**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA**

**UNAN – LEÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**TEMA**

# UNIDAD DIDÁCTICA: LOS NÚMEROS NATURALES

**PRESENTADO POR:**

**Br.** ***Norman Amancio Fonseca González***
**Bra.** ***Dora María Pereira Meléndez***
**Bra.** ***Elizabeth del Socorro Pichardo Moncada***

**PARA OPTAR AL TITULO DE:**

**LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**
**MENCIÓN MATEMÁTI CA EDUCATIVA Y COMPUTACIÓN**

**TUTOR:**
**Lic.** ***Freddy González M*.**

**LEÓN, SEPTIEMBRE, 2008**

# DEDICATORIA

*Dedicamos nuestros triunfos y logros:*

*A Dios*

*Creador de todas las cosas y nuestro proctector; que nos iluminó en nuestro camino hasta alcanzar nuestra meta.*

*A Nuestros Padres:*

*Eslabones y precursores de estímulos con su apoyo condicional.*

# AGRADECIMIENTO

*Al transcurrir cinco años de nuestra vida profesional, con el cual nos hemos interesado en aprender y conocer sobre una disciplina científica – humanística como es la Matemática Educativa y Computación, para lograrlo tuvimos el apoyo de muchas personas que hoy agradecemos:*

- *Al claustro de profesores de la Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades que nos capacitaron e instruyeron en los conocimientos científicos y pedagógicos.*
- *A los Licenciados Ronald López Flores y Héctor Flores Guido, tutores de nuestro trabajo monográfico, que con su experiencia y dedicación nos supieron orientar a través de su apoyo incondicional.*
- *A nuestros compañeros de clase que con el intercambio de experiencias y solidaridad nos sirvieron para mejorar días a días nuestros conocimientos.*

# I N D I C E

# I. INTRODUCCIÓN

En un mundo donde los conocimientos matemáticos se desarrollan vertiginosamente y aumentan sus aplicaciones día a día, en el que calculadoras y ordenadores forman parte del quehacer cotidiano, hay consenso social a nivel mundial sobre la importancia de la matemática y la necesidad de su aprendizaje por todos los estudiantes, esto significa dotar a los alumnos y alumnas de una cultura matemática que les proporcione recursos para toda su vida, lo que implica brindarles oportunidades de aprendizaje que estimulen el desarrollo de su pensamiento lógico matemático, y particularmente del aprendizaje de “Los Números Naturales”, que se imparte en el Séptimo Grado de Educación Secundaria, toda vez que estas sean la base de todo proceso cognitivo que aspira a dar respuesta a cuestiones problemáticas.

Por tal razón, nos propusimos elaborar una unidad didáctica relativa a los contenidos de “Los Números Naturales” bajo el enfoque pedagógico: “Enseñanza por Competencias”

Este nuevo enfoque pedagógico generado en esta época de globalización, y de rápidos cambios en las ciencias, la tecnología y las comunicaciones, es donde nuestra educación necesita de grandes transformaciones en nuestro sistema educativo. Se trata de una guía para que el profesor aproveche al máximo los encuentros con sus estudiantes y le garantice el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje. Esto proveerá al profesor de la suficiente capacidad de relacionarse con los (as) estudiantes y la disponibilidad que este muestre para asumir dicha responsabilidad.

Finalmente, hay que decir que aunque este documento sea un inicio para el fortalecimiento de la enseñanza de algunos temas contemplados en las matemáticas de la Educación Secundaria, sirva además de guía; también acompañar a los (as) estudiantes en sus proyectos finales, convirtiendo estos en herramientas metodológicas interesantes para orientar la realización de proyectos sociales en otros escenarios de la vida social, bien sea institucional o informal.

Así desde este punto de vista, el proceso metodológico de este documento se apoya en el marco de la Enseñanza por Competencias, particularmente en lo relacionado con el proceso para desarrollar unidades didácticas en el aula, lo más importante y lo más definitivo en el acto educativo, tanto para el profesor como para los (as) estudiante. Por eso, definir qué quiero que mis estudiantes comprendan, qué puedo hacer para que comprendan y cómo sé que han comprendido, es fundamental.

De igual forma la falta de profesionalización docente, debido al alto índice de empirismo, la falta de actualización en los diferentes cambios pedagógicos y metodológicos, y la falta de incentivos para los (as) profesores (as) ha incidido en la calidad de los aprendizajes.

Como un aporte a este cambio, el presente trabajo pretende mejorar la calidad del Proceso Enseñanza – Aprendizaje de Los Números Naturales, mediante la aplicación del enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias, lo que permitirá a los (as) estudiantes tener una visión de futuro acerca del estudio de las matemáticas orientando los aprendizajes hacia la vida y el trabajo donde sea capaz de responder con agilidad y relevancia a las necesidades que demanda nuestro país.

En cuanto a la forma de organizar las competencias y contenidos en nuestra unidad didáctica, debemos considerar que es flexible, el docente asignará el tiempo para su desarrollo de acuerdo a la importancia y características de los (as) estudiantes. En general, las competencias educativas y los contenidos deben ser analizados, interpretados, comprendidos y aplicados en el marco de las realidades locales de los centros y comunidades educativas en donde se llegue a implementar esta unidad didáctica.

## II. ANTECEDENTES

La preocupación por vincular la escuela con la vida se remonta desde hace mucho tiempo. Es una propuesta que se ha repetido en todos los intentos de reforma educativa, muchos pensadores que han sido referentes importantes en la historia de la pedagogía tuvieron también esa preocupación y muchos coinciden que la educación sirva para el desarrollo del hombre natural mediante el aprendizaje para la vida.

Desde hace algunos años el Ministerio de Educación Cultura y Deportes (MECD), y ahora el Ministerio de Educación (MINED) ha venido desarrollando todo un proceso de transformación curricular, el que tiene como propósito mejorar sustantivamente la calidad de la enseñanza, esta labor se ha hecho basándose en las líneas pedagógicas modernas, las que conciben el aprendizaje desde un enfoque constructivista, modelo pedagógico en el que el centro de las actividades docentes es el estudiante y en el cual el conocimiento se va construyendo a partir de la acción del educando; ya que son muchos los factores que inciden en el rendimiento académico de los (as) alumnos (as) de educación secundaria.

A lo largo del tiempo los (as) profesores (as) buscan maneras de ayudar a sus estudiantes a entender mejor. Tratan de explicar claramente. Buscan oportunidades para hacer aclaraciones. Con frecuencia ponen trabajos sin parámetros fijos tales como la planeación de un experimento o la crítica de comerciales en la televisión, tareas que requieren y que refuerzan la comprensión.

Es en este momento que la Enseñanza por Competencias enriquece la comprensión por sobre otras metas educativas, ya que la enseñanza en secundaria que se desarrolla en la actualidad, en nuestros estudiantes se observa un mezcla extraña; unos esbozos de teoría de conocimiento, que vienen a constituir unas cuantas incógnitas cuya relación con las matemáticas consiste en que los (as) estudiantes se pueden expresar con unas palabras pasmosas que además tienen su traducción secreta en símbolos misteriosos; una apropiación de palabras asombrosas, que se les dice que son de naturalezas muy importantes, aunque no se les explique muy bien qué se puede hacer con ellas; y, que relación tiene con la vida real.

Es en ese sentido que los problemas que se derivan de la enseñanza – aprendizaje de Los Números Naturales que se imparte en el Séptimo Grado de Educación Secundaria constituyen un ejemplo del modelo conductista en que los (as) estudiantes son únicamente receptores de los conocimientos que transmite el profesor de matemáticas.

Es por eso que pretendemos desarrollar el tema de Los Números Naturales bajo el modelo pedagógico: "Enseñanza por Competencias". Es así en cuanto a las estrategias, el enfoque trata de desarrollar un modelo de enseñanza que permitiera a los docentes responder: ***¿Cómo preparar a estudiantes competentes?***

Con la aplicación de este modelo pedagógico pretendemos que el aprendizaje de los conocimientos por parte de los (as) estudiantes sea significativo y funcional, el cual le ayudará a lo largo de toda la vida, con el fin de ser un ciudadano participativo, activo y colaborativo para aprovechar mejor las oportunidades que le presenta la sociedad en sus diferentes momentos.

## III. JUSTIFICACIÓN

Uno de los principales propósitos de elaborar una unidad didáctica relativa a “Los Números Naturales” es la de proporcionar a los (as) estudiantes de Primer Año de Educación Secundaria una serie de competencias que le permitan afrontar su futuro con éxito y el de poder desenvolverse en un mundo complejo y cambiante.

El profesor de Matemáticas debe favorecer el desarrollo de la inteligencia de sus estudiantes empleando estrategias que favorezcan el proceso enseñanza – aprendizaje, adaptando el tema en mención al medio en que se desenvuelve, incentivando el espíritu investigativo de los (as) estudiantes, manejando los contenidos relacionados a Los Números Naturales que se imparten en Séptimo Grado de Educación Secundaria de una manera creativa adoptando un rol de tutoría que le dé oportunidad de trabajo a los (as) estudiantes.

En la elaboración de la unidad didáctica “Los Números Naturales” tomamos en cuenta los cuatro pilares del conocimiento:

- ***Aprender a conocer***: Disposición y desplazamiento que en el ejercicio de investigación se hace necesario ponerlo en práctica.

- ***Aprender hacer***: Apropiarse al contexto en una sociedad determinada.

- ***Aprender a vivir juntos***: como medio de vida en grupo los seres humanos, lo que abarca todas las condiciones materiales y espirituales en el ámbito natural y social, para la búsqueda de respuesta en la vida y en la sobre vivencia, orientada estratégicamente a un desarrollo armonioso e integral de las potencialidades del sujeto.

- ***Aprender a ser***: capacidad para actuar con autonomía, reproduciéndose como un protagonista de la vida social, adoptando la forma para el tejido de relación que permita una vinculación entre los sujetos del sistema educativo empleando metodología que lleven a valorar su propia identidad.

Con la elaboración de esta unidad didáctica nos proponemos promover en los (as) estudiantes la adquisición de:

- ***Habilidades***: (capacidad de aprender por cuenta propia, capacidad de análisis, síntesis y evaluación, pensamiento crítico, creatividad, capacidad de identificar y resolver problemas, capacidad para tomar decisiones, trabajo en equipo, alta capacidad de trabajo, cultura de calidad, uso eficiente de la informática y las telecomunicaciones. manejo del idioma inglés, buena comunicación oral y escrita)

- ***Actitudes***:
  ***Valores*** (Los Valores se hacen realidad por medio de las actitudes:
  Reciprocidad, Profesionalismo, Responsabilidad, Orden, Respeto, Optimismo, Esfuerzo, Servicio, Solidaridad, Tenacidad, Tolerancia, Apertura al Cambio, Asertividad, Autenticidad, Autoestima, Comprensión, Confianza, Iniciativa, Liderazgo, Cooperación, Innovación, Moderación)

Para mejorar la calidad del conocimiento, los (as) estudiantes deben poseer un aprendizaje significativo y funcional, el cual le ayudará a lo largo de toda la vida, con el fin de ser un ciudadano participativo, activo y colaborativo para aprovechar mejor las oportunidades que le presenta la sociedad en sus diferentes momentos.

Es por eso que este trabajo monográfico tiene como fin el de proponer estrategias de enseñanza – aprendizaje de Los Números Naturales bajo el enfoque pedagógico “Enseñanza por Competencias”, que sean útiles tanto para el docente al momento de impartir su clase; haciéndola más activa – participativa, así como para los (as) alumnos (as), la cual le permita mejorar su auto – estudio, retención y comprensión de los contenidos de la misma. Siendo además un material de apoyo para los (as) profesores (as) y personas interesadas, que quieran adaptarse a un nuevo método de estudio, y que a la vez sirva como un proceso de retroalimentación. Además, hemos tomado en cuenta los tres tipos de contenidos:

1. ***Conceptuales***: Incluyen datos, hechos y principios.

2. ***Procedimentales***: Incluyen una secuencia de pasos o acciones con un orden para alcanzar un propósito o meta; es decir, para hacer algo.

3. ***Actitudinales***: Incluyen actitudes, valores y normas, con el propósito de fortalecer la función moral o ética de la educación. Pueden incluirse tres tipos de actitudes: actitudes hacia los contenidos conceptuales, actitudes y valores comunes a un conjunto de áreas o componentes y un conjunto de actitudes específicamente morales, ambientales que tienen carácter más transversal que es específico de un área.

Considerando estos tres tipos de contenidos en nuestra unidad didáctica nos garantiza el logro de las competencias propuestas.

# IV. OBJETIVOS

## IV.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una Unidad Didáctica que contribuya a la mejora del proceso Enseñanza – Aprendizaje de Los Números Naturales que se imparte en el Séptimo Grado de Educación Secundaria, proponiendo nuevas alternativas didácticas bajo el enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias.

## IV.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Proponer una Metodología Activa – Participativa que contribuya a que el aprendizaje de los contenidos de Números Naturales sea significativo y funcional.

2. Proporcionar a los (as) profesores (as) estrategias de enseñanza – aprendizaje que coadyuven a los (as) estudiantes a ser competentes para la vida.

3. Generar habilidad y destreza en la solución de ejercicios y problemas de aplicación.

4. Implementar un Sistema de Evaluación que tome en cuenta los contenidos estudiados, las actitudes de los (as) estudiantes y las actividades desarrolladas por los (as) profesores (as).

5. Fomentar hábitos de respecto, honestidad, solidaridad en la actividad de aprendizaje tanto individual como grupal.

# V. MARCO TEÓRICO

## V.1. ORIGEN DE LA ENSEÑANZA POR COMPETENCIA

La introducción del término competencia data de la década de los años 20 en los Estados Unidos en lo referente, sobretodo a la capacitación por auge en el empleo del mismo, se desplazan a fines de los años 60 a los 70, y se consideran al psicólogo David Mc. Clellaud como uno de los pioneros y luego es retomado en los años 90 a partir de las formulaciones de Daniel Coleman sobre la inteligencia emocional.

La gestión de competencia surge con el sesgo del paradigma positivista y con la importancia del pragmatismo, tomando auge en la práctica empresarial abandonada y de éxito a partir de la década de 1990.

## V.2. DEFINICION DE COMPETENCIA

**Competencia**

Es un conjunto de conocimientos, actitudes, disposiciones y habilidades (cognitivas, socioafectivas y comunicativas), relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Esta noción de competencia propone que lo importante no es sólo conocer, sino también saber hacer. Se trata, entonces, de que las personas puedan usar sus capacidades de manera flexible para enfrentar problemas nuevos de la vida cotidiana.

Una persona competente es aquel capaz de:

- Saber.
- Saber Hacer.
- Saber Ser.

Esto significa que las competencias están formadas por distintos tipos de saberes:

- A*ctitudinal:* UN SABER SER.
- *Procedimientos:* UN SABER HACER.
- *Conceptual:* UN CONOCER, SABER.

*UNA COMPETENCIA SE EXPRESA EN UN RESULTADO.*

**Los elementos de una competencia son:**

- Conocimiento declarativo: está presente cuando la persona tiene la información y concepto, es decir, cuando sabe lo que hace, por qué lo hace y conoce el objeto sobre el cual actúa.
- Capacidad de ejecución: es el conocimiento procesal o las destrezas intelectuales y psicomotoras para en efecto llevar a cabo la ecuación sobre el objeto.
- Actitud o disposición: es el conocimiento actitudinal para querer hacer uso del conocimiento declarativo y procesal y actuar de manera que se considera correcta.

**El aprendizaje basado en competencia modifica el trabajo del maestro porque:**

- Pasaría de ser el protagonista del proceso enseñanza – aprendizaje siendo este papel desempeñado por el estudiante.
- El trabajo seria menos monótono.
- Estaría basado en la participación activa de los estudiantes.
- Despertaría el interés hacia la investigación
- Se daría un aprendizaje significativo.
- Seria menos de dirección y más de dar pautas a seguir para el desarrollo intelectual.

**Principales características de la competencia:**

- Son aprendizaje mayores o comprensivos, resultado de la totalidad de experiencias educativas formales e informales.
- Son habilidades o capacidades generales que la persona desarrolla gradual y acumulativamente a lo largo del proceso educativo.

- Son características generales que la persona manifiesta en multiplicidad de situaciones y escenarios como parte del conocimiento.
- Son características que una comunidad estima como cualidad valiosa del ser humano.
- Son capacidades generales que se desarrollan como parte del proceso de madurez.
- Son un poder o una capacidad para llevar a cabo multiplicidad de tareas en una forma que es considerada eficiente o apropiada.

Las competencias se manifiestan en las distintas áreas del saber, ésta no se observan de manera generalizada, es decir, se miden partiendo de la realización de un determinado oficio.

Para saber que tan competente es una persona debe sacar a la luz sus capacidades, a través de los trabajos realizados ya que son los demás quienes evalúan el nivel de competencia de cada persona.

## V.3. IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA POR COMPETENCIA

La sociedad requiere de una enseñanza que desarrolle capacidades de reflexión – acción. Los sujetos deben ser competentes. La escuela ha de aportar a cada estudiante un conjunto de facilidades para aprender a desenvolverse y tener éxito en la vida.

La educación tiene la responsabilidad de formar personas con capacidad para:

- Aprovechar sus potencialidades y las del medio social y natural.
- Estudiar y comprender la realidad.
- Enfrentar con éxitos las dificultades, los problemas y los desafíos...

La enseñanza basada en competencia constituye un intento serio y profesionalizante por cambiar los énfasis, por llevar la educación a ser significativa para las personas, a reducir sus costos, a encaminarla a que parta de las necesidades de la vida cotidiana, a liberarla de un conjunto de supuestas prácticas que limiten su desarrollo.

