aprendizaje de los alumnos, de la enseñanza del profesor, de los procedimientos y técnicas de los contenidos y experiencias seleccionadas y de todo cuanto converge a la realización del proceso de enseñanza aprendizaje.

Es por eso que en esta unidad didáctica, la forma de evaluación que utilizaremos nos permitirá constatar el progreso de los estudiantes con relación al logro de los objetivos propuestos en esta unidad. Esta actividad estará dirigida tanto a profesores como a estudiantes, observando directamente lo que ocurre en la clase, revisando sus trabajos, haciendo pruebas y evaluando otros aspectos que influyen indirectamente como son las estrategias metodológicas que utiliza el profesor así como los recursos con que se disponen.

Para el cumplimiento de esta actividad se proponen los tres tipos de evaluación: diagnóstica o inicial, formativa o de proceso y sumativa o final.

### EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Este tipo de evaluación llevada a cabo a través de un diagnóstico nos permitirá conocer el grado en que los alumnos fueron construyendo los conocimientos matemáticos impartidos en años anteriores, necesarios para el aprendizaje de los nuevos conocimientos. También, nos permitirá adecuar el proceso de enseñanza-aprendizaje a la realidad actual de los alumnos y a las posibilidades que en concreto se dan en el grupo clase, lo mismo que conocer el grado de dominio que los estudiantes poseen de ellos, así como el de conocer, que capacidades, habilidades y destrezas adquirieron en años anteriores, las cuales serán necesarias para la construcción de los nuevos conocimientos. Por último, conocer las actitudes que los estudiantes tienen hacia el aprendizaje de las matemáticas permitiendo así hacer los ajustes necesarios.

Para este tipo de evaluación proponemos la aplicación de una prueba escrita.

Esta prueba nos permitirá conocer en los estudiantes la presencia o ausencia de aquellos conocimientos necesarios para la construcción de los nuevos conocimientos, y sobre la base de las deficiencias encontradas al orientar actividades (trabajo extraclase, grupos de estudio, visitas a la biblioteca, etc.) que nos lleven a superarlas.

Esta prueba diagnóstica será aplicada antes de dar inicio al estudio del Álgebra Vectorial.

**EVALUACIÓN FORMATIVA**

Esta forma de evaluación nos permitirá darle un clima de mayor seguridad al grupo, evitando la tensión y la angustia que se presenta cuando la evaluación se deja en forma absoluta, hasta el final del curso; permitiendo esto un seguimiento en forma constante y sistemática a todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos con el objetivo de incidir positivamente en él, para que el aprendizaje por parte de los estudiantes sea significativo y funcional.

En esta evaluación destacaremos los siguientes aspectos: apropiación y comprensión de los nuevos conocimientos, habilidades y destrezas en el uso y manejo de los instrumentos geométricos, desarrollo de habilidades matemáticas, valoración de los estudiantes acerca de la función de la matemática en el quehacer cotidiano, en la ciencia y en la tecnología y, por último, valoraremos la capacidad que tienen los estudiantes para trabajar individualmente y en colectivo, así como la preferencia para una determinada actividad. En este tipo de evaluación utilizaremos los siguientes instrumentos: guía de observación (Ver Anexo No. 1) para los trabajos grupales, los trabajos de los alumnos (trabajos escritos o exposiciones), utilizaremos procedimientos de autoevaluación de aspectos concretos (Ver Anexo No. 2), teniendo como propósito fundamental el informar a los alumnos de las condiciones en que se está realizando el proceso de aprendizaje así como la enseñanza del profesor como facilitador, esto permitirá señalar aquellos aspectos que pueden incidir negativamente en el proceso de enseñanza – aprendizaje, todo con el objetivo de ir mejorando nuestra práctica educativa.  También proponemos la elaboración de pruebas orales las cuales nos permitirá ir conociendo lo que han captado los estudiantes tras la finalización de cualquier actividad planteada en clase o extraclase.

