UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

FACULTAD DE CIENCIAS

"COMO HACER DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS"

MONOGRAFÍA

PRESENTADO POR:

MARTHA LILIETT CÁRCAMO ROSALES

CARLOS AGAPITO SAAVEDRA CAMPOS

PARA OPTAR AL TITULO DE:

"LICENCIADO EN MATEMÁTICA"

CATEDRÁTICO: MSC. CARLOS DAVID SALAZAR PEREIRA

MSC. JOSE ALBERTO CERDA CAMPOS.

LEÓN, NICARAGUA 2003.

“DEDICATORIA”

Quiero dedicarle de manera muy especial, además de mi admiración, respeto y amor al maestro MSc. Carlos Salazar Pereira (q.e.d), mi monografía, como ofrenda de gratitud a su imperecedera memoria. el me enseño con su humildad y espíritu de servicio desinteresado, las más grandes demostración de amor, pues el nunca supo olvidar en medio de sus fórmulas y ecuaciones al hombre, cuya muestra fuimos sus alumnos. He intentado medir cuan agradecida estoy de él, ya que este mundo está sediento de amor.

MARTHA CÁRCAMO.

DEDICATORIA

Quiero dedicar mi monografía a los compañeros que con valentía brindaron su vida por la lucha del 6% constitucional.

A todos los estudiantes universitarios que luchan inclaudicablemente por nuestra nicaragua, pregonando su patriotismo con su voluntan y dedicación en sus estudios.

CARLOS AGAPITO SAAVEDRA CAMPOS.

AGRADECIMIENTO

A dios todo poderoso, por haberme dotado como humana del precioso don de la inteligencia, que permitió culminar mis estudios de licenciaturas, y del cual tengo la firme fe, me continuará alimentando de fortaleza para continuar marchando en busca de más logros académicos.

A mi madre, porque pudo traducir en conquista de alegría y éxito, todos los grandes sacrificio que ha hecho por mí. Además por la confianza que deposito en cada momento de mi vida.

A todos mis apreciables maestros que dedicaron todo su tiempo y esfuerzo y me ayudaron a convertirme en lo que soy, lo mas valioso de este mundo como mi profesión del cual siempre le estaré agradecida.

MARTHA CÁRCAMO.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a dios por permitirme culminar mis estudios universitarios.
A mis padres, por saber inculcarme las convicciones y los principios morales.

Al magnifico rector Dr. Ernesto Medina Sandino, por el apoyo incondicional que me ha brindado en el transcurso de mis estudios universitarios.

Al MSc. José Alberto Cerda Campos, quien nos guió hasta la finalización de esta tarea.

A todos losa profesores del departamento de matemática - estadística que colaboraron en la presentación de este trabajo.

CARLOS AGAPITO SAAVEDRA CAMPOS.

ÍNDICE

CAPITULO V. ERRORES DE DEMOSTRACIÓN

INTRODUCCIÓN.

Actualmente, la deficiente capacidad de razonar matemáticamente ha impedido asimilar con facilidad ciertas ideas sobre el análisis matemático, por lo cual se ha caído en un conocimiento reproducido.

El propósito de las matemáticas es descubrir y comunicar ciertas verdades. Las matemáticas son el lenguaje de los matemáticos y una demostración, es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma. Una propiedad del lenguaje de las matemáticas es su precisión. Una demostración propiamente presentada no deberá contener ambigüedades y no habrá duda de que es correcta. Las demostraciones están presentadas adecuadamente para quienes ya conocen el lenguaje de las matemáticas. Por lo tanto, para entender, hacer una demostración escrita mediante una identificación de las técnicas que se han utilizados. En segundo lugar es enseñar a desarrollar y comunicar sus propias demostraciones de verdades matemáticas conocidas. Para lograrlo se necesita que apliquen una cierta cantidad de ingenio, creatividad, intuición y experiencia. Así como hay maneras diferentes para expresar la misma idea en cualquier idioma, así también hay diferentes demostraciones para el mismo hecho matemático.

Las técnicas para hacer demostraciones que se presentan aquí están diseñada para iniciarlo y guiarlo a través de demostraciones. Este trabajo no solo describe como trabajan las técnicas para hacer demostraciones, si no que también muestra cuando deben utilizarse y por qué.

Con frecuencia, se da el caso de que una técnica correcta puede seleccionarse basándose en la forma del problema que esta considerando.

Cuando trate de hacer su propia demostración, es importante seleccionar conscientemente la técnica de demostración en vez de desperdiciar horas tratando de ver que hacer. El objetivo final, es que utilice sus habilidades y lenguajes adquiridos para descubrir y comunicar verdades anteriormente conocidas.

Esta meta es admirable aunque extremadamente difícil de lograr. El primer paso en este sentido es alcanzar un nivel en el cual que uno sea capaz de leer y desarrollar las demostraciones propias de las verdades ya conocidas. Esto dacha un entendimiento mucho mas profundo y rico del universo matemático que nos rodea.

CAPITULO I

DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍAS MATEMÁTICAS.

1.1 Definiciones y terminologías matemáticas

Unos de los modos más simples y eficaces de contestar una pregunta de abstracción es mediante el uso de una definición.

Una **definición** es nada más una declaración en la cual se han puesto de acuerdo todas las personas interesadas. Las definiciones no están hechas al azar por lo común, están motivadas por un concepto matemático que ocurre repentinamente. En efecto, una definición puede considerarse como una forma para simplificar un concepto particular en el cual todos están de acuerdo.

Demostración es un razonamiento, o serie de razonamientos, que prueba la validez de un nuevo conocimiento estableciendo sus conexiones necesarias con otros conocimientos. Cuando un conocimiento queda demostrado, entonces se le reconoce como valido y es admitido dentro de la disciplina a que corresponde. La demostración es, así, el enlace entre los conocimientos recién adquiridos y el conjunto de los conocimientos anteriores. Dicho enlace constituye una secuencia finita de proposiciones, en la cual cada proposición es un postulado o una conclusión que se ha inferido de las proposiciones precedentes. Y tal secuencia se establece mediante la ejecución de operaciones bien coordinadas.

La demostración consta de tres partes: el conocimiento que se trata de demostrar; los fundamentos empleados como base de la demostración; y el procedimiento usado para que el conocimiento quede demostrado.

La refutación es el procedimiento, o serie de razonamientos, que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración. La hipótesis cuya falta de validez se trata de probar, se expresa generalmente en la forma de un juicio y el razonamiento que prueba su falsedad es lo que se denomina propiamente refutación.

Existen términos en matemáticas que se encontrarán frecuentemente siempre que trate con demostraciones. Estos son: proposición, teorema, lema, axioma y corolario.

Las **proposiciones** son afirmaciones ciertas o falsas que se hacen de los objetos matemáticos y que corresponden a propiedades hipotéticas de los objetos de la naturaleza de los cuales los objetos matemáticos son modelos.

Afirmación matemática cuya veracidad se establece mediante su demostración se llama **teorema.**

Las proposiciones preliminares utilizadas en la demostración de un teorema se llaman **lemas.**

Las proposiciones, que surgen inmediatamente como resultado de un teorema es verdadero, a esta proposición se le denomina **corolario.**

Existen proposiciones las cuales se aceptan sin una demostración formal a este tipo de proposición se le llama **axioma.**

CAPITULO II

CLASIFICACIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES.

2.1. Introducción.

Los objetos matemáticos son: números, funciones, conjuntos, figuras geométricas, etc.

Estos objetos son modelos abstractos de objetos de la naturaleza y su existencia sólo debe considerarse en ese sentido.

Las relaciones (proposiciones) son afirmaciones ciertas o falsas que se hacen de los objetos matemáticos y que corresponden a propiedades hipotéticas de los objetos de la naturaleza de los cuales los objetos matemáticos son modelos.

Hay determinadas relaciones entre los objetos de la naturaleza que son simplísimas y que han sido comprobadas en la actividad practica del hombre muchísimas veces, estas relaciones dan origen a relaciones también muy simples entre los objetos matemáticos que sirven de modelo a los referidos objetos de la naturaleza. Dentro de estas relaciones que trasladan al lenguaje matemático propiedades evidentes entre los objetos concretos, los matemáticos se ven obligados a aceptar sin demostrar cierto pequeño número de ellos que reciben el nombre de axiomas.

