UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÒNOMA DE NICARAGUA
UNAN – LEÒN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÌA.

TRABAJO MONOGRÀFICO PARA OBTAR AL TÌTULO DE:
LICENCIATURA EN MATEMÀTICA.

TÌTULO MONOGRÀFICO:
ALGUNOS SISTEMAS DE NUMERACIÒN.

ELABORADO POR:
Br: LUIS ERNESTO HERNÀNDEZ MARTÌNEZ.

BAJO LA TUTORÌA DE:
MSc: MANUEL ANTÒN URBINA.

“A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD”

León, Nicaragua julio del 2015.

DEDICATORIA:

El presente trabajo monográfico es dedicado para el ser que siempre me motivo a salir adelante, el mismo con el cual aprendí mis primeros números y letras. Esa persona que su sueño era verme graduado y ser una persona de bien para la sociedad. Gracias padre por conducirme por el camino del bien y la rectitud es por eso que hoy te recuerdo con esta dedicatoria.

AGRADECIMIENTO:

Primeramente y sobre todo le agradezco a nuestro padre celestial “DIOS” por haberme permitido todos estos años de vida y dotarme de inteligencia y sabiduría para poder concluir mis estudios universitarios ya que sin su amor no hubiese concluido dichos estudios a lo largo de mi vida.

Seguidamente le agradezco a mi madre que sin duda ha sido la ayuda ideal e indispensable para la conclusión de mis estudios ya que siempre ha estado presente en mi vida apoyándome tanto económicamente como emocionalmente, levantándome de mis caídas y aconsejándome en todo momento gracias mamá.

También quiero agradecer a todos mis profesores que me han alimentado con el pan del saber a lo largo de todos mis años de estudios en especial al maestro ANTON URBINA por darme la oportunidad de trabajar junto a él en este trabajo monográfico gracias maestro ANTON.

ÌNDICE

CAPÌTULO IV

CAPÌTULO V

OBJETIVOS

OBJETIVOS GENERALES.

1) Estudiar las operaciones aritméticas en algunos sistemas de numeración.

2) Ilustrar los siguientes contenidos: Teorema Fundamental de la Aritmética mediante algunos ejemplos, los números de Fibonacci con N = 2,3…12. , los primeros catorce números primos y los primeros dieciséis cuadrados perfectos, en tres sistemas numéricos diferentes los cuales son: sistema decimal, sistema binario y sistema vigesimal.

OBJETIVOS ESPECÌFICOS.

1) Sumar, restar, multiplicar y dividir números en algunos sistemas de numeración.

2) Encontrar el complemento a b y a b - 1 de ciertos números en algunos sistemas de numeración.

3) Efectuar la operación resta de dos números dados usando el complemento a b en algunos sistemas de numeración.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

A lo largo de la historia de la humanidad, el ser humano ha buscado cómo inventar conocimientos matemáticos para resolver los problemas que durante su desarrollo van surgiendo. Podemos ver que el ser humano, aun en sus etapas tempranas de su desarrollo tuvo la facultad de adquirir el Sentido de Número. Esta facultad le permitió al ser humano reconocer si en una pequeña colección de objetos se han removido o agregado objetos de la colección sin contar. Crea la idea del número que fue un proceso difícil. Así se inicia originalmente, creando símbolos numéricos para contar o para medir; esto es, contar por ejemplo el número de objetos que le pertenecían o bien medir sus pedazos de tierra.

En matemática, varios sistemas de notación se han usado o se usan para representar cantidades abstractas denominadas números. Un sistema numérico está definido por la base que utiliza. La base de un sistema numérico es el número de símbolos diferentes o guarismos, necesarios para representar un número cualquiera de los infinitos posibles en el sistema.

Ya para el siglo III a.C. se empezó a configurar un tipo de lenguaje que utilizó solo dos elementos. En épocas anteriores y en culturas distintas ya se había introducido el número cero dentro del sistema numérico. Nuestros ancestros, los Mayas, ya lo conocían y lo usaban en su sistema numérico que era el vigesimal. Es en la India donde un matemático de nombre Pingala empieza a experimentar con el sistema binario y logra describir su uso sin mucha repercusión ya que no es tomado en cuenta por las culturas europeas de aquel entonces que tenían una mayor influencia en la sabiduría popular.

Por otro lado, en China también se puede ver el nacimiento de un sistema binario que era ordenado en sesenta y cuatro hexagramas (parte del antiguo sistema hexadecimal de numeración) numerados del 0 al 63 por un sabio llamado ShaoYong.

Luego, en 1605 el afamado Francis Bacon también explica su versión del sistema binario pero aplicado a la escritura de textos en binario, remplazando las letras por secuencias de símbolos binarios a manera de lenguaje encriptado. Pero es en el siglo XVII de nuestra era, en que un pensador alemán llamado Gottfried Leibniz toma los escritos del I Ching chino, y sin desmerecer tal aporte de la cultura oriental, populariza este lenguaje que ahora es de mucha utilidad en los sistemas informáticos.

A lo largo de la historia se han utilizado multitud de sistemas numéricos diferentes. La posición de una cifra indica el valor de dicha cifra en función de los valores exponenciales de la base. Esto es:

EXPANSIÓN DE UN NÚMERO M EN BASE b $\in \mathbb{N} - \{\mathbf{1}\}$**.**

Un número M en base b $\in \mathbb{N} - \{1\}$ que tenga p dígitos en su parte entera y q dígitos en su parte fraccionaria se puede escribir como:

$$M = \sum_{i=0}^{p-1} a_i b^i + \sum_{i=1}^{q-1} a_{-i}\, b^{-i}$$

Donde $a_i = 0, 1, 2, \ldots., b-1$ y $a_{-1} = 0, 1, 2, \ldots., b-1$.

Así, en el sistema decimal, el número 543.879 es $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$.

En el sistema quinario (base 5) la expansión del número $(4213.142)_5$ es $4\times5^3 + 2\times5^2 + 1\times5^1 + 3\times5^0 + 1\times5^{-1} + 4\times5^{-2} + 2\times5^{-3} = (558.376)_{10}$.

En esta monografía nos ocuparemos esencialmente de definir cómo se suman, se restan, se multiplican y se dividen los números en los sistemas de base 2, de base 3, de base 4, de base 5, de base 6, de base 8, de base 16 y de base 20. Evidentemente no pretendemos agotar todos los sistemas de numeración ya que recordemos que hay un número infinito de sistemas, uno para cada número natural $n \neq 1$.

Expondremos algunos ejemplos de cómo se ve la factorización de los números naturales como producto de factores primos que ilustra el Teorema Fundamental de la Aritmética. También, escribiremos los números de Fibonacci en el sistema decimal, binario y vigesimal, proseguiremos dando algunos ejemplos de números primos visto desde los sistemas decimal, binario y vigesimal, y por último daremos unos ejemplos de números elevados al cuadrado y vistos desde los números decimales, binarios y vigesimal.

CONCEPTOS QUE UTILIZAREMOS.

Para escribir un número B, no fraccionario, de una base d aun sistema de base b debemos representarlo en la forma.

$$B = b_k b^k + b_{k-1}\, b^{k-1} + \ldots + b_1\, b + b_0 b^0,$$

donde los coeficientes b_0 , b_1 ,..., b_k pueden tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4,…..,$b-1$. Para determinar los coeficientes b_0, b_1,..., b_k dividimos el número B por b. Es claro que el último residuo será igual a b_0, pues en la representación del número B todos los sumandos, a excepción del último $b_0 b^0$, son divisibles por b. Tomemos ahora el cociente que se obtuvo al dividir B por b y dividámoslo también por b. Luego, el residuo que se obtiene será igual a b_1. Dividamos el nuevo cociente por b, el residuo que se obtiene de esta división será igual a b_2. Continuando con este proceso, el cual termina cuando obtenemos el cociente cero, determinaremos todas las cifras b_0, b_1,...b_{k-1}, b_k que están en la representación b-aria del número B; los números b_0, b_1,...b_{k-1}, b_k son los residuos consecutivos que se obtienen en la división del número B por b, de la división primer cociente por b, de la división del segundo cociente por b y así sucesivamente hasta obtener de cociente cero.

