UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA-LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES USANDO MATLAB

MONOGRAFÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTADO POR

BRA. HYORCY MARÍA SEQUEIRA MORALES.
BR. ROYER CLARK ULLOA BLANDÓN.

TUTORA

MSC. ANGELA ALTAMIRANO SLINGER

LEÓN, NOVIEMBRE 2010

DEDICATORIA

A Dios por llevarme a su lado a lo largo de esta vida siempre llenándome de alegría y gozo.

A mi familia que gracias a sus consejos y palabras de aliento crecí como persona. A mis padres y hermanas por su apoyo, confianza y amor. Gracias por ayudarme a cumplir mis objetivos como persona y estudiante. A mi padre por brindarme los recursos necesarios y estar a mi lado apoyándome y aconsejándome siempre. A mi madre por hacer de mi una mejor persona a través de sus consejos, enseñanzas y amor. A mis hermanas por estar siempre presente, cuidándome brindándome aliento.

Royer Clark Ulloa Blandón.

A Dios por haber hecho realidad este sueño, por todo el amor con el que me rodea, por llenar mi vida de dicha y bendiciones y por tenerme siempre en sus manos.

A mi familia por impulsarme día tras día a continuar y lograr mis metas. A mis padres por ser los pilares más importantes de mi vida que día a día me demuestran su amor, cariño y apoyo para seguir adelante. Por la confianza que mi brindaron durante la carrera.

A mi padre por contar siempre con su apoyo hasta el término de mis estudios, por su ejemplo, sus consejos y todo lo que solo el sabe dar. Aun en lo lejos siempre ha estado junto a mí. A mi madre por ayudarme a concluir mi carrera, por todos sus consejos, cariño y comprensión, sin ella no sería lo que soy.

Hyorcy María Sequeira Morales.

AGRADECIMIENTO

A ***Dios*** *sobre todas las cosas, quien con su bendición y amor guio cada uno de nuestros pasos en cada instante de nuestras vidas para la culminación de este trabajo investigativo.*

A nuestra tutora ***MSC. Ángela Altamirano Slinger*** *por su paciencia y dedicación. Por brindarnos su valioso tiempo y ser un ejemplo a seguir.*

A todos ***los profesores*** *que nos brindaron sus conocimientos a lo largo de la carrera, sobre todo aquellos que fueron pieza fundamental para la culminación de nuestra meta.*

A ***nuestras familias*** *por ser tan especial y por su apoyo incondicional en todo momento para la culminación de este trabajo investigativo.*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 01
OBJETIVOS 02

CAPÍTULO 1: ELEMENTOS BÁSICOS
1.1 Introducción 03
1.2 Elementos de Ecuaciones Diferenciales Parciales 03
1.2.1 Ecuaciones Elípticas 05
1.2.2 Ecuaciones Parabólicas 06
1.2.3 Ecuaciones Hiperbólicas 07
1.3 Diferencias Finitas 08
1.3.1 Método de Diferencia Finita 09
1.3.2 Método de Diferencia Finita para Problemas de Valor de Fronteras 10
1.4 Serie de Taylor 10
1.5 Factorización de Crout 12

CAPÍTULO 2: MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
2.1 Introducción 16
2.2 Método de Diferencias Finitas para la Ecuación de Poisson 16
2.3 Métodos de Diferencias Finitas para la Ecuación de Calor 24
2.4 Método de Diferencias Finitas para la Ecuación de Onda 38

CAPÍTULO 3: APLICACIONES
3.1 Introducción 46
3.2 Temperatura de estado estable de una placa rectangular de plata 46
3.3 Temperatura de una varilla de sección transversal 48
3.4 Voltaje de una línea de transmisión eléctrica 49

CONCLUSIONES 53

ANEXOS 54
Anexo 1. Programa del Método de Diferencias Finitas para la Ecuación de Poisson 55
Anexo 2. Programa del Método de Diferencias Progresivas para la Ecuación de Calor 59
Anexo 3. Programa del Método de Diferencias Regresivas para la Ecuación de Calor 61
Anexo 4. Programa del Método de Crank-Nicolson para la Ecuación de Calor 63
Anexo 5. Programa del Método de Diferencias Finitas para la Ecuación de Onda 65
Anexo 6. Aspectos generales de MATLAB 67

BIBLIOGRAFÍA 70

INTRODUCCIÓN

Durante los siglos XVIII y XIX se desarrollaron la mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales que permitieron edificar la física matemática clásica. Desde entonces, la modelización de la naturaleza requiere, en primer término, la determinación de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del fenómeno estudiado y, posteriormente, la resolución de dichas ecuaciones. Muchas de estas ecuaciones diferenciales carecen de soluciones analíticas y requieren ser tratadas mediante métodos numéricos.

Dada la importancia que tienen las ecuaciones diferenciales parciales, consideramos de mucho interés el desarrollar una monografía que proporcione los métodos más usuales basados en diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, presentando su descripción, algoritmo e ilustración.

Este trabajo monográfico puede ser utilizado por estudiantes o profesionales como un material de consulta ante una situación en la que se requiera elegir un método particular de solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

El presente trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo se introducen los elementos básicos para el estudio de los métodos numéricos que se desarrollan en el capítulo dos. En el segundo capítulo se analizan cinco métodos basados en diferencias finitas para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

En el tercer capítulo se presentan algunas aplicaciones, con tres casos donde se utilizan los métodos estudiados. En los anexos se incluyen los programas elaborados para los diversos métodos abordados, así como su corrida correspondiente. Los programas fueron implementados en MATLAB, un software apropiado para desarrollar tareas de Análisis Numérico.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Mostrar algunos métodos en diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales usando el software numérico MATLAB para la implementación de los algoritmos de cálculo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar algunos métodos basados en diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, mediante la descripción de sus componentes y la elaboración del algoritmo respectivo.

- Implementar los algoritmos asociados a los métodos estudiados utilizando el software numérico MATLAB.

- Ilustrar algunas aplicaciones de los métodos estudiados en diversas ciencias.

CAPÍTULO 1: ELEMENTOS BÁSICOS

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo mostramos los conceptos básicos de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, los cuales nos servirán para el estudio de las soluciones numéricas de este tipo de ecuaciones.

Además hacemos una breve presentación de las series de Taylor y de la Factorización de Crout. También presentamos una visión general de las Diferencias Finitas y de los métodos de diferencias finitas para problemas de valor de frontera en ecuaciones diferenciales ordinarias que luego son retomados para el tratamiento de la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales que serán abordados en el capítulo 2.

1.2 ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con las tres propiedades siguientes:

1. Según el tipo: Ordinarias y Parciales.
2. Según el orden: Primer orden, Segundo orden, etc.
3. Según la linealidad o no linealidad.

Definición 1.1

Si una ecuación contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo

Las siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$
$$(x + y)dx - 4ydy = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Definición 1.2

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial.

Ejemplo

Las siguientes son ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

En el presente trabajo nos enfocaremos en la solución numérica de este tipo de ecuaciones diferenciales. En particular las siguientes tres clases:

1. Elípticas.
2. Parabólicas.
3. Hiperbólicas.

1.2.1 ECUACIONES ELIPTICAS

Definición 1.3

Una ecuación elíptica es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de la forma

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en la cual la matriz $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ es definida positiva.

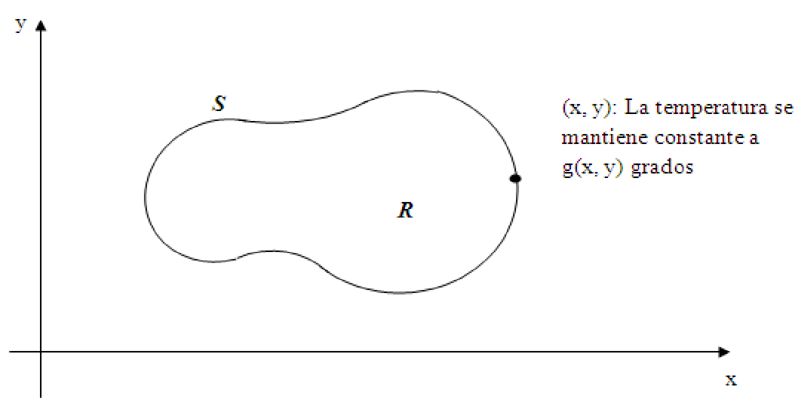
Ejemplos de ecuaciones elípticas son la ecuación de Poisson y la ecuación de Laplace. En este trabajo estudiaremos la ecuación de Poisson.

Ecuación de Poisson.

La ecuación de Poisson se define por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

En esta ecuación suponemos que la función *f* describe la entrada del problema en una región *R* cuya frontera denotaremos por *S*. Las ecuaciones de este tipo surgen de manera natural en estudio de varios problemas físicos dependientes del tiempo; como la distribución estacionaria de calor en una región plana, la energía potencial de un punto en un plano bajo la acción de fuerza gravitacional y problemas estacionarios en dos dimensiones acerca de fluidos incomprensibles.



Para obtener una solución única a la ecuación de Poisson, se debe imponer restricciones adicionales en la solución. Por ejemplo el estudio de la distribución estacionaria de calor en una región plana requiere que $f(x, y) = 0$, lo cual da como resultado una simplificación de la ecuación de Poisson en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

que se conoce con el nombre de la ecuación de Laplace.

1.2.2 ECUACIONES PARABÓLICAS

Definición 1.4

Una ecuación parabólica es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de la forma

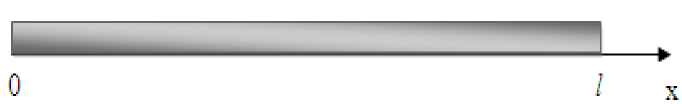
$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en la cual la matriz $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ tiene un determinante igual a 0.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas son la ecuación de Schrödinger y la ecuación de conducción de calor. En este trabajo estudiaremos la ecuación de calor o de difusión.

Ecuación de Calor.

El fenómeno físico de variación de la temperatura U según la posición x y el tiempo t en una barra calentada de longitud L que se extiende a lo largo del eje x, la cual suponemos que tiene una temperatura uniforme dentro de cada elemento transversal que requiere que la superficie lateral de la barra esté perfectamente aislada,



se describe a través del modelo matemático

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < L, \; t > 0,$$

La constante α está determinada por las propiedades conductoras de calor del material del que está hecha la barra y se supone que es independiente de su posición en la misma.

Uno de los conjuntos comunes de restricciones en el problema de flujo del calor de este tipo consiste en especificar la distribución inicial de calor en la barra,

$$U(x, 0) = f(x), \; 0 < x < L$$

y en describir el comportamiento en los extremos de la barra. Por ejemplo, si aislamos la barra de modo que no fluya calor por sus extremos, las condiciones de frontera serán,

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

1.2.3 ECUACIONES HIPERBOLICAS

Definición 1.5

Una ecuación hiperbólica es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden de la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en la cual la matriz $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ tiene un determinante menor que 0.