La aplicación de una cadena de reglas lógicas a axiomas o teoremas previamente establecido y mediante la cual se pasa a establecer un nuevo teorema o probar la falsedad de una proposición constituye una demostración del teorema o de la falsedad de la proposición.

La interdependencia de los axiomas y de las proposiciones verdaderas sobre determinados objetos es un reflejo de la interdependencia de las relaciones entre objetos de la naturaleza de los cuales constituyen modelos los referidos objetos matemáticos.

Para comprender la necesidad de partir de cierto número de axiomas podemos razonar de la forma siguiente: para demostrar que una proposición es (verdadera) debemos basarnos en otras proposiciones verdaderas; para demostrar estas últimas, debemos basarnos a su vez en proposiciones verdaderas y así sucesivamente. Luego si tenemos en cuenta que el número de proposiciones ya establecidas por los matemáticos es siempre finito, no resulta difícil comprender que hay que escoger cierto número de ellas como ciertas, es decir, como axiomas.

2.2. Las demostraciones según sus fines.

Las demostraciones según sus fines tienen por objetivo probar la veracidad o falsedad de una proposición.

Las que tienen por objetivo probar la falsedad de una proposición se denominarán de ahora en adelante refutaciones. se dice que se ha demostrado una proposición cuando se ha obtenido por las aplicaciones reiteradas de las reglas r_1 y r_2.

$r_{1.}$ Toda proposición obtenida por la aplicación de un axioma es verdadera.

$r_{2.}$ Si p_1 y p_2 son proposiciones, la proposición $(p_1 \rightarrow p_2)$ es cierta y si p_1 es una proposición verdadera, entonces p_2 es una proposición verdadera.

La expresión de una proposición se apoya también en las definiciones. las definiciones, axiomas y teoremas que sirven de base a una demostración reciben el nombre de fundamentos de la matemática.

Se llama procedimiento de demostración a la cadena de raciocinios que tomando como premisas los fundamento de la demostración permiten probar la veracidad de la proposición que se demuestre a partir de la aplicación reiterada de las reglas r_1 y r_2.

Las demostraciones en matemática a diferencias de las demostraciones en otras ciencias particulares, se apoyan en la experiencia solo por medio de las generalizaciones contenidas en los conceptos.

2.3. La demostración según el procedimiento.

Según el procedimiento de demostración estas pueden ser **directas e indirectas**.

La demostración **directa** se puede esquematizar de la forma siguiente: se parte de los fundamentos dados y mediante aplicaciones reiteradas de las reglas r_1 y r_2. (Puede ser una sola) descritas en 2.2. Se van obteniendo nuevas proposiciones ciertas p_1 , p_2 .... , p_n hasta llegar a la proposición t (tesis) que se requiere demostrar si denotamos por h (hipótesis) los fundamentos dados, este tipo de demostración se puede representar por el esquema.

$$H \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow P_n \rightarrow T$$

Este esquema no impide que puedan intercalarse en el proceso de demostración algunos de los fundamentos. La justificación de este tipo de demostración es un principio lógico que asegura que si son verdadero los fundamentos y correcto, el procedimiento de demostración, entonces, la tesis, es decir la proposición que se demuestra es también verdadera.

La demostración **indirecta** prueba la veracidad de la tesis, comprobando la falsedad de otra (u otras proposiciones) que tienen una concatenación tal con la tesis que comprobada su falsedad se desprende necesariamente la veracidad de la tesis.

Cuando dado un problema existe un número de proposiciones que agotan todas las conjeturas posibles acerca de la solución del problema y para demostrar la veracidad de una de esas proposiciones se refutan todas las restantes, entonces se dice que se ha hecho una demostración indirecta disyuntiva de la tesis. Simbólicamente.

$$\{[H\to(T\vee P_1\vee P_2\vee \ldots\vee P_n)] \wedge[\sim(H\to P_1)] \wedge \ldots \wedge[\sim(H\to P_n)]\}\to (H \to T)$$

Con frecuencia se utiliza este tipo de demostración para probar que cierta función real alcanza el valor cero en un determinado punto. el valor de toda función real en cada uno de sus puntos tiene tres posibilidades ser mayor, menor o igual que cero.

Si demostramos que el valor de la función no es mayor ni menor que cero obligatoriamente debe ser cero. Este tipo de demostración es la que se hace en muchos teoremas de unicidad.

Se denomina demostración **indirecta por refutación de la negación** a toda demostración en la que se prueba la veracidad de la tesis que se demuestra refutando su negación. De la falsedad de la negación de una proposición se obtiene de acuerdo a la ley lógica del tercero excluido la veracidad de dicha proposición.

Los procedimientos para refutar la negación de la tesis consisten en suponer que la negación de la tesis ($\sim$t) es verdadera. En unos casos se consideran ($\sim$t) junto con los fundamentos de la demostración (h) que como se saben son ciertas, y en otros, ($\sim$t) sustituyen a los fundamentos de la demostración.

Si junto a los fundamentos de la demostración se consideran a ($\sim$t) es decir se considera como nuevo fundamento a ($h \wedge \sim t$), entonces la primera parte del procedimiento de la demostración consiste en llegar a una de las tres situaciones siguientes.

a) La negación de una de las proposiciones de los fundamentos.

En símbolo $(h \wedge \sim t) \to \sim h$.

Por $\sim h$ expresamos que en h se sustituye al menos una de sus proposiciones por su negación.

b) La tesis simbólicamente $(h \wedge \sim t) \rightarrow t$. estos dos casos puede sintetizarse en el caso más general.

   $(h \wedge \sim t) \rightarrow \sim (h \vee \sim t)$.

c) Una contradicción. la cual denotaremos por $(h \wedge \sim t) \rightarrow r \wedge \sim r$ donde r es una proposición.

La segunda parte del procedimiento de demostración indirecta por refutación de la negación es muy sencilla y consiste en la aplicación de la ley del tercero excluido. En efecto puesto que $\sim t$ es falsa, entonces, obligatoriamente de acuerdo con la ley del tercero excluido se tiene que t es verdadera.

Si se sustituyen los fundamentos h por la negación de la tesis $\sim t$, entonces la primera parte del procedimiento consiste en probar la negación de los fundamentos h, es decir en probar $\sim h$. esquemáticamente $\sim t \rightarrow \sim h$.

La segunda parte del procedimiento se fundamenta en el hecho de que las proposiciones $(a \rightarrow b)$ y $(\sim b \rightarrow \sim a)$ son lógicamente equivalentes (método de contraposición). Luego una vez demostrada la proposición $\sim t \rightarrow \sim h$ se tiene por contraposición que $h \rightarrow t$.

2.4. La refutación según el procedimiento.

Las refutaciones al igual que las demostraciones según el procedimiento se clasifican en **directas e indirectas.**

La refutación directa consiste en demostrar la veracidad de proposiciones contradictorias a partir de la proposición que se refuta y de otras proposiciones verdaderas. Por ejemplo si denotamos por q una clase de proposiciones verdaderas y por r una proposición verdadera y se tiene que $(p \wedge q) \rightarrow \sim r$ entonces p es falsa, o sea

$\{(r \text{ verdadera}) \wedge (q \text{ verdadera}) \wedge [(p \wedge q) \rightarrow \sim r)]\} \rightarrow p$ es falsa.

La refutación indirecta consiste en demostrar que es verdadera la negación de la tesis que se refuta, entonces en virtud de la ley de contradicción se tiene la falsedad de la tesis que se refuta.

Sin temor a equivocarse se puede afirmar que la proposición que con más frecuencia hay que demostrar o refutar en el trabajo matemático es la siguiente:

"todo miembro de la clase $\mathbf{c_1}$ es elemento de la clase $\mathbf{c_2}$" **(1)**

Esta proposición tiene un carácter universal con respecto a $\mathbf{c_1}$ ya que se refiere a todos los elementos de $\mathbf{c_1}$.

Si la proposición que se refuta tiene un carácter universal, para refutarla basta demostrar la veracidad de una proposición particular. Para refutar por ejemplo la proposición **(1)** basta encontrar (construir) un elemento de $\mathbf{c_1}$ que no sea elemento de $\mathbf{c_2}$, si ese elemento existe es usual llamarlo en matemática contra ejemplo.