Para formar el número B escribimos los residuos del último al primero en sucesión. Por ejemplo, dado el número de base 10 (decimal) 3427 escribirlo en base 3.

3427	3							
1	1142	3						
	2	380	3					
		2	126	3				
			0	42	3			
				0	14	3		
					2	4	3	
						1	1	3
							1	0

$$3427_{10} = 11200221_3$$

Para escribir un número B, fraccionario, de un sistema de base d aun sistema de base b procedemos como sigue: multiplicamos la fracción por la base b, luego tomamos la parte fraccionaria del producto y la multiplicamos por la base b, seguidamente volvemos a tomar la parte fraccionaria del producto y la multiplicamos por la base b y así, continuamos el proceso hasta que la parte fraccionaria obtenida se repite con la fracción original o es cero. Si la parte fraccionaria no se repite ni se hace cero, entonces el proceso lo paramos en alguno de los cálculos. Por ejemplo, dado el número decimal 0.375 de base 10 escríbalo en base 4.

$$0.375 \times 4 = 1.5$$

$$0.5 \times 4 = 2.0.$$

Así tenemos que $(0.375)_{10} = (0.12)_4$.

COMPLEMENTO A b DE UN NÚMERO.

DEFINICIÓN I-1.

Teniendo un número N de n dígitos enteros, el complemento a b de N es igual a la base del sistema numérico elevada al número de dígitos de la parte entera de N menos el número dado, o sea $C_b(N) = b^n - N$ si $N \neq 0$ y será 0 si N = 0.

Esto se cumple para todos los números N positivos incluso confracción decimal. El único caso especial a considerar es cuando la parte entera es cero. Esto se interpreta como que n = 0.

Veamos algunos ejemplos de complemento.

EJEMPLO I-2.

a) ¿Cuál es el complemento a 10 de $(987)_{10}$? En este caso N = 987 y n = 3, entonces:

$C_{10}(987) = 10^3 - 987 = 1000 - 987 = 13$.

b) ¿Cuál es el complemento a 10 de $(0.125)_{10}$? Aquí N = 0.125 y n = 0 ya que no hay parte entera de N, así que:

$C_{10}(0.125) = 10^0 - 0.125 = 1 - 0.125 = 0.875$.

c) ¿Cuál es el complemento a 10 de $(987.125)_{10}$? En este caso N = 987.125 y n = 3, por lo tanto:

$C_{10}(987.125) = 10^3 – 987.125 = 1000 – 987.125 = 12.875.$

ATENCIÓN.

Observemos que NO es lo mismo calcular el complemento de la parte entera y de la fracción decimal por separado y juntar los resultados. **¡OJO con eso!**

Veamos unos casos en binario.

EJEMPLO I-3.

a) Calcule el complemento a 2 de $(10101010)_2$. Luego, tenemos que n = 8, entonces

$C_2(N) = C_2(10101010) = (2^8)_{10} – (10101010)_2 = (256)_{10} – (10101010)_2$

$= (100000000 – 10101010)_2 = (1010110)_2.$

Aquí tenemos que expresar 256 como un número binario, esto es $(256)_{10} = (100000000)_2$

b) Calcule el complemento a 2 de $(101.11)_2$. Aquí tenemos que n = 3, entonces:

$C_2(N) = C_2(101.11) = (2^3)_{10} – (101.11) = (8)_{10} – (101.11)_2 = (1000)_2 – (101.11)_2$

$= (1000.00 – 101.11)_2 = (10.01)_2.$

También se puede calcular el complemento a b – 1 de un número N.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMERO.

DEFINICIÓN I-4.

Cuando se tiene un número positivo N en base b con n dígitos enteros y m dígitos en la parte fraccionaria, entonces, el complemento a b – 1 de N es

$$C_{b-1}(N) = b^n – b^{-m} – N.$$

EJEMPLO I-5.

a) Calcule el complemento a 9 de $(987)_{10}$. Para este caso tenemos que N = 987, n = 3 y m = 0, por lo tanto

$C_{10-1}(987) = C_9(987) = 10^3 - 10^0 - 987 = 1000 - 1 - 987 = 12$

b) Calcule el complemento a 9 de $(0.125)_{10}$. En este caso tenemos que N = 0.125, n = 0 y m = 3, entonces:

$C_{10-1}(0.125) = C_9(0.125) = 10^0 – 10^{-3} – 0.125 = 1 – 0.001 – 0.125 = 0,999 – 0.125$
$= 0.874.$

c) Encuentre el complemento a 9 de $(987.125)_{10}$. En ese caso N = 987.125; n =3 y m = 3. Por lo tanto:

$C_{10-1}(987.125) = C_9(987.125) = 10^3 – 10^{-3} – 987.125 = 1000 – 0.001 – 987.125$
$= 999.999 – 987.125 = 12.874.$

Observemos que para este caso sí es lo mismo calcular el complemento de la parte entera y el de la parte fracción decimal por separado y juntar o sumar los resultados.

d) Calcule el complemento a 1 de $(10111100)_2$.

Para este caso vemos que b = 2, N = 10111100, n = 8 y m = 0.

Luego,

$C_{2-1}(10111100) = C_1(10111100) = (2^8)_{10} – 2^{-0} – (10111100)_2$
$= (256)_{10} – 1 – (10111100)_2 = (100000000 –1 – 10111100)_2$
$= (1000011)_2.$

e) Calcule el complemento a 1 de $(1010)_2$. Para este ejemplo tenemos que b = 2, N = 1010, n = 4 y m = 0, entonces:

$C_{2-1}(1010) = C_1(1010) =(2^4)_{10} – 2^0 – (1010)_2 = (10000 – 1 – 1010)_2 = (101)_2.$

OBSERVACIÓN.

En estos dos últimos ejemplos se puede observar que para conseguir el complemento a 1 de un número binario basta tan solo invertir todos los dígitos, esto quiere decir cambiar 0 por 1 y viceversa. Luego, esta es otra forma de calcular el complemento a 1 de un número.

EJEMPLO I-6.

a) Calcule el complemento a 1 de N = 10011001.

$C_1(10011001) = 01100110.$

b) Calcule el complemento a 1 de N = 01001000.

$C_1(01001000) = 10110111$.

OBSERVACIÓN.

Otra forma de calcular el complemento a 2 de un número binario es hallando el complemento a 1 (o sea intercambiando todos los digitos de 0 a 1 y 1 a 0) y luego sumarle 1. Esto es:

COMPLEMENTO A 2 DE UN NÚMERO BINARIO.

El complemento a 2 de un número binario es $C_2N = C_1(N) + 1$.

EJEMPLO I-7.

a) Calcule el complemento a 2 de N = 110100101.

$C_2(N) = C_2(110100101) = C_1(110100101) + 1 = 001011010 + 1 = 001011011$.

b) Calcule el complemento a 2 de N = 01001000.

$C_2(N) = C_2(01001000) = C_1(01001000) + 1 = 10110111 + 1 = 10111000$.

Hay otra menera de calcular el complemento a 2 de un número binario. Se copian los ceros, de derecha a izquierda, del número binario dado hasta encontrar un 1 el cual también se copia y los siguientes dígitos ceros se intercambian por unos y los unos por ceros.

EJEMPLO I-8.

a) Encuentre el complemento a 2 de N = 110100101.

El primer dígito encontrado es 1, luego lo copiamos y después intercambiamos los siguientes dígitos. Esto es, $C_2(N) = 001011011$.

Entre todos los sistemas de numeración los más importante son: el sistema decimal usado habitualmente en todo el mundo y en todas las áreas que requieren de un sistema de numeración, el sistema octonario, el sistema hexadecimal y el sistema binario el cual es usado en calculadoras electrónicas y en computadoras ya que se trabaja con solamente dos alternativas: encendido o apagado y este proceso lo podemos asociar con 0 cuando el circuito está abierto (apagado), y 1 cuando el circuito está cerrado (encendido). Cada 0 y 1 es un **bit** (**bi**narydigi**t**) de información. Pero un **bit** no almacena mucha información, luego agrupamos los **bits** para formar unidades más útiles. La siguiente unidad contiene ocho **bits** y es llamada un **byte**.