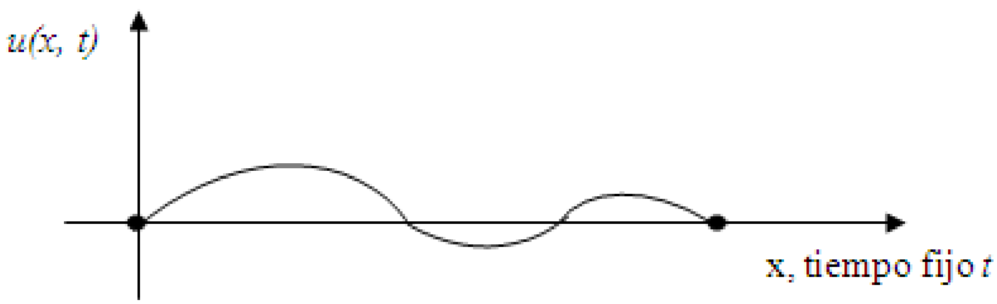
Un ejemplo de una ecuación hiperbólica es la ecuación de onda, la cual estudiaremos a continuación.

Ecuación de Onda.

Consideremos la ecuación de onda unidimensional que constituye un ejemplo de la ecuación diferencial parcial hiperbólica

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{para } 0 < x < L \text{ y } 0 < t,$$

que sirve de modelo para una cuerda vibrante de vibraciones libres y flexibles. Los extremos fijos de la cuerda en los puntos $x = 0$ y $x = L$ del eje x corresponden a las condiciones de fronteras.



Para imponer restricciones a este problema, supondremos que la posición y velocidad iniciales del la cuerda están dadas por

$$U(x,\, 0) = f(x) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

y aplicaremos el hecho de que los extremos están fijos. Esto significa que

$$U(0,\, t) = U(L,\, t) = 0$$

1.3 DIFERENCIAS FINITAS

Una diferencia finita es una expresión matemática de la forma

$$f(x + b) - f(x + a).$$

Si una diferencia finita se divide por $b - a$ se obtiene una expresión similar al cociente diferencial, que difiere en que se emplean cantidades finitas en lugar de infinitesimales. La aproximación de las derivadas por diferencias finitas desempeña un papel central en los métodos de diferencias finitas del análisis numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales. Sólo se consideran normalmente tres formas: la progresiva, la regresiva y la central.

Definición 1.6

Una diferencia progresiva es una expresión de la forma

$$\Delta[f](x) = f(x+h) - f(x).$$

Dependiendo de la aplicación, el espaciado h se mantiene constante o se toma el limite $h \to 0$.

Una diferencia regresiva se expresa como

$$\nabla[f](x) = f(x) - f(x-h).$$

Una diferencia central es la media de las diferencias anteriores y posteriores. Viene dada por

$$\delta[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2}.$$

1.3.1 MÉTODO DE DIFERENCIA FINITA

Otro aspecto importante es que las diferencias finitas aproximan cocientes diferenciales a medida que h se acerca a cero. Así que se pueden usar diferencias finitas para aproximar derivadas. Esta técnica se emplea a menudo en análisis numérico, especialmente en ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en diferencias y ecuación en derivadas parciales. Los métodos resultantes reciben el nombre de *métodos de diferencias finitas*.

1.3.2 MÉTODO DE DIFERENCIA FINITAS PARA PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA

Los métodos para la resolución de problemas de valor de frontera que contienen diferencias finitas reemplazan las derivadas en la ecuación diferencial ordinaria por medio de una aproximación de cociente de diferencias adecuada. Se selecciona el cociente de diferencias para mantener un orden específico del error de truncamiento. Pero, por inestabilidad de las aproximaciones de diferencias finitas a las derivadas, no podemos escoger un parámetro h demasiado pequeño.

1.4 SERIE DE TAYLOR

Sea la función f una función definida en un intervalo I y sea c un punto interior de I se dice que la función f es infinitamente diferenciable en c si en algún intervalo abierto que contenga a c, f es la suma de una serie convergente de potencias con centro en c. Por lo tanto, f es infinitamente diferenciable en c cuando hay exactamente un r >0 para el cual

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \qquad |x-c| < r$$

Se dice que la función f es infinitamente diferenciable en un intervalo si f es infinitamente diferenciable en cada punto de ese intervalo.

Si f es infinitamente diferenciable, entonces f tiene derivada de todos los órdenes en un intervalo abierto que contenga a c.

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en c, podemos forma a la series de potencia

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots\ldots$$

que pude ser descrita de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

Esta serie se llama Serie de Taylor de *f* en *c*. cuando *c* es igual a cero la serie se llama Serie de Maclaurin de *f*.

Ejemplo

Obtenga la serie de Taylor para *sen x* cuando *c* =1/4π.

Solución:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = sen\,x \\
&f'(x) = \cos x \\
&f''(x) = -sen\ x \\
&f^{(3)}(x) = -\cos x \\
&f^{(4)}(x) = sen\ x \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

Con *c*=1/4π entonces la serie es

$$
\begin{aligned}
sen\ x &= sen\,\frac{1}{4}\pi + \left(\cos\frac{1}{4}\pi\right)\left(x-\frac{1}{4}\pi\right) - \left(sen\frac{1}{4}\pi\right)\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} - \left(\cos\frac{1}{4}\pi\right)\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!} \\
&\quad + \left(sen\frac{1}{4}\pi\right)\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^4}{4!} + \ldots \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^4}{4!}\right) + \ldots \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x-\frac{1}{4}\pi\right) - \frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} - \frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!} + \frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^4}{4!} + \ldots\right]
\end{aligned}
$$

1.5 FACTORIZACIÓN DE CROUT

Definición 1.7

Una matriz de $n \times n$ recibe el nombre de matriz de banda si existe los enteros p y q con $1 < p,\ q < n$, que tienen la propiedad que $a_{i,j} = 0$ siempre que $i+p \leq j$ o $j+q \leq i$. El ancho de banda de este tipo de matrices se define como $w = p+q-1$.

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

es una matriz de banda $p = q = 2$ y con ancho de banda 2+2-1 = 3.

La definición de la matriz de banda hace que estas matrices concentren todos sus elementos distintos de cero alrededor de la diagonal.

Las matrices de ancho de banda 3 que se presentan cuando $p = q = 2$ se les llama tridiagonales por tener la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los algoritmos de factorización pueden simplificarse considerablemente en el caso de las matrices de banda, porque una gran cantidad de ceros a parecen en ellas en patrones regulares. Es muy interesante señalar la forma que en este caso asume el método de Crout.

Para ilustrar lo anterior supongamos que podemos factorizar una matriz tridiagonal A en las matrices triangulares L y U. Puesto que A tiene solo ($3n$-2) elementos distintos de cero, habrá apenas (3n-2) condiciones aplicables para determinar los elementos de L y U, naturalmente a condición de que también se obtengan los elementos ceros de A. Supóngase que podemos encontrar las matrices en la forma

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay (2n-1) elementos indeterminados de L y (n-1) elementos indeterminados de U, que suman el número total de condiciones (3n-2). Los elementos ceros de A se obtienen automáticamente.

La multiplicación que incluye $A = LU$ nos da, además de los elementos cero

$a_{1,1}=l_{1,1}$;
$a_{i,i-1}=l_{i,i-1}$ para cada i=2,3,…,n;
$a_{i,i}=l_{i,i-1}\, u_{i-1,i}+l_{i,i}$ para cada i=2,3,…,n

y

$a_{i,i+1}=l_{i,i}\, u_{i,i+1}$ para cada i=1,2,…,n-1

Una solución de este sistema se obtiene aplicando primero la ecuación para obtener el término fuera de la diagonal de L y luego las ecuaciones para obtener alternativamente el resto de los elementos de U y de L. Estos pueden guardarse en los elementos correspondientes de A.

El algoritmo siguiente resuelve un sistema de ecuaciones lineales n x n cuya matriz de coeficiente es tridiagonal. Solo requiere (5n-4) multiplicaciones/divisiones y (3n-3) sumas/restas en consecuencia ofrece una importante ventaja computacional sobre los métodos que no toman en cuenta la tridiagonalidad de la matriz.

Factorización de Crout de Sistemas Lineales Tridiagonales.

Para resolver sistemas lineales de $n \times n$

$$\begin{array}{lll}
E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = a_{1,n+1}, \\
E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = a_{2,n+1}, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
E_{n-1}: & a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1.n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = a_{n-1,n+1}, \\
E_n: & a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & = a_{n,n+1},
\end{array}$$

que se supone tiene una solución única:

ENTRADA la dimensión n; los elementos de A.

SALIDA la solución $x_1,...,x_n$.

(Use los pasos 1-3 y resuelva $\boldsymbol{Lz}=\boldsymbol{b}$.)

Paso 1 Tome $l_{11} = a_{11}$;

$$u_{12} = a_{12} / l_{11};$$

$$z_1 = a_{1,n+1} / l_{11}.$$

Paso 2 Para $i = 2,...,n-1$ tome $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$; (*i-ésimo renglón de L*).

$$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i};$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} / l_{ii}; \text{ ((}i\text{+1)-ésima columna de } U\text{).}$$

$$z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1}) / l_{ii}$$

Paso 3 Tome $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$; (*n-ésimo renglón de L*).

$$l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}.$$

$$z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1}) / l_{nn}.$$

(*Pasos 4 y 5 resuelven U***x=z.**)

Paso 4 Tome $x_n = z_n$.

Paso 5 Para $i = n-1,...,1$ tome $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$.

Paso 6 SALIDA ($x_i,...,x_n$);

PARAR

CAPÍTULO 2: MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se abordarán cinco métodos de aproximación numérica basados en diferencias finitas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

La descripción comienza con métodos de aproximación apropiados para ecuaciones elípticas. La atención se centra en la ecuación de Poisson. Luego se describirán los métodos para las ecuaciones parabólicas la cual se centrara en la ecuación de calor en este se mostraran tres métodos para su aproximación numérica. Después se abordara sobre la aproximación a la solución de la ecuación de onda por medio del método de diferencias fintas. La ecuación de onda es la ecuación diferencial hiperbólica prototipo.

2.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE POISSON.