La proposición "toda función continua es diferenciable en todo su dominio"constituye el ejemplo clásico dentro del análisis matemático de proposición universal que se refuta con un contra ejemplo. el contra ejemplo usual es $f(x)= | x |, \forall\ x$ real. Esta función como se sabe es continua en todo su dominio (r) pero no es diferenciable en el punto cero "0".

La refutación de una proposición universal mediante un contra ejemplo, se reduce en última instancia a la construcción de un elemento del universo al que se refiere la proposición que no satisface a esta última. en símbolo se puede expresar lo anterior de la forma siguiente: $\sim \{ \forall x, p(x) \} \equiv \exists x, \sim p(x)$.

Reciben el nombre de proposiciones existenciales del tipo siguiente:

- existe al menos un elemento de la clase $\mathbf{c_1}$ que pertenece a la clase $\mathbf{c_2}$.
- las clases $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ tienen una intersección no vacía.

La refutación de una proposición existencial se hace demostrando la veracidad de la proposición universal que le sea contradictoria. se refuta demostrando que ningún elemento de $\mathbf{c_1}$ pertenece a $\mathbf{c_2}$, o sea en símbolo.

$\{\sim \exists x, p(x)\} \equiv \forall x, \sim p(x)$.

En realidad la refutación de una proposición existencial en forma indirecta se utiliza poco.

2.5. Demostraciones de existencia y unicidad.

Existencia: siempre que se comienza el estudio de una teoría sobre un determinado objeto es importante demostrar bajo que condiciones el mencionado objeto existe. este tipo de demostración es frecuente en la teoría de ecuaciones (algebraicas, diferenciales, integrales, etc.) en la modelación matemática muchos fenómenos de la naturaleza intervienen con mucha frecuencia en ecuaciones; la demostración de la no - solución de estas ecuaciones es un índice de la modelación incorrecta del problema. en realidad aparece con mucha frecuencia el problema siguiente: ¿bajo que condiciones existe un objeto x que satisfaga las condiciones k.? y en forma de una proposición: si se cumple las condiciones... , existe un objeto x que satisfaga la propiedad p. si la proposición es cierta se llama **teorema de existencia.**

La demostraciones usuales de los teoremas de existencias consiste en construir un objeto que bajo las condiciones exigidas satisfagan la propiedad "p" . en los casos en que se trata de demostrar la existencia de la solución de un determinado tipo de ecuación el propio método de demostración constituyó un método de solución de la ecuación en estudio.

Hay otros casos en que se demuestra la existencia del objeto por un método no constructivo y en esos casos el método de demostración no proporciona un método de solución.

Unicidad: en muchos procesos de la naturaleza la solución es única y en última instancia esta es la razón de la existencia de gran parte de los teoremas de la forma. "existe uno y solo uno...". En general la demostración de estos teoremas se logra suponiendo que existen dos elementos x_1 y x_2 de la clase a que se refiere el teorema que cumple la propiedad afirmada en el enunciado; y a partir de esa suposición se prueba que $x_1 = x_2$.

Esquemáticamente $(\forall x_1 \in a) \wedge (\forall x_2 \in a), \{ (p(x_1) \wedge p(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \}$.

Ejemplo.

Sea f una contracción en un espacio métrico completo s, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración

a) probemos la existencia del punto fijo. para esto, consideremos la sucesión de iteraciones $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\ldots$ es decir , se define recurrentemente la sucesión $\{p_n\}$ por medio de:

$p_0 = x$, $p_1 = f(p_0)$, $p_2 = f(p_1)$, ...$p_{n+1} = f(p_n)$... probemos que $\{p_n\}$ converge hacia un punto fijo de f.

Primeramente demostraremos que $\{p_n\}$ es una sucesión de cauchy. Por la definición de contracción obtenemos:

$d(p_{n+1}, p_n) = d((f(p_n), f(p_{n-1}))) \leq \alpha\, d(p_n, p_{n-1})$ y entonces por inducción tenemos, $d(p_{n+1}, p_n) \leq \alpha^n\, d(p_1, p_0) = c\,\alpha^n$, donde $c = d(p_1, p_0)$ usando la desigualdad triangular tenemos para m > n,

$$d(p_m, p_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(p_{k+1}, p_k) \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = c\,\frac{\alpha^n - \alpha^n}{1-\alpha} \leq \frac{c}{1-\alpha}\,\alpha^n$$

Como $0 < \alpha < 1$, luego $\alpha^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y así $\lim d(p_m, p_n) = 0$ por lo tanto, $\{p_n\}$es una sucesión de cauchy. Pero como s es completo, existe un punto p de s tal que $p_n \to p$. por la continuidad de f, $f(p) = f(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p$, por lo tanto p es un punto fijo de f.

b) Ahora probemos la unicidad del punto fijo:

si p y p' son dos puntos fijos de f, luego $d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \alpha d(p, p')$ entonces $d(p, p') = 0$ dado que $0 < \alpha < 1$. por lo tanto, $p = p'$

CAPITULO III

DIVERSAS TÉCNICAS PARA HACER DEMOSTRACIONES

3.1. Introducción

Dada dos proposiciones, a y b, cada una de las cuales pueden ser verdadera o falsa, un problema de interés fundamental en matemáticas es el de demostrar que si a es verdadero, entonces b es verdadero.

Una demostración es un método formal para realizar esta tarea. Por lo tanto, es necesario tener algún método para demostrar que tales proposiciones son verdaderas. En otras palabras, una demostración es un argumento convincente expresado en el idioma de las matemáticas. Como tal, una demostración deberá contener suficientes detalles matemáticos para poder convencer a la (s) persona(s) a quien(es) esta dirigida.

Para poder hacer una demostración, se debe saber lo que significa demostrar que "si a es verdadero entonces b es verdadero". La proposición a se llama a menudo hipótesis y el postulado b conclusión. Para abreviar, la proposición "si a es verdadero entonces b es verdadero" se reduce a "sí a entonces b", o simplemente "a implica b".

Las condiciones bajo las cuales "a implica b" es verdadero dependerá de si a y b son verdadero. Consecuentemente hay cuatro posibles casos a considerar:

a es verdadero y b es verdadero.

1. a es verdadero y b es falso.
2. a es falso y b es verdadero.
3. a es falso y b es falso.
4. a es falso y b es falso.

Suponga, por ejemplo, que un amigo le ha dicho lo siguiente: "si llueve entones maría trae su paraguas". Aquí la proposición a es "llueve" y b es "maría trae su paraguas". Para determinar cuando es falso la proposición "a implica b", pregúntese en cual de los cuatros caso llamaría a su amigo mentiroso. En el primer caso (es decir, cuando llueve y maría trae su paraguas) su amigo le ha dicho la verdad. En el segundo caso, llovió y maría no traía su paraguas. Dado que su amigo dijo que ella traería su paraguas, puede concluirse que su amigo no ha dicho la verdad. Finalmente, en los casos (3) y (4) no llueve, no le diría a su amigo que es un mentiroso ya que el tan solo dijo que algo sucedería en caso que lloviera.

Así el postulado “a implica b” es verdadero en cada uno de los cuatros casos excepto en el segundo, como se resume en la tabla de verdad tabla 1.

Tabla de verdad para “a implica b”.

a	**b**	**a** implica **b**
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero
falso	falso	verdadero

Tabla 1.

De acuerdo a la tabla 1, cuando se trata de demostrar que “a implica b” es verdadero, se puede suponer que la proposición a la izquierda de la palabra “implica” (es decir, a) es verdadero. Tenga en cuenta que una demostración de la proposición “a implica b” no es un intento de verificar si a y b son verdaderos, sino demostrar que b es una consecuencia lógica de haber supuesto que a es verdadero.

La lista de técnicas presentadas aquí de ningún modo son las únicas, pero constituyen un conjunto básico. Las que le permitirán como hacer y entender demostraciones, quizás desarrolle algunas técnicas propias a medida que avance en el campo de las matemáticas, en cualquier caso, existen muchos detalles y trucos que se obtendrá con la práctica.