La enseñanza educativa se transforma simultáneamente para poder dar respuesta a las normas de competencias que van apareciendo. El modelo educativo predominante, basado en una enseñanza determinada por cursos organizados sobre la base de programas pre – establecidos, se está siendo inoperante ante la demanda que surge a partir de las nuevas competencias. Se tendrá que buscar como evolucionar hacia una aproximación menos academista y orientado más al análisis de las necesidades individuales y competencias interactivas: se refiere a la capacidad de los sujetos de participar como miembros de grupos de referencia próximos, tales como la familia y los grupos de iguales.

## V.4. CLASIFICACIÓN Y TIPOS DE COMPETENCIAS

Se clasifican en intelectuales, éticas, estética, prácticas, interactivas y sociales.

- Las Competencias Intelectuales: Se refieren a los procesos cognitivos internos necesarios para operar con los símbolos, las representaciones, las ideas, las imágenes, los conceptos u otra abstracciones.

- Las Competencias Prácticas: Se refieren a un saber hacer, a una puesta en práctica.

- Competencias Interactivas: Se refiere a la capacidad de los sujetos de participar como miembros de grupos de referencia próximos, tales como la familia y los grupos de iguales.

- Competencias Éticas: Capacidades de distinguir lo bueno de lo malo en el complejo espacio que se extiende desde la aceptación de algunos valores como universales, tales como el derecho a la vida y a las propias pautas culturales, etc.

- Competencia Estética: Capacidad de distinguir lo que es bello para uno de lo que no es.

## V.5. ¿QUÉ SON LOS INDICADORES DE LOGROS?

Son los indicios o señales que nos permiten observar de manera evidente y especifica los procesos y resultados del aprendizaje a través de conductas observables. Es un indicador que tiene como función hacer evidente qué es lo que aprende el alumno y cómo demuestra.

Los indicadores de logro proporcionan elementos de prueba verificables, para valorar los avances hacia el logro de las competencias, o de los objetivos de un proyecto educativo, o de una unidad, o de un tema o pregunta generadora, etc.

El enunciado de los indicadores de logro debe permitir percibir o demostrar los cambios suscitados en los (as) estudiantes. Por esta razón, conviene tener en cuenta que un sólo indicador rara vez puede abarcar la totalidad de los cambios propuestos en el enunciado de una competencia o de los objetivos de un proyecto, unidad o tema generador.

Por ello, es recomendable precisar y formular varios indicadores de logro, para que el estudiante pueda alcanzar la competencia.

## V.6. ROLES DEL ESTUDIANTE

- Observar con curiosidad (observa el entorno real y virtual) armonizar lo conceptual y lo práctico.
- Trabajar de manera individual y colaborativa, alternar el trabajo individual con el trabajo grupal.
- Buscar causas y efectos y saber relacionarlos, investigar, elaborar y verificar hipótesis y aplicar estrategias de ensayo – error en la resolución de problemas y en la construcción de los propios aprendizajes.
- Estar motivado y perseverar, trabajar con intensidad y de manera continua. Desarrollar la autoestima, el afán de la superación y la perseverancia ante las frustraciones.

- Actuar con autonomía. Actuar con iniciativa para tomar decisiones, aceptar la incertidumbre y la ambigüedad.
- Pensar críticamente, actuar con pensamiento crítico y reflexivo y practicar la meta cognición y la auto evaluación permanente.
- Ser creativo, estar abierto al cambio y a nuevas ideas para adaptarse al medio y buscar nuevas soluciones a los problemas, crear y diseñar materiales.
- Responsabilizarse del aprendizaje y auto dirigirlo, elaborando estrategias acordes con los propios estilos cognitivos que consideren el posible uso de diversas técnicas de estudio y materiales didácticos.
- Aceptar orientaciones del profesor, interactuando con el profesor, y atender sus indicaciones, tareas, orientaciones y ayudas.
- Utilizar diversas técnicas de aprendizaje: repetitivos (memorizar, copiar, recitar) elaborativos (relacionar la nueva información con la anterior, subrayar, resumir, esquematizar, elaborar diálogos y mapas conceptuales), explorativos (explorar, experimentar y verificar).

**Éxito en los estudios:**

Es cuando el individuo adquiere un buen aprendizaje significativo en su proceso enseñanza – aprendizaje y lo pone en práctica en las diferentes circunstancias que se le presentan en la vida.

**El estudiante moderno:**

Es aquel estudiante de los tiempos venideros debe ser responsable de su propio proceso de aprendizaje, un individuo participativo y colaborativo.

## V.7. COMPETENCIAS DOCENTES. PROFESORES COMPETENTES

Los (as) profesores (as) deben prepararse de manera especializada en el área del saber en la que enseñan, deben comparar los contenidos con sus capacidades, estar abiertos a las nuevas demandas. Además tendrán que diseñar las estrategias que permiten a los educandos tener aprendizajes significativos.

El profesor competente es aquel que de manera eficiente desarrolla mediante estrategias metodológicas los contenidos de su área de enseñanza.

El Nivel de competencia de los (as) profesores (as) es bajo, ya que el producto arrojado por el nivel así lo refleja.

**Características de los (as) profesores (as) competentes:**

- Vocación
- Ser creativo
- Investigativo
- Solidario
- Persuasivo
- Respetuoso
- Motivador
- Conocimiento de la materia que enseña
- Actualizado
- Seguro de si mismo
- Dominio escénico
- Democrático
- Comprensivo

**Fracaso docente:**

Es la incapacidad que tiene un profesor, para impartir su materia, aceptar las correcciones, presentar un comportamiento adecuado frente a sus alumnos y compañeros de labor y no alcanzar los resultados propuestos.

**Competencia docente:**

- Conocimiento de la materia.
- Competencia pedagógica.
- Habilidades instrumentales y conocimiento de nuevos lenguajes.
- Características personales:

**Características de un buen docente:**

- Actualizar sus conocimientos sobre la asignatura.
- Preparar las clases.
- Motivar a los estudiantes.
- Utilizar diversos materiales y métodos para hacer las clases interesantes.
- Gestionar las clases considerando la diversidad de los estudiantes
- Mantener la disciplina y el orden.
- Ayuda a los estudiantes a ser independientes y a organizar su aprendizaje.
- Hacer trabajar a los estudiantes y ponerle niveles altos.
- Realizar una buena teoría y darle ejemplo.
- Interesarse por los estudiantes, preguntarle sobre lo que hacen e intentar ayudarles.
- Reconocer cuando cometen errores o se equivocan en algo.
- Investigar en el aula, aprender con otros estudiantes.
- Colaborar con las actividades de la institución.

Es aquel en que el estudiante partiendo de lo que necesita y es capaz, se apropia de los objetivos del proceso enseñanza, reconociendo sus limitaciones, se involucra en una actividad de estudio que lo lleva a interactuar con los demás y a tener una experiencia educativa y le permite reflexionar con su experiencia y se percata de que ya no es el mismo, de que ahora domina un aspecto nuevo de la realidad, que ha adquirido una capacidad, y completa el proceso de aprendizaje promoviendo el desarrollo humano.

El Pseudo – Aprendizaje es automático y memorístico, mientras que el aprendizaje autentico es la comprensión y dominio de un aspecto de la realidad.

**Competencias humanas y profesionales del docente:**

- Análisis histórico critico.
- Conciencia ética profesional.
- Investigación educativa.
- Planificación educativa estratégica.
- Interacción educativa.

- Evaluación de la efectividad del proceso enseñanza – aprendizaje.
- El análisis y la organización social del proceso educativo intra y extra escolar.

## V.8. PLANEAMIENTO DIDACTICO

La educación tiene la finalidad de formar al ser humano como persona capaz de actuar libre y responsablemente en la sociedad. Por supuesto que esta tarea implica una serie de actitudes, condiciones y capacidades, que conllevan a un compromiso personal de parte del docente.

Los (as) profesores (as) deben concebir esta etapa de planificación didáctica como un proceso metodológico y fundamental. El planeamiento debe ser el producto en que se resumen las acciones y decisiones previstas para el cumplimiento de las competencias, los indicadores de logro y los contenidos.

**¿Qué es el planeamiento didáctico?**

El planeamiento educativo es el proceso en el cual se analiza la situación, se prevén las necesidades en materia de educación, se formulan objetivos coherentes con la filosofía y la Política Educativa Nacional y se establecen los medios y secuencias de acciones indispensables para lograrlos.

El planeamiento es una actividad indispensable para el desarrollo de la enseñanza – aprendizaje, éste debe ser flexible y prever con anticipación el empleo de los materiales que permitirán lograr las competencias y los indicadores de logro.

El planeamiento didáctico es necesario porque evita la rutina, posibilita la reflexión previa sobre las distintas alternativas para desarrollar la tarea docente. Evita las improvisaciones y dudas que provoca el trabajo desordenando y poco eficaz; permite actuar con seguridad sobre la base prevista.

**El planeamiento debe poseer las siguientes características:**

- Flexible.
- Permanente.
- Preciso.
- Relevante
- Coherente.
- Pertinente.
- Prospectivo.
- Participativo.
- Funcional.

Es importante que los (as) profesores (as), antes de que concreten su planeamiento, se planteen algunas interrogantes que le aclaren sobre la mejor manera en que pueden desarrollar su práctica pedagógica de forma efectiva, para ello es necesario reflexionar sobre:

- ¿Qué está pasando?
- ¿Qué se quiere hacer?
- ¿Cómo se va a hacer?
- ¿Con quiénes se va a hacer y a quiénes va dirigido?
- ¿Con qué se va a hacer?
- ¿Cuánto tiempo se requiere para hacerlo?
- ¿Dónde lo realizará?
- ¿Cómo se evaluará?

De igual forma, al momento de planificar, el docente debe tomar decisiones y organizar su práctica pedagógica en cuanto a:

- ¿Qué enseñar?
- ¿Cuándo enseñar?
- ¿Cómo enseñar?
- ¿Qué evaluar?
- ¿Cómo evaluar?

Los elementos que se deben considerar en el planeamiento didáctico son las competencias, los indicadores de logro, los contenidos, las actividades, las técnicas de enseñanza, los recursos didácticos, las estrategias e instrumentos para evaluar.

## V.9. LA EVALUACION DE LOS APRENDIZAJES BASADOS EN COMPETENCIAS

Otro aspecto que debe tener en consideración los (as) profesores (as) al efectuar su planeamiento didáctico, es la evaluación de los resultados del aprendizaje, logrado por los (as) estudiantes y la calidad de la tarea realizada; para ello el (la) profesor (a) debe contemplar variadas estrategias e instrumentos para obtener juicios de valor.

La evaluación no debe ser tarea exclusiva de los docente, sino, que también los (as) estudiantes se deben involucrar.  Esto puede ser a través de la autoevaluación y la coevaluación, lo que les permitirá descubrir y corregir sus dificultades.

La evaluación debe ser continua y sistemática, lo que constituye una fuente importante de información para el estudiante y para el docente, por lo tanto, forma parte del proceso enseñanza – aprendizaje y permite detectar si se han logrado los resultados esperados y si están las condiciones necesarias para proseguir con el aprendizaje.

### ¿Qué entendemos por evaluación?

La evaluación de los aprendizajes es un componente del proceso educativo, a través del cual se observa, recoge y analiza información significativa, respecto de las posibilidades, necesidades y logros de los (as) estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor  tomar decisiones pertinentes y oportunas para el mejoramiento de su aprendizaje.

**¿Cuáles son las características de la evaluación?**

- Integral.
- Continua.
- Sistemática.
- Participativa.
- Flexible.

**¿Para qué se evalúa?**

Según el momento en que tiene lugar la evaluación y la finalidad con que se realiza, da lugar a una toma de decisiones distinta.

***La evaluación inicial o diagnóstica***: puede dar lugar a decisiones relacionadas a la planificación de un proceso didáctico. La evaluación diagnóstica se puede realizar en cualquier momento del proceso didáctico y puede servir de base para la adopción de decisiones relativas a la realización de actividades de apoyo, específicamente orientadas a la superación de problemas que presenten los (as) estudiantes, o bien en otros componentes de la enseñanza.

***La evaluación formativa o interactiva***: con naturaleza de seguimiento constante y personalizado, será un punto de partida para retomar algunas técnicas que propicien la motivación para la atención individualizada, establecer actividades que se desarrollen a través del trabajo colectivo y la modificación de estrategias didácticas.

***La evaluación sumativa***: la cual se realiza al final de cada corte o período educativo, da lugar a tomar decisiones para la promoción y certificación, o en caso contrario a la repetición; esta forma de evaluación contrasta fuertemente con la evaluación diagnóstica y la formativa, ya que mientras en éstas se toma en cuenta el proceso de enseñanza – aprendizaje, el ritmo de aprendizaje de los (as) estudiantes con la finalidad de evitar errores y fracasos en un momento, en que todavía se pueden realizar actividades alternativas de recuperación y que hacen que la evaluación sea auténtica, la evaluación sumativa en un momento determinado certifica un nivel y puede prescribir una repetición.

### Tipos de evaluación

Existen tres tipos básicos de evaluación:

- ***La Heteroevaluación***: Es la que realizan los agentes externos del proceso de aprendizaje, como el propio docente, otros miembros de la institución educativa y los padres de familia.
- ***La auto evaluación***: Cuando cada alumno hace una reflexión y Apreciación critica de sus aprendizajes, teniendo como referencia los indicadores de logro, considerados en la unidad didáctica que se esta autoevaluando.
- ***La coevaluación***: Es la apreciación de los desempeños que se hace entre pares (Alumno - Alumna) cuya finalidad es la de retroalimentarse mutuamente, para reconocer y precisar sus avances, logros, esfuerzos y meritos en relación a sus indicadores de logros previstos

### Acciones Para La Evaluación de Competencias

*Interpretar:*
Conlleva acciones de análisis que vinculan y confrontan los aspectos significativos que están en juego en el texto, proposición o esquema.

*Argumentar:*
Quiere decir, dar razón y explicación de las afirmaciones y propuesta, respetando la pertinencia y la coherencia esencialmente ligada a juegos de lenguajes determinados, y a formas de vidas especificas, la competencia argumentativa deber ser entendida como aquella acción propia del diálogo personal, de la interacción, donde se puede explica el punto de vista y ser escuchado y valorado.

*Proponer:*

No es más que manifestar una idea que deberá ser aprobada o refutada por los demás.

*Técnicas Para Desarrollar Competencias:*

Las estrategias de aprendizaje deben estar acompañadas de las técnicas y materiales que permitan un buen desarrollo de las capacidades del educando.

## VI. UNIDAD DIDÁCTICA: LOS NUMEROS NATURALES

### VI.1. COMPETENCIA DE PERIODO ESCOLAR. EDUCACION SECUNDARIA

| **Área: Matemática. Séptimo Grado**<br>**Componente: Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos** |
|---|
| **Competencias del III Ciclo**<br>• Utiliza elementos cualitativos y cuantitativos que le permiten planear, resolver, predecir, y comunicar resultados de problemas que ocurren en su entorno.<br>• Aplica el lenguaje y simbología matemática en diferentes situaciones de interacción comunicativa. |
| **Competencia de Grado**<br>• Plantea y resuelve problemas reales que requieren el uso de las operaciones con números naturales y sus propiedades. |
| **Indicadores de logro**<br>• Relaciona la utilidad de los números con la necesidad de cuantificar e interpretar el medio que le rodea y mejorar su calidad de vida.<br>• Compara, ordena y estima cantidades que representan situaciones de su vida cotidiana.<br>• Interpreta y aplica tipos de conjuntos en situaciones de su entorno escolar.<br>• Formula y resuelve problemas relacionados con su práctica cotidiana, haciendo uso de la estimación, el cálculo mental y escrito de las operaciones con números naturales y sus propiedades.<br>• Plantea y resuelve problemas donde aplican el Máximo Común Divisor (MCD) y el Mínimo Común Múltiplo (MCM).<br>• Determina el Máximo Común Divisor (MCD) y el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de varios números, para resolver problemas con números fraccionarios. |

**Contenidos**

El conjunto de los números naturales y sus operaciones

- Teoría de Conjunto:
  - Conjunto. Relación de pertenencia. Formas de determinar un conjunto. Relaciones entre conjuntos. Tipos de Conjuntos: Universal, unitario y vacío.
- Los Números Naturales:
  - Introducción
  - Los Números Naturales.
  - Valor posicional.
  - Relaciones de orden.
  - Operaciones: Adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales. Propiedades.
  - Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM)

## VI.2.MALLA DE COMPETENCIAS DE GRADO

**Educación Secundaria. Área: Matemática**

| Séptimo grado | Octavo grado | Noveno grado | Décimo grado | Undécimo grado |
|---|---|---|---|---|
| **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos.**<br>• **Plantea y resuelve problemas reales que requieren el uso de las operaciones con números naturales y sus propiedades.** | **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos.**<br>• Plantea y resuelve problemas donde utiliza las operaciones con números racionales y sus propiedades. | **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos.**<br>• Plantea y resuelve problemas aplicando las operaciones con números reales y sus propiedades. | **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos.** | **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos.** |
| • Plantea y resuelve problemas de su realidad donde aplica las operaciones con números decimales y sus propiedades. | • Plantea y resuelve problemas utilizando las operaciones con números reales y sus propiedades. | | | |
| • Formula y resuelve problema de su vida cotidiana, utilizando fracciones. | | | | |

| Séptimo grado | Octavo grado | Noveno grado | Décimo grado | Undécimo grado |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| • Plantea y resuelve problemas utilizando las operaciones con números enteros y sus propiedades. | | | | |

El área de Matemáticas pretende articular e integrar las capacidades, conocimientos, valores y actitudes de acuerdo con criterios psicológicos, pedagógicos y epistemológicos. Esta área pretende en mayor o menor intensidad, responder a las variadas relaciones que establece la persona: Consigo misma, con las demás, con su entorno y con el mundo del trabajo. En nuestro caso particular, la siguiente tabla resume: Las componentes del Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos y sus propósitos.