## EVALUACIÓN SUMATIVA

Esto permite una recapitulación e integración de los contenidos de aprendizaje a lo largo del estudio del Álgebra Vectorial que han sido trabajos por los alumnos. Permite además tomar decisiones pertinentes con relación a la promoción de los alumnos y a la actuación futura del profesor o facilitador.

En fin, con este tipo de evaluación mediremos el grado de adquisición de conocimiento que han tenido los estudiantes con respecto a los contenidos impartidos. Proponiéndonos evaluar mediante la resolución de ejercicios la capacidad de interpretar, aplicar definiciones y ecuaciones, uso y manejo de los instrumentos geométricos, así como la de razonar lógicamente las distintas formas de resolver ejercicios y problemas de aplicación. Este tipo de evaluación la realizará el docente por medio de una prueba escrita (Ver Anexo No. 3), siendo esta un valioso instrumento para la promoción académica de los estudiantes y para la organización, planificación y realización de las actividades pro parte del profesor.

En fin la evaluación implica en sentido histórico de continuidad y de cambio.

# X. PLANIFICACIÓN.

**TEMA 1: VECTORES LIBRES EN EL PLANO**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **CONCEPTUALES**<br>1. Definir variables escalares y vectoriales.<br>2. Definir vector libres.<br>3. Definir magnitud y dirección de un vector.<br>4. Definir vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br><br>**PROCEDIMENTALES**<br>1. Diferenciar variables escalares y vectoriales.<br>2. Interpretar geométricamente los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector libre, vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br>3. Aplicar los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector libre, vector opuesto y vector unitario en la solución de ejercicios.<br>4. Aplicar el conocimiento lógico – matemático en la interpretación y solución geométrica de ejercicios.<br><br>**ACTIDUINALES**<br>1. Mostrar habilidades y destrezas en el uso y manejo de los instrumentos geométricos.<br>2. Fomentar el trabajo cooperativo.<br>3. Fomentar el compañerismo, solidaridad, honestidad y el respeto con sus compañeros..<br>4. Adquirir habilidades y destrezas en la interpretación y solución geométrica de ejercicios. | **CONCEPTUALES**<br>1. Variables escalares y vectoriales.<br>2. Vectores libres.<br>2.1.Definición. Notación.<br>2.2.Magnitud y dirección.<br>2.3.Vector opuesto.<br>2.4.Vector nulo.<br>2.5.Vector unitario.<br><br>**PROCEDIMENTALES**<br>1. Diferenciación de variables escalares y vectoriales.<br>2. Interpretación geométrico de los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector libre, vector opuesto, vector nulo y vector unitario.<br>3. Aplicación de los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector libre, vector opuesto y vector unitario en la solución de ejercicios.<br>4. Aplicación del conocimiento lógico - matemático en la interpretación y planteamientos geométricos.<br><br>**ACTIDUINALES**<br>1. Desarrollo de habilidades y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>2. Entusiasmo y participación en los trabajos asignados.<br>3. Adquisición de habilidades y destrezas en la interpretación y solución geométricas de ejercicios. | 1. Búsqueda de información acerca de la importancia y aplicación del Álgebra Vectorial en otras disciplinas.<br><br>2. Inducir a los estudiantes a que formulen los conceptos de vector libre, magnitud y dirección de un vector libre, vector opuesto, vector nulo y vector unitario en base a sus representaciones geométricas.<br><br>3. Trabajo en grupo consistente en la resolución de ejercicios, así como sus interpretaciones geométricas.<br><br>4. Exposición del profesor para orientar las actividades a realizar así como aclarar dudas surgidas en la realización de ellas. | 1. Folleto.<br>2. Libros.<br>3. Hoja de ejercicios.<br>4. Tizas blancas y de colores.<br>5. Papel bond blanco.<br>6. Lápices de colores.<br>7. Marcadores permanentes y acrílicos.<br>8. Papelógrafos.<br>9. Regla graduada.<br>10. Escuadra.<br>11. Transportador.<br>12. Calculadora. | 1. Prueba diagnóstica.<br>2. Preguntas orales.<br>3. Clase práctica.<br>4. Precisión en el trazado de vectores libres, vector opuesto y vector unitario.<br>5. Comprobar si los estudiantes interpretan correctamente el concepto de magnitud y dirección de un vector libre.<br>6. Valorar la capacidad de análisis e interpretación en la resolución de ejercicios.<br>7. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad, creatividad, objetividad y solidaridad con sus compañeros. | 5 horas |