Consideremos el problema de Poisson

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \qquad (2.1)$$

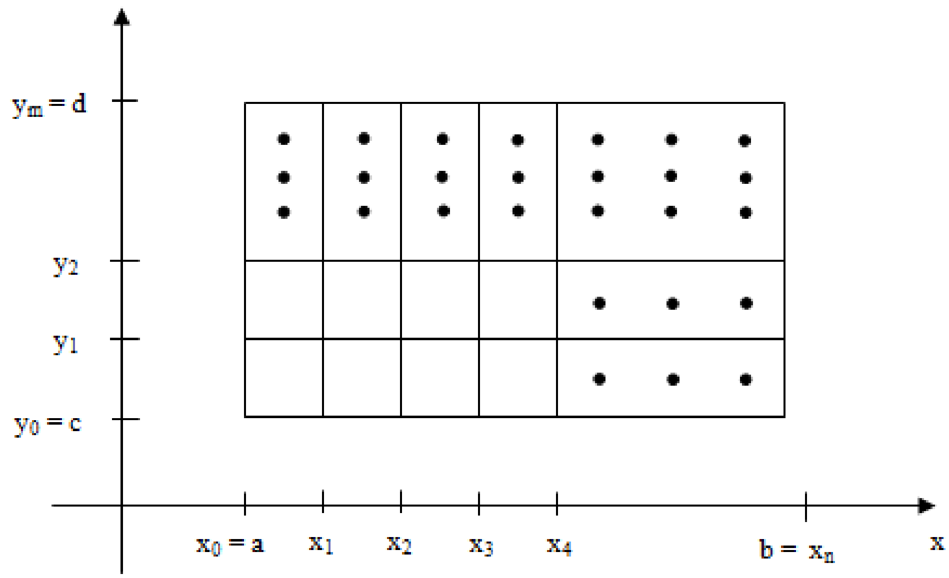
en $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$, con

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ para } (x, y) \in S,$$

donde S denota la frontera de R. Para este análisis, suponemos que tanto f como g son continuas en sus dominios y que se garantiza una solución única.

El método a usar es una adaptación de la técnica de diferencias finitas para problemas con valor a la frontera. El primer paso consiste en seleccionar los enteros n y m, y definir los tamaños de paso h y k mediante $h = (b - a)/n$ y $k = (d - c)/m$. La partición del intervalo $[a, b]$, en n partes iguales de ancho h, y del intervalo $[c, d]$ en m partes iguales de ancho k, da como resultado una cuadricula en el rectángulo R al trazar líneas verticales y horizontales por los puntos con coordenadas (x_i, y_j), donde

$$x_i = a + ih \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{y}$$
$$y_j = c + jk \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots, m$$



Las líneas $x = x_i$ e $y = y_j$ se llaman líneas de cuadricula y su intersecciones son los puntos de la red. En cada punto de red del interior de la cuadricula (x_i, y_j), con $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y con $j = 1, 2, \ldots, m-1$, utilizando la serie de Taylor en la variable x alrededor de x_i para generar la formula de diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \qquad (2.2)$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Análogamente se puede obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) \qquad (2.3)$$

donde $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$.

El uso de estas formulas en (2.1) nos permite expresar la ecuación de Poisson en los puntos (x_i, y_j) como

$$\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h^2}+\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{k^2}$$
$$=f(x_i,y_j)+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,y_j)+\frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i,\eta_j)$$

para toda $i = 1, 2,\ldots, n\text{-}1$ y $j = 1, 2,\ldots, m\text{-}1$ y las condiciones de frontera como

$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j)$ y $u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j)$ para $j = 0, 1, 2,\ldots, m;$
$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0)$ y $u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m)$ para $i = 1, 2,\ldots, n\text{-}1$

En la forma de la ecuación de diferencias, esto da como resultado el método de las diferencias centradas con un error de truncamiento local de orden $O(h^2+k^2)$:

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2+1\right]w_{i,j}-\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}\right)-\left(\frac{h}{k}\right)^2\left(w_{i,j+1}+w_{i,j-1}\right)=-h^2 f(x_i,y_j) \qquad (2.4)$$

Para toda $i= 1, 2,\ldots, n\text{-}1$ y $j = 1, 2,\ldots, m\text{-}1$ y

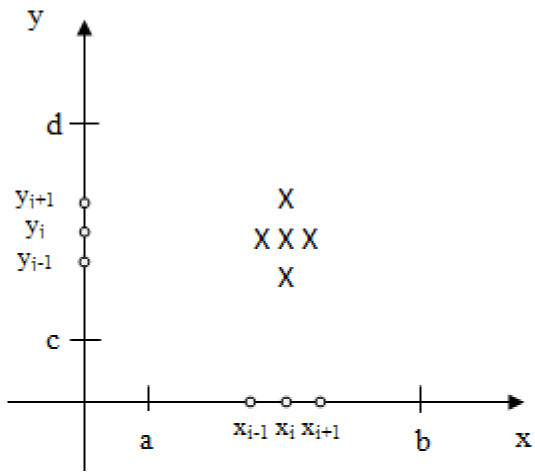
$$w_{0,j} = g(x_0, y_j) \text{ y } w_{n,j} = g(x_n, y_j) \text{ para } j = 0, 1, 2,\ldots, m; \qquad (2.5)$$
$$w_{i,0} = g(x_i, y_0) \text{ y } w_{i,m} = g(x_i, y_m) \text{ para } i = 1, 2,\ldots, n\text{-}1;$$

donde $w_{i,j}$ aproxima $u(x_i, y_j)$.

La ecuación en (2.4) contiene aproximaciones a $u(x, y)$ en los puntos

$$(x_{i-1}, y_j),\ (x_i, y_j),\ (x_{i+1}, y_j),\ (x_i, y_{j-1}), \text{ y } (x_i, y_{j+1}).$$

Al reproducir la porción de la cuadricula donde estos puntos están localizados, se observa que cada ecuación contiene aproximaciones en una región en forma de estrella alrededor de (x_i, y_j).

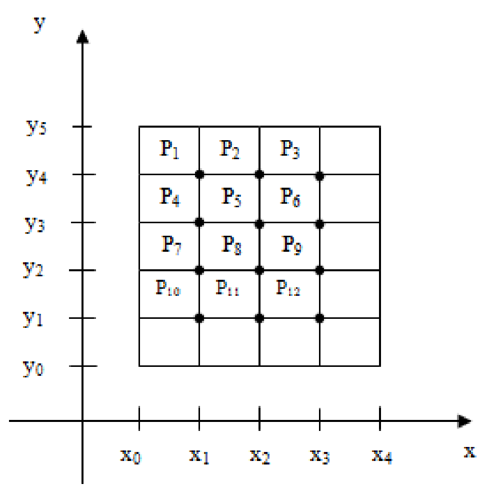


Si utilizamos la información de las condiciones de frontera (2.5) donde sea conveniente en el sistema dado en (2.4), es decir en todos los puntos (x_i, y_j) adyacentes a un punto de red en la frontera, tendremos un sistema lineal $(n - 1)(m - 1) \times (n - 1)(m - 1)$ cuyas incógnitas son las aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i, y_j)$ en el interior de los puntos de red.

El sistema lineal que contiene estas incógnitas puede expresarse eficientemente en cálculos matriciales si se introduce un remarcaje de los puntos interiores de la red. Uno recomendable consiste en utilizar

$$P_l = (x_i, y_j) \text{ y } w_l = w_{i,j}$$

donde $l = i + (m - 1 - j)(n - 1)$ para toda $i = 1, 2,\dots, n\text{-}1$ y $j = 1, 2,\dots, m\text{-}1$. Marcando consecutivamente los puntos de red de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Por ejemplo $n = 4$ y $m = 5$ remarcando se obtiene una cuadricula.



Al marcar los puntos de este modo se garantiza que el sistema necesario para determinar $w_{i,j}$ sea una matriz de banda con un ancho de banda de a lo mas $2n - 1$.

Algoritmo de Diferencias Finitas para la Ecuación de Poisson.

Para aproximar la solución a la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=f(x,y), \qquad a \le x \le b, \quad c \le y \le d,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(x,y)=g(x,y) \text{ si } x=a \text{ o } x=b \text{ y } c \le y \le d$$

y

$$u(x,y)=g(x,y) \text{ si } y=c \text{ o } y=d \text{ y } a \le x \le b$$

ENTRADA extremos a, b, c, d; enteros $m \ge 3$, $n \ge 3$; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i, y_i)$ para toda $i = 1,2,...,n-1,$ y para toda $j = 1,2,...,m-1$ o un mensaje de que excedió el número máximo de iteraciones.

Paso 1 Tome $h=(b-a)/n$

$k=(d-c)/m$

Paso 2 Para $i = 1,2,...,n-1,$ tome $x_i = a + ih.$

Paso 3 Para $j = 1,2,...,m-1,$ tome $y_i = c + jk.$

Paso 4 Para $i = 1,2,...,n-1$

para $j = 1,2,...,m-1,$ tome $w_{i,j} = 0$.

Paso 5 Tome $\lambda = h^2 / k^2;$

$\mu = 2(1+\lambda);$

$l = 1$.

Paso 6 Mientras $l \le N$ haga los pasos 7-20. (*Los pasos 7-20 se realizan iteraciones de Gauss-Seidel.*)

Paso 7 Tome $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1}) / \mu;$

$NORM = | z - w_{1,m-1} |;$

$w_{1,m-1} = z$

Paso 8 Para $i = 2,3,...,n-2$

Tome $z = (-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1}$

$+ w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2}) / \mu;$

Si $| w_{i,m-1} - z | > NORM$, entonces tome $NORM = |w_{i,m-1} - z|;$

Tome $w_{i,m-1} = z.$

Paso 9 Tome $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d)$

$+ w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2}) / \mu;$

Si $| w_{n-1,m-1} - z | > NORM$, entonces tome $NORM = | w_{n-1,m-1} - z |;$

Tome $w_{n-1,m-1} = z$.

Paso 10 Para $j = m-2,...,2,$ haga los pasos 11-13.

Paso 11 Tome $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + \lambda w_{2,j}) / \mu;$

Si $| w_{1,j} - z | > NORM$, entonces tome $NORM = | w_{1,j} - z |;$

Tome $w_{1,j} = z$

Paso 12 Para $i = 2,...,n-2,$

Tome $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j}$

$+\lambda w_{i,j-1})/\mu;$

si $|w_{i,j}-z|>NORM$, entonces tome $NORM=|w_{i,j}-z|;$

tome $w_{i,j}=z$

Paso 13 Tome $z=(-h^2 f(x_{n-1,}y_j)+g(b,y_j)+w_{n-2,j}$

$+\lambda w_{n-1,j+1}+\lambda w_{n-1,j-1})/\mu;$

Si $|w_{n-1,j}-z|>NORM$, entonces tome $NORM=|w_{n-1,j}-z|;$

tome $w_{n-1,j}=z.$

Paso 14 Tome $z=(-h^2 f(x_1,y_1)+g(a,y_1)+\lambda g(x_1,c)+\lambda w_{1,2}+w_{2,1})/\mu;$

Si $|w_{1,1}-z|>NORM$, entonces tome $NORM=|w_{1,1}-z|;$

Tome $w_{1,1}=z$

Paso 15 Para $i=2,...,n-2,$

Tome $z=(-h^2 f(x_i,y_1)+\lambda g(x_i,c)+w_{i-1,1}+\lambda w_{i,2}+w_{i+1,1})/\mu;$

Si $|w_{i,1}-z|>NORM$, entonces tome $NORM=|w_{i,1}-z|;$

Tome $w_{i,1}=z.$

Paso 16 Tome $z=(-h^2 f(x_{n-1},y_1)+g(b,y_1)+\lambda g(x_{n-1},c)+w_{n-2,1}+\lambda w_{n-1,2})/\mu;$

Si $|w_{n-1,1}-z|>NORM$, entonces tome $NORM=|w_{n-1,1}-z|;$

Tome $w_{n-1,1}=z.$

Paso 17 $NORM\leq TOL$, entonces haga los pasos 18-19.