Así, por ejemplo, en ASCII (American Standard Codefor Information Interchange) la letra **A** se asocia con el único número binario $(1000001)_2 = (65)_{10}$, la letra **a** se asocia con el único número binario $(1100001)_2 = (97)_{10}$, el signo + se asocia con el único número binario $(0101011)_2 = (43)_{10}$.

Ya que se ha hablado de los números binarios, pero no se ha dado un ejemplo claro de cómo se puede escribir en este sistema de numeración, aquí están los números básicos del sistema decimal de numeración, el cual es más utilizado alrededor del mundo, pero representados con los símbolos binarios.

NÙMEROS BINARIOS DEL 1 AL 10.

El número uno en decimal es 1, y en binario también es 1. De la misma manera el 0 de los decimales también es 0 en el binario pues ambos son el principio de la serie, sin embargo a continuación puede haber un poco de confusión en la numeración binaria.

El 2 en decimal es 10 en binario, el 3 es 11 el 4 es 100, el 5 es 101, el 6 es 110, el 7 es 111, el 8 es 1000, el 9 es 1001 y el 10 es 1010.

.

EXPANSIÒN BINARIA.

Veamos el proceso que se sigue para expresar un número decimal a expansión binaria.

EJEMPLO I-9.

Exprese el número de base diez (decimal) 13.8125 a un número de base dos (binario).

Para esto expresamos 13.8125 como la suma de la **parte entera** más la **parte decimal**, esto es 13.8125 = 13 + 0.8125.

Dividamos 13 por 2 y los respectivos cocientes también los dividimos por 2 hasta que obtengamos 0 de cociente. Así,

$$\begin{array}{rrrrr}
13 & \multicolumn{1}{|r}{2} & & & \\ \cline{2-2}
1 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{2} & & \\ \cline{3-3}
 & 0 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{2} & \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{2} \\ \cline{5-5}
 & & & 1 & 0
\end{array}$$

Luego, el número en expansión binaria (de base 2) se forma escribiendo los residuos de manera ascendente (el último residuo, el penúltimo residuo y así sucesivamente hasta llegar al primer residuo), así el número es $(1101)_2$. Esto es $(13)_{10} = (1101)_2$.
Esta igualdad se justifica por el algoritmo de la división (dividendo = divisor por cociente más residuo). Por tanto,

$(13)_{10} = 6 \times 2 + 1$

$= (3 \times 2 + 0) \times 2 + 1 = 3\times 2^2 + 0 \times 2 +1 \qquad (6 = 3 \times 2 + 0)$

$= (1 \times 2 + 1) \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \qquad (3 = 1 \times 2 + 1)$

$= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= (1101)_2$.

Para traducir la parte fraccionaria del número de base 10 al sistema binario, se hacen multiplicaciones sucesivas de las partes fraccionarias por 2, esto es:

$0.8125 \times 2 = 1.\mathbf{6250}$

$\mathbf{0.6250}\times 2 = 1.\mathbf{250}$

$\mathbf{0.25}\times 2 = \mathbf{0.50}$

$\mathbf{0.5}\times 2 = 1.$

Luego, $(0.8125)_{10} = (0.1101)_2$.

Cómo podemos observar el multiplicando de la primera multiplicación es la parte fraccionaria del número dado por 2 y el multiplicando de cada una de las siguientes multiplicaciones es la multiplicación de la parte fraccionaria de cada producto obtenido anteriormente por 2. El cálculo termina si la parte fraccionaria del producto es cero (esto es, si la parte fraccionaria del equivalente binario es finito; si no es así, el cálculo se prolonga tanto como dígitos se deseen). El equivalente binario del número dado se obtiene enlistando la parte entera de los productos del primero al último.

Este procedimiento se justifica usando el hecho que **el multiplicando es igual al producto del multiplicando por el multiplicador sobre el multiplicador.**

Así,

$(0.8125)_{10} = \mathbf{0.8125 \cdot 2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{1.625} \times \frac{1}{2}$

$= (1 + \mathbf{0.625}) \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + \mathbf{0.625} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} + \mathbf{0.625} \times \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + \mathbf{1.25} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + \left[(\mathbf{1} + \mathbf{0.25}) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] \times \frac{1}{2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + \mathbf{0.25} \times \frac{1}{2^2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + \left[(\mathbf{0} + \mathbf{0.25}) \times \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] \times \frac{1}{2^2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + (\mathbf{0} + \mathbf{0.50}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + \mathbf{0.5} \times \frac{1}{2^3}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + \left[(\mathbf{0.5}) \times \mathbf{2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] \times \frac{1}{2^3}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + \left(\mathbf{1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \times \frac{1}{2^3}$

$= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4}$

$= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$

$= (0.1101)_2$.

Luego,

$(13.8125)_{10} = (13 + 0.8125)_{10} = (1101)_2 + (0.1101)_2 = (1101.1101)_2$.

EJEMPLO I-10.

Resolvamos otro ejemplo para profundizar un poco más en el método de conversión.

Exprese el número de base diez (decimal) 34.6 a un número de base dos o binario.

Para esto expresamos 34.6 como la suma de la **parte entera** más la **parte decimal**, esto es; 34.6 = 34 + 0.6.

Dividamos 34 por 2 y los respectivos cocientes también los dividimos por 2 hasta que obtengamos 0 de cociente.

$$\begin{array}{ccccccc}
34 & 2 & & & & & \\
0 & 17 & 2 & & & & \\
 & 1 & 8 & 2 & & & \\
 & & 0 & 4 & 2 & & \\
 & & & 0 & 2 & 2 & \\
 & & & & 0 & 1 & 2 \\
 & & & & & 1 & 0
\end{array}$$

Luego el número en expansión binaria (de base 2) se forma escribiendo los residuos de manera ascendente (el último residuo, el penúltimo residuo y así sucesivamente hasta llegar al primer residuo), así el número es $(100010)_2$. Esto es,

$$(34)_{10} = (100010)_2.$$

Para traducir la parte fraccionaria del número de base 10 se hacen multiplicaciones sucesivas de las partes fraccionarias por 2, esto es:

$$0.6 \times 2 = \mathbf{1}.2$$
$$0.2 \times 2 = \mathbf{0}.4$$
$$0.4 \times 2 = \mathbf{0}.8$$
$$0.8 \times 2 = \mathbf{1}.6$$
$$0.6 \times 2 = \mathbf{1}.2$$

Observe que el último de los productos es igual al primero, lo que significa que los productos anteriores se repetirán de manera periódica. Esto quiere decir que el número binario es un número periódico.

Ahora enlistamos la parte entera de cada producto del primero al último.

Así,

$(0.6)_{10} = (0.10011001……)_2$.

Luego,
$(34.6)_{10} = (34 + 0.6)_{10} = (100010)_2 + (0.10011001….)_2 = (100010.10011001……)_2$.

Con esta parte concluimos con el primer capítulo el cual era una pequeña introducción con respecto a los sistemas numéricos, en los cuales también abordamos las definiciones a emplear en este trabajo, también se dieron algunos ejemplos de ejercicios que se verán posteriormente en los siguientes capítulos.

Ahora continuaremos con el segundo capítulo el cual trata de los números binarios.

CAPÌTULO II

SISTEMA BINARIO.

Existen infinitos sistemas de numeración uno para cada b $\in \mathbb{N}$, $b \neq 1$. A cada número le pondremos un subíndice el cual indicará la base del sistema de numeración en el cual estaremos operando. Así, por ejemplo, el número $(1302)_5$ indica que él pertenece al sistema de base 5 o quinario. Comenzaremos estudiando el sistema binario el cual utiliza solamente dos dígitos numéricos los cuales son 0 y 1. Es un sistema numérico conocido desde hace muchos siglos atrás. Vamos a ver la manera de cómo se realiza la suma, resta, multiplicación, división y complementos de los números binarios.

SUMA DE NÚMEROS BINARIOS.