3.2. Método progresivo – regresivo

Primero se identifican las dos proposiciones “a y b”. Para demostrar que “a implica b” se empieza con la proposición b, que es la que se quiere demostrar que es verdadera. a través del proceso de abstracción, preguntando y contestando la pregunta de abstracción, deduzca una nueva proposición b_1, con la característica de que si b_1 es verdadero, también b es verdadero. Todos los esfuerzos están dirigidos ahora hacia el establecimiento de que b_1 es verdadero. Para este fin, aplique el proceso de abstracción a b_1, obteniendo una nueva proposición b_2 que tenga las características de que si b_2 es verdadero, también lo sea b_1 (y por lo tanto, b). Recuerde que el proceso de abstracción lo ha generado la suposición de que a es verdadero. Continué de esta manera hasta que obtenga la proposición a, (en cuyo caso, la demostración estará terminada), o bien hasta que ya no pueda formular, contestar la pregunta de abstracción o ambas cosas, fructíferamente. En el ultimo caso, es tiempo de empezar el proceso progresivo, en donde se deduce de a una sucesión de proposiciones, las cuales son necesariamente verdaderas como resultado, de que a se ha supuesto verdadero. Recuerde que la meta del método progresivo es obtener precisamente la última proposición que obtuvo en el proceso regresivo con lo cual habrá completado la demostración.

Ejemplo.

Dado el conjunto $x = \{ x \in r: x \geq u.\ ax \geq b\}$, demostrar que d es una dirección de x si y solo si $d \neq 0$, $d \geq 0$ y $ad \geq 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea d dirección de x, entonces $\forall x$ tal que $ax \geq b$ se cumple que $\{x + \lambda\ d: s\lambda \geq 0\} \subseteq x$.

Dado $x \in x$, $x \geq 0$, $ax \geq b$ se tiene que, por ser d dirección de x, $x + \lambda d \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$.

Si existiera $d_i < 0$, entonces $x_i + d_i < 0$, para algún λ suficientemente grande, entrando en contradicción con lo obtenido anteriormente, por lo que se tiene que dar que $d \geq 0$. Del mismo modo, si existiera un $(ad)_i < 0$, eligiendo λ adecuadamente conseguiríamos que $(ad)_i + \lambda(ad)_i < 0$, obteniendo de nuevo una contradicción , de donde se sigue que $ad \geq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $d \neq 0$, $d \geq 0$. d es dirección de s sí $\forall\ x \in x$, el conjunto $\{x + \lambda\ d: \lambda \geq 0\} \subseteq x$.

Sea $\bar{x} \in x$, entonces $a\bar{x} \geq b$ y $\bar{x} \geq 0$. Veamos que $\{ \bar{x} + \lambda\ d: \lambda \geq 0 \} \subseteq x$, es decir, que $a(\bar{x} + \lambda\ d) \geq b$, $\bar{x} + \lambda d \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$:

- $a(\bar{x} + \lambda\ d) = a\bar{x} + a\lambda\ d \geq b + a\lambda\ d$, ya que $\bar{x} \in x$. así, como $ad \geq 0$, por hipótesis y $\lambda \geq 0$, entonces $a\lambda\ d \geq 0$ ..,por lo tanto, $a(\bar{x} + \lambda\ d) \geq b + a\lambda\ d \geq b + 0 = 0$.
- $\bar{x} + \lambda\ d \geq 0 + \lambda\ d \geq 0$, ya que $\lambda \geq 0$ **y** $d \geq 0$. Como es valido $\forall \lambda \geq 0$ y $\forall\ \bar{x} \in x$ entonces d es dirección de x.

3. 3. Método por construcción

El método por construcción es una técnica de demostración asociada a los cuantificadores existenciales “existe” o “existen”.

El cuantificador “existe” surge de manera natural en muchos postulados matemáticos.

Cada vez que aparece el cuantificador “existe” o “existen” la proposición tendrá la siguiente forma básica. Existe un “objeto” con una “cierta propiedad” tal que “algo sucede”.

Las palabras entre comillas dependen de la proposición particular bajo consideración, y se debe aprender a leer, identificar y escribir cada uno de los tres elementos.

Durante el proceso regresivo, si alguna vez encuentra una proposición que tenga el cuantificador “existe”, una forma en la cual se puede proceder para demostrar que la proposición es verdadera es mediante el método por construcción. La idea es generar (adivinar, producir, idear un algoritmo para producir, etc.) el objeto deseado. Desde luego que se debe demostrar que el objeto tiene aquella cierta propiedad y, también, el algo que sucede. Lo que no es muy claro es como se elabora o genera el objeto deseado.

Algunas veces se hará mediante ensayo o error, otras veces se puede diseñar algún algoritmo para producir el objeto deseado. Todo depende del problema en particular, pero en cualquier caso, la proposición a se usara indudablemente para realizar el trabajo.

Ciertamente, la aparición del cuantificador “existe” sugiere recurrir al proceso progresivo para producir el objeto deseado.

El método por construcción no es la única técnica disponible para tratar con proposiciones que contienen el cuantificador “existe”, pero trabaja generalmente y debería considerarse con seriedad.

Para tener éxito con el método por construcción, se debe de convertir en un “constructor “ y debe usar su habilidad creadora para generar el objeto deseado con aquella cierta propiedad, no olvide además demostrar que algo sucede. su “material de construcción” consiste en la información contenida en a.

Ejemplo.

Existen números reales $x > 0$, $y > 0$ tales que $(2x + 3y) = 8$ y $(5x – y) = 3$

Para su demostración se construye de esta forma:

Objeto: números reales x y y.

Cierta propiedad: $x > 0$, $y > 0$.

Algo sucede: $(2x + 3y) = 8$ y $(5x – y) = 3$

3. 4. Método por selección

El método por selección es una técnica para tratar con proposiciones que contienen el cuantificador “para todo”. Tales proposiciones surgen de una manera natural en muchas áreas de las matemáticas, una de las cuales es la teoría de conjunto. Además de su uso en la teoría de conjuntos, existen muchos otros ejemplos en los cuales el cuantificador “para todo” puede ser y será utilizado.

Cuando aparecen los cuantificadores “para todo” o “para cada” el enunciado tendrá la siguiente forma básica.

Para cada “objeto” con una “cierta propiedad”, “algo sucede” ( ). Las palabras entre comillas dependen del enunciado particular bajo consideración, y se deben aprender a leer, escribir e identificar los tres elementos. Una coma siempre precede a algo que sucede.

Algunas veces el cuantificador “para todo” esta oculto. Durante el proceso regresivo, si se encuentra una proposición que tiene el cuantificador “para todo” oculto, una manera en la cual podría ser capaz de demostrar que es verdadera es haciendo una lista de todos los objetos que posee aquella cierta propiedad. Entonces, para cada uno de ellos, se podría tratar de demostrar que algo sucede. Cuando la lista es finita, ésta podría ser una manera razonable de proceder; sin embargo, con mucha frecuencia esto no será prácticamente posible debido a que la lista es muy larga o incluso infinita.

El método por selección puede extenderse como una máquina que hace demostraciones la cual, más que verificar realmente que algo sucede para todos y cada uno de los objetos que tengan una cierta propiedad, tienen la capacidad de hacer las demostraciones. Si se tuviera tal máquina, entonces no se tendría la necesidad de verificar realmente toda la lista (posiblemente infinita) porque se sabría que la máquina podría hacerlo siempre.

El método por selección le enseña como diseñar el mecanismo interno de la máquina que hace las demostraciones.

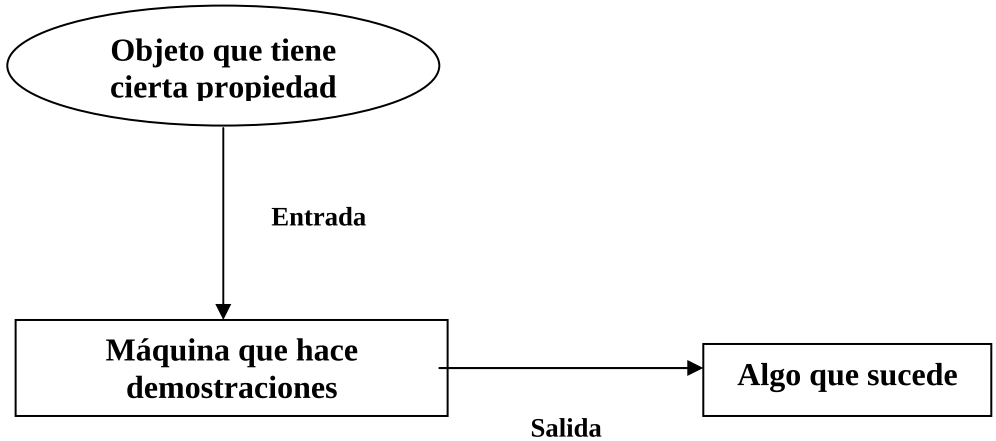


Figura. 1. la máquina que hace demostraciones para el método por selección.