Paso 18 Para $i=1,2,...,n-1$

Para $j=1,2,...,m-1$ SALIDA $(x_i,y_j,w_{i,j})$

Paso 19 PARAR. (*Procedimiento Terminado con Éxito.*)

Paso 20 Tome $l = l + 1$.

Paso 21 SALIDA (`Se excedió el número máximo de iteraciones`)

(*Procedimiento Terminado sin Éxito.*)

PARAR.

En el anexo 1, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson.

Por razones de simplicidad en el algoritmo se incorporo el procedimiento de iteración de Gauss-Seidel. Es recomendable que para sistemas más pequeños o más grande se utilicen otros tipos de procedimiento.

Ejemplo

Aproxime la solución de la siguiente Ecuación Diferencial Parcial Elíptica por medio del algoritmo de Diferencias Finitas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u(0,y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \qquad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$$

$$u(x,0) = \cos x, \quad u(x, \pi/2) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi$$

n=5 y m=5

Solución:

Resolviendo la E.D.P. por el método de Diferencias Finitas

$$f(x,y) = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \qquad g(x,y) = \cos x \cos y$$

Primero se identifica a = 0, b = π, c = 0, d = π/2. La tolerancia = 0.0001 y el número máximo de iteraciones = 30. Como n = 5 y m = 5, entonces h = π/5, k = π/10,

$$x_i = i\frac{\pi}{5}, \quad i = 1,2,3,4 \qquad y_j = j\frac{\pi}{10}, \quad j = 1,2,3,4$$

El resultado se muestra en la tabla siguiente

i	*j*	*x(i)*	*y(j)*	*w(i ,j)*
1	1	0.628319	0.314159	0.772235
1	2	0.628319	0.628319	0.658111
1	3	0.628319	0.942878	0.478613
1	4	0.628319	1.256637	0.251751
2	1	1.256637	0.314159	0.295239
2	2	1.256637	0.628319	0.251789
2	3	1.256637	0.942478	0.183214
2	4	1.256637	1.256637	0.096410
3	1	1.884956	0.314159	-0.295139
3	2	1.884956	0.628319	-0.251540
3	3	1.884956	0.942478	-0.182968
3	4	1.884956	1.256637	-0.096222
4	1	2.513274	0.314159	-0.772172
4	2	2.513274	0.628319	-0.657986
4	3	2.513274	0.942478	-0.478459
4	4	2.513274	1.256637	-0.251634

La tabla muestra los valores de la temperatura $u(x, y)$ en el eje. Por ejemplo $w(3, 2) = -0.251540$ representa la aproximación de $u(1.884956, 0.628319)$.

2.3 MÉTODOS DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE CALOR.

Consideremos la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,,\ 0 < x < t,\ t > 0 \tag{2.6}$$

sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

y

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l.$$

El método que usamos para aproximar la solución de este problema contiene diferencias finitas y se parece al utilizado en la sección anterior para la ecuación de Poisson.

Primero escogemos un entero $m > 0$ y sea $h=l/m$. Después escogemos un tamaño de peso de tiempo k. Los puntos de red para este caso son (x_i, t_j) donde $x_i = ih$ para $i = 0, 1, ..., m$ y $t_j = jk$, para $j = 0, 1, ...$.

El método de diferencias se obtiene al utilizar la serie de Taylor en t para formar el cociente de diferencias

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \tag{2.7}$$

para alguna $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ y la serie de Taylor en x para formar el cociente de diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{2.8}$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

La ecuación parcial parabólica (2.6) implica que en los puntos de red interiores (x_i, t_j) $\forall\ i = 1, 2, ..., m-1$ y $j = 1, 2, ...$ tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

así que el método que utilizan los cocientes de diferencias (2.7) y (2.8) es

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{2.9}$$

donde $w_{i,j}$ aproxima a $u(x_i, t_j)$.

El error de truncamiento local para esta ecuación de diferencias es

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{2.10}$$

Al resolver la ecuación (2.9) para $w_{i,j+1}$ obtenemos

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}\right), \tag{2.11}$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $j = 1, 2, \ldots$ Dado que la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ para todo $0 \leq x \leq l$, implica que $w_{i,0}=f(x_i)$, para toda $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ podemos usar estos valores para calcular el valor $w_{i,1}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Las condiciones adicionales $u(0, t)=0$ y $u(l, t)=0$ implican que $w_{0,1}=w_{m,1}=0$ y por tanto podemos determinar todos los elementos de la forma $w_{i,1}$. Si volvemos a aplicar el procedimiento una vez conocidas todas las aproximaciones $w_{i,1}$ podemos obtener en forma semejante los valores $w_{i,2}$, $w_{i,3}$,….

La naturaleza explicita del método de diferencias implica que la matriz (m-1) x (m-1) asociada a este sistema puede escribirse en la forma tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

donde $\lambda = \alpha^2 (k/h^2)$. Si utilizamos

$$\mathbf{w}^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{m-1}))^t$$

y

$$\mathbf{w}^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j})^t \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots$$

entonces la solución aproximada está dada por

$$\mathbf{w}^{(j)} = A\mathbf{w}^{(j-1)}, \ \forall\ j = 1, 2, \ldots$$

por tanto $\mathbf{w}^{(j)}$ se obtiene para $\mathbf{w}^{(j-1)}$ para una matriz simple de multiplicación a esto se le conoce con el nombre de método de diferencias progresivas.

Algoritmo de Diferencias Progresivas

Para aproximar la solución a la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 < t < T,$$

y las condiciones iníciales

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

ENTRDA extremo l; tiempo máximo T; constante α; enteros $m \geq 3$, $N \geq 1$.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i,t_j)$ para toda i=1,…,m-1 y j=1,…,N.

Paso 1 Tome $h=l/m$;

$k=T/N$;

$\lambda=\alpha^2 k/h^2$.

$w_m=0$.

Paso 2 Para i = 1,2,…,m-1, tome $w_i=f(ih)$. (*Valores iniciales.*)

Paso 3 Para j = 1,…,N haga los pasos 4-7

Paso 4 Tome $t=jk$; (t_j *actual*)

$$z_1 = (1-2\lambda)w_1 + \lambda w_2$$

Paso 5 Para i = 2,…, m-1, tome

$$z_i = (1-2\lambda)w_i + \lambda(w_{i+1} + w_{i-1})$$

Paso 6 Para i = 1,…, m - 1, tome $w_i=z_i$

Paso 7 SALIDA (t); (Nota:$t=t_j$)

Para $i = 1,2,\ldots, m$-1 tome $x=ih$;

SALIDA (x, $w_{i,}$) (Nota: $w_i=w_{i,j}$)

Paso 8 PARAR. (*Procedimiento Terminado*)

En el anexo 2, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del método de diferencias progresivas para la ecuación de calor.

A pesar de la simplicidad para obtener soluciones, el método es inestable para λ > 1/2. Por tanto se propone un segundo método.

Ejemplo

Aproxime la solución a la Ecuación Diferencial Parcial usando el algoritmo de Diferencias Progresivas.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = sen\frac{\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 2$$

Use $m = 4$, $T = 0.1$ y $N = 2$

Solución:

Resolviendo la E.D.P. por el método de Diferencias Progresivas

$$f(x) = sen\frac{\pi}{2}x$$

Identificamos $\alpha = 1$, $l = 2$ y $T = 0.1$. Como $m = 4$ y $N = 2$, entonces $h = 2/4 = 0.5$, $k = 0.1/2 = 0.05$, $\lambda = 0.2$,

$$x_i = i\,0.5, \quad i = 1,2,3 \qquad t_j = j\,0.05, \quad j = 1,2$$

El resultado se muestra en la siguiente tabla:

i	***j***	***x(i)***	***t(j)***	***w(i, j)***
1	1	0.5	0.05	0.6
2	1	1	0.05	7.34764e-017
3	1	1.5	0.05	-0.6
1	2	0.5	0.1	0.36
2	2	1	0.1	4.40858e-017
3	2	1.5	0.1	-0.36

En la tabla se muestran los valores de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la varilla en el instante t. Por ejemplo $w(3, 1) = -0.6$ representa la aproximación de $u(1.5, 0.05)$.

Para obtener un método que sea incondicionalmente estable, consideremos un método de diferencias implícitas que se obtiene al usar el cociente de diferencias regresivas para $(\partial u/\partial t)(x_i, t_j)$, en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

donde μ_j esta en (t_{j-1}, t_j). Al sustituir esta ecuación, junto con la ecuación (2.8) para $\partial^2 u/\partial x^2$, en la ecuación diferencial parcial, obtenemos

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

para alguna $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. El método de diferencias regresivas que resulta es

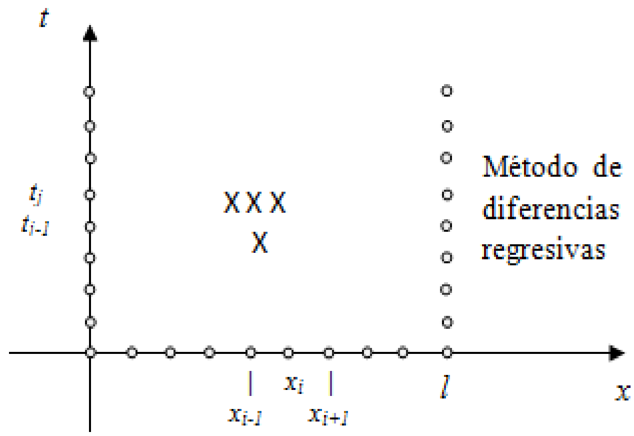
$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (2.12)$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, m-1$, y $j = 1, 2, \ldots$

El método de diferencias regresivas incluye, en un paso común, los puntos de red

$$(x_i, t_j), (x_i, t_{j-1}), (x_{i-1}, t_j), \text{ y } (x_{i+1}, t_j),$$

y, en forma de cuadricula, contiene aproximaciones en los puntos marcados con X



Las condiciones iniciales y de fronteras relacionadas con el problema suministran información en los puntos circulados de red.

Si una vez más denotamos con λ la cantidad $\alpha^2(k/h^2)$ el método de diferencias regresivas se convierte en

$$(1+2\lambda)\, w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

para toda $i = 1, 2,\ldots, m-1$, y $j = 1, 2,\ldots$. Aplicando el hecho de que $w_{i,0} = f(x_i)$ para toda $i = 1, 2,\ldots, m-1$ y $w_{m,j}=0$ para toda $j = 1, 2,\ldots$, este método de diferencias tiene la representación matricial:

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

o $A\mathbf{w}^{(j)}=\mathbf{w}^{(j-1)}$ para toda $j = 1, 2,\ldots$

Así debemos resolver ahora un sistema lineal para obtener $\mathbf{w}^{(j)}$ a partir de $\mathbf{w}^{(j-1)}$. Dado que $\lambda > 0$, la matriz A es definida positiva y estrictamente dominante en forma diagonal, además de ser tridiagonal. Para resolver este sistema podemos utilizar la factorización de Crout para sistemas lineales tridiagonales.