**Área: Matemáticas**

| ¿Cuáles son sus componentes? | ¿Cuáles son sus propósitos? |
|---|---|
| • **Pensamiento Numérico y Dominios Numéricos**<br>Se refiere a la comprensión de los números, las operaciones y sus propiedades, y la habilidad para utilizarlos al realizar juicios matemáticos, al desarrollar estrategias útiles, y en la formulación y resolución de problemas relacionados con su vida cotidiana. | 1. Darles oportunidad a los (as) estudiantes de pensar en los números y usarlos en contextos significativos.<br>2. Darle significado a los números como secuencia verbal, para contar, expresar una cantidad de objetos o cardinalidad, medir marcar una posición como ordinal, como código o símbolo, como una tecla para pulsar.<br>3. Desarrollar comprensión acerca de la relación entre el contexto del problema con temas relevantes para la vida y el cálculo necesario para su resolución.<br>4. Promover en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático. |

### VI.3. TEMPORIZACION DE LAS ACTIVIDADES

| UNIDAD DIDACTICA: LOS NÚMEROS NATURALES | | |
|---|---|---|
| **CONTENIDOS** | **ACTIVIDAD No.** | **TIEMPO PROBABLE** |
| Concepto de conjunto. Notación. Formas de determinar un conjunto. | 1 | 2 horas |
| Conjuntos finitos e infinitos. Relación entre conjuntos. Diagramas de Venn y lineales | 2 | 2 horas |
| Conjunto unitario. Conjunto Universal. Conjunto Vacío. Cardinalidad de un conjunto. | 3 | 2 horas |
| Introducción. Los Números Naturales. Valores posicionales. Orden en el conjunto de los números naturales. | 4 | 2 horas |
| Adición y sus propiedades. Sucesor. Antecesor. Sustracción. | 5 | 2 horas |
| Multiplicación y sus propiedades. División. | 6 | 2 horas |
| Divisibilidad. Definición. Criterios de divisibilidad. | 7 | 2 horas |
| Múltiplos. Divisores o factores. | 8 | 2 horas |
| Máximo Común Divisor | 9 | 2 horas |
| Mínimo Común Múltiplo | 10 | 2 horas |
| Evaluación | 11 | 2 horas |
| Total | | 22 horas |

## VI.4. ACTIVIDADES

Con la puesta en práctica de las actividades aquí planteadas nos proponemos que los (as) estudiantes alcancen las siguientes competencias:

1. Vincula conjuntos con su entorno y con situaciones de la vida real.
2. Comprenda la utilidad de los Números Naturales, en la resolución de problemas de la vida real.
3. Plantea y resuelve ejercicios y problemas, aplicando las operaciones con número naturales y sus propiedades.

### Actividad No. 1

**Tema**

Teoría de Conjunto

**Sumario**

1. Concepto de conjunto. Notación.
2. Formas de determinar un conjunto.

**Materiales**

1. Marcadores acrílicos.
2. Lapiceros.
3. Papel.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.
6. Guía de trabajo.

**Procedimiento**

1. Presentación del eje temático Dominios Numéricos: Competencias a desarrollar, contenidos, materiales a utilizar, actividades a desarrollar, formas de evaluación, etc.Formación de grupos.
2. Exposición del profesor acerca del desarrollo histórico de la teoría de conjunto.
3. Discusión y análisis de los contenidos: Concepto de conjunto y notación, formas de determinar un conjunto.
4. El profesor presentará en Papelógrafo una serie de proposiciones con el propósito de que los (as) estudiantes comprendan y formulen el concepto de conjunto.
6. El profesor orientará el procedimiento para resolver los ejercicios de la guía.
7. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
8. Entregar resuelto los ejercicios propuesto en la guía de trabajo.
9. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

**Desarrollo**

***A. EXPOSICION DEL PROFESOR***

***1. Introducción***

Aunque en la historia de la matemática, el concepto de conjunto (al menos en su consideración explícita y sistemática) aparece tardíamente (a fines del siglo XIX) desde hace muchos años se prefiere considerarlo como objetos primitivos de la matemática, esto es cierto en tanto lo aludimos aquí a los intentos de formalización total.

El concepto de conjunto es de fundamental importancia en las matemáticas modernas. Muchos matemáticos creen que es posible expresar todas las matemáticas con un lenguaje de teoría de conjuntos. Otra aplicación de la teoría de conjuntos la encontramos con el modelado e investigación de operaciones en las ciencias computacionales.

Los conjuntos fueron por primera vez formalmente estudiados por G. Cantor. Después de esto la teoría de conjuntos se ha convertido en un área muy bien establecida de matemáticas, contradicciones o paradojas que encontramos en dicha teoría. Eventualmente, los más sofisticados acercamientos al trabajo original de Cantor hicieron que dichas paradojas desaparecieran. Tratos introductorios de la teoría de conjuntos usualmente mostraban una "cándida" teoría de conjuntos, la cuál era bastante similar al trabajo original de Cantor, mejor dicho, se desarrollaban en el mismo marco teórico necesario para no caer en paradojas.

La teoría de conjuntos se encuentra en los fundamentos de la matemática que explícita e implícitamente, en todas sus ramas, utiliza conceptos de la citada teoría

La teoría de conjuntos puede fundarse en axiomas bien precisos, no obstante, en la enseñanza elemental, tomamos los conjuntos de pertenencia en su sentido intuitivo; los conjuntos o colecciones concretas sirven como referencias objetivas para la ejemplificación y los conjuntos propiamente matemáticos que interesan, se construyen a partir de conceptos muy simples que se suponen conocidas (como el de número natural), lo esencial es que cada conjunto que se mencione esté bien definido, es decir, que estén bien determinados los elementos que lo integran.

El trabajo a desarrollar mostrará la teoría de conjuntos desde un punto de vista muy amplio, sin adentrarnos al análisis profundo de las paradojas que se podrían presentar en el camino.

## *2. Concepto de conjunto. Notación.*

Presentar en Papelógrafo las proposiciones siguientes para que sean analizadas por los (as) estudiantes:

1. Los estudiantes del Séptimo Grado del Instituto España del municipio de Malpaisillo.
2. Los objetos que se encuentran en mi mochila.
3. Los vehículos que se encuentran estacionados en la parte este del Parque.
4. Los pupitres que se encuentran en el aula donde reciben clases los (as) estudiantes del Séptimo Grado del Instituto España del municipio de Malpaisillo.

5. Las fichas por autor de los libros que se encuentran en la biblioteca del Instituto España del municipio Malpaisillo.
6. Los números 1, 2 y 3.
7. Los números naturales mayores que 20.
8. Los números naturales.

En base al análisis y mediante la técnica de lluvia de ideas, inducir a los (as) a que formulen el concepto de conjunto.

Estas expresiones son nombre de agrupaciones o colecciones de objetos cualesquiera que vamos a denominar simplemente conjunto. En una nueva lectura debemos añadir al inicio de cada una de las expresiones dadas, la frase "El conjunto de...".

El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de la matemática. Intuitivamente, un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos, objeto que como vimos en las expresiones anteriores pueden ser cualesquiera: números, personas, letras, ríos, etc. Estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Podemos decir que matemáticamente un conjunto está bien definido cuando contamos con un medio efectivo de saber si dado un objeto cualquiera, éste es elemento o no del conjunto en cuestión.

Notemos que los conjuntos de los ejemplos impares vienen definidos, o sea, presentados, enumerando de hecho sus elementos, y que los conjuntos de los ejemplos pares se definen enunciando propiedades, o sea reglas que deciden si un objeto particular es o no elemento del conjunto.

¿Cómo representamos a los conjuntos y a los elementos de un conjunto?

Representaremos los conjuntos por letras mayúsculas del alfabeto español:

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z$$

Los símbolos de conjuntos A, B, etc. representarán conjuntos cualesquiera bien determinados o no determinados según el caso.

Debemos de tener presente que cualquier objeto incluso un conjunto puede ser elemento de un conjunto; nuestro trabajo consistirá sobre objetos que pueden ser o no conjuntos.
Representaremos los elementos de un conjunto por letras minúsculas del alfabeto:

a, b, c, ... , x, y, z

Podemos introducir otros signos o nombres tomados de algún lenguaje ordinario para denotar individuos que son elementos de un conjunto, así, por ejemplo, los elementos del conjunto de los números naturales que denotaremos por **N** recibirán como nombres los signos usuales:

1, 2, 3, ..., etc.

En conclusión, podemos decir que:

> **"Un conjunto es una colección de objetos que se agrupan mediante algunas características en común y que solo aparecen una sola vez"**

Otras formas de definir un conjunto son las siguientes:

- Es una colección bien definida de objetos o cosas, donde, bien definida significa distinguir con claridad los elementos que forman parte del conjunto.
- Son colecciones, agrupaciones o reuniones de elementos a los cuales identificamos por tener propiedades en común.
- Es una colección de objetos; en los que a cada uno de los objetos que componen un conjunto se le denomina elemento de un conjunto.

¿Qué símbolo utilizamos para indicar que un elemento es miembro o pertenece a un conjunto dado? ¿Qué símbolo utilizamos para indicar que un elemento no es miembro o no pertenece a un conjunto dado?

Para representar que un elemento "a" pertenece al conjunto "A" se aplica el símbolo de pertenencia $\in$. Se utiliza $a \in A$, que se lee: "a" pertenece a "A", y se conoce como relación de pertenencia, señala la relación entre elementos y conjuntos exclusivamente. Si un elemento no pertenece a un conjunto se denota por $\notin$, por ejemplo si b no pertenece a A se expresará como b $\notin$ A, que se lee: b no pertenece a A o bien b no es elemento de A.

Presentarle a los (as) estudiantes en un Papelógrafo la tabla siguiente, con el fin de mediante flechas asocie las partes correspondientes:

| Conjuntos | Elementos | Pertenencia |
|---|---|---|
| D = Días de la semana | m = mayo | l $\in$ D |
| M = Meses del año | l = lunes | m $\in$ M |
| **N** = Números Naturales | n = $\sqrt{5}$ | n $\notin$**N** |
| **Z** = Números Enteros | n = 2 | n $\in$ **Z** |

| Conjuntos | Elementos | Pertenencia |
|---|---|---|
| D = Días de la semana | m = mayo | n $\notin$**N** |
| M = Meses del año | l = lunes | m $\in$ M |
| **N** = Números Naturales | n = $\sqrt{5}$ | l $\in$ D |
| **Z** = Números Enteros | n = 2 | n $\in$ **Z** |

Entonces se puede decir que el símbolo $\in$ se utiliza para comparar o relacionar un conjunto respecto de un elemento y nos permite relacionar la pertenencia o no, de un elemento en un conjunto. ***No es correcto utilizar este símbolo para comparar dos conjuntos si no que exclusivamente para relacionar elementos respecto de un conjunto.***

### *3. Formas de determinar un conjunto.*

Las formas de determinar un conjunto:

1. Enumerando todos los elementos del conjunto (solo se puede hacer si el conjunto es finito)

2. Por medio de una propiedad característica de los elementos que forman a ese conjunto, esta propiedad puede expresarse de forma ordinaria o utilizando alguna simbología lógica.
3. Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas latinas, los elementos se colocan entre llaves, por ejemplo:

   A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

   B = {a, v, e, s}

   **N** = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... } = { Los números naturales }

Sin embargo, existen formas más formales para describir el contenido de un conjunto como son los siguientes:

Para determinar la forma de describir cómo han de agruparse los conjuntos comúnmente se utilizan dos formas: la ***forma tabular*** y la ***forma constructiva***.

**(a) Forma Tabular o extensiva**

Es cuando el conjunto es determinado por extensión (o enumeración), cuando se da una lista que comprende a todos los elementos del conjunto y sólo a esos elementos.

**Ejemplos**

A = { a, e, i, o, u }

B = { 0, 2, 4, 6, 8 }

C = { c, o ,n , j, u, t, s }

D = {A, B, E, C, D, R, I, O}

**Nota**

Cuando un elemento aparezca varias veces lo consideramos una sola vez.

Por ejemplo, { 1, 2, 1 } = { 1, 2 }.

**(b) Forma constructiva o por compresión**

Es cuando un conjunto es determinado por comprensión, o sea cuando se da una propiedad que la cumpla para todos los elementos del conjunto.

**Ejemplos**

A = { x : x es número entero}

B = { x : x es un número par menor que 10}

C = { x : x es una letra de la palabra conjuntos}

D = {x : x es una mujer de nacionalidad mexicana }

E = {x : x es color básico}

A continuación mostramos un cuadro comparativo de cómo describir dos conjuntos mediante la forma tabular o extensión y la forma constructiva o por compresión.

**CUADRO COMPARATIVO**

| POR EXTENSIÓN | POR COMPRENSIÓN |
|---|---|
| A = { a, e, i, o, u } | A = { x : x es una vocal } |
| B = { 0, 2, 4, 6, 8 } | B = { x : x es un número par menor que 10} |
| C = {1, 3, 5, 7, 9 } | C = { x : x es un número impar menor que 10 } |
| D = { c, o, n, j, u, t, s} | D = { x : x es una letra de la palabra conjuntos } |
| E = { b, c, d, f, g, h, j, .. . } | E = { x : x es una consonante } |
| F = { Laura, Javier } | F = {x : x es médico y esta en la clase} |
| G = {mercurio} | G = {x : x es un metal líquido } |

***B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE L@S ESTUDIANTES***

***Guía de trabajo***

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.

(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicio hasta lograr comprenderlo e interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo el procedimiento a seguir en la resolución de cada ejercicio.

***Ejercicios***

1. Defina un mismo conjunto mediante dos propiedades distintas.

2. Sea B = { -1, 0, 1, 2 }. Coloque el símbolo de pertenencia o no pertenencia en el espacio en blanco.

| | | |
|---|---|---|
| (a) 0 ___ B | (b) -1 ___ B | (c) { 0 } ___ B |
| (d) 5 ___ B | (e) 3 ___ B | (e) { -1, 0 } ___ B |

3. Cite cinco ejemplos de conjuntos vinculado a su entorno.

4. Escriba en forma tabular los siguientes conjuntos:
   (a) A = { x : x es una consonante de la palabra Morazán }
   (b) B = { x : x es un número natural par }
   (c) C = { x : x es una vocal de la palabra vocal }
   (d) D = { x : x es un entero para positivo entre 1 y 11 }
   (e) E = { x : x es un nombre que comienza con la letra M y x está en el séptimo grado del Instituto España }
   (f) F = { x : x es un número natural y x es un múltiplo de cinco que no exceda a 31 }

5. Escriba en forma descriptiva los siguientes conjuntos:
   (a) A = { 5, 10, 15, 20, 25 }
   (b) B = { -4, -3, -2, 0, 1, 2 }
   (c) C = { 1, 8, 27, 64 }

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en el desarrollo de la actividad.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de la guía de trabajo.
4. En la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo, evaluar presentación, coherencia, orden lógico, dominio cognitivo.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad estudiaremos los siguientes contenidos: Conjuntos finitos e infinitos. Relación entre conjuntos.

## Actividad No. 2

**Tema**

Teoría de Conjunto

**Sumario**

1. Conjuntos finitos e infinitos.
2. Relación entre conjuntos.
3. Diagramas de Venn y lineales.

**Materiales**

1. Marcadores acrílicos.
2. Lapiceros.
3. Papel.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.
6. Guía de trabajo.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor acerca de los contenidos a estudiar.
3. Discusión y análisis de los contenidos: Conjunto finito e infinito. Relación entre conjunto y Diagramas de Venn y lineales.
4. El profesor orientará el procedimiento para resolver los ejercicios de la guía.
5. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
6. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.

7. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

**DESARROLLO**

***A. ESPOSICION DEL PROFESOR***

***1. Conjuntos finitos e infinitos***

Los conjuntos pueden ser finitos e infinitos. Intuitivamente un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los elementos el proceso de contar puede acabar. Si no, el conjunto es infinito. Posteriormente daremos una definición más precisa de conjuntos finito e infinito.

**Ejemplos**

(a) Si M es el conjunto de los días de la semana, entonces M es un conjunto finito.

(b) Si N = { 2, 4, 6, 8, ... }, entonces N es un conjunto infinito.

(c) Si P = { x : x es un río de la Tierra }, entonces P es un conjunto finito aunque sea difícil contar los ríos de la Tierra.

***2. Relación entre conjunto***

Consideren los siguientes conjuntos:

A = { Estudiantes de séptimo grado del Instituto España }

B = { Estudiantes Mujeres de séptimo grado del Instituto España }

C = { Estudiantes Varones de séptimo grado del Instituto España }

¿Qué relaciones puede establecer entre los elementos del conjunto B y C con el conjunto A?

En base a las respuestas de los (as) estudiantes inducirlo a que formulen la siguiente:

**Definición** (Inclusión de conjuntos)

Se dirá que A está incluido en B, si y sólo si, todo elemento de A es elemento de B.

Escribimos, $A \subseteq B$ y decimos que

A es subconjunto de B,

A es una parte de B,

B es superconjunto de A, o sea,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

**Ejemplos**

(a) Sean: M = {Sócrates, Aristóteles}

N = {Sócrates, Platón, Aristóteles}

De acuerdo a la definición, tenemos $M \subseteq N$, pero N no es subconjunto de M, ya que existe un elemento de N (Platón) que no está en M.

(b) Sean: $A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, 8, ... \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ... \}$

Aquí tanto A como B son subconjuntos de C.

**Nota**

(a) $A \subseteq B$ no excluye $A = B$

(b) La negación de $A \subseteq B$ se escribe $A \not\subseteq B$ y se lee: "A no está incluido en B" o "A no es subconjunto de B" o "A no es una parte de B". En este caso, existe un elemento de A que no es elemento de B.

**Definición** (Igualdad de conjuntos)

Se dirá que A es igual a B, lo cual se denota por "A = B" si y sólo si se cumple que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

De otra manera, podemos decir que A es igual a B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento de A está en B y cada elemento de B está en A.