**TEMA 2: OPERACIONES CON VECTORES**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **CONCEPTUALES**<br>1. Explicar el concepto de suma, resta y multiplicación por un escalar.<br>2. Interpretar geométricamente las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar.<br>3. Enunciar las propiedades de la adición y multiplicación por un escalar.<br><br>**PROCEDIMENTALES**<br>1. Interpretar geométricamente las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar.<br>2. Aplicar los métodos del triángulo y del paralelogramo para sumar y restar vectores.<br>3. Aplicar el método del triángulo para multiplicar un escalar por un vector.<br>4. Comprobar geométricamente las propiedades de la adición y multiplicación por un escalar.<br>5. Aplicar las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar en la solución de ejercicios y problemas.<br>6. Aplicar el razonamiento lógico – matemático en la interpretación y resolución de ejercicios. | **CONCEPTUALES**<br>1. Operaciones con vectores.<br>1.1. Adición de vectores.<br>1.2. Diferencia de vectores.<br>1.3. Multiplicación por un escalar.<br><br>**PROCEDIMENTALES**<br>1. Interpretación geométrica de las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar.<br>2. Aplicación de los métodos del triángulo y/o del paralelogramo para sumar, restar y multiplicar un escalar por un vector.<br>3. Comprobación geométrica de las propiedades de las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar.<br>4. Aplicación de las operaciones con vectores libres en la resolución de ejercicios y problemas. | 1. Trabajo en grupo consistente en la interpretación geométrica de las operaciones de adición, diferencia y multiplicación por un escalar.<br>2. Trabajo en grupo consistente en la comprobación geométrica de las propiedades de la adición y multiplicación por un escalar.<br>3. Trabajo grupales consistente en la resolución de ejercicios y problemas.<br>4. Exposición por parte del profesor para orientar las actividades a desarrollar y aclarar dudas que se presenten. | 1. Folleto.<br>2. Libro.<br>3. Hoja de ejercicios.<br>4. Papel bond blanco.<br>5. Marcadores.<br>6. Lapiceros.<br>7. Lápices de colores.<br>8. Papelógrafos.<br>9. Regla graduada.<br>10. Escuadra.<br>11. Transportador.<br>12. Calculadora. | 1. Preguntas de comprobación.<br>2. Participación, disciplina, honestidad, creatividad, estética, responsabilidad y compañerismo.<br>3. Presentar, exponer y defender de manera individual y grupal las conclusiones obtenidas en los trabajos asignados.<br>4. Valorar la capacidad de análisis e interpretación en la resolución de ejercicios y problemas.<br>5. Comprobar la habilidad y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>8. Clase Práctica.<br>9. Precisión en las representaciones geométricas de las soluciones de los ejercicios propuestos.<br>6. Valorar la capacidad de abstracción en los pasos de una demostración. | 4horas |

**TEMA 2: OPERACIONES CON VECTORES (Continuación)**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **PROCEDIMENTALES**<br>7. Aplicar los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos en la resolución de ejercicios.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>1. Mostrar habilidades y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>2. Fomentar el trabajo cooperativo.<br>3. Fomentar el compañerismo, solidaridad, honestidad, creatividad, objetividad ,disciplina, y respeto con sus compañeros.<br>4. Adquirir habilidades y destrezas en la interpretación y solución geométricas de ejercicios y problemas. | **PROCEDIMENTALES**<br>5. Aplicación del razonamiento lógico – matemático en la resolución de ejercicios y problemas.<br>6. Aplicación de los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos en la resolución de ejercicios.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>1. Desarrollo de habilidades y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>2. Entusiasmo y participación en los trabajos asignados.<br>3. Adquisición de habilidades y destrezas en la interpretación y resolución geométricas de ejercicios y problemas.<br>4. Reconocer la importancia de las vectores libres en otras disciplinas. | | | | |