Algoritmo de Diferencias Regresivas

Para aproximar la solución a la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0, \qquad 0<x<l, \qquad 0<t<T$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \qquad 0<t<T,$$

y a las condiciones iníciales

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le l:$$

ENTRADA extremo l; tiempo máximo T; constante α; enteros $m\ge 3$, $N\ge 1$.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i,t_j)$ para toda $i=1,2,...,m-1$ y $j=1,2,...,N$.

Paso 1 Tome $h=l/m$;

$k=T/N$;

$\lambda=\alpha^2 k/h^2$

Paso 2 Para $i=1,2,...,m-1$, tome $w_i=f(ih)$. (*Valores iníciales*)

Paso 3 Tome $l_1=1+2\lambda$;

$u_1=-\lambda/l_1$.

Paso 4 Para $i=2,...,m-2$, tome $l_i=1+2\lambda+\lambda u_{i-1}$;

$u_i=-\lambda/l_i$.

Paso 5 Tome $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$.

Paso 6 Para $j = 1,...,N,$ haga los pasos 7-11.

Paso 7 Tome $t = jk$; (t_j *actual.*)

$z_1 = w_1 / l_1.$

Paso 8 Para $i = 2,...,m-1,$ tome $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1}) / l_i$.

Paso 9 Tome $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Paso 10 Para $i = m-2,..., 1,$ tome $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Paso 11 SALIDA (t); (*Nota:* $t=t_j$)

Para $i = 1,2,...,m-1,$ tome $x = ih$;

SALIDA (x, w_i). (Nota: $w_i = w_{i,j}$)

Paso 12 PARAR. (*Procedimiento Terminado*.)

En el anexo 3, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del método de diferencias regresivas para la ecuación de calor.

Ejemplo

Aproxime la solución a la Ecuación Diferencial Parcial usando el algoritmo de Diferencias Regresivas.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = sen\frac{\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 2$$

Use $m = 4$, $T = 0.1$ y $N = 2$

Solución:

Resolviendo la E.D.P. por el método de Diferencias Regresivas

$$f(x) = sen\frac{\pi}{2}x$$

Identificamos α = 1, l = 2 y T = 0.1. Como m = 4 y N = 2, entonces h = 2/4 = 0.5, k = 0.1/2 = 0.05, λ = 0.2,

$$x_i = i\,0.5, \quad i = 1,2,3 \qquad t_j = j\,0.05, \quad j = 1,2$$

El resultado se muestra en la siguiente tabla:

i	***j***	***x(i)***	***t(j)***	***w(i, j)***
1	1	0.5	0.05	0.632952
2	1	1	0.05	0.895129
3	1	1.5	0.05	0.632952
1	2	0.5	0.1	0.566574
2	2	1	0.1	0.801256
3	2	1.5	0.1	0.566574

En la tabla se muestran los valores de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la varilla en el instante t. Por ejemplo $w(3, 1)$ = 0.632952 representa la aproximación de $u(1.5, 0.05)$.

La debilidad del método de diferencias regresivas radica en el hecho de que el error local de truncamiento tiene una parte con orden $O(k)$, la cual requiere hacer mucho más pequeño los intervalos de tiempo que los de espacio. Sin duda convendría contar con un procedimiento cuyo error de truncamiento local fuese de $O(k^2+h^2)$. El primer paso en esta dirección consiste en utilizar una ecuación de diferencias que tenga un error de $O(k^2)$ para $u_t(x, t)$ en vez de las que hemos utilizado antes, cuyo error fue de $O(k)$. Esto podemos hacerlo usando la serie de Taylor en t para la función $u(x, t)$ en punto (x_i, t_j) y evaluando después en (x_i, t_{j+1}) y en (x_i, t_{j-1}) para obtener la formula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1})}{2k} + \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \mu_j)$$

donde $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$. El método de diferencias que resulta al sustituir esto y el cociente común de diferencias para $(\partial^2 u/\partial x^2)$ en la ecuación diferencial recibe el nombre de método de Richardson y esta dado por

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \qquad (2.14)$$

El método de Richardson tiene un error de truncamiento local de orden $O(k^2+h^2)$, pero lamentablemente también representa serios problemas de estabilidad.

Un método más prometedor se deriva al promediar el método de diferencias progresivas en el j-ésimo paso en t.

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

que tiene el error de truncamiento local

$$\tau_F = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2)$$

y el método de diferencias regresivas en el $(j+1)$-ésimo paso en t

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

que tiene un error local de truncamiento

$$\tau_B = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) + O(h^2)$$

si suponemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

entonces el método de diferencias promediadas

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0$$

tiene un error de truncamiento local de orden $O(k^2+h^2)$, siempre y cuando se cumplan las condiciones normales de diferenciabilidad. A esto se le llama método de Crank- Nicolson y está representado en la forma matricial

$$A\mathbf{w}^{(j+1)} = B\mathbf{w}^{(j)},\ \text{ para cada } j = 0, 1, 2\ldots \tag{2.15}$$

donde

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2},\ \mathbf{w}^{(j)}=(w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j})^t,$$

y las matrices A y B están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

La matriz A es definida positiva, estrictamente dominante en forma diagonal y tridiagonal.

Algoritmo de Crank-Nicolson

Para aproximar la solución a la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 < t < T,$$

y las condiciones iníciales

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

ENTRDA extremo l; tiempo máximo T; constante α; enteros $m \geq 3$, $N \geq 1$.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i,t_j)$ para toda $i = 1,\ldots,m-1$ y $j = 1,\ldots,N$.

Paso 1 Tome $h=l/m;$

$k=T/N;$

$\lambda=\alpha^2 k/h^2.$

$w_m=0.$

Paso 2 Para $i = 1,2,\ldots,m-1$,tome $w_i=f(ih)$. (*Valores iniciales.*)

Paso 3 Tome $l_1=1+\lambda$;

$u_1= - \lambda/(2l_1)$.

Paso 4 Para $i = 2,\ldots,m-2$ tome $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1}/2$;

$u_i = -\lambda/(2l_i)$.

Paso 5 Tome $l_{m-1}=1 + \lambda + \lambda u_{m-2}/2$.

Paso 6 Para $j = 1,\ldots,N$ haga los pasos 7-11

Paso 7 Tome $t = jk$; (t_j *actual*)

$$z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2\right] \Big/ l_1$$

Paso 8 Para $i = 2,\ldots,m-1$, tome

$$z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1})\right] \Big/ l_i$$

Paso 9 Tome $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Paso 10 para $i = m-2,\ldots,1$, tome $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$

Paso 11 SALIDA (t); (Nota: $t = t_j$)

Para $i=1,2,\ldots,m-1$ tome $x=ih$;

SALIDA (x, w_i) (Nota: $w_i=w_{i,j}$)

Paso 12 PARAR. (*Procedimiento Terminado*)

En el anexo 4, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del método de Crank-Nicolson para la ecuación de calor.

Ejemplo

Aproxime la solución a la Ecuación Diferencial Parcial usando el algoritmo de Crank-Nicolson.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x,0) = sen\frac{\pi}{2}x, \quad 0 \le x \le 2$$

Use $m = 4$, $T = 0.01$ y $N = 2$

Solución:

Resolviendo la E.D.P. por el método de Crank-Nicolson

$$f(x) = sen\frac{\pi}{2}x$$

Identificamos $\alpha = 1$, $l = 2$ y $T = 0.1$. Como $m = 4$ y $N = 2$, entonces $h = 0.5$, $k = 0.05$, $\lambda = 0.2$,

$$x_i = i\,0.5, \quad i = 1,2,3 \qquad t_j = j\,0.05, \quad j = 1,2$$

El resultado se muestra en la siguiente tabla:

i	***j***	***x(i)***	***t(j)***	***w(i, j)***
1	1	0.5	0.05	0.628848
2	1	1	0.05	0.889326
3	1	1.5	0.05	0.628848
1	2	0.5	0.1	0.559251
2	2	1	0.1	0.790900
3	2	1.5	0.1	0.559251

En la tabla se muestran los valores de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la varilla en el instante t. Por ejemplo $w(3, 1) = 0.628848$ representa la aproximación de $u(1.5, 0.05)$.

2.4 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

Consideremos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{2.16}$$

sujeta a las condiciones

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \ \text{ para } \ t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \ \text{y} \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = g(x), \ \text{para} \ 0 \le x \le l$$

donde α es una constante.

Para establecer el método de diferencias finitas, se selecciona un entero $m > 0$ y el tamaño de paso de tiempo $k > 0$. Con $h=l/m$ los puntos de red (x_i, t_j), son

$$x_i = ih \ \text{y} \ t_j = jk$$

para cada $i = 0,1,\ldots,m$ y $j = 0,1,\ldots$. En cualquier punto de red interior (x_i, t_j), la ecuación de onda se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = 0, \tag{2.17}$$

El método se obtiene utilizando el cociente de diferencias centradas en las segundas derivadas parciales dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j)=\frac{u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})}{k^2}-\frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j)$$

donde $\mu_j \in (t_{j-1},t_{j+1})$ y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)=\frac{u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)}{h^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j)$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1},x_{i+1})$. Al sustituir estas expresiones en la ecuación, obtenemos

$$\frac{u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})}{k^2}-\alpha^2\frac{u(x_{i+1},t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_{i-1},t_j)}{h^2}$$
$$=\frac{1}{12}\left[k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j)-\alpha^2 h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j)\right]$$

si ignoramos el término de error

$$\tau_{i,j}=\frac{1}{12}\left[k^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j)-\alpha^2 h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i,t_j)\right]$$

obtenemos la ecuación de diferencias

$$\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{k^2}-\alpha^2\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}=0$$

Si $\lambda=\alpha k/h$ podemos escribir la ecuación de diferencias como

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0$$

y resolver para $w_{i,j+1}$, o sea la aproximación más avanzada del paso de tiempo para obtener