**Ejemplos**

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 1, 4, 2\}$. Entonces, $A = B$; es decir, $\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$, pues cada uno de los elementos de A pertenecen a B y cada uno de los elementos de B pertenecen a A. Obsérvese, por tanto, que un conjunto no cambia al reordenar sus elementos.

**Definición** (Subconjunto Propio)

Se dirá que A es un subconjunto propio de B o A es una parte propia de B, lo cual denotamos por $A \subset B$ si, y solo si, $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

**Ejemplos**

(a) El conjunto de los números naturales (**N**) es una parte propia del conjunto de los números enteros (**Z**), y se escribe: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$)

(b) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$ pero **N** no es una parte propia de **N**.

(c) $A = \{ 1, 2 \}$ es un subconjunto propio de $B = \{ 1, 2, 3 \}$. Es decir, $A \subset B$.

(d) $A = \{ a, b \}$ no es una parte propia de $A = \{ a, b \}$.

**Definición** (Comparabilidad de conjuntos)

Dos conjuntos A y B son comparables si $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Esto es, si uno de los conjuntos es subconjunto del otro.

En cambio,

A y B conjuntos cualesquiera se dicen no comparables si y sólo si $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$.

Nótese que si A no es comparable con B, entonces hay en A un elemento que no está en B y hay también en B un elemento que no está en A.

**Ejemplos**

(a) Sean A = { a, b } y B = { a, b, c }. Entonces A es comparable con B, puesto que $A \subseteq B$.

(b) Si C = { a, b } y D = { b, c, d }, entonces C y D no son comparables puesto que $a \in C$ y $a \notin D$ y $c \in D$ y $c \notin C$.

### *4. Diagramas de Venn y lineales*

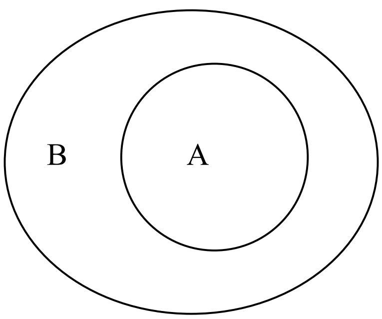
El matemático y lógico británico, John Venn (1834 – 1923) es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos. Los diagramas de Venn permiten, además, una comprobación de verdad o falsedad de un silogismo. Entre sus obras destaca Lógica Simbólica y los principios de la lógica empírica o inductiva. Sin embargo, también fue importante la participación de Euler en la esquematización de las representaciones de algunas operaciones.

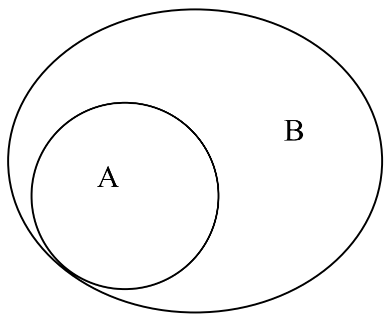
Cada conjunto de elementos se encuentra encerrado dentro de un circulo, o figura geométrica, y estos a su vez están encerrados dentro de otra figura, por lo general está es un rectángulo, se pueden dibujar cada elemento del conjunto o bien solo se puede indicar su existencia. Los diagramas de Venn son una buena herramienta, que nos permite realizar las operaciones entre los diversos conjuntos del universo de una forma más sencilla.

Ilustraremos de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos mediante los diagramas de Venn - Euler o de Venn simplemente, que representan un conjunto con un área plana por lo general delimitada por un círculo.

**Ejemplo**

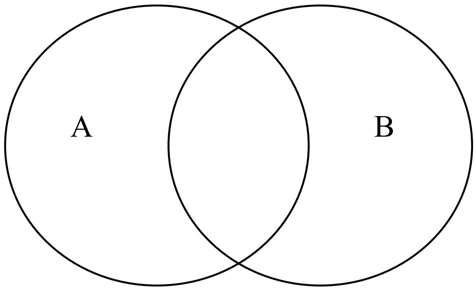
Supóngase $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Entonces A y B se describen como uno de los diagramas que a continuación se ilustran



**Ejemplo**

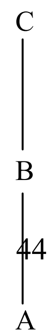
Si A y B no son comparables se les puede representar por el diagrama siguiente:



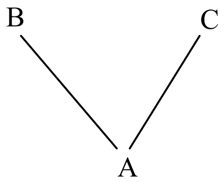

Otra manera útil e instructiva para ilustrar las relaciones entre conjuntos es el empleo de los llamados diagramas lineales.

Si $A \subseteq B$, entonces se escribe B más arriba que A y se les conecta por un segmento, a como se muestra en el siguiente diagrama

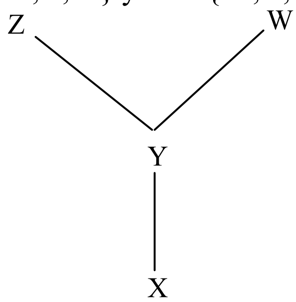

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces su representación lineal es



Sean A = { 1 }, B = { 3 } y C = { 1, 3 }. El diagrama lineal de A, B y C es:




Sean X = { m }, Y = { m, n }, Z = { m, n, o } y W = { m, n, p }. Aquí el diagrama lineal de X, Y, Z y W es:




## *B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE L@S ESTUDIANTES*

### *Guía de trabajo*

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.

(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicio hasta lograr comprenderlo e interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo el procedimiento a seguir en la resolución de cada ejercicio.

### *Ejercicios*

1. De cinco ejemplos de:

   (a) Conjunto finito.

   (b) Conjunto infinito.

2. Sean los siguientes conjuntos de figuras del plano euclidiano.

A = { x : x es un cuadrilátero }

B = { x : x es un rombo }

C = { x : x es un rectángulo }

D = { x : x es un cuadrado }

(a) Decir qué conjuntos son subconjuntos de los otros.

(b) Ilústrelo mediante un diagrama lineal.

3. ¿Tiene todo conjunto un subconjunto propio?

4. Si E = { 0, 1 }, decir entre los enunciados siguientes, cuáles son verdaderos o cuáles son falsos ?

| | |
|---|---|
| (a) ____ $\{ 0 \} \in E$ | (b) ____ $\{ 0 \} \subseteq E$ |
| (c) ____ $0 \in E$ | (d) ____ $0 \subseteq E$ |

5. Dado A = { 2, { 4, 5 }, 4 }, ¿ qué afirmaciones son incorrectas y por qué ?

| | | |
|---|---|---|
| (a) $\{ 4, 5 \} \subseteq A$ | (b) $\{ 4, 5 \} \in A$ | (c) $\{ \{ 4, 5 \} \} \subseteq A$ |
| (d) $5 \in A$ | (e) $\{ 5 \} \in A$ | (f) $\{ 5 \} \subseteq A$ |

6. Sea $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Suponiendo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, y además $d \notin A$, $e \notin B$, $f \notin C$, ¿cuáles afirmaciones son ciertas?

| | | |
|---|---|---|
| (a) $a \in C$ | (b) $b \in A$ | (c) $c \notin A$ |
| (d) $d \in B$ | (e) $e \notin A$ | (f) $f \notin A$ |

7. Sean:

A = { 2, 3, 4 }

B = { – 2, 2 }

C = { – 4, 2 }

D = { 2, 4, 6, 8, 10 }

Completar las siguientes afirmaciones, insertando $\subseteq$, $\supseteq$, o "no" (no comparables) entre cada par de conjuntos.

(a) A ..... B (b) A ..... C (c) A ..... D (d) B ..... D (e) C ..... D

8. Establezca mediante diagrama de Venn y lineal la Comparabilidad de los conjuntos siguientes:

   M = { Estudiantes del séptimo grado del Instituto España }

   N = { Estudiantes varones del séptimo grado del Instituto España }

   O = { Estudiantes mujeres del séptimo grado del Instituto España }

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en el desarrollo de la actividad.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de la guía de trabajo.
4. En la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo, evaluar presentación, coherencia, orden lógico, dominio cognitivo.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad estudiaremos los siguientes contenidos: Conjunto unitario, conjunto universal, conjunto vacío y cardinalidad de un conjunto.

## Actividad No. 3

**Tema**

Teoría de Conjunto

**Sumario**

1. Conjuntos unitario.
2. Conjunto universal.
3. Conjunto vacío.
4. Cardinalidad de un conjunto.

**Materiales**

1. Marcadores acrílicos.
2. Lapiceros.
3. Papel.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.
6. Guía de trabajo.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor acerca de los contenidos a estudiar.
3. Inducir a los (as) estudiantes a que formulen la definición de conjunto unitario, conjunto universal y vacío.

4. Discusión y análisis del tema: Cardinalidad de un conjunto.
5. El profesor orientará el procedimiento para resolver los ejercicios de la guía.
6. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
7. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.
8. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

## DESARROLLO

### *A. EN CONJUNTO PROFESOR - ESTUDIANTES*

#### *1. Conjunto unitario*

Exprese en forma tabular los conjuntos siguientes:

(a) $\{ x \in \mathbf{N} : x + 1 = 2 \}$

(b) { x : es una consonante de la palabra “Malpaisillo” }

(c) $\{ x \in \mathbf{N} : 2x - 1 = 5 \}$

(d) { x : es una vocal de la palabra “llama” }

¿Cuáles de los conjuntos dados constan de un solo elemento? ¿Qué nombre reciben dichos conjuntos? Defina dicho conjunto.

**Definición** (Conjunto Unitario)

Es todo conjunto que está formado por sólo un elemento.

**Ejemplos**

$A = \{ 1 \}$

B = {x : x es la solución de $x + 1 = 0$ }

C = { Números pares entre 2 y 6 } = { 4 }

D = { La capital de Costa Rica } = { San José }

E = { Números pares entre 2 y 6 } = { 4 }

F = { La capital de Nicaragua }

## *2. Conjunto Universo*

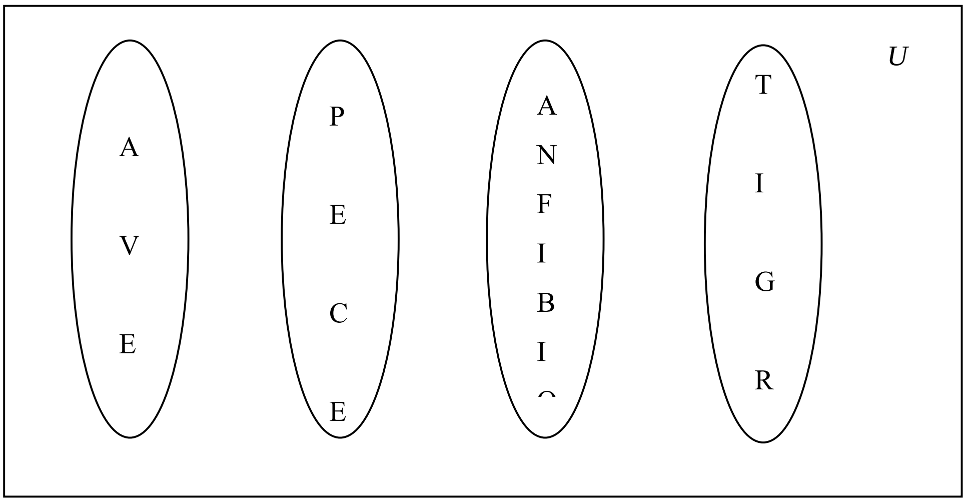
1. Consideremos los conjuntos siguientes:

   A = { aves}   B = { peces }   C = { anfibios }   D = {tigres}

¿Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos A, B, C y D?  ¿Cuál es?  ¿Qué nombre recibe?  Represéntelo mediante diagrama de Venn.

El conjunto que contiene a los conjunto A; B, C y D es el conjunto de todos los animales, es nuestro conjunto universo, y se denota por *U*: *U* = { animales }

Mediante diagrama de Venn estos conjuntos los podemos representar de la manera siguiente:

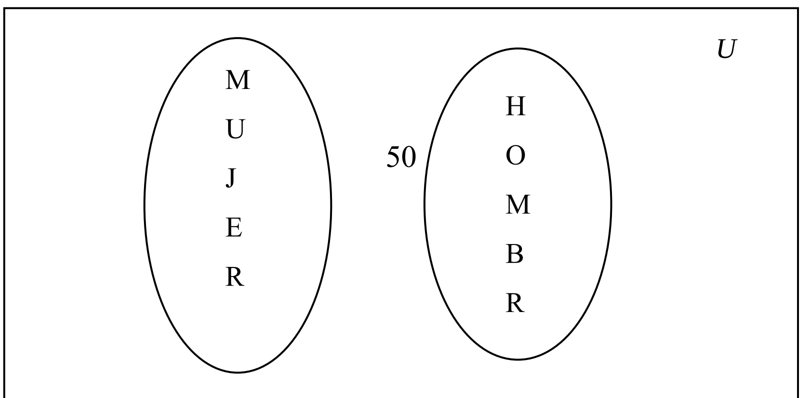



2. Sean los conjuntos:

   E = { mujeres }   F = { hombres }

¿Cuál es el conjunto universo?  *U* = { seres humanos }.  Represéntelo mediante un diagrama de Venn.

Gráficamente se representa por un rectángulo tal como se observa a continuación.



3. En base a las conclusiones obtenidas en 1. y 2., formule la definición de conjunto universo.

**Definición** (Conjunto Universal)

Es el conjunto que contiene a todos los elementos del Universo. Se le denota por la letra U. El universo lo forman el conjunto de conjuntos que intervienen.

**Ejemplos**

(a) En geometría plana el conjunto universal es el de todos los puntos del plano.

(b) En los estudios sobre población humana el conjunto universal es el de todas las personas que habitan en el mundo.

### *3. Conjunto Vacío*

Sea **N** el conjunto de los números naturales. Considérese los siguientes subconjuntos de **N**:

$A_1$ : Conjunto de los números naturales pares.

$A_2$ : Conjunto de los números naturales impares.

$A_3$ : Conjunto de los números naturales pares divisibles por 2.

$A_4$ : Conjunto de los números naturales impares divisibles por 2.

¿Cuál es el conjunto universo? En este caso, si no vamos a considerar otros números más que los números naturales, entonces **N** puede ser considerado como el conjunto universal o universo de discurso. De los cuatro conjuntos dados, ¿cuál de ellos carece de elementos? ¿Qué nombre recibe? ¿Sabe cómo se representa ese conjunto? Nótese que $A_4 = \Phi$ ya que no hay ningún impar que sea divisible por 2, luego, esta propiedad es una de las tantas que definiría a $\Phi$ con respecto a $U = \mathbf{N}$.

**Definición** (Conjunto Vacío)

Es un conjunto que carece de elementos. Se suele llamarle conjunto nulo, y se le denota por el símbolo Φ o { }

**Ejemplo**

| | | |
|---|---|---|
| A = { Las personas que vuelan } | A = { } | A = Φ |
| B = { x : x es verde y azul } | B = { } | B = Φ |

Sin embargo, Φ mantiene una relación muy importante con cualquier conjunto. Φ es subconjunto de cualquier conjunto. De esto podemos dar la prueba siguiente.

$$\Phi \subseteq A, \text{ Para todo A.}$$

### *4 Cardinalidad de un conjunto*

### *Conjuntos Equivalentes*

Cuando los elementos de un conjunto se corresponden con los de un segundo conjunto de modo que cada elemento de cada conjunto tenga uno, y solo uno, asociado en el otro conjunto, decimos que hay una correspondencia uno a uno entre ambos conjuntos.

**Definición**

Dos conjuntos que se pueden poner en correspondencia uno a uno entre sí, se dice que son equivalentes. Si A es equivalente a B, se escribe A ~ B.

**Ejemplo**

Sean S = { a, b, c, d } y T = { ∧, ?, 0, + }. Estos dos conjuntos son equivalentes puesto que podemos hacer corresponder en forma uno a uno los elementos de un conjunto con los del otro.

Todos estamos familiarizados con el conjunto ordenado de los números naturales, **N** = {1, 2, 3,4, ... } y el conjunto ordenado de los número enteros no negativos W = {0, 1, 2, 3, 4, ... }.

Contar es el proceso por el cual podemos en correspondencia los elementos de un conjunto con algún subconjunto propio de **N**, comenzando con 1 y usando los elementos de **N** en orden y sin saltar ninguno. Un subconjunto así se llama subconjunto estándar de **N**.

**Ejemplo**

El subconjunto estándar de **N**, {1, 2, 3, 4} es equivalente a S = {a, b, c, d}; decimos entonces que S tiene cuatro elementos. Esto lleva a la definición siguiente:

**Definición**

Cuando un conjunto S se equipara con un subconjunto estándar de N, el último elemento de **N** usado se llama cardinalidad del conjunto S y se denota por n (S).

**Ejemplo**

Si S = {a, b, c, d }, entonces n (S) = 4.

**Definición**

La cardinalidad del conjunto vacío (ϕ) es n (ϕ) = 0.

Tenemos que construir esta definición por separado, puesto que 0∉**N** y, por tanto, no tiene sentido hablar de equiparar elementos que no existen.

La cardinalidad del conjunto { 3 } es 1, ya que { 3 } se puede equiparar con { 1 }. Es decir que el conjunto { 3 } tiene un miembro. Similarmente, la claridad del conjunto { 0 } es 1. Hay que estar seguro de que entendemos la diferencia entre { } y { 0 }.

## *B. RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS (AS) ESTUDIANTES*

***Guía de trabajo***

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.
(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicios hasta lograr interpretarlo.
(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

***Ejercicios***

1. Diga si son falsas o verdaderas los siguientes enunciados:

   (a) ____ $\Phi \subseteq \{ \Phi \}$  (b) ____ $\Phi \in \Phi$

   (c) ____ $\Phi \in \{ \Phi \}$  (d) ____ $\Phi \subseteq \Phi$

2. Entre los conjuntos siguientes, $\Phi$, $\{ 0 \}$, $\{ \Phi \}$, ¿cuáles son diferentes ?

3. ¿Cuál de estas palabras es distinta de las otras y por qué? (1) vacío, (2) cero, (3) nulo.