**TEMA 3: VECTORES COLINEALES. ANGULO ENTRE DOS VECTORES. DESARROLLO DE UN VECTOR EN DOS VECTORES NO COLINEALES**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **CONCEPTUALES**<br>1. Definir vectores colineales.<br>2. Definir ángulo entre dos vectores.<br>3. Definir vectores ortogonales.<br>**PROCEDIMENTTALES**<br>1. Interpretar geométricamente vectores colineales, ángulo entre dos vectores y vectores ortogonales.<br>2. Desarrollar un vector en términos de dos vectores no colineales.<br>3. Aplicar los conceptos de vectores colineales y no colineales, ángulos entre dos vectores y vectores ortogonales en la resolución de ejercicios.<br>4. Aplicar el razonamiento lógico – matemático en la interpretación y solución geométrica de ejercicios.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>1. Mostrar habilidades y destrezas en el uso de los instrumentos geométricos.<br>2. Fomentar el trabajo cooperativo.<br>3. Adquirir habilidades y destrezas en la interpretación y resolución de ejercicios.<br>4. Fomentar el compañerismo, solidaridad, honestidad y respeto con sus compañeros. | **CONCEPTUALES**<br>1. Vectores colineales.<br>2. Angulo entre dos vectores.<br>3. Vectores ortogonales.<br>**PROCEDIMENTTALES**<br>1. Interpretación geométrica de los conceptos de vectores colineales, ángulo entre vectores y vectores ortogonales.<br>2. Desarrollo de un vector en términos de dos vectores no colineales.<br>3. Aplicación de los conceptos de vectores colineales y no colineales, ángulo entre dos vectores y vectores ortogonales en la resolución de ejercicios.<br>4. Aplicación del razonamiento lógico – matemático en la interpretación y solución geométrica de ejercicios.<br>**ACTITUDINALES**<br>1. Desarrollo de habilidades y destrezas en el uso de instrumentos geométricos.<br>2. Entusiasmo y participación en los trabajos asignados.<br>3. Adquisición de habilidades y destrezas en la interpretación y resolución de ejercicios. | 1. Exposición por parte del profesor en la orientación de cada una de las actividades, así como la aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de ellas.<br>2. Trabajo en grupo consistente en la interpretación geométrica de los conceptos de vectores colineales y no colineales, ángulo entre dos vectores y vectores ortogonales en la resolución de ejercicios.<br>3. Trabajo en grupo consistente en la interpretación y resolución geométrica de ejercicios. | 1. Folleto.<br>2. Hoja de ejercicios.<br>3. Libro.<br>4. Papelógrafo.<br>5. Marcadores.<br>6. Papel bond blanco.<br>7. Lapiceros.<br>8. Lápices de colores.<br>9. Borrador.<br>10. Regla graduada.<br>11. Escuadra.<br>12. Transportador.<br>13. Calculadora. | 1. Preguntas de comprobación.<br>2. Participación, disciplina, honestidad, creatividad, estética, responsabilidad y compañerismo.<br>3. Presentar, exponer y defender de manera individual y grupal las conclusiones obtenidas en los trabajos asignados.<br>4. Valorar la capacidad de análisis e interpretación en la resolución de ejercicios.<br>5. Comprobar la habilidad y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>6. Clase Práctica.<br>7. Precisión en las representaciones geométricas de las soluciones de los ejercicios propuestos. | 2 horas. |