Para llevar a cabo la operación suma usaremos la siguiente tabla:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = (2)_{10} = (10)_2.$$

Note que al sumar 1 + 1 es $(10)_2$, es decir, llevamos 1 a la siguiente posición de la izquierda (acarreo). Esto es equivalente en el sistema decimal a sumar 9 + 1, que da 10, cero en la posición que estamos sumando y un 1 de acarreo a la siguiente posición.

EJEMPLO II-1.

Sume $A = (1\ 1\ 1)_2$, $B = (1\ 0\ 1)_2$, $C = (1\ 0\ 1\ 1)_2$, y $D = (1\ 1\ 0)_2$.

Debemos de sumar los números dos a dos para facilitar el proceso. Así,

$$\begin{array}{rcccl} & 1 & 1 & & \\ A = & 1 & 1 & 1 & \text{1+1= 0 y va 1} \\ B = & \underline{+\,1} & \underline{0} & \underline{1} & \text{de acarreo} \\ A+B = & 11 & 0 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rccccl} & & 1 & 1 & & \\ C = & & 1 & 0 & 1\ \ 1 & \text{1+1= 0 y va 1} \\ D = & \underline{+} & \underline{} & \underline{1} & \underline{1\ \ 0} & \text{de acarreo} \\ C+D = & & 10 & 0 & 1\ \ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} A + B = & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C + D = & \underline{+1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ A + B + C + D = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Para comprobar esta suma escribamos los números binarios en el sistema decimal.

$$A = (1\ 1\ 1)_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 4 + 2 + 1 = \quad (7)_{10}$$

$$B = (1\ 0\ 1)_2 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = \quad (5)_{10}$$

$$C = (1\ 0\ 1\ 1)_2 = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = \quad (11)_{10}$$

$$\underline{+\ \ D} = \underline{(1\ 1\ 0)}_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = \quad \underline{+\ (6)}_{10}.$$

$$A + B + C + D = (11101)_2 = 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = \quad (29)_{10}.$$

DIFERENCIA O RESTA DE NÙMEROS BINARIOS.

Para restar números de cualquier base $b \in \mathbb{N},\ b \neq 1$ y se tiene el caso en que el minuendo es menor que el sustraendo, entonces prestamos una unidad, que es la base b del sistema, al número que está a la izquierda y efectuamos la operación.

Usaremos la siguiente tabla para restar números binarios

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = 1$. Se transforma en $(10)_2 - 1 = 1$ que en el sistema decimal equivale a $2 - 1 = 1$.

EJEMPLO II-2.

En el sistema binario, del número $(1000101)_2$ reste el número $(111010)_2$

	1	1				
0	2+0	2+0	2+ 0	0	2+0	
1	0	0	0	1	0	1
–	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1

Para comprobar esta resta escribamos los números binarios como números decimales.

$$(1000101)_2 = 1\times2^6 + 1\times2^2 + 1\times2^1 = \quad (69)_{10}$$

$$\underline{-\ (111010)}_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = \quad \underline{-\ (58)}_{10}$$

$$(0001011)_2 = 0\times2^6 + 0\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = (11)_{10}$$

El siguiente tema a abordar es el producto o multiplicación de numeros binarios.

PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS BINARIOS.

La tabla de multiplicar para números binarios es la siguiente:

$0 \times 0 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

EJEMPLO II-3.

Multiplique los números binarios $(1\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$ y $(1\ 0\ 1\ 0)_2$.

$$
\begin{array}{r}
11011 \\
\underline{\times\ 1010} \\
00000 \\
11011 \\
00000 \\
\underline{11011} \\
100001110
\end{array}
$$

Comprobemos esta multiplicación escribiendo los números dados en el sistema decimal.

Así,

$$(1011)_2 = 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = \qquad (27)_{10}$$

$$\underline{\times\ (1010)_2} = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = \qquad \underline{\times\ (10)_{10}}$$

$$(100001110)_2 = 1\times2^8+0\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = (270)_{10}$$

Seguidamente, ilustraremos el proceso de cómo se dividen dos números en el sistema binario.

COCIENTE O DIVISIÓN DE NÚMEROS BINARIOS.

En esta operación brindaremos un ejemplo ya resuelto con su comprobación correspondiente.

EJEMPLO II-4.

Divida los siguientes números binarios $(1011)_2$ por $(11)_2$

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 11 \\ \hline -11 & 11 \\ \hline 101 & \\ -11 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(1011)_2 = 1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = (11)_{10}$.

Divisor $(11)_2 = 11\times2^1+1\times2^0 =$ $(3)_{10}$.

Cociente $(11)_2 = 1\times2^1+1\times2^0 =$ $(3)_{10}$.

Residuo $(10)_2 = 1\times2^1+0\times2^0 =$ $(2)_{10}$.

$(1011)_2 = (11)_2 \times (11)_2 + (10)_{2.}$

Verifiquemos este ejercicio mediante el sistema decimal.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \hline -9 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$(11)_{10} = (3)_{10} \times (3)_{10} + (2)_{10.}$

En ambos sistemas coinciden. Continuaremos estudiante los complementos los cuales son muy utilizados por las computadoras.

COMPLEMENTO A b DE UN NÚMERO BINARIO.

En esta operación se darán dos ejemplos ya resueltos y con su debida comprobación. El primer ejemplo se dará con números enteros y el segundo será con números fraccionarios.

EJEMPLO II-5.

a) Calcule el complemento a 2 de $(10101100)_2$.

En este caso el número es N = 10101100, el número de cifras es n = 8 y la base es b = 2. Luego, de acuerdo a la fórmula.

$C_2(N) = C_2(10101100) = (2^8)_{10} – (10101100)_2 = (256)_{10} – (10101100)_2$

$= (100000000 \; – \; 10101100)_2 = (001010100)_2$.

Resolviendo.

	0	1	1	1	1	1	2		
		2+0	2+0	2+0	2+0	2+0	2+0		
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
–		1	0	1	0	1	1	0	0
	0	1	0	1	0	1	0	0	0

b) Calcule el complemento a 2 de $(101.11)_2$.

En este caso tenemos que N = 101.11, n = 3 y b = 2.

$C_3(N) = (2^3)_{10} – (101.11)_2 = (8)_{10} – (101.11)_2 = (1000 – 101.11)_2 = (0010.01)_2$,

donde:

	0	1	1	1	1	2
		2+0	2+0	2+0	2+0	2+0
	1	0	0	0.	0	0
–		1	0	1.	1	1
	0	0	1	0.	0	1

Después de haber dado unos ejemplos del complemento a un número b seguiremos con el complemento a b-1 de un número b.

COMPLEMENTO A b –_1 DE UN NÚMERO BINARIO.

En esta operación daremos dos ejemplos con su respuesta y su respectiva comprobacion. El primer ejemplo sera solo con la parte entera y el segundo solo con parte fraccionaria.

EJEMPLO II-6.

a) Calcule el complemento a 1 de $(10101100)_2$.

Para este ejemplo tenemos que N = 10101100, n = 8 y m = 0. De donde,

$C_{2-1}(10101100) = C_1(10101100) = (2^8)_{10} – 2^{-0} – (10101100)_2$

$= (256)_{10} – 1 – (10101100)_2 = (100000000 – 1 – 10101100)_2$

$= (1000011)_2$

Resolvamos:

1	0	1	0	1	1	0	0	
+							1	
1	0	1	0	1	1	0	1	

	0	1	1	1	1	1	1	1	2
		2+0	2+0	2+0	2+0	2+0	2+0	2+0	2+0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
–		1	0	1	0	1	1	0	1
	0	0	1	0	0	0	0	1	1

b) Calcule el complemento a 1 de $(1010)_2$.

Para este caso N =1010, n = 4 y m = 0. Luego, por la fórmula $C_b(N) = b^n – N$ tenemos, $C_{2-1}(1010) = C_1(1010) = (2^4)_{10} – 2^0 – (1010)_2 = (10000 – 1)_2 – (1010)_2$

$= (10001)_2 – (1010)_2 = (00101)_2$.

Realicemos la resta $(10001)_2 – (1010)_2$.