4. De cinco ejemplos de:
   (a) Conjunto unitario.
   (b) Conjunto vacío.

5. Formulen tres situaciones de la vida real en que esté inmerso el conjunto universal.

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en el desarrollo de la actividad.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de la guía de trabajo.
4. En la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo, evaluar presentación, coherencia, orden lógico, dominio cognitivo.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad iniciaremos el estudio de los Números Naturales.

## Actividad No. 4

**Tema**

Los Números Naturales.

Sumario

1. Introducción.
2. Los Números Naturales.
3. Valores posicionales.
4. Orden en el conjunto de los números naturales.

**Materiales**

1. Papelógrafo.
2. Marcadores permanentes.
3. Marcadores acrílicos.
4. Lapiceros.
5. Papel.
6. Guía de trabajo.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor acerca del surgimiento del Conjunto de los Números Naturales.
3. Exposición del profesor acerca del tema: Valores posicionales y el orden en **N**.

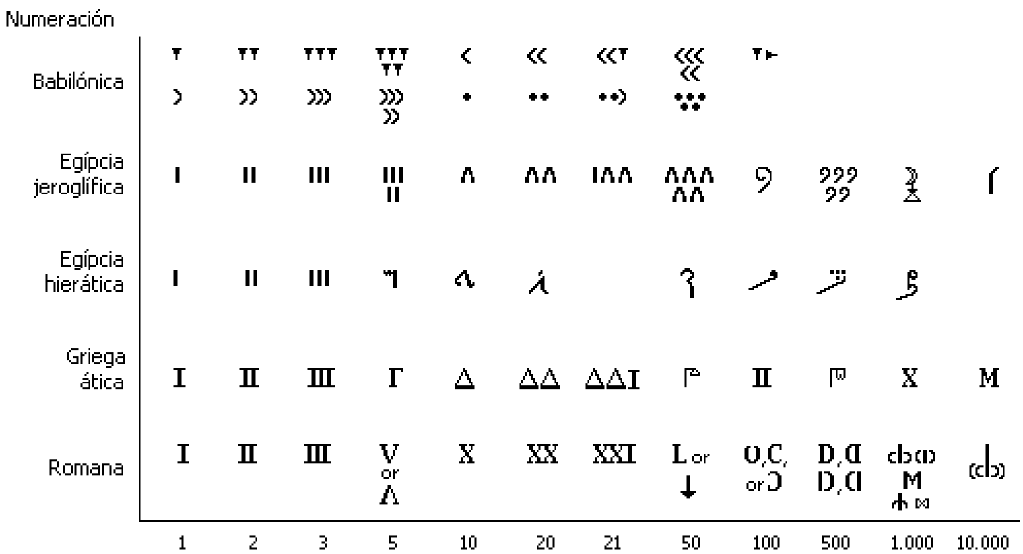
4. El profesor orientará el procedimiento para resolver los ejercicios de la guía.
5. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
6. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.
7. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

## DESARROLLO

### *A. EXPOSICION DEL PROFESOR*

### *1. Introducción*

Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.




Las primeras referencias a matemáticas avanzadas y organizadas datan del tercer milenio a.C., en Babilonia y Egipto. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos y sin mención de conceptos matemáticos como los axiomas o las demostraciones.

Los primeros libros egipcios, escritos hacia el año 1800 a.C., muestran un sistema de numeración decimal con distintos símbolos para las sucesivas potencias de 10 (1, 10, 100...), similar al sistema utilizado por los romanos. Los números se representaban escribiendo el símbolo del 1 tantas veces como unidades tenía el número dado, el símbolo del 10 tantas veces como decenas había en el número, y así sucesivamente. Para sumar números, se sumaban por separado las unidades, las decenas, las centenas... de cada número. La multiplicación estaba basada en duplicaciones sucesivas y la división era el proceso inverso.

## *2. El conjunto* **N** *de los Números Naturales*

Uno de los primeros conjuntos de números al que nos enfrentamos es el conjunto de los *Números Naturales* (**N**); esto es, el conjunto de **N** = {1, 2, 3, 4, 5, … }. Dicho conjunto de números ha sido muy importante para la humanidad, por lo que el matemático Alemán Leopold Kronecker (1823 – 1891) dijo una vez. “Dios creó a los números naturales, lo demás es obra del hombre”.
Los números naturales surgen de la necesidad de contar, de enumerar.

Los números naturales son usados para dos propósitos fundamentalmente: para describir la posición de un elemento en una secuencia ordenada, como se generaliza con el concepto de ordinal, y para especificar el tamaño de un conjunto finito, que a su vez se generaliza en el concepto de cardinal.

### *Definiciones no matemáticas de los números naturales*

1. Definición de Números: Son símbolos con los cuales se busca indicar una cantidad, estos símbolos según datos históricos comienzan en el antiguo Egipto y la Mesopotamia, no se sabe dónde, cuándo, ni por quién, pero fueron inventados por el hombre, al observar la

gran cantidad y variedad de elementos que hay en la naturaleza. Surgió entonces la necesidad e inquietud matemática.

Empezaron los antiguos a clasificar los elementos que tenían a su alrededor: árboles, frutas, animales, etc. Y luego los enumeraron: 2 árboles, 3 manzanas, 5 rocas, etc. Fue así como de esta relación de orden y clasificación surgió el concepto de número abstracto y de allí surge la matemática.

2. Definición de Natural: Según el diccionario Larousse se refiere a la naturaleza y también al originario de un lugar, ahora bien según Mirtha Elías K. en su libro Matemática de 7mo Grado, Pág. 9 Capítulo I, dice que natural es algo cotidiano y se usa casi sin advertirlo.

3. Por qué es un Numero Natural: Según Mirtha Elías K. todo se encuentra en la naturaleza por eso los números naturales se llaman así, porque los usamos en forma natural casi sin advertirlo.

4. Enrique Navarro en su libro Matemática de 7mo Grado, Pág. 16, los define como el conjunto de los números enteros positivos, entendiéndose por entero todo numero no decimal, ni fraccionario y como positivo todo numero que se ubica a la derecha del cero en la recta real.

Los números naturales lo podemos clasificar en:

*Números Pares* = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... }, los cuales se pueden representar algebraicamente como 2n. ¿Por qué? Por ser todos ellos múltiplos de 2. Observa que todos podrían escribirse del siguiente modo:

$2 \cdot 1$,

$2 \cdot 2$,

$2 \cdot 3$,

$2 \cdot 4$,

$$2 \cdot 5,$$
$$2 \cdot 6, \ldots$$
o sea, $2 \cdot n$.

*Números Impares* = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ... } ¿Cómo se representan algebraicamente? Lo haremos por $2n - 1$.

Veamos:

$$1 = 2 \cdot 1 - 1,$$
$$3 = 2 \cdot 2 - 1,$$
$$5 = 2 \cdot 3 - 1,$$
$$7 = 2 \cdot 4 - 1,$$
$$9 = 2 \cdot 5 - 1, \ldots$$
o sean, $2 \cdot n - 1$

Estas representaciones algebraicas las utilizaremos permanentemente, no las olvides.

### 3. Valores posicionales

Los números naturales usualmente se escriben en una forma estándar. Por ejemplo: 3548, 304 y 42 son números naturales representados en esa forma. ¿Sabe que significa realimente 3548? Puede averiguarlo simplemente leyendo el numero, así: “Tres mil, quinientos, cuarenta y ocho”. También puede usarse los numerales, para escribir el numero en la forma, 3(miles) + 5(cientos) + 4(dieces) + 8(unos) o bien 3 x 1000 + 5 x 100 + 4 x 10 + 8 x 1. Esto es 3548 puede escribirse en forma desarrollada como

| Lugar de las unidades de millar | Lugar de las centenas | Lugar de las decenas | Lugar de las unidades |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 4 | 8 |
| $3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8$ | | | |

La posición de una cifra indica el valor de dicha cifra en función de los valores exponenciales de la base. En el sistema decimal, la cantidad representada por uno de los diez dígitos utilizados –0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9- 3– depende de su posición en el número completo. Por ejemplo, el número 3,098,323 es la representación de $(3 \times 10^6) + (0 \times 10^5) + (9 \times 10^4) + (8 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0$, o $3 \times 1)$. El primer 3 (empezando por la derecha) representa 3 unidades; el segundo, 300 unidades y el tercero, 3 millones de unidades.

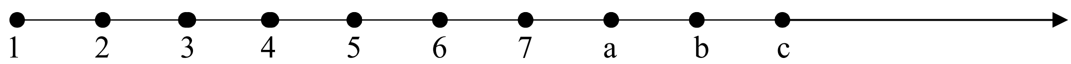
Dos dígitos –0 y 1– son suficientes para representar un número en el sistema binario; 6 cifras –0, 1, 2, 3, 4 y 5– se necesitan para representar un número en el sistema sextil y 16 guarismos –0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (diez), B (once), C (doce) ... y F (quince)– son necesarios en el sistema hexadecimal. El número 30.155 en el sistema en base 6 es igual al número $(3 \times 6^4) + (0 \times 6^3) + (1 \times 6^2) + (5 \times 6^1) + (5 \times 6^0) = 3.959$ en el sistema decimal. El número 2EF del sistema hexadecimal es el número $(2 \times 16^2) + (14 \times 16^1) + (15 \times 16^0) = 751$ en el sistema decimal.

### *4. Orden en el conjunto de los números naturales*

Es posible establecer una correspondencia entre los números naturales y los puntos de un rayo de la siguiente manera.

Dado un rayo, se asocia su origen con el número real uno (1) y otro punto a la derecha del uno para representar el dos (2). Luego dividimos todo el rayo en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de uno a dos, para así representar los números naturales.

Gráficamente,




Para el caso de los números naturales a, b y c, se tiene que a está a la izquierda de b y c, por lo que establecemos que a es menor que b y menor que c; y, escribimos: $a < b$ y $a < c$, también, lo podemos expresar como $b > a$ y $c > a$. También, observamos que b está entre a y c, y escribimos $a < b < c$.

El símbolo "<" representa la relación "menor que" y el símbolo ">" representa la relación "mayor que".

## *B. RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS (AS) ESTUDIANTES*

***Guía de trabajo***

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.

(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicios hasta lograr interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

***Ejercicios***

1. Escriba en forma estándar y en forma desarrollada los siguientes números naturales:
   (a) Quince mil trescientos cuarenta y siete.
   (b) Ochocientos cuarenta y seis mil setecientos ochenta y nueve.
   (c) Tres millones quinientos treinta y cinco mil doscientos tres.

2. Problema resuelto

En la miscelánea de la esquina el queso está a C$ 50 el kilo, mientras que en el negocio del frente está a C$ 60. ¿Dónde está más barato el queso?

**Solución**

Para determinar dónde está más barato el queso hay que decidir que número es menor entre 50 y 60.

Como 50 es menor que 60, entonces el queso está más barato en el supermercado de la esquina.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que decidir cuál de los dos números es menor, 50 ó 60.

**Operaciones:**

El menor entre 50 y 60 es 50.

**Respuesta:**

En la miscelánea de la esquina el queso está más barato.

3. Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:

(a) El procedimiento.

(b) La operación con su resultado.

(c) La respuesta del problema.

Problema 1:

Cristián se demoró 12 minutos en llegar hoy al colegio en cambio ayer se había demorado 15 minutos. ¿Qué día se demoró menos, ayer u hoy?

Problema 2:

Al partido de beisbol de la semana pasada asistieron 1500 fanáticos, mientras que al encuentro de esta semana fueron 1670 fanáticos. ¿Cuándo asistieron más hinchas, la semana pasada o esta semana?

4. Problema resuelto:

Tres hermanas tienen las siguientes edades: Valeria 2 años, Marcela 8 años y Florencia 6 años. ¿Cuál es la hermana del medio?

**Solución**

La hermana del medio es aquella cuya edad está entre las edades de las otras dos. Como 6 está entre 2 y 8, entonces Florencia es la hermana del medio.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que ver cuál de los tres números: 2, 8 y 6, está entre los otros dos.

**Operaciones:**

6 está entre 2 y 8.

**Respuesta:**

Florencia es la hermana del medio.

5. Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:

(a) El procedimiento.

(b) La operación con su resultado.

(c) La respuesta del problema.

Problema 1:

Las tías de Verónica son: María de 38 años, Julia de 45 años y Pilar de 24 años. ¿Cuál de las tías de Verónica es la más joven?

Problema 2:

En una competencia de salto largo, Sandra saltó 325 cm.; Andrea saltó 280 cm. y Ana saltó 295 cm. ¿Cuál de las tres ganó?

6. Realiza los siguientes ejercicios:
   (a) Entre 1500 y 1490 el mayor es
   (b) Entre 2280 y 2820 el menor es
   (c) Entre 819, 368, 775. el número menor es
   (d) Entre 18980 53661, 11189, el número mayor es

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en el desarrollo de la actividad.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de la guía de trabajo.
4. En la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo, evaluar presentación, coherencia, orden lógico, dominio cognitivo.

**Autopreparación**

El siguiente trabajo realizarlo fuera de clase en grupo de cinco estudiantes. Este trabajo entregarlo por escrito en la próxima sesión de clase.

I. Investiga quince acontecimientos históricos más relevantes de nuestro país, Nicaragua, y ordénalo por orden cronológico.

II. Construyan una línea de tiempo.

III. Conversa con tu grupo sobre el paso del tiempo y sobre las unidades que usamos para medirlo y sus equivalencias.

**Orientación de la próxima clase**

En la siguiente actividad iniciaremos el estudio de las operaciones sobre el conjunto de los números naturales y sus propiedades.

## Actividad No. 5

**Tema**

Operaciones sobre el conjunto **N** de los Números Naturales

**Sumario**

1. Adición. Propiedades.
2. Sustracción.
3. Sucesor. Antecesor

**Materiales**

1. Guía de trabajo.
2. Marcadores acrílicos.
3. Papelógrafo.
4. Marcadores permanentes.
5. Papel.
6. Lapiceros.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Discutir en conjunto profesor – estudiantes dos problemas resueltos acerca de la adición para que los (as) estudiantes comprendan dicha operación y sus

propiedades. A continuación el profesor hará una síntesis de las conclusiones obtenidas.

3. Discutir en conjunto profesor – estudiantes un problema resuelto acerca de la sustracción de números naturales con el propósito de que los (as) comprendan dicho concepto. A continuación el profesor hará una síntesis de las conclusiones obtenidas.
4. Discutir en conjunto profesor – estudiantes dos problemas resueltos acerca de los conceptos de sucesor y antecesor con el propósito de que los (as) comprendan dichos conceptos. A continuación el profesor hará una síntesis de las conclusiones obtenidas.
5. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
6. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.
7. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

**DESARROLLO**

***1. Adición de números naturales y sus propiedades***

***A. EN CONJUNTO PROFESOR - ESTUDIANTES***

**Problemas resueltos:**

1. Pablo ha ahorrado $12,000 durante el año y acaba de recibir $3,500 por un trabajo. ¿Cuánto dinero tiene en total?

**Solución**

Pablo tiene en total los $12,000 que tenía ahorrados más los $3,500 que acaba de recibir. Como 12,000 más 3,500 son 15,500, entonces en total tiene $15,500.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que calcular la suma de 12,000 y 3,500

**Operaciones:**

12,000 + 3,500 = 15,500

**Respuesta:**

Pablo tiene en total \$15,500

2. Los cuatro hijos de doña Marta formaron una sociedad, a la que aportaron las siguientes cantidades: C\$250,000, \$100.000, C\$200,000 y C\$320,000. ¿Qué capital juntaron los hijos de doña Marta?

**Solución**

El capital que juntaron es la suma de las cantidades que aportaron cada uno de los hijos. Como la suma de 250,000, más 100,000 más 200,000 más 320,000 es 870,000, entonces juntaron C\$870,000 entre todos.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que sumar las cuatro cantidades que se indican.

**Operaciones:**

250,000 + 100,000 + 200,00 + 320,000 = 870,000

**Respuesta:**

Entre todos los hermanos juntaron un capital de C\$870,000

En base a los problemas resueltos, conteste:

(a) ¿La suma de dos o más números naturales es siempre un número natural? ¿Cómo se llama la operación cuando cumple esa propiedad?

(b) En el segundo problema, ¿conoce la propiedad que se utilizó para sumar dichas cantidades?

## *B. SINTESIS DEL PROFESOR*

### *1. Adición*

**Definición**

Dados dos números naturales a y b, existe y es único un número natural, denotado a + b, llamado suma de a y b.

Si existe un conjunto y una operación tales que para cualquier par de elementos del conjunto combinado por esta operación el resultado es siempre un elemento del conjunto principal, se dice entonces que el conjunto es cerrado conforme la operación dada. En este caso, se dice que la operación adición es una operación totalmente definida.

***Propiedades de la Adición***

Cualesquiera que sean los números naturales a, b y c, se cumple:

1. *Conmutatividad:*

   a + b = b + a

Por ejemplo,

(a) 3 + 5 = 5 + 3; (b) 7 + 21 = 21 + 7

2. *Asociativa:*

   a + (b + c)= (a + b) + c

Por ejemplo,

(a) 12 + (5 + 7) = (12 + 5) + 7;

(b) 13 + 15 + 17 + 19 = (13 + 15) + (17 + 19) = 28 + 36 = 64

## *2. Sustracción de Números Naturales*

## *A. EN CONJUNTO PROFESOR - ESTUDIANTES*

**Problemas resueltos:**

La señora Clara va a pagar la factura de agua de C$ 364 con un billete de C$ 500. ¿Cuánto vuelto deben darle?

**Solución**

Deben darle la diferencia entre los C$ 500 con que pagó y los C$ 364 que debe cancelar. Como 500 menos 364 es 136, entonces deben darle C$ 136 de vuelto.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que restar 500 menos 136.