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1} \tag{2.18}$$

esta ecuación se aplica para toda $i = 1,2,\ldots,m-1$ y $j=1,2,\ldots$. Las condiciones de frontera nos dan

$$w_{0,j}=w_{m,j}=0 \text{ para cada } j = 1,2,\ldots \tag{2.19}$$

y la condición inicial implica que

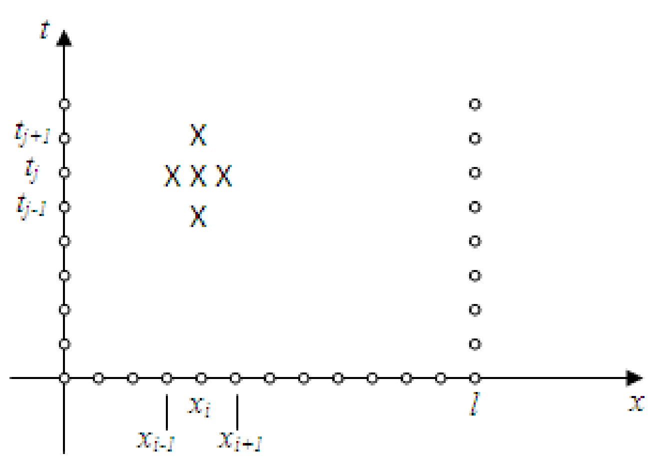
$$w_{i,0}=f(x_i) \text{ para cada } i = 1,2,\ldots,m-1 \tag{2.20}$$

Al escribir este conjunto de ecuaciones en forma matricial obtenemos

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Las ecuaciones (2.18) y (2.19) implican que el $(j+1)$-ésimo paso de tiempo requiere valores de los j-ésimo y $(j-1)$-ésimo pasos. Esto produce un pequeño problema inicial por que los valores de $j = 0$ están dados por la ecuación (2.20), pero los valores de $j = 1$ que se necesitan en la ecuación para calcular $w_{i,2}$ deben obtenerse de la condición de velocidad inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad 0 \le x \le l$$



Un procedimiento consiste en reemplazar la $\partial u/\partial t$ por una aproximación de diferencias progresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)=\frac{u(x_i,t_1)-u(x_i,0)}{k}-\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\tilde{\mu}_i) \tag{2.22}$$

para cierta $\tilde{\mu}_i$ en $(0, t_1)$. Al resolver para $u(x_i, t_1)$ obtenemos

$$u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\tilde{\mu}_i)=u(x_i,0)+kg(x_i,0)+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\tilde{\mu}_i)$$

En consecuencia

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i),\ \text{ para cada } i = 1,2,\ldots, m\text{-}1 \tag{2.23}$$

Sin embargo, esto da una aproximación con un error de solo $O(k)$. Podemos obtener una mejor aproximación a $u(x_i, 0)$. Considere la ecuación

$$u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0)+\frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\hat{\mu}_i)$$

Para cierta $\hat{\mu}_i$ en $(0, t_1)$ que proviene de desarrollar $u(x_i, t_1)$ con el segundo polinomio de Maclaurin en t si f'' existe entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,0)=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,0)=\alpha^2\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)=\alpha^2 f''(x_i)$$

y

$$u(x_i,t_1)=u(x_i,0)+kg(x_i)+\frac{\alpha^2k^2}{2}f''(x_i)+\frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,\hat{\mu}_i)$$

lo que produce una aproximación con error $O(k^3)$.

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2k^2}{2}f''(x_i)$$

Si $f \in C^4[0,1]$ pero no disponemos de $f''(x_i)$ podemos usar la ecuación en diferencias para escribir

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\tilde{\xi}_i)$$

para alguna $\tilde{\xi}_i$ en (x_{i-1}, x_{i+1}). Esto implica que

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2\alpha^2}{2h^2}\left[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})\right] + O(k^3 + h^2k^2)$$

Si $\lambda=(k\alpha/h)$ entonces

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})\right] + O(k^3 + h^2k^2) \\ &= (1-\lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2k^2) \end{aligned}$$

Así, podemos usar la ecuación en diferencias

$$w_{i,1} = (1-\lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) \tag{2.24}$$

para calcular $w_{i,1}$, para cada i=1,2,…,m-1

Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de onda

Para aproximar la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 < t < T,$$

y las condiciones iníciales

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le l:$$

ENTRADA extremo l; tiempo máximo T; constante α; enteros $m \ge 2$, $N \ge 2$.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ a $u(x_i, t_j)$ para toda $i = 0,1,\dots, m$ y $j = 0,1,\dots, N$.

Paso 1 Tome $h=l/m;$

$k=T/N;$

$\lambda=k\alpha/h.$

Paso 2 Para $j = 1,2,\dots, N$, tome $w_{0,j} = 0$;

$w_{m,j}=0.$

Paso 3 Tome $w_{0,0}=f(0);$

$w_{m,0}=f(l).$

Paso 4 Para $i = 1,2,\dots,m-1$ (inicialice para $t=0$ y $t=k$.)

Tome $w_{i,0}=f(hi)$;

$$w_{i,1}=(1-\lambda^2)f(ih)+\frac{\lambda^2}{2}\left[f((1+i))h+f((i-1)h)\right]+kg(ih).$$

Paso 5 Para $j =1,\dots, N-1$ (*Realice una multiplicación de Matrices*.)

Para $i =1,2,\dots, m-1$

Tome $w_{i,j+1}=2(1 - \lambda^2)w_{i,j}+\lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + w_{i,j-1}$

Paso 6 Para $j = 0,1,\dots, N$

Tome $t=jk$;

Para $i = 0,1,\dots,m$

Tome $x=ih$;

SALIDA ($x, t, w_{i,j}$)

Paso 7 PARAR. (*Procedimiento Terminado*)

En el anexo 5, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del método de diferencias finitas para la ecuación de onda.

Al igual que en el caso del método de diferencias progresivas para la ecuación de calor, el método de las diferencias finitas explicitas para la ecuación de onda también presenta problema de estabilidad. De hecho para que el método sea estable es necesario que $\lambda = \alpha k/h \le 1$. El método explicito que se da en el algoritmo, con $\lambda \le 1$, es de $O(h^2+k^2)$ convergente si f y g son suficientemente diferenciables.

Ejemplo

Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t;$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t,$$
$$u(x,0) = sen\, \pi x, \qquad 0 \le x \le 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le 1,$$

Usando el algoritmo de diferencias finitas con $m = 4$, $N = 4$ y $T = 1$

Solución:

Resolviendo la E.D.P. por el método de diferencias finitas

Se hacen las identificaciones $\alpha = 1$, $l = 1$ y $T = 1$. Con $m = 4$ y $N = 4$ se obtiene h = 0.25, k = 0.25 y $\lambda = 1$.

Con $g(x) = 0$ $\qquad f(x) = sen\, \pi x$

El resultado se muestra en la siguiente tabla:

i	***j***	***x***	***t***	***w(i, j)***
0	0	0	0	0
1	0	0.25	0	0.707107
2	0	0.5	0	1
3	0	0.75	0	0.707107
4	0	1	0	1.22461e-016
0	1	0	0.25	0
1	1	0.25	0.25	0.5
2	1	0.5	0.25	0.707107
3	1	0.75	0.25	0.5
4	1	1	0.25	0
0	2	0	0.5	0
1	2	0.25	0.5	0
2	2	0.5	0.5	0
3	2	0.75	0.5	-1.11022e-016
4	2	1	0.5	0
0	3	0	0.75	0
1	3	0.25	0.75	-0.5
2	3	0.5	0.75	-0.707107
3	3	0.75	0.75	-0.5
4	3	1	0.75	0
0	4	0	1	0
1	4	0.25	1	-0.707107
2	4	0.5	1	-1
3	4	0.75	1	-0.707107
4	4	1	1	0

En la tabla se muestra los valores del desplazamiento vertical $u(x, t)$ de la cuerda en movimiento de un punto x en el instante t. Por ejemplo $w(1, 4) = -0.707107$ representa la aproximación de $u(0.25, 1)$.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones de la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

Revisaremos tres tipos de aplicaciones: La solución a un problema de ecuación de Poisson mediante el método de diferencias finitas, la solución a un problema de ecuación de calor mediante los tres métodos anteriormente estudiados, la solución a un problema de ecuación de onda el cual se resolverá por el método de diferencias finitas.

3.2 TEMPERATURA DE ESTADO ESTABLE DE UNA PLACA RECTANGULAR DE PLATA.

Una placa rectangular de plata de 6×8 cm tiene calor que se genera uniformemente en todos los puntos con una rapidez de q=1.5 cal/cm^3.s. Representemos con x la distancia a lo largo del borde de la placa de una longitud de 6 cm, y con y la distancia a lo largo del borde de la placa de una longitud de 5 cm. Supóngase que la temperatura u a lo largo de los bordes se mantiene en la siguiente temperatura:

$$u(x,0) = x(6-x), \quad u(x,5) = 0, \quad 0 \le x \le 6,$$
$$u(0,y) = y(5-y), \quad u(6,y) = 0, \quad 0 \le y \le 5,$$

donde el origen se encuentra en una esquina de la placa con las coordenadas (0,0) y los bordes se hallan a lo largo de los ejes positivos x, y**.** la temperatura de estado estable $u = u(x,y)$ satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{q}{k}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < y < 5,$$

donde K**,** la conductividad térmica, es 1.04 cal/cm**.**deg**.**seg. Aproxime la temperatura $u(x,y)$ con h = 0.4, k = 1/3.

Solución:

Aplicando el método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson con

$$f(x,y) = -\frac{75}{52} \qquad g(x,y) = \frac{(6x+5y)(6-x)(5-y)}{30}$$

Se realizan las identificaciones de $a = 0$, $b = 6$, $c = 0$, $d = 5$. Como $n = 15$ y $m = 15$ entonces $h = 0.4$ y $k = 1/3$.

$$x_i = i0.4, \quad i = 1, 2, \ldots, 14 \qquad y_j = j\frac{1}{3}, \quad j = 1, 2, \ldots, 14$$

Se obtienen los resultados aproximados corriendo el programa correspondiente al método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson, con tolerancia 0.000001 y número máximo de iteraciones *max* = 500 en la siguiente tabla:

i	***j***	***x*(*i*)**	***y*(*j*)**	***w*(*i, j*)**
12	1	4.8	0.333333	5.432252
12	2	4.8	0.666667	5.149277
12	3	4.8	1	4.895585
12	4	4.8	1.333333	4.657698
12	5	4.8	1.666667	4.423847
12	6	4.8	2	4.183512
12	7	4.8	2.333333	3.926974
12	8	4.8	2.666667	3.644889
12	9	4.8	3	3.327839
12	10	4.8	3.333333	2.965840
12	11	4.8	3.666667	2.547723
12	12	4.8	4	2.060642
12	13	4.8	4.333333	1.487576
12	14	4.8	4.666667	0.809191

La tabla muestra algunos de los valores de la temperatura $u(x, y)$ de la placa rectangular de plata. Por ejemplo $w(12, 6) = 4.188512$ representa la aproximación de $u(4.8, 2)$.

3.3 TEMPERATURA DE UNA VARILLA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE Y DE UN MATERIAL CONDUCTOR HOMOGÉNEO.