**TEMA 4: VECTORES EN $R^2$**

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **CONCEPTUALES**<br>1. Definir vectores coordenados.<br>2. Definir magnitud y dirección de un vector.<br>3. Definir cada una de las operaciones con vectores..<br>4. Enunciar las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar.<br>5. Definir producto escalar, ángulo entre dos vectores, vectores .ortogonales y distancia entre dos vectores.<br>6. Definir los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ .<br>7. Definir combinación lineal, base, base ortogonal y base ortonormal..<br><br>**PROCEDIMENTALES**<br>1. Diferenciar los conceptos de vector coordenado y vector de posición.<br>2. Deducir las fórmulas para calcular la magnitud y dirección de un vector.<br>3. Deducir las ecuaciones para sumar y restar vectores, y multiplicar un escalar por un vector.<br>4. Comprobar analíticamente las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. | **CONCEPTUALES**<br>1. Vectores coordenados.<br>1.1. Definición. Notación.<br>1.2. Magnitud y dirección.<br>2. Operaciones con vectores.<br>3. Producto escalar.<br>4. Angulo entre dos vectores. Vectores ortogonales.<br>5. Distancia entre dos vectores.<br>6. Base. Base ortogonal y ortonormal<br>7. Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$<br>8. Descomposición canónica de un vector.<br>9. Base. Base ortogonal y Ortonormal.<br><br>**PROCEDIMENTTALES**<br>1. Diferenciación de los conceptos de vector coordenado y vector de posición.<br>2. Deducción de la fórmula para el cálculo de la magnitud y dirección de un vector.<br>3. Deducción de la fórmula para sumar y restar vectores, y multiplicar un escalar por un vector.<br>4. Comprobar analíticamente las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. | 1. Exposición por parte del profesor para orientar cada una de las actividades a desarrollar y aclarar dudas surgidas durante el desarrollo de ellas.<br>2. Inducir a los estudiantes a que formulen e interpreten cada uno de los conceptos planteados.<br>3. Inducir a los estudiantes a que deduzcan las fórmulas relativas a magnitud y dirección de un vector y de las operaciones con vectores.<br>4. Trabajo en equipo consistente en la interpretación y solución de ejercicios.<br>5. Trabajo en grupo consistente en la comprobación analítica de las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar.<br>6. Trabajo en grupo consistente en la demostración de algunas de las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar.<br>7. Trabajo en equipo consistente en la interpretación y resolución de ejercicios de producto escalar, ángulo entre dos vectores, distancia entre dos vectores, descomposición canónica, combinación lineal, base, base ortogonal y base ortonormal.<br>8. | 1. Papelógrafo.<br>2. Marcadores.<br>3. Papel bond blanco.<br>4. Lapiceros.<br>5. Borrador.<br>6. Regla graduada.<br>7. Escuadra.<br>8. Calculadora.<br>9. Folleto.<br>10. Hoja de ejercicios. | 1. Preguntas de comprobación.<br>2. Participación, disciplina, compañerismo, honestidad, orden, aseo, responsabilidad y cientificidad en los resultados obtenidos.<br>3. Presentar, exponer y defender de manera individual y grupal las conclusiones obtenidas.<br>4. Clase Práctica.<br>5. Presentar, exponer y defender de manera individual y grupal las conclusiones obtenidas en los trabajos asignados.<br>6. Valorar la capacidad de análisis e interpretación en la resolución de ejercicios.<br>7. Valorar la capacidad de abstracción en las demostraciones.<br>8. Comprobar la habilidad y destrezas en el uso y manejo de instrumentos geométricos.<br>9. Clase Práctica.<br>10. Precisión en las representaciones geométricas de las soluciones de los ejercicios propuestos. | 9 horas |