**Operaciones:**

500 – 136 = 136

**Respuesta:**

Deben darle C$ 136 de vuelto.

En este caso, el minuendo es mayor que el sustraendo, pero ¿qué sucede si el minuendo es menor que el sustraendo? o ¿el minuendo es igual al sustraendo?

### *B. SINTESIS DEL PROFESOR*

La resta o diferencia de dos números naturales es un número natural siempre y cuando el minuendo es mayor que el sustraendo; si el minuendo es igual o menor que el sustraendo se dice que la sustracción es una operación parcialmente definida.

En general,

$$a - b = x \text{ siempre y cuando } x + b = a,$$

cualesquiera que sean a y b números naturales.

Además,

- $a - b \notin \mathbf{N}$ si $a < b$;
- $a - b \notin \mathbf{N}$ si $a = b$.

## *3. Sucesor y Antecesor de un número natural*

### *3.1. Sucesor de un número natural*

**Problema resuelto**

Tomás llegó del campo el 15 de Junio y al día siguiente entró a clases. ¿En qué fecha entró a clases Tomás?

**Solución**

Tomás entró a clases al día siguiente del 15 de Junio y como el siguiente de 15 es 16, entonces Tomás entró a clases el 16 de Junio.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que calcular el número siguiente de 15.

**Operación y resultado:**

El siguiente de 15 es 16.

**Respuesta:**

Tomás entró a clases el 16 de Marzo

¿Cómo obtuvo el siguiente o el sucesor de 15?

En general,

Si $n \in \mathbf{N}$, entonces el siguiente o sucesor de n, el cuál se representa por s(n) es $s(n) = n + 1$

### *3.2. Antecesor o anterior de un número natural*

**Problema resuelto**

En el verano del 2,006, Juan fue de vacaciones a Poneloya. El año anterior había viajado a San Juan del Sur con su novia ¿En qué año viajó a San Juan del Sur?

**Solución**

Juan viajó a San Juan del Sur el año anterior al año que fue de vacaciones a Poneloya. Como el número anterior a 2,006 es 2,005, entonces Juan viajó a San Juan del Sur 2,005.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que calcular el número anterior a 2,006.

**Operación y resultado:**

El anterior a 2,006 es 2,005.

**Respuesta:**

Juan viajó al sur el año 2,005.

¿Cómo obtuvo el anterior o antecesor de 2,006?

En general,

Si $n \in \mathbf{N}$, entonces el anterior o antecesor de n, es $n - 1$

## *C. RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS (AS) ESTUDIANTES*

### *Guía de trabajo*

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.

(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicios hasta lograr interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

1. Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:
   (i) El procedimiento.
   (ii) La operación con su resultado.
   (iii) La respuesta del problema.

Problema 1:
Eulogio es un hombre muy generoso, todas las semanas le da C$1,200 a un hombre muy pobre y C$500 a una humilde anciana. ¿Cuánto dinero regala Eulogio a la semana?

Problema 2:
El hobby de Ricardo es juntar monedas de distintos lugares del mundo. Su colección está formada por 18 monedas españolas, 25 italianas, 13 alemanas, 9 francesas, 83 holandesas y 19 suizas. ¿Cuántas monedas posee en total Ricardo?

Problema 3:
Antonio, Pedro y Mario son tres hermanos que desean hacer un regalo a su madre. Si aportan C$ 1,719, C$ 1,512 y C$ 3,135 respectivamente, ¿con cuánto dinero cuentan para el regalo?

Problema 4:

Matías nació en enero del 2,000 y Juan nació en enero de 1,991. ¿Qué diferencia de edad tienen?

Problema 5:

En una librería, al comienzo del día había 13,500 artículos de oficina. Si a la hora de cerrar sólo quedaban 2,519, ¿cuántos artículos se vendieron en el día?

**Problema resuelto** (Suma y resta)

Enrique compró una bebida de C$ 28, una bolsa de papas fritas de C$ 35, un tarro de café de C$ 45 y un paquete de galletas de C$ 17. Si pagó su compra con un billete de C$ 500, ¿cuánto le darán de vuelto?

**Solución**

Deberán darle la diferencia entre los C$ 20.000 del billete y la suma total de la compra. Como la suma de 28 más 35 más 45 más 17 es 125 y como 500 menos 125 es 375, entonces le darán C$ 375 de vuelto.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

En primer lugar hay que sumar 28, más 35, más 45, más 17. Luego hay que restarle el resultado anterior a 500.

**Operaciones:**

28 + 35 + 45 + 17 = 125;

500 – 125 = 375

**Respuesta:**

Le darán C$ 375 de vuelto.

Problema 6:

Juan Pablo ganó este mes C$ 4,500 por unas clases y C$ 3,250 por otro trabajo. Si gastó C$ 2,317 en salir un fin de semana y C$ 632 en un regalo de cumpleaños. ¿Cuánto dinero le queda?

Problema 7:

Camilo fue la estrella de su equipo en el último partido de fútbol en que ganaron 13 goles contra 5. El hizo todos los goles salvo 4 que hizo Raúl y 3 que hizo Matías. ¿Cuantos goles convirtió Camilo?

Problema 8:

Verónica tiene 16 años. ¿Cuántos años tendrá el próximo año en esta fecha?

Problema 9:

Javiera nació un año antes que Gabriela. Si Gabriela nació el año 1978 ¿Qué año nació Javiera?

**Problema resuelto**

Enrique quiere comprar un equipo de música que cuesta C$ 25,000 y solo tiene ahorrado C$ 15,000. En el verano trabajó y ganó C$ 13,000. Entre comida y diversión gastó C$ 7,000. ¿Le alcanzará el dinero para comprar el equipo?

**Solución**

El dinero que logra juntar Enrique equivale a los C$ 15,000 que tenía más los C$ 13.000 que ganó menos los C$ 7,000 que gastó, esto es C$ 21,000. Como 21,000 es menor que 25,000, entonces no le alcanzará el dinero para comprar el equipo.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

En primer lugar hay que calcular 15,000 más 13,000 menos 7,000 y luego ver si el resultado es mayor o igual que 25,000.

**Operaciones:**

$15,000 + 13,000 – 7,000 = 21,000$

$21,000 < 25,000$

**Respuesta:**

No le alcanzará para comprar el equipo.

Problema 11:

Marta recibió dos regalos de C$ 5,000 y C$ 15,000 para su cumpleaños y tuvo que pagar una deuda de C$ 4,000 que tenía con una amiga. ¿Le alcanzará a Marta para comprarse un televisor que cuesta C$ 9,500?

Problema 12:

El papa de Ana María le ofreció C$ 100,000 para hacer su fiesta de cumpleaños y ella tenía ahorrado C$ 25,000. Si tiene que gastar C$ 85,000 en comida y bebida, ¿le alcanzará para la música que cuesta C$ 20,000?

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en el desarrollo de la actividad.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de la guía de trabajo.
4. En la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo, evaluar presentación, coherencia, orden lógico, dominio cognitivo.

**Autopreparación**

El siguiente trabajo realizarlo fuera de clase en grupo de cinco estudiantes. Este trabajo entregarlo por escrito en la próxima sesión de clase.

**Distancia entre ciudades**

I. Investigue las distancias que hay de Managua a las cabeceras de los departamentos que se encuentren al norte de ella, ubíquela en una línea de kilometraje.

II. Investigue las distancias que hay de Managua a las cabeceras de los departamentos que se encuentren al sur de ella, ubíquela en una línea de kilometraje.

III. Calcule la distancia de León a Chinandega.

IV. Calcule la distancia de Granada a San Juan del Sur.

V. Si Posoltega está a cuatro kilómetro de Chinandega, ¿a qué distancia está de León?

VI. Construya una tabla de doble entrada donde se muestren las distancias que hay desde Managua a cada una de las cabeceras departamentales que se encuentran al norte y al sur de ella.

**Orientación de la próxima clase**

En la siguiente actividad concluiremos las operaciones sobre el conjunto **N** de los números naturales, estudiando Multiplicación y sus propiedades, así como la división.

## Actividad No. 6

**Tema**

Operaciones sobre el conjunto **N** de los Números Naturales

**Sumario**

1. Multiplicación. Propiedades.
2. División.

**Materiales**

1. Guía de trabajo.
2. Marcadores acrílicos.
3. Papelógrafo.
4. Marcadores permanentes.
5. Papel.
6. Lapiceros.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Discutir en conjunto profesor – estudiantes los temas a desarrollar en esta actividad.
3. Aclaración de dudas surgidas en el desarrollo de la actividad.
4. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.
5. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

**DESARROLLO**

***1. Multiplicación***

**Definición**

Dados dos números naturales a y b, existe y es único un número natural, denotado a·b, o simplemente ab, llamado producto de a y b.

***Propiedades de la Multiplicación***

Cualesquiera que sean los números naturales a, b y c, se cumple:

1. *Conmutativa*

$a + b = b + a$

Por ejemplo, $15·7 = 7·15$

*2. Asociativa*

$a·(b·c)= (a·b)·c$

Por ejemplo, $23·12 =12·23$

3. *Identidad*

Existe 1 (número natural) tal que $a·1 = 1·a = a$

Por ejemplo, $15·1 = 15$

Existe una propiedad que relaciona las operaciones de multiplicación respecto a la adición.

4. *Distributividad de la multiplicación respecto a la adición:*

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Por ejemplo, $12 \cdot (3 + 5) = 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5$

Hasta el momento podemos establecer que la adición y multiplicación están totalmente definidas. En cambio, la sustracción y división están parcialmente definidas.

### *3. División*

En cada una de las siguientes divisiones, diga cuáles tienen solución en el conjunto de los números naturales. Justifique su respuesta.

(i) $32 \div 5$

(ii) $120 \div 12$

(iii) $257 \div 1$

(iv) $325 \div 25$

(v) $173 \div 19$

(vi) $280 \div 14$

En base a los resultados obtenidos, podemos aseverar que la operación división de números naturales está parcialmente definida.

En general,

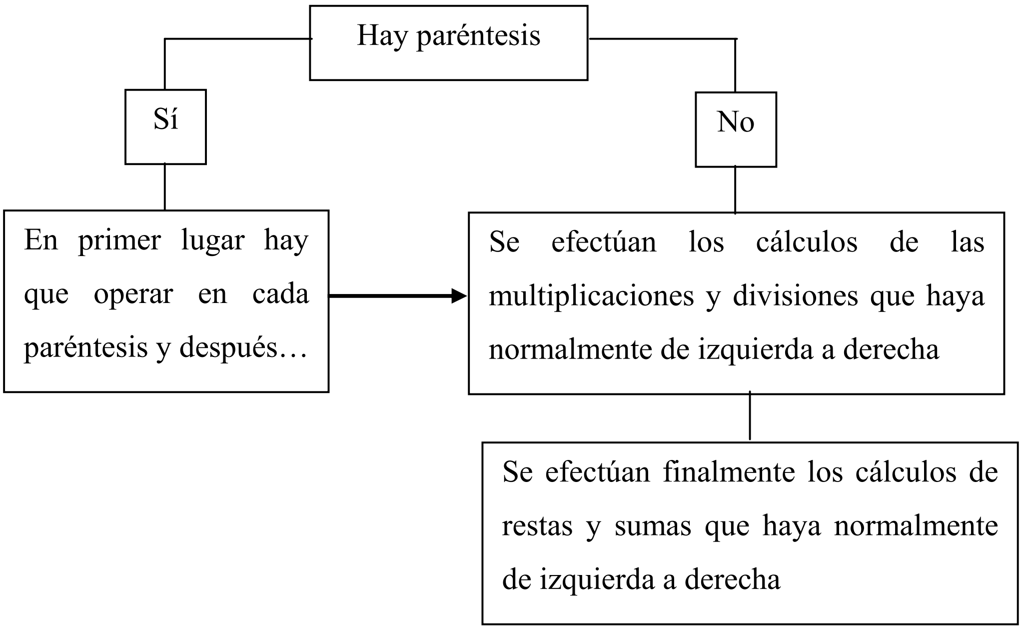
$$a \div b = x \text{ siempre y cuando } a = b \cdot x$$

### *4. Orden jerárquico de las cuatro operaciones*

¿Qué entendemos por jerarquía? Cita ejemplos.

En ocasiones nos vemos en la situación de resolver un problema en el que intervienen varias operaciones y no sabemos por donde iniciar.

El siguiente diagrama resume cual es el orden a seguir al efectuar operaciones combinadas.




**Ejercicio resuelto**

Resolver: 8 x (4 + 12) + 3 x (7 – 2)

**Solución**

8 x (4 + 12) + 3 x (7 – 2) = 8 x 16 + 3 x 5 = 128 + 15 = 143

## *B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE L@S ESTUDIANTES*

***Guía de trabajo***

Antes de procede a resolver los ejercicios que se plantean en la guía de trabajo, debe tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor.

(b) Leer cuantas veces sea necesario cada ejercicio hasta lograr interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros el procedimiento a seguir en la resolución de cada ejercicio.

**Ejercicios**

1. Resuelva:

   (a) $16 + 8 \div 4$

   (b) $8 \times (4 + 12) + 3 \times (7 - 2) - (25 \div 5)$

   (c) $3 \times (4+12) - 26$

   (d) $4 \times 7 + 8 \times 6 + 78 \div 39$

   (e) $(26 - 4) \div 2 + 5$

   Compara tu respuesta con la de tus compañeros. ¿Se obtiene el mismo resultado? ¿Qué relaciones usaste primero? ¿Por qué?

2. En equipo de trabajo interpreta y resuelve las siguientes operaciones. Sigue el orden indicado.
   - A cinco agrega la multiplicación de 12 con 3 y al resultado resta trece.
   - Multiplica 16 con 8, resta 16 y divide entre 8.
   - Al cociente entre 121 y 11 multiplícalo por 22 y resta 23.
   - Al producto de 18, 13 y 16 reta 42 y suma 45.
3. Redacta 5 ejercicios en los que intervengan varias operaciones y se muestre en el orden en que se realiza las operaciones.

4. Redacta 5 ejercicios en el que se realicen operaciones combinadas y cumplan las siguientes condiciones.
   - Dos sumas, dos multiplicaciones y el resultado sea 28.
   - Una suma, una resta, dos divisiones y el resultado esté entre 25 y 30.
   - Intervenga un par de divisiones, dos restas, el resultado sea cero y no se repiten números.

5. Entre 100 personas se reparte un cierto número de fichas azules, blancas y rojas. 45 personas reciben fichas rojas, otras 45 reciben fichas blancas, 60 personas reciben fichas azules, 15 reciben tanto rojas como blancas, 25 reciben blancas y azules, 20 reciben rojas y azules y 5 reciben de los tres colores. ¿Cuántas personas no reciben fichas?

   (a) 5 (b) 8 (c) 15 (d) 30 (e) 50

6. Si a y b son números naturales impares, entonces es (son) siempre un número par:

I. $a + b$ II. $a - b$ III. $a \cdot b$ IV. $a + 1$

(a) Sólo I (b) Sólo II y IV (c) Sólo I y IV

(d) Sólo III y IV (e) Sólo I, III y IV

7. Un hotel de cuatro pisos tiene 48 habitaciones. En el segundo piso hay una habitación más que en el primero y en el tercero hay una habitación más que en el cuarto. Si en el cuarto piso hay 13 habitaciones, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) FALSA(S)?

I. Hay tantas habitaciones en el segundo piso como en el tercero.

II. Hay tantas habitaciones en el cuarto piso como en el primero.

III. En el primer piso hay 10 habitaciones.

(a) Sólo I (b) Sólo II (c) Sólo III

(d) Sólo I y II (e) I, II y III

8. ¿Cuántos días demoró una persona en caminar 102 Km., si el primer día caminó 12 Km. y cada uno de los días siguientes caminó 2 Km. más que el día anterior?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

9. Requerimientos de calorías.

Los requerimientos de calorías, por edad y sexo son los siguientes:

| EDAD | VARONES | MUJERES |
|---|---|---|
| 11 a 14 años | 2500 Kcal | 2200 Kcal |
| 15 a 18 años | 3000 Kcal | 2200 Kcal |

Se tiene la siguiente tabla donde figuran las calorías de algunos alimentos:

| **ALIMENTO** | **Kcal** | **ALIMENTO** | **Kcal** |
|---|---|---|---|
| 1 taza de leche entera | 160 | ½ taza de acelgas cocidas | 22 |
| 1 taza de leche descremada | 100 | ½ taza de acelgas crudas | 5 |
| 1 yogur con fruta | 165 | ½ taza de arvejas | 78 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 yogur con sabor | 148 | 1 vaso mediano de néctar | 49 |
| 1 huevo | 79 | ½ taza de brócolis cocidos | 25 |
| 1 trozo carne de cazuela | 158 | 1 vaso de jugo | 75 |
| 1 trozo de posta | 135 | 1 porción de repollo crudo | 25 |
| 1 pieza de pollo con piel | 176 | 1 porción de zanahoria | 38 |
| 1 pieza de pollo sin piel | 120 | 1 tomate | 30 |
| 1 hamburguesa asada | 286 | 1 papa mediana | 105 |
| 1 alcachofa | 78 | 1 trozo de pescado | 79 |
| 1 flan | 170 | 1 trozo de pizza | 180 |
| 1 porción de papas fritas | 220 | 1 helado | 180 |
| 1 plato de fideos | 200 | 1 vaso mediano de sprite | 35 |
| 1 vaso de coca cola | 40 | 1 vaso mediano de fanta | 42 |
| 1 plato de crema de espárragos | 200 | 1 pan regular | 192 |
| 4 galletas de soda | 115 | 1 durazno | 33 |
| 1 barra de chocolate de 30 gr | 151 | 1 plátano mediano | 100 |

Responde las siguientes preguntas, en base a los datos expresados en la tabla anterior.