1	0	1	0	
+			1	
1	0	1	1	

	0	1	1	1	2
		2+0	2+0	2+0	2+0
	1	0	0	0	0
–		1	0	1	1
	0	0	1	0	1

En estos dos ejemplos se puede observar que para conseguir el complemento a 1 de un número binario basta con tan solo invertir todos los dígitos (esto quiere decir cambiar 0 por 1 y viceversa). Luego, esta es otra forma de calcular el complemento a 1 de un número.

COMPLEMENTO A 2 DE UN NÚMERO BINARIO.

Este complemento es exclusivo y unico para este sistema numerico.

EJEMPLO II-7.

a) Calcule el complemento a 2 de N = 110100101.

$C_2(N) = C_2(110100101) = C_1(110100101) + 1 = (001011010)_2 + 1$
$= (001011011)_2$.

b) Calcule el complemento a 2 de N = 01001000.

$C_2(N) = C_2(01001000) = C_1(01001000) + 1 = 10110111 + 1 = 10111000$.

Hay otra menera de calcular el complemento a 2 de un número binario. Se copian los ceros, de derecha a izquierda, del número binario dado hasta encontrar un 1 el cual también se copia y los siguientes dígitos ceros se intercambian por unos y los unos por ceros.

Procederemos con la resta de dos números binarios pero esta vez lo haremos tal y como lo hacen las computadoras que no es directamente restando si no usando el complemento.

RESTA DE DOS NÚMEROS BINARIOS USANDO EL COMPLEMENTO.

Veamos la manera de como las maquinas digitales hacen el cálculo matemático para realizar una resta, el cual lo hacen por medio de los complementos.

EJEMPLO II-8.

Reste $(110)_2$ de $(111)_2$ usando el complemento a 2.

$$\begin{array}{ll} 111 & \\ \underline{110} & \\ 0010 & \text{Complemento } C_2(110) \\ \cancel{1}001 & \text{Suma de } 111 + 110 = 1001 \end{array}$$

Calculemos el complemento a 3 de $(110)_3$.

$C_3(110) = (2^3)_{10} - (110)_2 = (8)_{10} - (110)_2 = (1000)_2 - (110)_2 = (0010)_2$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 2 \\ & 2+0 & 2+0 & 2+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Por otro lado:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & \cancel{1} & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

1+1=0 y va 1de acarreo

Aquí hay un acarreo entonces debemos de eliminar el primer número de izquierda a derecha, en este caso es 1 y nos queda $(0001)_2 = 1$.

Luego:

$$
\begin{array}{rccc}
 & 1 & 1 & 1 \\
- & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Lo cual coinciden con la operación anterior entonces el número buscado en la resta con complemento es 1.

Con este último ejemplo terminamos el tema de los números binarios. Continuaremos con el siguiente capítulo el cual trata de cuatro sistemas numéricos los cuales son: sistema ternario, cuaternario, quinario y sistema sextario.

CAPÍTULO III

SISTEMA TERNARIO, SISTEMA CUATERNARIO, SISTEMA QUINARIO Y SISTEMA SENARIO.

Comenzaremos explicando cómo se realizan la operación de suma, resta, multiplicación, división y los complementos a b, b-1 y resta de complementos de números en el sistema ternario, cuaternario, quinario y el sextario, después continuaremos resolviendo ejercicios.

SISTEMA NUMÈRICO TERNARIO.

En el sistema ternario solo podemos usar tres dígitos numéricos los cuales son 0, 1 y 2. Veremos cómo se suman, se restan, se multiplican, se dividen y se calculan los complementos de los números escritos en el sistema ternario.

SUMA DE NÙMEROS TERNARIOS.

Comenzaremos resolviendo un ejemplo para ilustra la operación suma de números ternarios.

EJEMPLO III-1.

Sume los siguientes números ternarios $(210)_3$ y $(121)_3$

$$\begin{array}{rrr} 1 & & \\ 2 & 1 & 0 \\ +\,1 & 2 & 1 \\ \hline 11 & 0 & 1 \end{array}$$

$1+2= 3_{10} = (10)_3$. En este caso ponemos 0 y va 1 de acarreo

$1+2+1= 4_{10} = (11)_3$.

Para comprobar esta operación convertiremos cada número ternario al sistema decimal. Así,

$$\begin{array}{rlr} (210)_3 = & 2\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0 = & (21)_{10} \\ \underline{+\,(121)_3} = & 1\times3^2 + 2\times3^1 + 1\times3^0 = & +\underline{\,(16)_{10}} \\ (1101)_3 = & 1\times3^3 + 1\times3^2 + 0\times3^1 + 1\times3^0 = & (37)_{10} \end{array}$$

Por otro lado,

$$(210)_3 + (121)_3 = (1101)_3 = 1\times3^3 + 1\times3^2 + 0\times3^1 + 1\times3^0 = (37)_{10}$$

Seguidamente continuaremos con la operación resta de números ternarios.

RESTA DE NÙMEROS TERNARIOS.

Procedamos a restar números en el sistema ternario.

EJEMPLO III-2.

Delos números ternarios $(210)_3$ reste $(122)_3$.

$$\begin{array}{rccc}
 & 1 & 3 & 3 \\
 & & 3+0 & 3+0 \\
 & 2 & 1 & 0 \\
- & 1 & 2 & 2 \\ \hline
 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Para su comprobación tenemos que:

$$\begin{array}{rcr}
(210)_3 = 2\times3^2+1\times3^1+0\times3^0 & = & (21)_{10} \\
\underline{-(122)_3} = 1\times3^2+2\times3^1+2\times3^0 & = & \underline{-(17)_{10}} \\
(11)_3 = 1\times3^1+1\times3^0 & = & (4)_{10}
\end{array}$$

De donde,

$(210)_3 - (122)_3 = (011)_3 = 0\times3^2+1\times3^1+1\times3^0 = (4)_{10}$

A continuación proseguimos con la operación multiplicación de números ternarios.

MULTIPLICACIÓN DE NÙMEROS TERNARIOS.

Ilustraremos la operación multiplicación de dos números en el sistema ternario.

EJEMPLO III-3.

Multiplique los siguientes números ternarios $(222)_3$ y $(121)_3$.

Observemos que $(3)_{10} = (10)_3$, $(4)_{10} = (11)_3$, $(5)_{10} = (12)_3$, $(6)_{10} = (20)_3$ y $(7)_{10} = (21)_3$.

Luego,

$$\begin{array}{r}
222 \\
\times\ 121 \\ \hline
222 \\
1221 \\
222. \\ \hline
120102
\end{array}$$

Comprobemos esto escribiendo los números ternarios en el sistema decimal.

$$(222)_3 = 2\times3^2+2\times3^1+2\times3^0 = \quad (26)_{10}$$
$$(121)_3 = 1\times3^2+2\times3^1+1\times3^0 = \quad (16)_{10}$$
$$\underline{\times\ (222)_3} = 2\times3^2+2\times3^1+2\times3^0 = \quad \underline{\times\ (26)_{10}}$$
$$(120102)_3 = 1\times3^5+2\times3^4+0\times3^3+1\times3^2+0\times3^1+2\times3^0 = (416)_{10}.$$

De donde,

$222)_3\times(121)_3 = (120102)_3 = 1\times3^5 + 2\times3^4 + 0\times3^3 + 1\times3^2 + 0\times3^1 + 23^0 = (416)_{10}$

Ahora proseguiremos con la operación división de números ternarios.

DIVISIÒN DE NÙMEROS TERNARIOS.

Ilustraremos con el siguiente ejemplo el proceso que se sigue para dividir dos números en el sistema ternario.

EJEMPLO III-4

Divida los siguientes números ternarios $(210)_3$ y $(10)_3$.

$$\begin{array}{r|l} 210 & \underline{\ 10\ } \\ \underline{-20} & \ 21 \\ 10 & \\ \underline{-10} & \\ 0 & \end{array}$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales. Así,

Dividendo $(210)_3 = 2\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0 = (21)_{10}$.

Divisor $(10)_3 = 1\times3^1 + 0\times3^0 = (3)_{10}$.

Cociente $(21)_3 = 2\times3^1 + 1\times3^0 = (7)_{10}$.