La temperatura $u(x, t)$ de una varilla larga y delgada, de sección transversal constante y de un material conductor homogéneo está regida por la ecuación unidimensional de calor

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < l$$

Donde l es la longitud ρ es la densidad, γ es el calor específico y K es la conductividad térmica de la varilla. Suponga que

l = 20 cm K = 1.10 cal/cm·deg· s
ρ = 2.7g/cm^3 γ = 0.22 cal/g·deg

Si los extremos de la varilla se mantienen en 0 ^{o}C, entonces

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le 10$$

Suponga que la distribución inicial de la temperatura está dada por

$$u(x,0) = 0.5x(20 - x), \qquad 0 \le x \le l$$

Aproxime la distribución de la temperatura con m = 10 y N = 10

Solución:

$$f(x) = 0.5x(20 - x)$$

Se realizan las identificaciones de l = 20, α = 1.3608, T = 10. Como m =10 y N = 10 entonces h = 2 y k = 1 y λ = 0.4629

$$x_i = i2, \quad i = 1,\ldots,9 \qquad t_j = j1, \quad j = 1,\ldots,10$$

Resolviendo la ecuación por los métodos de diferencias progresivas, regresivas y Crank-Nicolson se obtienen los siguientes resultados:

i	***j***	***x(i)***	***t(j)***	***Método De Diferencias Progresivas*** ***w(i, j)***	***Método De Diferencias Regresivas*** ***w(i, j)***	***Método De Crank-Nicolson*** ***w(i, j)***
1	10	2	10	10.0422	10.298	10.1667
2	10	4	10	19.0876	19.5427	19.3147
3	10	6	10	26.2625	26.8226	26.5444
4	10	8	10	30.8515	31.461	31.1668
5	10	10	10	32.4406	33.052	32.7555
6	10	12	10	30.8515	31.461	31.1668
7	10	14	10	26.2625	26.8226	26.5444
8	10	16	10	19.0876	19.5427	19.3147
9	10	18	10	10.0422	10.298	10.1667

El problema fue resuelto por los tres métodos anteriormente estudiados para la solución de una ecuación de calor. La tabla muestra algunos de los valores de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la varilla en t instante. Por ejemplo, para el método de Crank-Nicolson, $w(6, 10) = 31.1668$ representa la aproximación de $u(12, 10)$.

3.4 VOLTAJE EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN ELÉCTRICA.

En una línea de transmisión eléctrica de longitud l, que conduce una corriente alterna de alta frecuencia (llamada línea sin "perdida"), el voltaje V se describe por medio de

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t\,;$$

Donde L es la inductancia por longitud unitaria y C es la capacitancia por longitud unitaria. Suponga que la línea tiene 200 pies de largo y que las constantes C y L están dadas por

C=0.1 farads/pies y L=0.3 henries/pies

suponga, además, que el voltaje satisface

$$V(0,t) = V(200,t) = 0, \quad 0 < t;$$
$$V(x,0) = 110 sen\frac{\pi x}{200}, \quad 0 \le x \le 200;$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 200;$$

Aproxime el voltaje en t = 0.2 y t = 0.5 con h = 10 y k = 0.1

Solución:

Aplicando el método de diferencias finitas para la ecuación de onda con

$$f(x) = 110 sen\frac{\pi x}{200} \qquad g(x) = 0$$

Se realizan las identificaciones de l = 200, α = 5.7735, T = 0.5. Como m =20 y N = 5 entonces h = 10 y k = 0.1.

$$x_i = i10, \quad i = 0,1,\ldots,20 \qquad t_j = j0.1, \quad j = 0,1,\ldots,5$$

Se obtienen los resultados aproximados corriendo el programa correspondiente al método de diferencias finitas para la ecuación de onda, en las siguientes tablas:

Para $t = 0.2$

i	***j***	***x*(*i*)**	***t*(*j*)**	***w*(*i, j*)**
0	2	0	0.2	0
1	2	10	0.2	17.205
2	2	20	0.2	33.9863
3	2	30	0.2	49.9308
4	2	40	0.2	64.6458
5	2	50	0.2	77.769
6	2	60	0.2	88.9773
7	2	70	0.2	97.9946
8	2	80	0.2	104.599
9	2	90	0.2	108.628
10	2	100	0.2	109.982
11	2	110	0.2	108.628
12	2	120	0.2	104.599
13	2	130	0.2	97.9946
14	2	140	0.2	88.9773
15	2	150	0.2	77.769
16	2	160	0.2	64.6458
17	2	170	0.2	49.9308
18	2	180	0.2	33.9863
19	2	190	0.2	17.205
20	2	200	0.2	0

La tabla muestra los valores del voltaje $V(x, t)$ en la línea de transmisión eléctrica cuando $t = 0.2$. Por ejemplo $w(12, 2) = 104.599$ representa la aproximación de $V(120, 0.2)$.

Para $t = 0.5$

i	***j***	***x*(*i*)**	***t*(*j*)**	***w*(*i*, *j*)**
0	5	0	0.5	0
1	5	10	0.5	17.1901
2	5	20	0.5	33.957
3	5	30	0.5	49.8877
4	5	40	0.5	64.5901
5	5	50	0.5	77.702
6	5	60	0.5	88.9006
7	5	70	0.5	97.9102
8	5	80	0.5	104.509
9	5	90	0.5	108.334
10	5	100	0.5	109.887
11	5	110	0.5	108.334
12	5	120	0.5	104.509
13	5	130	0.5	97.9102
14	5	140	0.5	88.9006
15	5	150	0.5	77.702
16	5	160	0.5	64.5901
17	5	170	0.5	49.8877
18	5	180	0.5	33.957
19	5	190	0.5	17.1901
20	5	200	0.5	0

La tabla muestra los valores del voltaje $V(x, t)$ en la línea de transmisión eléctrica cuando $t = 0.5$. Por ejemplo $w(12, 5) = 104.509$ representa la aproximación de $V(120, 0.5)$.

CONCLUSIONES

- Las Ecuaciones en Derivadas Parciales constituyen uno de los principales campos de estudio en matemáticas, debido a su creciente aplicación en física, ingeniería y otras ciencias.

- El Método de Diferencias Finitas es una herramienta útil para calcular aproximaciones a las soluciones de algunas EDP, en particular la Ecuación de Poisson, Ecuación de Calor y la Ecuación de Onda.

- La ecuación de Poisson en un rectángulo requiere la solución de un sistema lineal grande y disperso para el cual recomendamos usar los métodos iterativos, como el de Gauss-Seidel.

- Describimos tres métodos de diferencias finitas para la ecuación de Calor. El método de diferencias progresivas presento problemas de estabilidad de ahí que hayamos explicado también los métodos de diferencias regresivas y de Crank-Nicolson.

- Para el caso de la ecuación de Calor se observó que generalmente el método más adecuado es el de Crank-Nicolson, ya que su convergencia no depende del valor de λ utilizado.

- El método de diferencias finitas para la ecuación de onda es explicito y también puede presentar problemas de estabilidad para ciertas selecciones de discretizaciones en el tiempo y el espacio. El método de diferencias finitas desarrollado presenta convergencia siempre que $\lambda \leq 1$.

ANEXOS

ANEXO 1

PROGRAMA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE POISSON.

```
%Programa para aproximar la solución a la ecuación de Poisson
%mediante el método de diferencias finitas
%sujeta a condiciones de frontera

function diffinitas (a,b,c,d,n,m,tol,max)

%Datos
%a,b,c,d son los extremos del intervalo
%n,m las partes en que se divide el intervalo [a,b] y [c,d]
%tol es la tolerancia
%max es el número máximo de iteraciones

%Resultado
%w(i,j) aproximación a u(xi,yi)

a=input('\n Introduzca el extremo izquierdo de x, a: ');
b=input('\n Introduzca el extremo derecho de x, b: ');
c=input('\n Introduzca el extremo izquierdo de y, c: ');
d=input('\n Introduzca el extremo derecho de y, d: ');
n=input('\n Introduzca la parte en que se divide [a,b], n>=3,
n: ');
m=input('\n Introduzca la parte en que se divide [c,d], m>=3,
m: ');
tol=input('\n Introduzca la tolerancia, tol: ');
max=input('\n Introduzca el número de iteraciones, max: ');
h=(b-a)/n;
k=(d-c)/m;
for i=1:n-1
   x(i)=a+i*h;
end
for j=1:m-1
   y(j)=c+j*k;
end
for i=1:n-1
   for j=1:m-1
```

```
      w(i,j)=0;
   end
end
l=(h^2)/(k^2);
u=2*(1+l);
t=1;
fprintf('\n i  j     x(i)       y(j)     w(i,j)');
while t<=max
   p=feval('f',x(1),y(m-1));
   q=feval('g',a,y(m-1));
   r=feval('g',x(1),d);

   z=(-(h^2)*p+q+l*r+l*w(1,m-2)+w(2,m-1))/u;
   norma=abs(z-w(1,m-1));
   w(1,m-1)=z;
   for i=2:n-2
      e=feval('f',x(i),y(m-1));
      s=feval('g',x(i),d);

      z=(-(h^2)*e+l*s+w(i-1,m-1)+w(i+1,m-1)+l*w(i,m-2))/u;
      if abs(w(i,m-1)-z)> norma
         norma=abs(w(i,m-1)-z);
         end
         w(i,m-1)=z;

   end
   o=feval('f',x(n-1),y(m-1));
   v=feval('g',b,y(m-1));
   s1=feval('g',x(n-1),d);
   z=(-(h^2)*o+v+l*s1+w(n-2,m-1)+l*w(n-1,m-2))/u;
   if abs(w(n-1,m-1)-z)> norma
      norma=abs(w(n-1,m-1)-z);
      end
      w(n-1,m-1)=z;

   for j=m-2:-1:2
      p1=feval('f',x(1),y(j));
      q1=feval('g',a,y(j));

      z=(-(h^2)*p1+q1+l*w(1,j+1)+l*w(1,j-1)+w(2,j))/u;
      if abs(w(1,j)-z)>norma
         norma=abs(w(1,j)-z);
         end
         w(1,j)=z;
```

```
      for i=2:n-2
         r1=feval('f',x(i),y(j));

         z=(-(h^2)*r1+w(i-1,j)+l*w(i,j+1)+w(i+1,j)+l*w(i,j-
1))/u;
         if abs(w(i,j)-z)>norma
            norma=abs(w(i,j)-z);
            end
            w(i,j)=z;

      end
      p2=feval('f',x(n-1),y(j));
      q2=feval('g',b,y(j));

      z=(-(h^2)*p2+q2+w(n-2,j)+l*w(n-1,j+1)+l*w(n-1,j-1))/u;
      if abs(w(n-1,j)-z)>norma
         norma=abs(w(n-1,j)-z);
         end
         w(n-1,j)=z;

   end
   p3=feval('f',x(1),y(1));
   q3=feval('g',a,y(1));
   r2=feval('g',x(1),c);

   z=(-(h^2)*p3+q3+l*r2+l*w(1,2)+w(2,1))/u;
   if abs(w(1,1)-z)> norma
      norma=abs(w(1,1)-z);
      end
      w(1,1)=z;

   for i=2:n-2
      p4=feval('f',x(i),y(1));
      q4=feval('g',x(i),c);

      z=(-(h^2)*p4+l*q4+w(i-1,1)+l*w(i,2)+w(i+1,1))/u;
      if abs(w(i,1)-z)>norma
         norma=abs(w(i,1)-z);
         end
         w(i,1)=z;

   end
   p5=feval('f',x(n-1),y(1));
   q5=feval('g',b,y(1));
   r3=feval('g',x(n-1),c);
```

```
   z=(-(h^2)*p5+q5+l*r3+w(n-2,1)+l*w(n-1,2))/u;
   if abs(w(n-1,1)-z)>norma
      norma=abs(w(n-1,1)-z);
      end
      w(n-1,1)=z;

             if norma<=tol
          for i=1:n-1
         for j=1:m-1
            fprintf('\n %i  %i  %f   %f
%f',i,j,x(i),y(j),w(i,j));
         end
         end
      return
   end
   t=t+1;
end
fprintf('\n Se excedió el número máximo de iteraciones ');
```