Para entender el mecanismo del método por selección, hay que ponerse en el papel de la maquina que hace demostraciones y tenga en mente que se necesita tener la capacidad de tomar cualquier objeto con cierta propiedad y concluir que algo sucede (fig. 1). Como tal, suponga que alguien le dio uno de esos objetos, pero recuerde, que no sabe precisamente cual. Lo que se sabe es que el objeto posee aquella cierta propiedad, y se debe usar dicha propiedad para llegar a la conclusión de que algo sucede. Esto se logra con más facilidad trabajando progresivamente a partir de aquella cierta propiedad y regresivamente a partir de lo que sucede.

En otras palabras con el método por selección se selecciona un objeto el cual tiene cierta propiedad. Entonces, usando el método progresivo - regresivo se debe concluir que, para el objeto seleccionado, algo sucede. Entonces, la maquina para hacer demostraciones tendrá la capacidad de repetir la demostración para cualquiera de los objetos que tiene aquella cierta propiedad.

Ejemplo.

Todo grupo g de orden primo es cíclico.

Demostración.

Si h es un subgrupo de g y $|g| = p$, primo entonces, recurriendo al teorema de lagrange, $|h| \mid |g| = p$, donde p es primo, por consiguiente $|h| = 1$ o p. así que si $h \neq (e)$, entonces $h = g$. Si $a \neq e \in g$, entonces las potencias de a, $\{a^i\}$, forman un subgrupo de g diferente de (e) . Por lo tanto este subgrupo es todo g. esto dice que cualquier $x \in g$ es de la forma $x = a^i$, por consiguiente g es cíclico por definición .

3. 5. Método por inducción

El método de inducción debe considerarse seriamente (aun antes que el método por selección) cuando b tiene la forma:

Para todo entero $n \geq 1$, "algo sucede", donde el algo que sucede es algún enunciado que depende del entero n.

Cuando se considera el método por inducción, las palabras claves que se deben buscar son "enteros" y "≥ 1".

Una manera de demostrar tales enunciados es haciendo una lista infinita de problemas, uno para cada uno de los enteros partiendo todos desde n=1 y, entonces, demostrar cada proposición por separado. En tanto que para los primeros problemas de la lista es fácil de demostrar las proposiciones, para el enésimo y los siguientes es mucho más difícil.

Inducción es un método ingenioso para demostrar que es verdadero cada uno de estos enunciados en la lista infinita. Así como en el método por selección, se puede pensar en la inducción como una máquina automática que resuelve problemas, la cual empieza con p(1) y continúa sobre la lista de manera progresiva demostrando cada proposición. Aquí esta como trabaja. Hace que empiece la máquina verificando que p(1) es verdadero. A continuación, introduzca p(1) en la máquina. Esta utiliza el hecho de que p(1) es verdadero y automáticamente demuestra que p(2) es verdadero. Entonces tome p(2) e introdúzcalo en la máquina. De nuevo, ella utiliza el hecho de que p(2) es verdadero para obtener la conclusión de que p(3) es verdadero, y así sucesivamente (figura 2). Cuando la máquina va a demostrar que p(n+1) es verdadero, ella ya habrá demostrado que p(n) es verdadero (en el paso anterior). Así, al diseñar la máquina, se puede suponer que p(n) es verdadero, y su trabajo consiste en asegurar que p(n+1) también será verdadero.

Una demostración por inducción consiste de dos pasos:

- El primero es verificar que el postulado p(1) es verdadero.
- El segundo paso tiene mayor dificultad, este requiere que se llegue a la conclusión de que p(n+1) es verdadero, utilizando la suposición de que p(n) es verdadero.

La máquina que hace demostraciones por inducción.

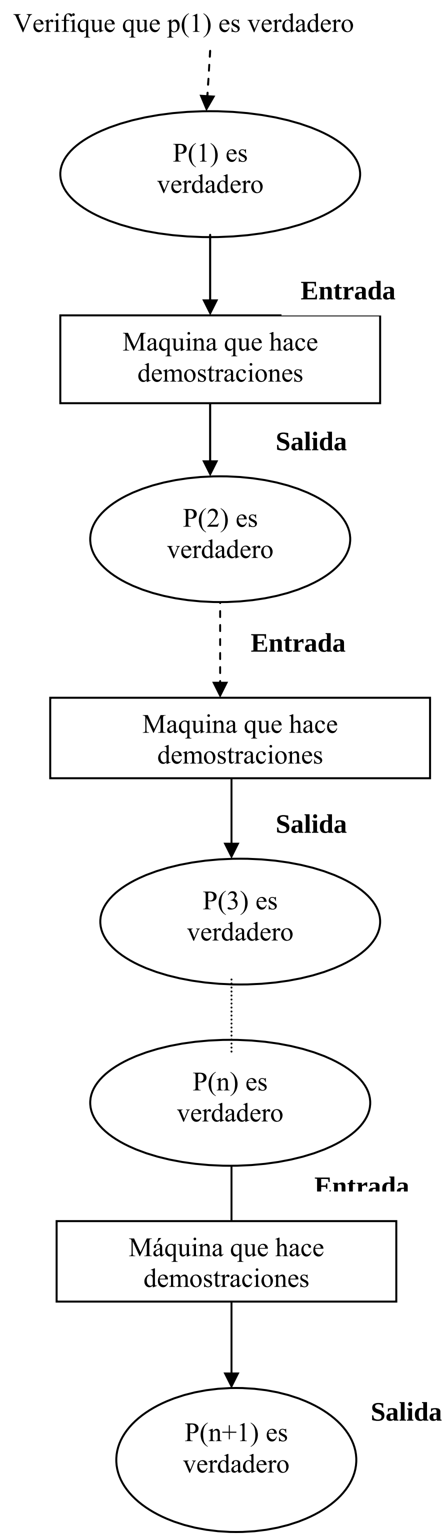


Figura 2

Ejemplo.

Sean a y b dos números reales entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n$$

Demostración:

Demostraremos esta formula, que es el binomio de newton, por el método de inducción matemática.

i) Para n = 1, tenemos a + b = a + b y así se cumple la fórmula dada.

ii) supongamos que la fórmula se cumple para n, esto es

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n$$

iii) Probemos que dicha formula se cumple para n +1.

así $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

$$= \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n\right][a+b]$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n} ab^n + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1}b^2 + ... \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n b + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

3.6. Método por particularización.

El método de particularización se utiliza sobre todo cuando el enunciado a contiene el cuantificador "para todo" en la forma usual.

Para todo los "objetos" con una "cierta propiedad", "algo sucede".

Como resultado de suponer que a es verdadero, se sabe que algo sucede para todos los objetos con la cierta propiedad. si en algún momento en el proceso regresivo se encuentra con alguno de estos objetos que tienen cierta propiedad, entonces usted puede hacer uso de la información en a y poder concluir que, para este, objeto en particular, el "algo" sucede en realidad. Eso le debe ayudar a concluir que b es verdadero. En otras palabras, habrá particularizado la proposición a, a un objeto específico que tiene cierta propiedad.

Cuando usted está usando el método por particularización debe tener mucho cuidado para mantener su símbolo y notación en orden.

También asegúrese que el objeto especial al cual se aplica la particularización satisface "aquella" cierta propiedad, ya que solamente podrá concluir entonces que algo sucede.

Cuando esté usando el método por particularización, asegúrese de que el objeto particular bajo consideración satisface una propiedad particular, porque solamente entonces se puede estar seguro que algo sucede.

Ejemplo

Para toda sucesión de números reales $\{x_n\}$, si $\{x_n\}$ converge entonces $\{x_n\}$ es acotada.

Demostración.