Hagámoslo en el sistema decimal.

$$\begin{array}{r|l} 21 & \underline{\ 7\ } \\ \underline{-21} & \ 3 \\ 0 & \end{array}$$

Veamos que 21 = 7×3 + 0 por lo tanto coincide con la división de los números ternarios.

A continuación proseguimos con la operación complementos a b de un número ternario.

Luego,

$$(210)_3 = (21)_3 \times (10)_3 + 0$$

A continuación proseguimos con la operación complementos a b de un número ternario.

COMPLEMENTO A b DE UN NÙMERO TERNARIO.

Se darán dos ejemplos de complementos a b, un ejemplo con números enteros y otro con números fraccionarios, veamos cómo se procede para obtener el complemento a b de un número ternario.

EJEMPLO III-5.

a) Calcule el complemento a 3 de $(210)_3$.

Para este caso N = 210, n = 3 y b = 3 y usando la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos, $C_3(N) = (3^3)_{10} - (210)_3 = (27)_{10} - (210)_3 = (1000 - 210)_3 = (0020)_3$. Usamos el hecho que $(27)_{10} = (1000)_3$.

Realicemos la resta.

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & 2 & 3 & \\
 & & 3+0 & 3+0 & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
- & 0 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{array}$$

b) Calcule el complemento a 3 de $(0.221)_3$

Notemos que N = 0.251, n = 0 ya que no hay enteros y b = 3. Por la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos, $C_3(N) = (3^0)_{10} - (0.251)_3 = 1 - (0.251)_3 = (0.002)_3$.

Comprobemos la resta

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & 2 & 2 & 3 \\
 & & 3+0 & 3+0 & 3+0 \\
 & 1. & 0 & 0 & 0 \\
- & 0. & 2 & 2 & 1 \\
\hline
 & 0. & 0 & 0 & 2
\end{array}$$

También se puede hacer el complemento a b –1 de un número en el sistema ternario. Lo ejemplificamos a continuación.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMER0 TERNARIO.

Proseguiremos dando otros dos ejemplos más pero esta vez será para el complemento a b–1. De la misma manera trabajaremos los ejercicios con numeros enteros y fraccionarios. Veamos cómo se efectua esta operación.

EJEMPLO III-6.

a) Calcule el complemento a 2 de $(221)_3$

En este caso N = 221, n = 3, m = 0 y b = 3. Usemos la fórmula

$C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$. Luego,

$C_{3-1}(N) = C_2(N) = (3^3)_{10} - 3^0 - (221)_3 = (27)_{10} - 1 - (221)_3 = (1000)_3 - 1 - (221)_3$

$= (0001)_3$.

Hagamos la resta.

$$\begin{array}{cccc}
0 & 2 & 2 & 2 \\
 & 3+0 & 3+0 & 3+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
- & 2 & 2 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

b) Calcule el complemento a 2 de $(0.212)_3$

En este caso N = 0.212, n = 0, m = 3 y b = 3. Luego,

$C_{3-1}(N) = C_2(N) = (3^0)_{10} - 3^{-3} - (0.212)_3 = (1 - 0.03703703704)_{10} - (0.212)_3$

$= (0.222)_3 - (0.212)_3 = (0.010)_3$.

Comprobemos la resta $(0.222) - (0.212)_3$.

$(1 - 0.03703703704)_{10} = (0.962962963)_{10}$. Escribamos este número en el sistema ternario.

$0.962962963 \times 3 = 2.888888889$

$0.888888889 \times 3 = 2.666666667$

$0.666666667 \times 3 = 2.000000001$

Entonces, $(0.962962963)_{10} = (0.222)_3$. Luego, $(0.222 - 0.212)_3 = (0.010)_3$

Con estos ejemplos concluimos el tema complemento a b – 1 de un numero ternario ahora veamos la realizacion de ejercicios de resta de numeros ternarios utilizando sus complementos.

RESTA DE NÚMEROS TERNARIOS USANDO COMPLEMENTO.

En este tema solo daremos la resolución de un ejercicio, a continuación veremos cómo se resuelve.

EJEMPLO III-7.

Reste los siguientes números ternarios utilizando sus complementos $(211)_3$ de $(222)_3$

$$\begin{array}{rl} 222 & \\ \underline{211} & \\ 012 & \text{Complemento de } C_3(211) \\ \cancel{1}011 & \text{Suma de } 222 + 12 = 1011 \end{array}$$

Algunas aclaraciones sobre el ejercicio.

$C_3(211) = (3^3)_{10} – (211)_3 = (27)_{10} – (211)_3 = (1000 – 211)_3 = (0012)_3$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 2 & 3 \\ & 3+0 & 3+0 & 3+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ – & 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Ahora;

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 2 \\ + & 1 & 2 \\ \hline \cancel{1}0 & 1 & 1 \end{array}$$

$2_3+2_3=1$ y va 1 $\quad$ $1+2_3+1=1$ y va 1 $\quad$ $2_3+1=0$ y va 1

Aquí se produce un acarreo por tanto, debemos de eliminar el primer número de izquierda a derecha en este caso es 1 y nos queda $(011)_3 = (11)_3$.

Luego,

$$\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 2 \\ –2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Lo cual coinciden con la operación anterior. Entonces, el resultado buscado de la resta con complemento es $(11)_3$.

Con este ejemplo terminamos con el breve estudio del sistema numérico ternario. Ahora proseguiremos con el sistema cuaternario.

SISTEMA CUATERNARIO.

Este sistema numérico solo trabaja con cuatro dígitos los cuales son: 0, 1, 2 y 3. Veremos cómo se suman, se restan, se multiplican, se dividen y se calculan los complementos de los números escritos en el sistema cuaternario.

SUMA DE NÙMEROS CUATERNARIOS.

Daremos a continuación un ejemplo de la operación suma de números cuaternarios. Veamos cómo se procede en la solución de dicha operación.

EJEMPLO III-8.

Sume los siguientes números $(3012.23)_4$ y $(132.012)_4$.

		1	1		1		
	3	0	1	2.	2	3	0
+		1	3	2.	0	1	2
	3	2	1	0.	3	0	2

$3_4+1= 0$ y va 1 de acarreo.

$1+1+3_4 = 1$ y va 1 de acarreo.

Para comprobar esta operación traduzcamos los números dados al sistema decimal. Así,

$$(3012.23)_4 = 3\times4^3 + 0\times4^2 +1\times4^1 + 2\times4^0 + 1/4^1 + 3/4^2 + 0/4^3 = \quad (198.6875)_{10}$$

$$+\ (132.012)_4 = 1\times4^2 + 3\times4^1 + 2\times4^0 + 0/4^1 + 1/4^2 + 2/4^3 = \quad +\ (30.09375)_{10}$$

$$(3210.302)_4 = 3\times4^3+2\times4^3+1\times4^1+0\times4^0+3/4^1+0/4^2+2/4^3 = \quad (228.78125)_{10}$$

Ahora proseguiremos con la operación resta de números cuaternarios.

RESTA DE NÙMEROS CUATERNARIOS.

De la misma manera daremos un ejemplo de la operación resta, Veamos cómo se resuelve una resta en base cuatro.

EJEMPLO III-9.

Reste los siguientes números $(302.\ 12)_4$ y $(123.23)_4$.

2	3	6	4	6
	4+0	4+2	4+0	4+2
3	0	2.	1	2
–1	2	3.	2	3
1	1	2.	2	3

Verifiquemos estos resultados escribiendo los números en base 10.

$$(302.12)_4 = 3\times4^2 + 0\times4^1 + 2\times4^0 + 1/4^1 + 2/4^2 = \quad (50.3750)_{10}$$

$$\underline{-\ (123.23)}_4 = 1\times4^2 + 2\times4^1 + 3\times4^0 + 2/4^1 + 3/4^2 = \quad -\ \underline{(27.6875)}_{10}$$

$$(112.23)_4 = 1\times4^2 + 1\times4^1 + 2\times4^0 + 2/4^1 + 3/4^2 = \quad (22.6875)_{10}$$

A continuación se proseguirá con la operación multiplicación de números cuaternarios.

MULTIPLICACIÒN DE NÙMEROS CUATERNARIOS.