ANEXO 2

PROGRAMA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS PROGRESIVAS PARA LA ECUACIÓN DE CALOR.

```
%Programa para aproximar la solución a la ecuación de calor
%mediante el método de diferencias finitas progresivas
%sujeta a condiciones de frontera y condiciones iníciales

function difprogresivas (r,T,a,m,N)
%Datos
%r extremo
%T tiempo máximo
%a constante
%m, N enteros

%Resultado
%w(i,j) aproximación a u(xi,tj)

r=input('\n Introduzca el extremo r, r: ');
T=input('\n Introduzca el tiempo máximo, T: ');
a=input('\n Introduzca la constante a, a: ');
m=input('\n Introduzca el entero m, m>=3, m: ');
N=input('\n Introduzca el entero N, N>=1, N: ');

h=r/m;
k=T/N;
d=(a^2*k)/h^2;
w(m)=0;
for i=1:m-1
   w(i)=f(i*h);
end


fprintf('\n i   j         x(i)    t(j)     w(i,j)');

for j=1:N
   t=j*k;
   z(1)=(1-2*d)*w(1)+d*w(2);
   for i=2:m-1
```

```
      z(i)=(1-2*d)*w(i)+d*(w(i+1)+w(i-1));
   end
   for i=1:m-1
      w(i)=z(i);
   end

   for i=1:m-1
   x=i*h;

   fprintf('\n %i   %i   %8g  %8g   %8g',i,j,x,t,w(i));
   end
end
```

ANEXO 3

PROGRAMA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS REGRESIVAS PARA LA ECUACIÓN DE CALOR.

```
%Programa para aproximar la solución a la ecuación de calor
%mediante el método de diferencias finitas regresivas
%sujeta a condiciones de frontera y condiciones iníciales

function diffregresivas (r,T,a,m,N)
%Datos
%r extremo
%T tiempo máximo
%a constante
%m, N enteros

%Resultado
%w(i,j) aproximación a u(xi,tj)

r=input('\n Introduzca el extremo r, r: ');
T=input('\n Introduzca el tiempo máximo, T: ');
a=input('\n Introduzca la constante a, a: ');
m=input('\n Introduzca el entero m, m>=3, m: ');
N=input('\n Introduzca el entero N, N>=1, N: ');
h=r/m;
k=T/N;
d=(a^2*k)/h^2;
for i=1:m-1
   w(i)=f(i*h);
end

l(1)=1+2*d;
u(1)=-d/l(1);

for i=2:m-2
   l(i)=1+2*d+d*u(i-1);
   u(i)=-d/l(i);
end
l(m-1)=1+2*d+d*u(m-2);
fprintf('\n i   j        x(i)    t(j)     w(i,j)');
```

```
for j=1:N
   t=j*k;
   z(1)=w(1)/l(1);
   for i=2:m-1
      z(i)=(w(i)+d*z(i-1))/l(i);
   end
   w(m-1)=z(m-1);
   for i=m-2:-1:1
      w(i)=z(i)-u(i)*w(i+1);
   end


   for i=1:m-1
      x=i*h;

       fprintf('\n %i   %i   %8g  %8g   %8g',i,j,x,t,w(i));
    end
 end
```

ANEXO 4

PROGRAMA DEL MÉTODO DE CRANK-NICOLSON PARA LA ECUACIÓN DE CALOR.

```
%Programa para aproximar la solución a la ecuación de calor
%mediante el método de crank - nicolson
%sujeta a condiciones de frontera y condiciones iníciales

function cnicolson (r,T,a,m,N)
%Datos
%r extremo
%T tiempo máximo
%a constante
%m, N enteros

%Resultado
%w(i,j) aproximación a u(xi,tj)

r=input('\n Introduzca el extremo r, r: ');
T=input('\n Introduzca el tiempo máximo, T: ');
a=input('\n Introduzca la constante a, a: ');
m=input('\n Introduzca el entero m, m>=3, m: ');
N=input('\n Introduzca el entero N, N>=1, N: ');
h=r/m;
k=T/N;
d=(a^2*k)/h^2;
w(m)=0;
for i=1:m-1
   w(i)=f(i*h);
end

l(1)=1+d;
u(1)=-d/(2*l(1));

for i=2:m-2
   l(i)=1+d+(d*u(i-1))/2;
   u(i)=-d/(2*l(i));
end
l(m-1)=1+d+(d*u(m-2))/2;
fprintf('\n i   j         x(i)    t(j)     w(i,j)');
```

```
for j=1:N
   t=j*k;
   z(1)=((1-d)*w(1)+(d/2)*w(2))/l(1);
   for i=2:m-1
      z(i)=((1-d)*w(i)+(d/2)*(w(i+1)+w(i-1)+z(i-1)))/l(i);
   end
   w(m-1)=z(m-1);
   for i=m-2:-1:1
      w(i)=z(i)-u(i)*w(i+1);
   end


   for i=1:m-1
      x=i*h;

       fprintf('\n %i   %i   %8g  %8g   %8g',i,j,x,t,w(i));
    end
 end
```

ANEXO 5

PROGRAMA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA.

```
%Programa para aproximar la solución a la ecuación de onda
%mediante el método de diferencias finitas
%sujeta a condiciones de frontera y condiciones iníciales

function df (r,T,a,m,N)
%Datos
%r extremo
%T tiempo máximo
%a constante
%m, N enteros

%Resultado
%w(i,j) aproximación a u(xi,tj)

r=input('\n Introduzca el extremo r, r: ');
T=input('\n Introduzca el tiempo máximo, T: ');
a=input('\n Introduzca la constante a, a: ');
m=input('\n Introduzca el entero m, m>=2, m: ');
N=input('\n Introduzca el entero N, N>=2, N: ');
h=r/m;
k=T/N;
d=(k*a)/h;

for j=1:N+1
   w(1,j)=0;
   w(m+1,j)=0;
end

w(1,1)=f(0);
w(m+1,1)=f(r);

for i=2:m
   w(i,1)=f((i-1)*h);
   w(i,2)=(1-d^2)*f((i-1)*h)+(d^2/2)*(f(i*h)+f((i-
2)*h))+k*g((i-1)*h);
```

```
end

for j=2:N
   for i=2:m
      w(i,j+1)=2*(1-d^2)*w(i,j)+d^2*(w(i+1,j)+w(i-1,j))-
w(i,j-1);
   end
end
fprintf('\n         i          j          x           t
w(i,j)');

for j=1:N+1
   t=(j-1)*k;
   for i=1:m+1
      x=(i-1)*h;
      fprintf('\n  %8g   %8g    %8g    %8g   %8g',i-1,j-
1,x,t,w(i,j));
   end
   fprintf('\n');
   fprintf('\n');

end
```

ANEXO 6

ASPECTOS GENERALES DE MATLAB

El paquete MATLAB es un conjunto de programas matemáticos que se basa en el empleo de matrices. El paquete consta de una amplia colección de programas numéricos y programas gráficos para dibujos bi- y tridimensionales e incluye la posibilidad de realizar programas adicionales usando un lenguaje de alto nivel. También es posible desarrollar y modificar los programas de manera muy sencilla.

Operaciones aritméticas

+	Sumar
-	Restar
*	Multiplica
/	Dividir
^	Elevar a una potencia
pi, e, i	Constantes

Funciones incorporadas al programa

Damos a continuación una breve lista de algunas de las funciones disponibles en el paquete MATLAB

abs (#)	*log* (#)
sin (#)	*floor* (#)
cos (#)	*log10* (#)
tan (#)	*acos* (#)
exp (#)	*cosh* (#)
sqrt (#)	*tanh* (#)

Instrucciones de asignación

Mediante el signo de igualdad podemos asignar un nombre al resultado de la evaluación de una expresión.

Cuando se escribe un punto y coma al final de una expresión, el computador realiza las operaciones correspondientes y almacena su resultado bajo el nombre que le hayamos asignado (para su uso en cálculos posteriores) pero no muestra el resultado en pantalla.

Definición de nuevas funciones

Es posible definir funciones que se pueden usar con el paquete MATLAB escribiendo con un editor un archivo de texto cuya extensión sea m. Una vez definido, puede utilizarse como cualquier otra función.

Una vez que almacenamos esta función en un archivo, podemos usarla como cualquier otra función del paquete MATLAB.

La instrucción feval nos permite evaluar funciones de una manera útil y eficiente. Cuando se usa, la función se invoca como una cadena de caracteres.

Matrices

En el paquete MATLAB todas las variables son matrices. Las matrices se introducen de una manera directa.

Los puntos y comas separan las filas de la matriz, mientras que los elementos de la misma fila deben separarse mediante un espacio en blanco (o una coma).

Bucles

Las instrucciones for, if y while del paquete MATLAB operan de manera similar a sus homologas en otros lenguajes de programación. Estas instrucciones adoptan la sintaxis básica siguiente:

For (variable del bucle = rango del bucle)
Instrucciones ejecutables

End

If (premisa)
Instrucciones ejecutables

Else
Instrucciones ejecutables

End

While (premisa)
Instrucciones ejecutables

End

Programas

Una forma eficiente de construir programas es crear nuevas funciones que se almacenan como archivos cuya extensión es m. Estos programas nos permiten especificar los datos que deben introducirse y los resultados que deben mostrarse y pueden ser llamados como subprogramas desde otros programas.

BIBLIOGRAFÍA

- Burden Richard L. y Faires J. Douglas. Análisis Numérico. Séptima Edición. Editorial Thomson Learning. México D.F. 2002.

- Chapra Steven C. y Canales Raymond P. Métodos Numéricos para Ingenieros. Editorial McGraw-Hill. Mexico. 1998.

- Fausett V. Laurene. Applied Numerical Analysis using MATLAB. Tercera Edición. Editorial Prentice Hall. Madrid. 2000.

- Mathews John H. y Fink Kurtis D. Métodos Numéricos con MATLAB. Tercera Edición. Editorial Prentice Hall. Madrid. 2000.

- Zill Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica, S:A. de C:V. México D:F. 1988.

- Zill Dennis G. y Cullen Michael R. Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. Sexta edición. International Thomson Editores, S.A. de C.V. México 2006.