Sea $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$ esta es una sucesión convergente ya que el

$\lim\limits_{n \to \alpha} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, luego $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ es acotada, de hecho,

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| \leq \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = M, \ \forall n \in R^{+}.$$

3.7. Método por contradicción.

En el método por contradicción se comienza suponiendo que a es verdadero, tal como en el método progresivo - regresivo. Sin embargo, para obtener la conclusión deseada de que b es verdadero, se procede haciéndose una pregunta muy sencilla que dice: "¿por qué b no puede ser falso?". Después de todo, si debemos concluir que b es verdadero, entonces debe haber alguna razón por la cual b no puede ser falso. El objetivo del método por contradicción es descubrir esta razón. En otras palabras, la idea de una demostración por contradicción es suponer que a es verdadero y que b es falso, y ver por qué esto no puede suceder. En una demostración por contradicción se supone que a es verdadero y que ~b es verdadero, y de alguna manera se debe usar esta información para obtener una contradicción a algo que se sabe de manera absoluta que es verdadero.

Otra manera de ver este método es recordar que la proposición "a implica b" es verdadero en todos los casos excepto cuando a es verdadero y b es falso. En una demostración por contradicción se descarta este caso suponiendo que esto sucede y obteniendo, entonces, una contradicción.

En este punto aparecen muchas preguntas muy naturales como:

1. ¿Qué contradicción debería buscar?
2. ¿Cómo usa la suposición de que a es verdadera y b es falso par obtener la contradicción?
3. ¿Cuándo y por qué debería usar este método en lugar del método progresivo –regresivo?

La primera pregunta es la más difícil de contestar, ya que no existen líneas de acción especificas. Cada problema proporciona su propia contradicción y, usualmente, se requiere de creatividad, perspicacia, persistencia y suerte para generar una contradicción. Respecto a la segunda pregunta, uno de los enfoques comunes para encontrar una contradicción es trabajar progresivamente a partir de la suposición de que a y ~ b son verdaderos, como se ilustra en un momento (figura 3).

Método	suponga	concluya
	(progresivamente)	(regresivamente)
Progresivo - regresivo	a - - - - - - → • • • ← - - - - - - b	
Contradicción	$\left.\begin{array}{l} a \\ \sim b \end{array}\right\}$ (progresivamente) ⟶ • • •	*(Contradicción)

Figura 3

Como regla general, use el método por contradicción cuando la proposición ~ b le de alguna información útil.

Ejemplo.

Si p(z) es un polinomio de grado n, n ≥ 1, con coeficientes reales o complejos, entonces p(z) =0 tiene al menos una raíz

Demostración.

Demostraremos este teorema por contradicción.

Para esto, sea $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n$, $a_n \neq 0$ y supongamos que p(z) no es cero para todo z. entonces la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es analítica en todo el plano complejo. También $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ tiende a cero cuando $|z|$ tiende al infinito, de donde $|f(z)|$ es acotada en todo el plano complejo. Luego, por el teorema de liouville $f(z)$ es constante. Así, hemos obtenido una contradicción dado que p(z) no es constante ya que p(z) ≥ 1. Por tanto, p(z) es cero para por lo menos un z.

3.8 Método contra positivo.

El método contra positivo tiene la ventaja de que lo dirige hacia un tipo específico de contradicción.

El método contra positivo es similar al método de contradicción en que se empieza por suponer que a y ~ b son verdaderos. sin embargo, la diferencia consiste en que en el método contra positivo, no se trabaja progresivamente desde a y ~ b. en vez de eso, se trabaja solamente desde ~ b su objetivo es lograr la contradicción de que a es falso (denotado como ~a). Como tal, el método contra positivo puede verse como una forma "pasiva" del método por contradicción en el sentido de que la suposición de que a es verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Sin embargo, en el método por contradicción, la suposición de que a es verdadero se utiliza activamente para lograr la contradicción (figura 4).

La desventaja del método contra positivo es que trabaja progresivamente partiendo solamente desde una proposición (~ b) en vez de dos. Por otro lado, la ventaja es que sabe precisamente lo que esta buscando (~ a). Como tal, puede aplicar con frecuencia el proceso de abstracción a la proposición ~ a intentando trabajar regresivamente.

La opción de trabajar regresivamente no existe en el método por contradicción, dado que no sabe que contradicción esta buscando.

Método	suponga	concluya
Contra positivo	a (progresivamente) ~ b ⋯⋯▶ ● ● ● ● ● ●	(regresivamente) ◀⋯⋯ ~ a
Contradicción	a (progresivamente) ~ b ⋯⋯▶ ● ● ● ● ● ●	* (contradicción)

Figura. 4 Contrapositivo contra por contradicción.

Ejemplo.

Si x es un punto de acumulación de s, entonces toda vecindad b(x) contiene infinito punto de s.

Demostración:

Demostraremos el teorema por el método contrapositivo, esto es, si existe una vecindad b(x) que contiene un número finitos de puntos de s distintos de x, entonces x no es un punto de acumulación.

para esto supongamos que la vecindad b(x) contiene solamente un numero finito de puntos de s distintos de x; sean estos a_1, a_2, a_3,a_4,.......a_n. Sea r = min $\{|x - a_i| : i = 1...., n\}$, luego b(x, r/2) será una vecindad con centro x que no contendrá ningún punto de s distinto de x por tanto x no es un punto de acumulación.

Así afirmamos que si x es un punto de acumulación de s, entonces la vecindad b(x) contiene infinitos puntos de s.

CAPITULO IV

Técnicas especiales para hacer demostraciones.

En los capítulos anteriores hemos establecidos tres técnicas principales para tratar de demostrar que "a implica b": los métodos progresivos - regresivo, contrapositivo y por contradicción. Además, cuando b tiene cuantificadores, usted dispone de los métodos por construcción y por selección.

Existen otras formas especiales de b para las cuales se tienen también técnicas bien establecidas con las cuales se tiene éxito. tres de estas técnicas se desarrollaran en este capitulo.

4.1. Método de unicidad.

El método de unicidad esta relacionado con una proposición b, el cual no solamente requiere que se demuestre la existencia de un objeto con una cierta propiedad tal que algo sucede, sino también que el objeto es único, es decir, no hay otro objeto. Se utiliza el método de unicidad cuando la proposición b contiene la palabra "único" así como el cuantificador "existe".

En tal caso, su primer paso es demostrar que el objeto deseado existe. Esto puede hacerse mediante el método por construcción o por el de contradicción.

El siguiente paso será demostrar la unicidad en algunas de las dos formas comunes. En la primera, supone que existen dos objetos con cierta propiedad para los cuales algo sucede. Entonces, usando esa cierta propiedad, lo que sucede y, por supuesto, la información en a, debe concluirse que los dos objetos son uno sólo y el mismo (es decir, son iguales). El método progresivo – regresivo es por lo común la mejor forma para demostrar que son iguales.

Ejemplo.

Sea $\{x_n\}$una sucesión de números reales, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$ entonces p es único.

Demostración.

Supongamos probemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = P$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Q$, Probemos que p= q. como $\lim_{n\to\infty} x_n = P$, entonces $\forall \varepsilon \geq 0 \exists N_1 \in N$ tal que si n ≥

n_1, implica $|x_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ y si $\lim_{n\to\infty} x_n = Q$,

Entonces $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_2 \in n$ tal que si $n \geq n_2$ implica $|x_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ ahora,

$|p - q| = |p - x_n + x_n - q| \leq |p - x_n| + |x_n - q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Esto es $0 \leq |p - q| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $0 \leq |p - q| < 0$ y así $|p - q| = 0$, de donde $p - q = 0$ y por tanto $p = q$.

4.2. El método de la o exclusiva.

Este surge cuando b es de la forma "c o d es verdadero pero no ambas" (donde c y d son proposiciones). En otras palabras, el método de la o exclusiva debe utilizarse cuando se quiere demostrar que la proposición "a implica c o d" es verdadera. Aplicando el método progresivo – regresivo, empezaría por suponer que a es verdadero y quisiera concluir que c es verdadero o que d es verdadera. Suponga que hace la suposición adicional de que c no es verdadera. Claramente, en este caso lo mejor sería que d fuera verdadero. Así, en el método de la o exclusiva, supone que a es verdadero, y c es falso, y debe concluir entonces que d es verdadero.

Ejemplo.