A continuación ejemplificaremos la operación multiplicación.

EJEMPLO III-10.

Multipliquemos los números $(320)_4$ y $(23)_4$ y verifiquemos el resultado traduciendo todos los números a la base 10.

Tenemos

$$\begin{array}{r} 320 \\ \underline{\times\ 23} \\ 2220 \\ \underline{1300\ \ .} \\ 21220 \end{array} \qquad 320_4\times3_4 = 2220_4 \qquad 320_4\times2_4 = 1300_4$$

Escribamos los números dados en el sistema decimal y comprobemos. Esto es,

$$(320)_4 = 3\times4^2 + 2\times4^1 + 0\times2^0 = \qquad (56)_{10}$$

$$\underline{\times\ (23)}_4 = 2\times4^1 + 3\times4^0 = \qquad \underline{\times\ (11)}_{10}$$

$$(21220)_4 = 2\times4^4 + 1\times4^3 + 2\times4^2 + 2\times4^1 + 0\times4^0 = \ (616)_{10}$$

Proseguiremos con el tema división de números en el sistema cuaternarios.

DIVISIÒN DE NÙMEROS CUATERNARIOS.

Daremos un ejemplo para ilustrar la operación división de números cuaternarios.

EJEMPLO III-11.

Divida $(12330)_4$ por $(10)_4$.

$$
\begin{array}{r|l}
12330 & 10 \\ \cline{2-2}
-10 & 1233 \\ \cline{1-1}
23 & \\
-20 & \\ \cline{1-1}
33 & \\
-30 & \\ \cline{1-1}
30 & \\
-30 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(12330)_4 = 1\times4^4+2\times4^3+3\times4^2+3\times4^1+0\times4^0 = (444)_{10}$

Divisor $(10)_4 = 1\times4^1+0\times4^0 = (4)_{10}$

Cociente $(1233)_4 = 1\times4^3+2\times4^2+3\times4^1+3\times4^0 = (111)_{10}$

Residuo $(0)_4 = (0)_{10}$

Luego, $(12330)_4 = (1233)_4 \times (10)_4 + (0)_4$

Hagamos este mismo ejemplo en base diez para comprobar.

$$
\begin{array}{r|l}
444 & 4 \\ \cline{2-2}
-4 & 111 \\ \cline{1-1}
04 & \\
-4 & \\ \cline{1-1}
04 & \\
-4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Lo cual podemos constatar que ambos sistemas coinciden.

Continuaremos con la resolucion de la operación complemento a b de un nùmero cuaternario.

COMPLEMENTO A b DE UN NÙMERO CUATERNARIO.

Brindaremos dos ejemplos y sus soluciones, utilizaremos cantidades enteras y fraccionrias para ilustrar dichos ejemplos.

EJEMPLO III-12.

a) Calcule el complemento a 4 de $(310)_4$.

Para este caso N = 310, n = 3 y b = 4. Usando la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos,

$C_4(N) = (4^3)_{10} - (310)_4 = (64)_{10} - (310)_4 = (1000)_4 - (310)_4 = (0030)_4$

Realicemos la resta $(1000)_4 - (310)_4$.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 3 & 4 & \\ & & 4{+}0 & 4{+}0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 3 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

b) Calcule el complemento a 4 de $(321.3)_4$

Para este caso N = 321.3 n = 3 b = 4.

$C_4(N) = (4^3)_{10} - (321.3)_4 = (64)_{10} - (321.3)_4 = (1000)_4 - (321.3)_4 = (0022.1)_4$.

Hagamos la resta $(1000)_4 - (321.3)_4$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ & 4{+}0 & 4{+}0 & 4{+}0 & 4{+}0 \\ 1 & 0 & 0 & 0. & 0 \\ - & 3 & 2 & 1. & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2. & 1 \end{array}$$

Tambien, en el sistema cuaternario se puede calcular el complemento a b –1. Veamos el ejemplo a continuacion.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMERO CUATERNARIO

Se daran 2 ejemplos de complementos a b – 1 y su respectivas soluciones. Veamos su resolucion a continuacion.

EJEMPLO III-13.

a) Calcule el complemento a 3 de $(312)_4$

En este caso usaremos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$, donde N = 312, n = 3, m = 0 y b = 4

$C_{4-1}(N) = C_3(N) = (4^3)_{10} - 4^0 - (312)_4 = (64)_{10} - 1 - (312)_4 = (1000)_4 - 1 - (312)_4$

$= (1000)_4 - (313)_4 = (0021)_4$.

Hagamos la resta $(1000)_4 - (313)_4$.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 4+0 & 4+0 & 4+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
- & 3 & 1 & 3 \\ \hline
0 & 0 & 2 & 1
\end{array}
$$

b) Calcule el complemento a 3 de $(0.311)_4$

Para este caso tenemos que N = 0.311, n = 0, m = 3 y b = 4. De acuerdo a la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$ tenemos que,

$C_{4-1}(N) = C_3(N) = (4^0)_{10} - 4^{-3} - (0.311)_4 = (1 - 0.015625)_{10} - (0.311)_4$

$= (0.98375)_{10} - (0.311)_4 = (0.333)_4 - (0.311)_4 = (0.022)_4$.

Traduzcamos el número $(0.98375)_{10}$ a un número de base 4. Esto es,

$$(1 - 0.015625)_{10} = (0.98375)_{10}$$

$$0.98375\times4 = 3.9375$$

$$0.9375\times4 = 3.75$$

$$0.75\times4 = 3.0$$

Entonces $(0.98375)_{10} = (0.333)_4$.

Continuaremos con la resta de 2 numeros cuaternarios utilizando sus complemento.

RESTA DE DOS NÚMEROS CUATERNARIOS USANDO COMPLEMENTOS.

Se dará un solo ejemplo de esta operación. He aquí el ejemplo.

EJEMPLO III-14.

De $(332)_4$ reste $(311)_4$ utilizando complemento a 4.

332
<u>311</u>
0023 Complemento de $C_4(311)$
~~1~~021 Suma de 332 + 0023 = 1021

Resolvamos el complemento de $C_4(311)$

$C_4(311) = (4^3)_{10} - (311)_4 = (64)_{10} - (311)_4 = (1000)_4 - (311)_4 = (0023)_4$.

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 3 & 3 & 4 \\
 & 4+0 & 4+0 & 4+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
- & 3 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 2 & 3
\end{array}
$$

Ahora,

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & \\
 & 3 & 3 & 2 \\
+0 & 0 & 2 & 3 \\
\hline
\cancel{1} & 0 & 2 & 1
\end{array}
$$

$2_4+3_4 = 1$ y va 1 de acarreo $1+3_4+2_4 = 2_4$ y va 1 de acarreo

$1+3_4 = 0$ y va 1 de acarreo

Aquí se produce un acarreo es por eso que se elimina el primer numero de izquierda a derecha en este caso es el numero 1 y nos queda (021) = $(21)_4$.

Luego,

$$
\begin{array}{ccc}
3 & 3 & 2 \\
-3 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 2 & 1
\end{array}
$$

por tanto coinciden con la operación anterior entonces el numero buscado en la resta con complementos es $(21)_4$.

Concluyendo este ejemplo pasado nos introduciremos a un nuevo sistema numerico el cual es el sistema quinario.

SISTEMA NUMÉRICO QUINARIO.

En este sistema numérico solo podemos utilizar cinco dígitos numéricos los cuales son 0, 1, 2, 3 y 4. En esta parte se presentaran ejercicios con sus respectivas respuestas. Veremos cómo se suman, se restan, se multiplican, se dividen y se calculan los complementos de los números escritos en el sistema quinario.

SUMA DE NÙMEROS QUINARIOS.

En esta operación se dará un único ejemplo con su respuesta incluida y su comprobación.

EJEMPLO III-15.

Sume los números $(2343)_5$ y $(1432)_5$.