## TEMA 4: VECTORES EN $R^2$ (Continuación)

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **PROCEDIMENTALES**<br>11. Demostrar algunas de las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar.<br>12. Aplicar los conceptos de vector coordenado, magnitud y dirección, las operaciones con vectores en la resolución de ejercicios.<br>13. Deducir las fórmulas para obtener el producto escalar de dos vectores, el ángulo entre dos vectores y la distancia entre dos vectores.<br>14. Resolver ejercicios de producto escalar, ángulo entre dos vectores, vectores ortogonales y distancia entre dos vectores.<br>15. Descomponer un vector en término de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>16. Representar geométricamente los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en el plano real.<br>17. Obtener las ecuaciones de la suma, resta y multiplicación por un escalar en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>18. Interpretar los conceptos de combinación lineal, base, base ortogonal y base ortonormal.<br>19. Resolver ejercicios apluicando los conceptos de descomposición canónica, combinación lineal, base, base ortogonal y ortonormal. | **PROCEDIMENTALES**<br>5. Demostración de algunas de las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar.<br>6. Aplicación de los conceptos de vector coordenado, magnitud y dirección y las operaciones con vectores.<br>7. Deducción de las fórmulas para obtener el producto escalar de dos vectores, él ángulo entre dos vectores y la distancia entre dos vectores.<br>8. Resolución de ejercicios de producto escalar, ángulo entre dos vectores y distancia entre dos vectores.<br>9. Descomposición de un vector en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>10. Representación geométrica de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en el plano real.<br>11. Obtención de las ecuaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar en términos de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.<br>12. Interpretación geométrica de los conceptos de combinación lineal, base, base ortogonal y ortonormal.<br>13. Resolución de ejercicios de descomposición canónica, combinación lineal, base, base ortogonal y Ortonormal. | | | | |

## TEMA 4. VECTORES EN $R^2$. (Continuación)

| OBJETIVOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS DIDACTICOS | EVALUACION DEL APRENDIZAJE | TIEMPO |
|---|---|---|---|---|---|
| **PROCEDIMENTALES**<br>20. Aplicar el razonamiento lógico – matemático en la resolución de ejercicios.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>1. Mostrar habilidades y destrezas en el uso de los instrumentos geométricos.<br>2. Fomentar el trabajo cooperativo.<br>3. Adquirir habilidades y destrezas en la interpretación y resolución de ejercicios.<br>4. Fomentar el compañerismo ,solidaridad y respeto con sus compañeros. | **PROCEDIMENTALES**<br>21. aplicación del razonamiento lógico – matemático en la resolución de ejercicios.<br><br>**ACTITUDINALES**<br>1. Desarrollo de habilidades y destrezas en el uso de instrumentos geométricos.<br>2. Entusiasmo y participación en los trabajos asignados.<br>3. Adquisición de habilidades y destrezas en la interpretación resolución de ejercicios. | | | | |

## XI. BIBLIOGRAFÍA


- Antúnez, S. (1992). **Del Proyecto Educativo al Aula**. Editorial Graó. Barcelona, España.

- García, J.M. **Bases Pedagógicas de la Evaluación**. Ministerios de Educación, Cultura y Deporte (MECD)

- Gil, D. Y otros. **La Enseñanza de la Ciencia en la Educación Secundaria**.

- Lam, E. Gómez, J.A. y otros. (1994). **Gemetría Analítica**. Prentice – Hall Hispanoamericana, S.A. México, D.F.

- Leithold, L. (1989). **Matemáticas Previas al Cálculo**. Editorial Harla, S.A. México, D.F.

- Oakley, C.O. **Geometría Analítica**. Editorial Continental. México, D.F.

- Sullivan, M. (1997). **Trigonometría y Geometría Analítica**. Prentice – Hall Hispanoamericana, S. A. México, D.F.

- Swokwoski, E. (1989). **Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica**. Editorial Iberoamerica.

- Yakovliev, E. (1985). **Geometría**. Editorial MIR. Moscú.

**ANEXO No. 1**

**GUIA DE OBSERVACION A ESTUDIANTES**

**Nombre del estudiante:________________________________________**

**Tema:___________________ Fecha:_______________ Actividad No.______**

| # | **PARÁMETROS A EVALUAR** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Puntualidad | | | | | |
| 2 | Disciplina | | | | | |
| 3 | Muestra entusiasmo en los trabajos asignados | | | | | |
| 4 | Discute y analiza con sus compañeros las actividades propuestas | | | | | |
| 5 | Es inactivo en el grupo | | | | | |
| 6 | Habilidad en el uso y manejo de los instrumentos geométricos | | | | | |
| 7 | Capacidad de análisis y abstracción | | | | | |
| 8 | Habilidad en la interpretación y resolución de ejercicios | | | | | |
| 9 | Aplica los conocimientos aprendido | | | | | |
| 10 | Sabe trabajar en grupo | | | | | |
| 11 | Participa en clase (debate y exposiciones) | | | | | |
| 12 | Influye en sus compañeros positivamente | | | | | |
| 13 | Se expresa con espontaneidad y claridad | | | | | |
| 14 | Orden y estética en los trabajos presentados | | | | | |
| 15 | Acepta su responsabilidad de trabajar en grupo | | | | | |