(i). Si Juan Pablo consumió, a la hora de almuerzo, los siguientes alimentos:

(a) Un plato de crema de espárragos.

(b) Un tomate, con dos cucharaditas de aceite.

(c) Una pieza de pollo con piel.

(d) Una porción de papas fritas.

(e) Un vaso de coca cola.

¿Cuántas calorías consumió?

(ii) Magdalena almorzó:

(a) Un plato de tallarines.

(b) Un huevo.

(c) Un yogur con frutas.

(d) Un vaso de fanta.

(iii) Alberto desayunó:

(a) Una taza de leche entera con dos cucharaditas de azúcar.

(b) Un pan con margarina y mermelada.

(c) Un vaso de jugo.

En cambio, su hermana desayunó:

(a) Una taza de leche descremada con dos cucharaditas de azúcar.

(b) Un yogur con sabor.

(c) Un huevo.

¿Cuál de los dos hermanos consumió más calorías?

(iv) Escribe un menú a tu gusto, para un día completo (desayuno, almuerzo y cena) y cuyo total de calorías corresponda a los requerimientos calóricos de la tabla según sexo y edad.

(v) Discute con tus compañeros acerca de la importancia de la alimentación, tanto para la salud como para la estética.

10. Costos. Precios. Ganancias.

Don Tomás tiene una crianza de pollos, patos, pavos y conejos angora. Para ordenar su negocio, construyó el siguiente cuadro, en el que figura el número de animales de cada especie que tiene en su parcela, el costo de crianza y el precio de venta por unidad; pero, le faltó colocar (os precios por el total de cada especie.

| **ESPECIE** | **TOTAL DE UNIDADES EN EXISTENCIA POR ESPECIE** | **COSTO DE CRIANZA POR UNIDAD** | **PRECIO DE VENTA POR UNIDAD** | **COSTO TOTAL DE CRIANZA POR ESPECIE** | **PRECIO TOTAL DE VENTA POR ESPECIE** |
|---|---|---|---|---|---|
| Pollo | 4785 | 580 | 830 | | |
| Pato | 867 | 784 | 950 | | |
| Pavo | 543 | 3245 | 4530 | | |
| Conejo angora | 245 | 432 | 1230 | | |

(i) Complete el cuadro anterior

(ii) Complete los espacios en blanco con las frases: “valen más que”, “valen menos que” o “valen lo mismo que”:

130 pollos ______ 125 patos

234 patos ______ 50 pavos

100 patos ______ 78 conejos

19 pollos ______ 17 patos

50 pollos y 10 pavos ______ 40 y 35 conejos

125 pollos y 70 patos ______ 25 pavos y 32 conejos

12 pavos y 33 conejos ______ 6 pavos y 105 pollos

(iii) Complete el siguiente cuadro

| **ESPECIE** | **TOTAL DE UNIDADES EN EXISTENCIA POR ESPECIE** | **COSTO DE CRIANZA POR UNIDAD** | **PRECIO DE VENTA POR UNIDAD** | **COSTO TOTAL POR LA CRIANZA DEL TOTAL DE LA ESPECIE** | **GANANCIA TOTAL POR ESPECIE** |
|---|---|---|---|---|---|
| Pollo | 4785 | 350 | 830 | | |
| Pato | 867 | 717 | 950 | | |
| Pavo | 543 | 540 | 4530 | | |
| Conejo angora | 245 | 120 | 1230 | | |

(iv) Conteste las siguientes preguntas

(a) ¿Cuál fue el gasto total invertido en la crianza de todas las especies?

(b) ¿Cuánto dinero se recibió por todas las ventas?

(c) ¿Cuál fue la ganancia total?

(d) ¿Cuánto dinero habría recibido si hubiese vendido todas las unidades en existencia?

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Entregar en la próxima actividad los ejercicios 9 y 10, resueltos.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad daremos inicio al estudio de los Números Enteros.

## Actividad No. 7

**Tema**

Divisibilidad en **N**.

**Sumario**

1. Definición
2. Criterios de divisibilidad.

**Materiales**

1. Guía de trabajo.
2. Lapiceros.
3. Papel blanco.
4. Marcadores acrílicos.
5. Marcadores permanentes.
6. Papelógrafo.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor.
3. Discutir en conjunto profesor – estudiantes los ejercicios resueltos de divisibilidad.
3. Resolución de los ejercicios propuestos en la guía de trabajo.
4. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
5. Orientación del profesor en la resolución de los ejercicios propuestos.
6. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

## DESARROLLO

### *A. EXPOSICION DEL PROFESOR*

### *1. Divisibilidad*

**Definición**

Sean $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$. Se dice que **a** *es divisible por* **b** si al dividir a por b, se tiene como cociente un número natural q, y como residuo 0

**Ejemplo**

Determine si 72 es divisible por 6.

**Solución**

Al realizar la división de 72 por 6 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 72 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 12 \\ \cline{1-1} 12 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|}
\hline
-12 \\
\hline
0
\end{array}$$

El residuo es 0 y el cociente es 12 (un número natural). Por lo tanto 72 es divisible por 6.

**Ejemplo**

Determine si 37 es divisible por 5.

**Solución:**

Al realizar la división de 37 por 5 tenemos que

$$\begin{array}{r|l}
37 & 5 \\
\cline{2-2}
-35 & 12 \\
\cline{1-1}
2 & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

El residuo es 2 y el cociente es 7 (un número natural); al se el residuo diferente de cero, 37 no es divisible por 5.

**Ejemplo**

Determine si 135 es divisible por 7.

**Solución**

Al realizar la división de 135 por 7 tenemos que

$$\begin{array}{r|l}
135 & 7 \\
\cline{2-2}
-7 & 19 \\
\cline{1-1}
65 & \\
-63 & \\
\cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

El cociente es 19 y el residuo es 2, al ser el residuo diferente de 0, 135 no es divisible por 7.

**Ejemplo**

Determine si 51 es divisible por 3.

**Solución:**

Al realizar la división de 51 por 3 tenemos que

$$\begin{array}{r|l}
51 & 3 \\
\cline{2-2}
-3 & 17 \\
\cline{1-1}
21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|}
\hline
-21 \\
\hline
0
\end{array}$$

El cociente es 17 y el residuo es 0; por lo tanto, 51 es divisible por 3.

## 2. *Algunos criterios de divisibilidad*

De acuerdo con el concepto de divisibilidad estudiado anteriormente se tiene que para determinar si un número entero a es divisible por un número natural b, debe realizarse la división de a por b. Si el residuo que se obtiene al realizar esta división es cero, entonces **a** *es divisible por* **b**. Si este residuo es diferente de cero entonces **a** *no es divisible por* **b**. Este procedimiento resulta ser un poco largo cuando las cantidades consideradas son "muy grandes". A continuación enunciaremos algunos criterios de divisibilidad que nos permitirán determinar, en forma abreviada, algunos casos en que un número entero **a** *es divisible por un número natural* **b**.

Para los criterios que siguen entenderemos por dígitos de nuestro sistema de numeración decimal los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

### 2.1. *Criterio de la divisibilidad por 2*

Un número entero es divisible por **2**, si el dígito de las unidades es divisible por **2**.

**Ejemplos**

(a) 374 es divisible por 2, pues el dígito de las unidades (4) es divisible por 2.

(b) 5620 es divisible por 2, pues el dígito de las unidades (0) es divisible por 2.

(c) 537 no es divisible por 2, pues el dígito de las unidades (7) no es divisible por 2.

(d) 238 es divisible por 2, pues el dígito de las unidades (8) es divisible por 2.

(e) 159 no es divisible por 2, pues el dígito de las unidades (9) no es divisible por 2.

**Nota**

1. Si un número entero es divisible por 2 recibe el nombre de **número par**.
2. Si un número entero no es divisible por 2, recibe el nombre de **número impar**.

### *2.2. Criterio de la divisibilidad por* **3**

Un número entero es divisible por **3** si la suma de sus dígitos es divisible por **3**.

**Ejemplos**

(a) 504 es divisible por 3, pues 5 + 0 + 4 = 9 y 9 es divisible por 3.

(b) 957 es divisible por 3, pues 9 + 5 + 7 = 21 y 21 es divisible por 3.

(c) 375 es divisible por 3, pues 3 + 7 + 5 = 15 y 15 es divisible por 3.

(d) 218 no es divisible por 3, pues 2 + 1 + 8 = 11 y 11 no es divisible por 3.

(e) 4523 no es divisible por 3, pues 4 + 5 + 2 + 3 = 14 y 14 no es divisible por 3.

### *2.3. Criterio de la divisibilidad por* **5**

Un número entero es divisible por **5**, si el dígito de las unidades es **5** o es **0** (cero).

**Ejemplos**

(a) 725 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 5.

(b) 490 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 0.

(c) 468 no es divisible por 5, pues el dígito de las unidades no es 0 ni 5.

### *2.4. Criterio de la divisibilidad por* **7**

Un número entero **n** es *divisible por* **7** si y sólo sí la resta entre, el valor absoluto del número que se obtiene al suprimir el dígito de las unidades de **n** y el doble del dígito de las unidades es divisible por **7**.

**Ejemplo**

Determine si 182 es divisible por 7

**Solución**

El dígito de las unidades de 182 es 2 y el doble de este dígito es 4; además, 18 – 4 = 14. Como 14 es divisible por 7, entonces 182 es divisible por 7.

**Ejemplo**

Determine si 426 es divisible por 7

**Solución**

El dígito de las unidades de 426 es 6 y el doble de este dígito es 12; además, 42 – 12 = 30. Como 30 **no** es divisible por 7, entonces 426 **no** es divisible por 7.

**Ejemplo**

Determine si 263 es divisible por 7.

**Solución**

El dígito de las unidades de 263 es 3 y el doble del dígito es 6; y además, 26 – 6 = 20. Como 20 **no** es divisible por 7, entonces 263 **no** es divisible por 7.

**Ejemplo**

Determine si 385 es divisible por 7.

**Solución**

El dígito de las unidades de 385 es 5 y el doble del dígito es 10; y además, 38 – 10 = 28. Como 28 es divisible por 7, entonces 385 es divisible por 7.

### *2.5. Criterio de la divisibilidad por* **11**

Un número entero es divisible por **11** si y sólo sí la diferencia entre la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares y la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es divisible por **11**.

**Ejemplo**

Determine si 8349 es divisible por 11

**Solución**

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: 8 + 4 = 12.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: 3 + 9 = 12.

Además, 12 – 12 = 0. Como 0 es divisible por 11, entonces 8349 es divisible por 11.

**Ejemplo**

Determine si 7293 es divisible por 11

**Solución**

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: 7 + 9 = 16.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: 2 + 3 = 5.

Además, 16 – 5 = 11. Como 11 es divisible por 11, entonces 7293 es divisible por 11.

**Ejemplo**

Determine si 7869 es divisible por 11.

**Solución**

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: 7 + 6 = 13.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: 8 + 9 = 17.

Además, 13 – 17 = 4. Como 4 no es divisible por 11, entonces 7869 no es divisible por 11.

## *B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES*

### *Guía de trabajo*

Antes de proceder a resolver los ejercicios que aparecen en la guía de trabajo, deben tener en cuenta:

(a) Los criterios de divisibilidad.

(b) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

(c) Leer las veces que sea necesario cada ejercicios hasta lograr interpretarlo.

1. Realizando la división correspondiente conteste las siguientes preguntas:
   (a) Es 154 divisible por 7? Justifique su respuesta.
   (b) Es 39 divisible por 11? Justifique su respuesta.
   (c) Es 104 divisible por 11? Justifique su respuesta.

(d) Es 11 divisible por 17? Justifique su respuesta.

2. Usando el criterio anterior determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 2.

(a) 1268 (b) 379 (c) 35794

(d) 2450 (e) 9237 (f) 475

3. Usando el criterio de divisibilidad por 3, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 3.

(a) 374 (b) 17983

(c) 1047 (d) 5383

(e) 1983 (f) 285

4. Usando el criterio de la divisibilidad por 5, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 5.

(a) 1345 (b) 5554

(c) 753 (d) 41270

(e) 920 (f) 11235

5. Usando el criterio de la divisibilidad por 7, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 7.

(a) 277 (b) 669

(c) 161 (d) 735

(e) 581 (f) 806

6. Usando el criterio de la divisibilidad por 11, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 11.

(a) 37631 (b) 21813

(c) 23716 (d) 17983

(e) 66687 (f) 133375

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.

2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en la resolución de los ejercicios de la guía de trabajo.
4. Entregar resuelto los ejercicios de la guía de trabajo.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad estudiaremos el tema de Múltiplos y factores o divisores de un número entero.

## Actividad No. 8

**Tema**

Los Números Naturales

**Sumario**

1. Múltiplos y factores (o divisores) de un número natural.
2. Factorización en **N**.

**Materiales**

1. Guía de trabajo.
2. Lapiceros.
3. Papel blanco.
4. Marcadores acrílicos.

5. Marcadores permanentes.
6. Papelógrafo.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor.
3. Resolución de ejercicios.
4. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
5. Orientación del profesor en la resolución de los ejercicios propuestos.
6. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.
7. Fomentar la participación activa de los (as) estudiantes.

## DESARROLLO

### *A. EXPOSICION DEL PROFESOR*

### *1. Múltiplos y factores de un número entero*

**Definición**

Sean $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{N}$, si $a = b \cdot c$ se dice a es un múltiplo de b o de c; además, b y c son factores o divisores de a.

**Definición**

Sean $\mathbf{a} \in N$, $\mathbf{b} \in N$.

Se dice que a es un “factor” o “divisor de b” si y sólo si existe un número natural c, tal que $b = a \cdot c$. También se dice que b es múltiplo de a o b es divisible por a.

**Notación**

$a \mid b$ significa que: "a es factor de b";

"a es divisor de b";

"b es múltiplo de b";

"b es divisible por b"

**Ejemplo**

1. Como $45 = 9 \cdot 5$; entonces 45 es un múltiplo de 9 y 5, 9 es un factor o divisor de 45.
2. Como $37 = 1 \cdot 37$; entonces 37 es un múltiplo de 37 y 1, y también 1 y 37 son factores o divisores de 37.
3. Como $42 = 6 \cdot 7$; entonces 42 es un múltiplo de 6 y 7, y también 6 y 7 son factores o divisores de 42.

**Nota**

- Los divisores de $a \in \mathbf{N}$ se representan por $D_a$.

Por ejemplo, los divisores de 15 es el conjunto $D_{15} = \{ 1, 3, 5, 15 \}$

- Los múltiplos de $a \in \mathbf{N}$ se representan por $M_a$.

Por ejemplo, los múltiplos de 6 es el conjunto $M_6 = \{ 6, 12, 18, 24, \dots \}$

**Ejemplo**

Determine los factores (divisores) de 14.

**Solución**

14 es divisible únicamente por 1, 2, 7 y, 14.

**Ejemplo**

Determine todos los factores (divisores) naturales de 6.

**Solución**

6 es divisible únicamente por 1, 2, 3 y 6.

## *2. Factorización en* **N**

### *2.1. Números primos y compuestos.*

**Definición**

Sea $n \in \mathbf{N}$, $(n > 1)$.

Se dice que n es un número primo, si sus únicos factores (o divisores) naturales son 1 y n.

**Ejemplo**

(a) 23 es un número primo pues sus únicos factores (divisores) naturales son 1 y 23.

(b) 77 no es un número primo pues sus factores naturales son 1, 7 y 77.

**Definición**

Sea $n \in \mathbf{N}$, $(n > 1)$.

Se dice que n es un número compuesto, si n no es un número primo.

**Ejemplo**

(a) 12 es un número compuesto, pues 12 no es un número primo.

(b) 36 es un número compuesto, pues 36 no es un número primo.

**Definición**

Sea $a \in \mathbf{Z}$.

Si c es un factor natural de a y c es un número primo, entonces se dice que c es un factor primo de a.

**Ejemplo**

(a) $15 = 5 \cdot 3$; entonces, 5 y 3 son números primos por lo que 5 y 3 son factores primos de 15.

(b) $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, como 2, 3 y 7 son números primos y a su vez son factores de 42, entonces 2, 3 y 7 son factores primos de 42.

A continuación representaremos un número compuesto como el producto de factores primos.

**Teorema**

Todo número natural compuesto se puede expresar como producto de números primos.

**Ejemplo**

Exprese 420 como un producto de números primos.

**Solución**

$$\begin{array}{c} 420 = 42 \cdot 10 \\ 6 \cdot 7 \quad 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 5 \cdot 2 \end{array}$$

Por lo tanto, $420 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

A la representación de un número natural como el producto de factores primos la llamaremos **factorización prima** o **factorización completa** del número. Aceptaremos además que la factorización prima de un número natural es única, salvo el orden de los factores.

**Ejemplo**

Determine la factorización prima de 75

**Solución**

$$\begin{array}{c} 75 = 25 \cdot 3 \\ 5 \cdot 5 \cdot 3 \end{array}$$

O sea, la factorización prima de 75 es $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$.

Existen diferentes formas de ir indicando el procedimiento para la obtención de la factorización prima de un número natural. Estas formas la que buscan es simplificar el trabajo, pero todos conducen a un mismo resultado. A continuación indicamos una forma, que consideramos simplifica bastante el trabajo y a la vez permite obtener la factorización completa de un número en una forma ordenada.

**Ejemplo**

Determine la factorización prima de 300

**Solución**

| | |
|---|---|
| 300 | 2 |
| 150 | 2 |
| 75 | 3 |
| 25 | 5 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

Por lo tanto, 300 = 2·2·3·5·5

## B. *RESOLUCION DE GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE LOS (AS) ESTUDIANTES*

***Guía de trabajo***

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) Los conceptos expuestos por tu profesor, los cuales te serán de mucha utilidad.