Supongamos que la ley de cancelación se cumple en un anillo r y si a b = 0 entonces a = 0 ó b = 0.

Demostración.

Sea r un anillo en el cual la ley de cancelación se cumple y supongamos que ab = 0 para alguna a, b $\in$ r. Debemos demostrar que a = 0 ó b = 0.

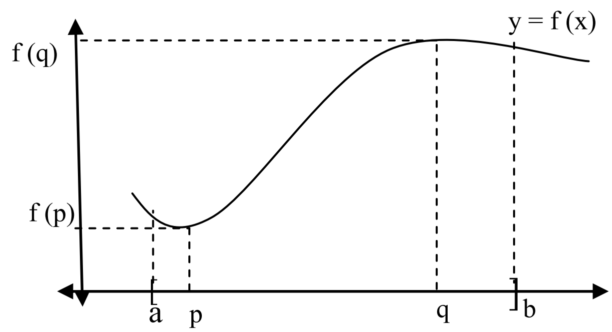
Sí $a \neq 0$ entonces a b = 0 = a * 0, luego b = 0 por la ley de cancelación.

4.3. El método del max / min.

El método del máx. / min. surge en problemas que tratan con máximos y mínimos. Suponga que s es un conjunto no vacío de números reales el cual contiene tanto al mayor como al menor elemento. Para un número real dado x podríamos estar interesado en la posición del conjunto s con respecto al numero x.

La idea de la técnica máx. / mín. es convertir al problema en otro equivalente que contenga un cuantificador. Entonces puede utilizarse por el método por selección o por construcción.

Ejemplo



Sea f: r → r y sea f continua en $x \subset r$, x compacto, entonces existen puntos p y q en x tales que f(p) = inf. f(x) y f(q) = sup. f(x) como conclusión $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ $\forall x \in x = [a , b]$. así f(p) es el valor mínimo de f en x f(q) es el valor máximo en x. por ejemplo : sea $f(x) = x^2$ y sea x 0 [-1 , 2], luego $\forall$ $x \in [-1 , 2]$, $f(0) = 0 \leq f(x) \leq 4 = f (2)$. sea x = 1, $f (1) = 1^2 = 1 \in [0, 4]$ y sea x = 3, $f (3) = 3^2 = 9 \notin [0 , 4]$.

CAPITULO V.

Errores de demostración.

Si sintetizamos al máximo la estructura lógica de la demostración podemos representarlas por: (a) $\rightarrow$ (b) donde (a) denota los fundamentos de la demostración y los argumentos ($\rightarrow$) denota el procedimiento de demostración y (b) representa la tesis que se demuestra.

la primera condición indispensable para que una demostración sea correcta es que la tesis que se demuestra sea verdadera, aceptada esta condición, los errores de demostración se clasifican en tres tipos: errores en el consecuente, el antecedente o el procedimiento de demostración.

5.1. Errores en el consecuente.

Este tipo de errores es también conocido con el nombre de suplantación de la tesis que se demuestra y se comete con mucha frecuencia. Puede ocurrir al llevar a notación matemática el enunciado de la tesis. la esencia de este error está en que se viola la ley de identidad, al considerar idéntico lo que no la es.

Ejemplo.

Si $\{A_\alpha \ni \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos abiertos entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A\alpha$ es abierto.

La suplantación es: si $\{A_\alpha \ni \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos abiertos entonces $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A\alpha$ es abierto. Por ejemplo sea $\{A_n : n \in N\} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \ \ldots = (1, 1)$$

es abierto mientras que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \ \ldots = \{0\},$$

que no es abierto.

5.2. Errores en el antecedente.

Los errores de este tipo se presentan en general por:

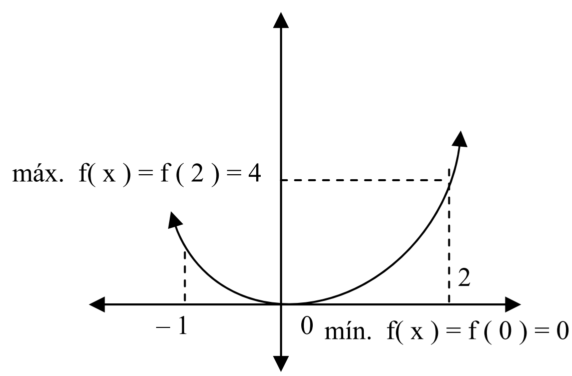
- utilizar como antecedente una proposición falsa (falso antecedente). esta situación se presentan con mucha frecuencia cuando solo se ha seguido la intuición para formular una proposición.

Ejemplo.

sea $f(x) = x^2$, luego para $a = (0, 1)$, $f(a) = f((0, 1)) = \{ f(x) \mid x \in a = (0, 1) \} = \{x^2 \mid x \in (0, 1) \} = \{x^2 \mid 0 < x < 1 \} = (0, 1)$.

para $a = (-2, 2)$, $f(a) = f((-2, 2)) = \{ f(x) \mid x \in a = (-2, 2) \} = \{x^2 \mid x \in (-2, 2)\} = \{x^2 \mid -2 < x < 2 \} = (0, 4)$.

Luego. Usando la intuición se puede formular la siguiente proposición:



Si $f: r \to r$ es una función continua y $a \subset r$ es un conjunto abierto, entonces $f(a)$ es abierto. pero esta proposición no es verdadera ya que, por ejemplo: sea $f(x) = k$, $k \in r$ la cual es una función continua y sea $a = (0, 2)$ entonces $f(a) = f((0, 2)) = \{ f(x) \mid 0 < x < 2 \} = \{ k \mid 0 < x < 2 \} = \{k\}$ el cual no es un conjunto abierto. o sea que la imagen de un conjunto abierto bajo una función continua no necesariamente es abierta. En este caso la intuición falla.

- Falta de demostración del antecedente. este error es particularmente frecuente cuando se toma por antecedente una tesis demostrada a partir de la que se debe demostrar.

Teorema.

Un dominio entero finito es un cuerpo.

Demostración

Sea d un dominio entero finito. Para probar que d es un cuerpo debemos que:

1. Producir un elemento 1 pertenece a d: $a \cdot 1 = a, \ \forall a \in D$

2. Para todo $a \neq 0 \in D$ producir un elemento $b \in D : a b = 1$.

Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ elementos de d, suponga que $a \neq 0$ $a \in D$. considere los elementos $x_1 a, x_2 a, \ldots\ldots\ldots, x_n a$ los cuales pertenecen a d. afirmamos que todos ellos son distintos. Supongamos $x_i a = x_j a \ \forall i \neq j$, entonces $(x_i - x_j)a = 0$. Como d es un dominio entero y $a \neq 0$, entonces $x_i - x_j = 0$ y así $x_i = x_j$, pero esto contradice que $i \neq j$. Así $x_1 a, x_2 a, ..., x_n a$ son n elementos distintos de d que tiene exactamente n elementos. Luego todo elemento $y \in D$ puede ser escrito como $x_i a$ para algún x_i. En particular como $a \in D$, $a = x_{i0} a$ para algún $x_{i0} \in D$. Como d es conmutativo entonces, $a = x_{i0} a = a x_{i0}$. Nos proponemos demostrar que x_{i0} actúa como un elemento identidad para todo elemento de d. ya que si $y \in D$, luego $y = x_i a$ para algún $x_i \in D$, y así $y x_{i0} = (x_i a) x_{i0} = x_i (a x_{i0}) = x_i a = y$. así x_{i0} es un elemento identidad para d y lo escribiremos como 1. Ahora, como $1 \in D$, luego por argumento previo existe $b \in D : 1 = b a$ y así todo elemento no cero de d tiene su inverso multiplicativo por tanto d es un cuerpo.

Corolario.

Si p es un número primo, entonces Z_p, el anillo de los enteros mod. p, es un cuerpo.

Demostración.

Por el teorema es suficiente probar que Z_p sólo tiene un número finito de elementos. si $a, b, \in Z_p$ y $a\ b = 0$ entonces p debe dividir al entero ordinario $a\ b$, y así p, siendo un primo debe dividir "a" o a "b".pero entonces o $a \equiv 0 \bmod p$ o $b \equiv 0 \bmod p$, de aquí que en Z_p uno de esos es cero o sea que Z_p no tiene divisores de cero y además es un anillo conmutativo y con identidad, por tanto Z_p es un dominio entero finito y por el teorema concluimos que Z_p es cuerpo.