**CLAVES:**

1. Deficiente.
2. Regular.
3. Bueno.
4. Muy bueno.
5. Excelente.

**ANEXO No. 2**
**GUIA DE OBSERVACION AL PROFESOR**

**Nombre  del profesor:__________________________________________**

**Nombre del estudiante:_________________________________________**

**Tema:____________________ Fecha:________________ Actividad No.______**

| # | PARÁMETROS A EVALUAR | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Improvisa con frecuencia | | | | | |
| 2 | Relaciona la asignatura con cuestiones de interés | | | | | |
| 3 | Reconoce los errores señalados | | | | | |
| 4 | Muestra interés por la asignatura | | | | | |
| 5 | Propicia la colaboración entre los estudiantes | | | | | |
| 6 | Orienta correctamente los objetivos | | | | | |
| 7 | Expone con claridad los conceptos básicos de este tema | | | | | |
| 8 | Domina los conocimientos desarrollados | | | | | |
| 9 | Da oportunidad paras plantear dudas | | | | | |
| 10 | Las actividades están bien orientadas | | | | | |
| 11 | Promueve la participación en clase | | | | | |
| 12 | Sigue de cerca las tareas propuestas (corrige y comenta) | | | | | |
| 13 | Valora positivamente las intervenciones | | | | | |
| 14 | Introduce elementos motivadores | | | | | |
| 15 | Hace uso adecuado del tiempo | | | | | |
| 16 | Se dirige siempre sólo a una parte del grupo | | | | | |
| 17 | Hace un resumen final de cada actividad | | | | | |
| 18 | Utiliza la evaluación para mejorar el aprendizaje | | | | | |

**CLAVES:**

1. Mucho.
2. Bastante.
3. Suficiente.
4. Poco.
5. Nada

**ANEXO No. 3**

**PRUEBA FINAL**

Colegio o Instituto: ______________________________________________

Fecha de realización: ______________________________

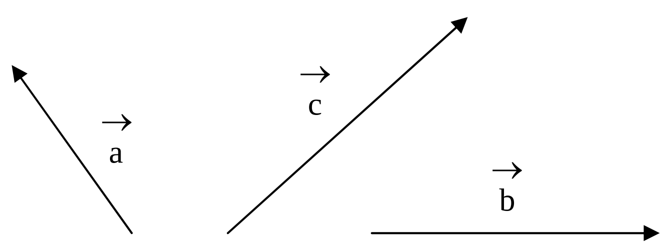
Nombres y Apellidos: __________________________________________________

Año: _______ Sección: _______ Número: _______

I. Resuelva.

1. El agua de un río fluye de norte a sur a una velocidad de 4 km/h. Un bote esta cruzando el río a una velocidad de 12 km/h y con una dirección de 30º al suroeste. Emplee el diagrama a escala para aproximar la dirección y la velocidad del bote con relación a la tierra.

2. Exprese gráficamente al vector $\vec{c}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ .




3. Determine si el conjunto formado por los vectores $\vec{a} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -1 \rangle$ constituye una base.

II. Englobe la respuesta correcta.

1. La norma del vector $\vec{a} = \langle -3, 4 \rangle$ es:

(a) –5 (b) 5 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $-\frac{1}{5}$

2. El producto interior de los vectores $\vec{a} = \langle -2,2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 4,-1 \rangle$ es:

(a) 10 (b) –10 (c) 7 (d) –7

3. El ángulo entre los vectores $\vec{a} = \langle -1,1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 0,-1 \rangle$ es:

(a) $45^0$ (b) $90^0$ (c) $135^0$ (d) $60^0$