(b) Leer las veces que sea necesario cada ejercicios hasta lograr interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

***Ejercicios***

1. Determine todos los factores de 36.
2. Determine todos los factores de 39.
3. Escriba los números naturales primos menores que 30.
4. ¿Es 43 un número primo? Justifique su respuesta.
5. ¿Es 69 un número primo? Justifique su respuesta.
6. ¿Cuáles números naturales pares son números primos?
7. Escriba cinco números naturales compuestos.
8. Determine los factores primos, de los siguientes números:

   (a) 6 (b) 10 (c) 55 (d) 140 (e) 73
9. Para cada uno de los números que se dan a continuación determine su factorización prima:

   (a) 910 (b) 243 (c) 462 (d) 29

10. Problema resuelto

Se dispone de una regla no marcada de 7cm. ¿Cuántas medidas menores que 30 cm se pueden medir en forma exacta?

**Solución**

Para determinar cuántas medidas podemos obtener, debemos calcular los múltiplos de 7 que son menores que 30.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Calcular los múltiplos de 7 menores que 30.

**Operaciones:**

Múltiplos de 7 menores que 30: 7, 14, 21 y 28.

**Respuesta:**

Podemos obtener 4 medidas exactas.

11. Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:

    (a) El procedimiento.

    (b) La operación con su resultado.

    (c) La respuesta del problema.

Problema 1:

Si tengo $24000, ¿cuánto dinero puedo pagar con sólo billetes de $5000, sin que me den vuelto?

Problema 2:

Gabriela quiere programar su trabajo antes de empezar las clases. Sabe que tendrá entre 25 y 36 alumnos y quiere formar grupos. ¿Cuántos alumnos debería tener para formar grupos de a 7?

Problema 3:

Se dispone de una varilla recta de 30 cm y una varilla recta de 20 cm. ¿Cuál es la menor longitud que se puede medir con ambas varillas?

12. Problema resuelto

Un grupo de personas llevó 15 regalos para una rifa. Si todas aportaron el mismo número de regalos, ¿por cuántas personas pudo haber estado conformado el grupo?

**Solución**

Para determinar cuántas personas pudieron haber conformado el grupo, hay que determinar todos los divisores de 15.

Esto se puede resumir en el siguiente esquema:

**Procedimiento:**

Hay que determinar los divisores de 15.

**Operaciones:**

Los divisores de 15 son: 1, 3, 5 y 15

**Respuesta:**

Pueden haber sido 1, 3, 5 ó 15 personas.

13. Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:
    (a) El procedimiento.
    (b) La operación con su resultado.
    (c) La respuesta del problema.

Problema 1:

Paulina invitó al matrimonio civil de su hija a 40 personas. ¿Cómo debe sentar a sus invitados, si debe haber a lo menos 4 personas en cada mesa y todas las mesas deben tener el mismo número de personas?

Problema 2:

Josefina quiere ordenar sus 60 libros en un estante con varias repisas, ¿cuántos libros por repisa puede poner si todas las repisas deben tener la misma cantidad de libros y no quiere poner más de 8 repisas?

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en el trabajo grupal.
4. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad estudiaremos el tema de Máximo Común Divisor: Definición, regla para calcularlo y el algoritmo de Euclides.

## Actividad No. 9

**Tema**

Máximo Común Divisor (MCD)

**Sumario**

1. Divisores comunes.
2. Definición de Máximo Común Divisor.
3. Regla para encontrar el Máximo Común Divisor.
4. Algoritmo de Euclides.

**Materiales**

1. Guía de trabajo.
2. Lapiceros.
3. Papel blanco.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor.
3. Resolución de ejercicios.
4. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
5. Orientación del profesor en la resolución de los ejercicios propuestos.
6. Entregar resuelto los ejercicios que se proponen en la guía de trabajo.
7. Fomentar la participación activa de los estudiantes.

**Desarrollo**

***A. EXPOSICION DEL PROFESOR***

***1. Divisor común***

**Definición**

El entero positivo d es divisor común de los enteros $a_1, a_2, ..., a_n$ si, y sólo si, d es divisor de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Simbólicamente,

$$d \text{ es divisor común de } a_i \ (i = 1,2,...,n) \iff d \mid a_i \ \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n$$

**Ejemplo**

Encuentre los divisores comunes de 18 y 24.

**Solución**

Los divisores de 18: $D_{18} = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \}$

Los divisores de 24: $D_{24} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$

Entonces los divisores comunes de 18 y 24: $D_{18} \cap D_{24} = \{ 1, 2, 3, 6 \}$

## *2. Máximo Común Divisor*

Se llama Máximo Común Divisor de dos números enteros al mayor divisor común de ellos.

**Definición**

El entero positivo d se denomina máximo común divisor de los enteros $a_1, a_2, ..., a_n$ si, y sólo si, d es divisor común $a_1, a_2, ..., a_n$, y para todo t divisor de $a_1, a_2, ..., a_n$ se cumple que t es divisor de d.

El máximo común divisor de $a_1, a_2, ..., a_n$ lo designamos por $(a_1, a_2, ..., a_n)$, o bien, $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$.

Entonces,

$d = (a_1, a_2, ..., a_n)$ si, y sólo si, se cumple que:

$$\text{(i) } d \mid a_i, \text{ para todo } i = 1,2,...,n$$

$$\text{(ii) } t \mid a_i, \text{ para todo } i = 1,2,...,n \Rightarrow t \mid d$$

**Ejemplo**

Encuentre el Máximo Común Divisor de 16 y 24

**Solución**

Los divisores de 16:

$D_{16} = \{ 1, 2, 4, 16 \}$

Los divisores de 24:

$D_{24} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$

Los divisores comunes de 12 y 24:

$D_{16} \cap D_{24} = \{ 1, 2, 4 \}$

Entonces, el máximo común divisor es el mayor divisor común; en este caso, es 4. Por lo tanto, $(12, 24) = 4$

***Regla para calcular el Máximo Común Divisor de dos o más números enteros:***

1. Se descomponen los números dados en sus factores primos.
2. El Máximo Común Divisor se forma con el producto de factores primos comunes con su menor exponente.

**Ejemplos**

(a) Hallar el Máximo Común Divisor de 32 y 40

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad (32, 40) = 2^3 = 8$$

$32 = 2^5$ $\qquad 40 = 2^3 \cdot 5$

(b) Hallar el Máximo Común Divisor de 18 y 24

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad (18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$

$18 = 3^2 \cdot 2$ $\qquad 24 = 2^3 \cdot 3$

Otro método utilizado para calcular el máximo común divisor es mediante el algoritmo de Euclides.

Algoritmo de Euclides **(Algoritmo de las divisiones sucesivas)**

El máximo común divisor positivo de dos enteros no simultáneamente nulos es igual al último resto no nulo que se obtiene por la aplicación del algoritmo de Euclides.

El esquema del algoritmo de Euclides, es

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | ... | | $q_n$ | $q_{n+1}$ |
| a | B | $r_1$ | $r_2$ | ... | | $r_{n-1}$ | $r_n$ |
| $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | ... | $r_n$ | 0 | |

**Ejemplo**

Encuentre el Máximo Común Divisor de los números enteros 57 y 437.

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 | 1 | 2 |
| 437 | 57 | 38 | 19 |
| 38 | 19 | 0 | |

$\therefore \quad (437, 57) = 19$

***B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE L@S ESTUDIANTES***

***Guía de trabajo***

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) La definición de Máximo Común Divisor.

(b) La regla para determinar el Máximo Común Divisor.

(c) El algoritmo de Euclides.

(d) Leer las veces que sea necesario cada ejercicio hasta lograr interpretarlo.

(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

***Ejercicios***

1. Dados los enteros 12, 18 y 24. Encuentre:

(a) Los divisores comunes.

(b) El Máximo Común Divisor.

2. Dados los enteros 36, 28 y 35. Encuentre:

(a) Los divisores comunes.

(b) El Máximo Común Divisor.

3. Aplique el algoritmo de Euclides para encontrar el Máximo Común Divisor de los siguientes números enteros:

(a) 138 y 276 (b) 578 y 364 (c) 1056 y 2374 (d) 3765 y 1710

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en el trabajo grupal.
4. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

**Orientación de la próxima clase**

En la próxima actividad estudiaremos el tema de Mínimo Común Múltiplo: Definición, regla para calcularlo.

## Actividad No. 10

**Tema**

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

**Sumario**

1. Múltiplos comunes.
2. Definición de Mínimo Común Múltiplo.
3. Regla para calcular el Mínimo Común Múltiplo.

**Materiales**

1. Guía de trabajo.

2. Lapiceros.
3. Papel blanco.

**Procedimiento**

1. Formación de grupos.
2. Exposición del profesor.
3. Resolución de ejercicios.
4. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
5. Orientación del profesor en la resolución de los ejercicios propuestos.
6. Entregar resuelto los ejercicios que se proponen en la guía de trabajo.
7. Fomentar la participación activa de los estudiantes.

**Desarrollo**

***A. EXPOSICION DEL PROFESOR***

***1. Múltiplos comunes***

Recordemos que el múltiplo de un número entero, es otro número entero que lo contiene una o varias veces exactamente. Los múltiplos de un número se forman multiplicando ese número.

Por ejemplo, los múltiplos de 9 son: $M_9 = \{ 9, 8, \dots , 99, \dots \}$.

**Definición**

Un número entero positivo m se denomina múltiplo común de los números enteros $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ si, y sólo si, todos los enteros $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... , $a_n$ son divisores de m.

**Ejemplo**

El entero 24 es múltiplo común de 2, 3, 4, 12, puesto que

$$2 \mid 24,\ 3 \mid 24,\ 4 \mid 24,\ 12 \mid 24$$

**Ejemplo**

Encuentre los múltiplos comunes de 3 y 4

**Solución**

Los múltiplos de 3:

$M_3 = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 32, 35, 38, 42, 45, 48, 52, \ldots, 3n, \ldots \}$

Los múltiplos de 4:

$M_4 = \{ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, \ldots, 4n, \ldots \}$

Los múltiplos comunes de 3 y 4:

$M_3 \cap M_4 = \{ 12, 24, 36, \ldots, 12n, \ldots \}$

## *2. Mínimo Común Múltiplo*

Se llama Mínimo Común Múltiplo de dos o más números enteros al menor de los múltiplos comunes, mayor que cero, de dicho número.

**Definición**

Un número entero positivo t se denomina mínimo común múltiplo (m.c.m) de los enteros $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ si, y sólo si, t es múltiplo común de $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$, y cualquier otro múltiplo común de $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$ es también múltiplo de t. También,

El mínimo común múltiplo de $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ lo designamos por $[a_1, a_2, ..., a_n]$ ó $a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$

Simbólicamente,

$t = [a_1, a_2, ..., a_n]$ si, y sólo si, se cumple que:

$$\text{(i) } a_i \mid t, \text{ para todo } i = 1,2,...,n.$$

$$\text{(ii) } a_i \mid t' \Rightarrow t \mid t'.$$

**Ejemplo**

Encuentre el Mínimo Común Múltiplo de 10 y 15

**Solución**

Los múltiplos de 10: $M_{12}$ = { 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, …, 10n, … }

Los múltiplos de 24: $M_{15}$ = { 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, …, 24n, … }

Los múltiplo comunes de 10 y 15: $M_{10} \cap M_{15}$ = { 30, 60, 90, 120, 150, … }

El menor de los múltiplos comunes es, 30. En consecuencia, el Mínimo Común Múltiplo de 10 y 15, es:

$$[10, 15] = 30$$

***Reglas para calcular el Mínimo Común Múltiplo de dos o más números enteros.***

- Se descomponen los números enteros dados en sus factores primos.
- Se multiplican los factores comunes y no comunes afectados por el mayor exponente.

**Ejemplo**

Hallar el Mínimo Común Múltiplo de 24 y 45

**Solución**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | 2 | 45 | 5 |
| 12 | 2 | 9 | 3 |
| 6 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | |
| 1 | | | |

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad 45 = 3^2 \cdot 5$

$$[24, 45] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Existe una relación que involucra al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo de dos o más números enteros:

"El producto de dos números enteros es igual al producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de dichos números"

Si a y b son dos números enteros cualesquiera, se tiene que

$$(a, b)\cdot[a, b] = a\cdot b$$

## *B. RESOLUCION DE LA GUIA DE TRABAJO POR PARTE DE L@S ESTUDIANTES*

### *Guía de trabajo*

Antes de proceder a resolver los ejercicios que se te plantean, debe de tener en cuenta:

(a) La definición de Mínimo Común Múltiplo.
(b) La regla para determinar el Mínimo Común Múltiplo.
(c) Leer las veces que sea necesario cada ejercicio hasta lograr interpretarlo.
(c) Discutir con tus compañeros de grupo la solución de cada ejercicio.

### *Ejercicios*

1. Dados los números enteros 10, 15 y 20. Encuentre:
   (b) Los múltiplos comunes.
   (c) El Mínimo Común Múltiplo.

2. Dados los números enteros 6, 24 y 30. Encuentre:
   (d) Los múltiplos comunes.
   (e) El Mínimo Común Múltiplo.

3. Encuentre el Mínimo Común Múltiplo de los siguientes números enteros:
   (a) 36, 18 y 45

(b) 42, 35, y 63

(c) 120, 224 y 156

Utilice:

(i) la regla para calcular el Mínimo Común Múltiplo; y

(ii) $(a, b)\cdot[a, b] = a\cdot b$

**Evaluación**

1. Atención a la exposición del profesor.
2. Participación, compañerismo, orden y disciplina en la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Desempeño de los (as) estudiantes en el trabajo grupal.
4. Entregar resuelto los ejercicios propuestos de la guía de trabajo.

**Orientación de la próxima actividad**

La próxima sesión de clase es evaluativa. Tiene como propósito medir el grado de comprensión que adquirieron los (as) estudiantes en el desarrollo de los contenidos de Los Números Naturales.

## Actividad No. 11

Esta está dedicada a evaluar si los (as) alumnos (as) comprendieron el tema de semejanza. Se realizará individualmente.

Resuelve los siguientes problemas indicando en cada caso:

1. La tía Cecilia repartió lápices entre los 6 niños que ella dirige y las otras 3 tías del nivel. Cada tía recibió 5 lápices y los niños recibieron el doble de lo que recibió cada tía. ¿Cuántos lápices se repartieron en total?

2. El lunes, Rafael le regaló a cada uno de sus 2 amigos 3 bolitas. El martes les regaló 2 veces la cantidad de bolitas que el día anterior y el miércoles les dio la sexta parte que el martes. ¿Cuántas bolitas le regaló Rafael a sus 2 amigos?
3. Gloria y Cecilia están entrenando para el campeonato de atletismo. Gloria dio 6 vueltas a la pista en 24 minutos y Cecilia dio 5 vueltas más que Gloria y se demoró 33 minutos. ¿Quién demoró más en cada vuelta?
4. Pablo compró un cajón con 96 huevos para su restaurante y los repartió en cantidades iguales entre el lunes y el martes. El lunes ocupó 15 huevos para el almuerzo y 15 para la comida, y el martes ocupó para el almuerzo la sexta parte de lo que correspondía a ese día y para la comida ocupó 25. ¿Qué día entre el lunes y martes ocupó más huevos?

## VII. RECOMENDACIONES

1. Implementar talleres y capacitaciones sobre los nuevos enfoques pedagógicos que se están implementando en los centros de Educación Secundaria.

2. Implementar capacitaciones en el área de Matemáticas con el propósito de mejorar la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de Matemáticas.

3. Relacionar los contenidos de Números Naturales con otros campos del saber humano y la vida diaria para consolidar sus conocimientos.

4. Compartir experiencias de la enseñanza – aprendizaje de Los Números Naturales bajo el enfoque pedagógico “Enseñanza por Competencias”, con los profesores de los centros donde se implemente este documento.

5. Plantear nuevas propuestas de problemas que tomen como punto de partida, el entorno y las necesidades comunitarias.

6. Identificar los conocimientos previos que poseen los (as) estudiantes con el fin de nivelarlo para que el aprendizaje de los nuevos contenidos sea significativo y funcional.

7. Aplicar las distintas formas de evaluación propuesta u otras que consideren convenientes con el propósito de superar aquellos aspectos que presentan dificultad.

8. Fomentar en el alumnado la autopreparación constante y el trabajo en equipo para enriquecer sus experiencias y aprendizajes, así como la creación de estrategias propias de aprendizaje.

9. Proveer a los (as) profesores (as) de un documento de apoyo para la docencia y disminuir el déficit cognitivo.

## VIII. BIBLIOGRAFÍA


- Antúnez, S. (1992). **Del Proyecto Educativo al Aula**. Editorial Graó. Barcelona, España.

- Gil, D. y otros. **La enseñanza de la Ciencia en la Educación Secundaria.**

- Jiménez, Manuel. Briales José Francisco. (1988). **Matemática Viva**. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. Madrid, España.

- Massut, María Fernanda. (Julio, 2003). **Curso de matemática a la vida cotidiana.** UNAN-UB.

- MECD. (2004). **Reforma de Educación Secundaria**. Enseñanza para la Comprensión. Managua, Nicaragua.

- MECD. (2005). **Presentación. Estrategia de Matemática**. Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2004). **Estrategias metodológicas del aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.** Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2005). **Compendio de los documentos curriculares con enfoque de competencias**. Educación Secundaria. Área: Matemáticas. Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación de Cuba. (1977) **Matemática 9).** Editorial Pueblo y Educación. La habana, Cuba.

- Morales Molina, Xavier. (Julio / agosto del 2003).**Estrategias para trabajar en grupos en el aula.** Brigada, Rubén Darío.
- Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (1999). **Hacia la construcción de Nuevos Métodos y Estrategias en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje**. León, Nicaragua.

- Vizmanos, José. Anzola, Máximo. (2000). **Algoritmo 2000**, **matemáticas**. Ediciones SM. Madrid, España.


- Vizmanos, José. Anzola, Máximo. (2000). **Algoritmo 2000**, **matemáticas**. Ediciones SM. Madrid, España.