Ejemplo.

Sabemos que si p es un número primo, entonces Z_p el anillo de los enteros módulo p, es un cuerpo.

A partir de esta afirmación no podemos inferir lo siguiente: todo dominio entero es un cuerpo, que es una proposición verdadera, ya que la primera afirmación es válida solamente en z, los enteros y la segunda es válida para todo tipo de dominio entero finito, no necesariamente Z_p.

5.3. Errores en el procedimiento de la demostración.

La demostración es un procedimiento que expresa la conexión lógica que existe entre los fundamentos y la tesis que se demuestra; luego todo error de demostración se reduce en última instancia a establecer tal conexión incorrectamente o cuando no existe.

Los errores de demostración son de dos clases. Uno de estos casos se tiene cuando se ha seguido un correcto procedimiento lógico pero sin conexión con la tesis que se demuestra y que se une a esto de manera mecánica.

La otra clase de errores de demostración se produce cuando se comete uno o varios errores lógicos que unidos a otros eslabones de la demostración nos llevan a la veracidad de la tesis. Sobre esta segunda clase de errores vamos a referirnos a dos tipos de errores que se presentan con frecuencia en matemática.

5.3.1. Errores por salto.

Se comete este error cuando se saltan eslabones intermedios de la demostración. son muy comunes en los procesos inductivos en que se analizan muy pocos casos particulares y solo a partir de ellos se establece una propiedad general sin tener en cuenta casos contradictorios con respecto a la conclusión general.

Ejemplo.

Consideremos el trinomio $x^2 + x + 41$. Tomando el cero en lugar de x se obtiene el número primo 41. Tomando ahora en este mismo trinomio el uno en lugar de x, obtenemos de nuevo un número primo, el 43. tomando en el trinomio sucesivamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en lugar de x, obtenemos cada vez un número primo (47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 y 115, respectivamente). de aquí inferimos que al sustituir x en el trinomio por un número entero no negativo cualquiera siempre se obtiene un número primo como resultado. Hemos enunciado una proposición general para todo n (para todo x) basándonos solo en que esta proposición ha resultado justa para algunos valores de n (o de x).

La inducción matemática se emplea ampliamente en las matemáticas, pero hay que hacerlo con entendimiento; la ligereza puede conducir a conclusiones falsas. Efectivamente, analizando con mayor atención el trinomio $x^2 + x + 41$, nos persuadimos de que es igual a un número primo para x = 0, 1, 2, 3,.........., 39, pero que para x = 40 este trinomio vale 41^2, o sea, un número compuesto.

5.3.2. Errores por utilizar un enlace incorrecto entre los fundamentos y la conclusión.

Como es conocido en todo razonamiento (condicional) se tiene que la:

- Veracidad del antecedente se sigue necesariamente la del consecuente.
- Falsedad del consecuente se obtiene la falsedad del antecedente.

Estos son los enlaces correctos en todo razonamiento condicional. Se comete error cuando en lugar de los enlaces correctos se utiliza uno incorrecto, por ejemplo:

- De la falsedad del antecedente se sigue la falsedad del consecuente.

Ejemplo.

Sea $-1 > 0$ el antecedente, lo que es falso y como consecuente se tiene $(-1)^2 > 0$ lo que es verdadero, o sea que se puede tener el antecedente falso y el consecuente puede ser verdadero.

- de la veracidad del consecuente se obtiene la veracidad del antecedente.

Ejemplo.

Se sabe que: si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ converge (antecedente) entonces $\{x_n + y_n\}$ converge (consecuente). Pero el consecuente $\{x_n + y_n\}$ sin que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ converjan, por ejemplo.

Sean $x_n = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1,....\}$ $y_n = \{(-1)^{n-1}\} = \{1, -1, 1, -1\}$, dos sucesiones y su suma es $\{x_n + y_n\} = \{0, 0, 0,...\}$ la cual converge a cero, pero $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ no convergen.

Bibliografía

- T. M. apóstol. análisis matemáticos. 2da. edición versión española por José Plás carrera XVII 596p. Barceló Revertec c. 1996.

- Martínez Juárez, Felipe Eleuterio. clasificación de las demostraciones y un sistema de habilidades relacionadas con los teoremas. león, Nic. Unan – León, 1989.
  Tesis: (lic. en matemática).

- Solow, Daniel. como entender y hacer demostraciones en matemáticas. primera edición. editorial limusa. méxico 1987.

- Das, José Rodolfo. programación matemática. colección de problemas resueltos. departamento de estadística e investigación operativa. universidad de valencia. España.

- Sowisnki. s. i. lecciones populares de matemática. método de inducción matemática. editorial ¨Mir¨. Moscú. 1975.

- A. I. Fetisov. lecciones populares de matemática. acerca de la demostración en geometría. editorial ¨Mir¨. Moscú. 1980.

Anexos

Apéndice a

Resumen de técnicas especiales para hacer demostraciones.

Demostración	Cuando usarla	Que suponer	Que concluir	Como hacerlo
progresivo - regresivo	como un primer intento o cuando b no tiene forma reconocible	a	b	Trabaje progresivamente partiendo de a y aplique el proceso de abstracción a b
contrapositivo	cuando b contiene la palabra “no”.	~ b	~ a	Trabaje progresivamente partiendo de ~ b y regresivamente partiendo de ~ a.
contradicción	cuando b contiene la palabra “no” o cuando los Dos primeros métodos fallen.	a y ~ b	alguna contradicción	Trabaje progresivamente partiendo de a y ~ b para obtener una contradicción
construcción	Cuando b contiene el termino “existe”.	a	Existe el objeto deseado.	Adivine, construya, etc. El objeto que tiene cierta propiedad y muestre que algo sucede.
selección	cuando b contiene el termino “para todo”, “para cada”, etc.	seleccione un objeto con cierta propiedad, y a.	Que algo sucede.	Trabaje progresivamente partiendo de a y el hecho de que el objeto tiene la cierta propiedad. Trabaje regresivamente partiendo de lo que sucede.

Técnicas de demostración	cuando usarla	que suponer	que concluir	como hacerlo
Inducción	cuando b es verdadero para cada entero empezando con alguno en particular, por ejemplo, n_o.	la proposición es verdadera para n.	la proposición es verdadera para n + 1. también demuestre que es verdadera para n_o	primero sustituya n_o en todas partes y demuestre que es verdadero. segundo, recurra a la hipótesis de inducción para demostrar que es verdadero para n+1.
Particularización	cuando a contiene el termino “para todo”, “para cada”, etc.	a	b	trabaje progresivamente particularizando a, un objeto en especial, es decir, al obteniendo en el proceso regresivo
Unicidad 1	cuando b contiene la palabra “único”.	existen dos objetos b y a.	los dos objetos son iguales	trabaje progresivamente utilizando a y las propiedades de los dos objetos. también, trabaje regresivamente para mostrar que los objetos son iguales.
Unicidad 2	cuando b contiene la palabra “único”.	existen dos objetos diferentes, y a	alguna contradicción.	trabaje progresivamente desde a, utilizando las propiedades de los dos objetos y el hecho de que son diferentes.
O exclusiva 1	cuando b tiene la forma “c o d”	a y $\sim$c	d	trabaje progresivamente partiendo de a y $\sim$ c y regresivamente partiendo de d.

O exclusiva 2	cuando b tiene la forma “c o d”.	a y $\sim$ d	c	trabaje progresivamente partiendo de a y $\sim$ d y regresivamente partiendo de c.
max / min 1	cuando b tiene la forma “ max s < x” o “ min s < x”.	a y seleccione una s en s.	s < x o x > x	trabaje progresivamente desde a y el hecho de que s está en s. también trabaje regresivamente.
max / min 2	cuando b tiene la forma “max s > x” o “min s < x”.	a	construya s en s tal que s > x , o s < x	utilice a y el método por construcción para producir la s deseada en s.

Glosario

Símbolo	significado
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	sí y solo sí
$\in$	es un elemento de
$\subseteq$	subconjunto
ϕ	conjunto vació
$\sim$	no
$\wedge$	y
$\vee$	ó
$\forall$	para todo
∞	infinito
χ	variable
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
ε	excilo
Δ	delta