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & 1 & & \\ 2 & 3 & 4 & 3 & \quad 1+4_5+3_5=3_5 \text{ y va 1 de acarreo} \\ +1 & 4 & 3 & 2 & \quad 1+3_5+4_5=3_5 \text{ y va 1 de acarreo} \\ \hline 4 & 3 & 3 & 0 & \quad 3_5+2_5=0 \text{ y va 1} \end{array}$$

Verifiquemos este resultado transformándolo al sistema decimal

$$(2343)_5 = 2\times5^3+3\times5^2+4\times5^1+3\times4^0 = \quad (348)_{10}$$

$$\underline{+\ (1432)_5} = 1\times5^3+4\times5^2+3\times5^1+2\times5^0 = \underline{+\ (242)_{10}}$$

$$(4330)_5 = 4\times5^3+3\times5^2+3\times5^1+0\times5^0 = \quad (590)_{10}$$

Ahora seguiremos con la resta de numeros quinarios. Veamos como se realiza.

RESTA DE NÚMEROS QUINARIOS.

En esta operación solo se dará un ejemplo resuelto con su comprobación.

EJEMPLO III-16.

De $(4021.34)_5$ reste $(342.44)_5$.

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 6 & 5 & 8 & \\ & 5+0 & 5+2 & 5+1 & 5+3 & \\ 4 & 0 & 2 & 1. & 3 & 4 \\ - & 3 & 4 & 2. & 4 & 4 \\ \hline & 3 & 1 & 2 & 3. & 4 \quad 0 \end{array}$$

Comprobación esta operación trasladando los números dados al sistema decimal.

$$(4021.34)_5 = 4\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+1\times5^0+3/5^1+4/5^2 = (511.76)_{10}$$

$$\underline{-\ (342.44)}_5 = 3\times5^2+4\times5^1+2\times5^0+4/5^1+4/5^2 = \qquad \underline{-\ (97.96)_{10}}$$

$$(3123.40)_5 = 3\times5^3+1\times5^2+3\times5^1+3\times5^0+4/5^1+0/5^2 = \qquad (413.8)_{10}$$

Continuaremos con la operación multiplicación. Veamos un ejemplo.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS QUINARIOS.

En esta operación se dará un único ejercicio resuelto con su debida comprobación.

EJEMPLO III-17.

Multiplique los siguientes números quinarios $(4321)_5$ y $(234)_5$.

```
     4321
     ×234
    33334
   24013
  14142    .
 2243214
```

$4321_5\times4_5 = 33334_5$ $\qquad$ $4321_5\times3_5 = 14013_5$

$4321_5\times2_5 = 14142_5$

Comprobemos esto escribiendo los números quinarios como números decimales. Así,

$$(4321)_5 = 4\times5^3 + 3\times5^2 + 2\times5^1 + 1\times5^0 = \qquad (586)_{10}$$

$$\underline{\times\ (234)}_5 = 2\times5^2 + 3\times5^1 + 4\times5^0 = \qquad \underline{\times\ (69)}_{10}$$

$$(2243214)_5 = 2\times5^6 + 1\times5^5 + 4\times5^4 + 3\times5^3 + 2\times5^2 + 1\times5^1 + 4\times5^0 = (40434)_{10}$$

Ahora continuaremos con la operación división de números quinarios**.**

DIVISIÒN DE NÙMEROS QUINARIOS.

Daremos un ejemplo de división y su comprobación.

EJEMPLO III-18.

Divida los siguientes números quinarios $(4000)_5$ y $(20)_5$

```
 4000 | 20
–40     200
  00
 –0
   00
  –0
    0
```

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(4000)_5 = 4\times5^3 + 0\times5^2 + 0\times5^1 + 0\times5^0 = (500)_{10}$

Divisor $(20)_5 = 2\times5^1 + 0\times5^0 = (10)_{10}$

Cociente $(200)_5 = 2\times5^2 + 0\times5^1 + 0\times5^0 = (50)_{10}$

Luego, $(4000)_5 \div (20)_5 = (200)_5 = (50)_{10} = (500)_{10} \div (10)_{10}$

Hagamos esta división en el sistema decimal.

$$\begin{array}{r|l} 500 & 10 \\ \cline{2-2} -50 & 50 \\ \cline{1-1} 00 & \\ -0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

También se puede hacer el complemento a b de un número quinario. Veamos a continuación.

COMPLEMENTO A b DE UN NÙMERO QUINARIO.

En esta operación daremos dos ejemplos con sus respectivas respuestas. El primer ejemplo será con números enteros y el segundo con números fraccionarios.

EJEMPLO III-19.

a) Calcule el complemento a 5 de $(422)_5$

Para este caso tenemos que N = 422, n = 3, y b = 5. Usemos la fórmula

$C_b(N) = b^n - N$. Luego,

$C_5(N) = (5^3)_{10} - (422)_5 = (125)_{10} - (422)_5 = (1000)_5 - (422)_5 = (0023)_5$

Verifiquemos la resta.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 4 & 5 \\ & 5+0 & 5+0 & 5+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & 4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

b) Calcule el complemento a 5 de (410.2213)

En este caso N = 410.2213, n = 3 y b = 5. Usemos la fórmula $C_b(N) = b^n - N$.

$C_5(N) = (5^3)_{10} – (410.2213)_5 = (125)_{10} – (410.2213)_5 = (1000)_5 – (410.2213)_5.$

Realicemos la resta.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\
 & 5+0 & 5+0 & 5+0 & 5+0 & 5+0 & 5+0 & 5+0 \\
1 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\
– & 4 & 1 & 0. & 2 & 2 & 1 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 4. & 2 & 2 & 3 & 2
\end{array}$$

También, podemos encontrar el complemento a b–1 de un número quinario. A continuación estudiaremos esto.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMERO QUINARIO.

Se darán dos ejemplos ya resueltos con sus respectivas verificaciones. El primer ejemplo será con números enteros y el segundo con número fraccionarios.

EJEMPLO III-20.

a) Calcule el complemento a 4 de $(421)_5$.

Para este ejemplo tenemos que N = 421, n = 3, m = 0 y b = 5. Luego, Usemos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n – b^{-m} – N$.

$C_{5-1}(N) = C_4(N) = (5^3)_{10} – 5^{-0} – (421)_5 = (125)_{10} – 1 – (421)_5 = (1000)_5 – 1 – (421)_5$

$= (1000)_5 – (422)_5 = (0024)_5$

Verifiquemos la resta.

$$\begin{array}{cccc}
0 & 4 & 4 & 5 \\
 & 5+0 & 5+0 & 5+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
– & 4 & 2 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 2 & 4
\end{array}$$

b) Calcule el complemento a 4 de $(0.4321)_5$

En este caso tenemos que N = 0.4321, n = 0, m = 4 y b = 5. Luego, Usemos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n – b^{-m} – N$.

$C_{5-1}(0.4321) = C_4(0.4321) = (5^0)_{10} – 5^{-4} – (0.4321)_5 = (1 – 0.0016)_{10} – (0.4321)_5$

$= (0.9984)_{10} – (0.4321)_5 = (0.4444)_5 – (0.4321)_5 = (0.0123)_5.$

Traslademos $(0.9984)_{10}$ a un número quinario.

$$0.9984 \times 5 = 4.992$$

$$0.992 \times 5 = 4.96$$

$$0.96 \times 5 = 4.8$$

$$0.8 \times 5 = 4$$

Entonces $(09984)_{10} = (0.4444)_5$

Veamos a continuación como se resta los números quinarios utilizando los complementos.

RESTA DE NÚMEROS QUINARIOS CON COMPLEMENTOS.

Aquí daremos un único ejemplo de resta con complementos.

EJEMPLO III-21.

Reste $(431)_5$ de $(443)_5$.

443	
<u>431</u>	
014	Complemento de C_5 (431).
~~1~~012	Suma de 443 + 0014= 1012.

Calculemos complemento de C_5 (431).

$C_5(431) = (5^3)_{10} - (431)_5 = (125)_{10} - (431)_5 = (1000)_5 - (431)_5 = (0014)_5$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 4 & 5 \\ & 5+0 & 5+0 & 5+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & 4 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Ahora,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \\ & 4 & 4 & 3 \\ +0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \cancel{1} & 0 & 1 & 2. \end{array}$$

Aquí se produce un acarreo, por eso debemos de eliminar el ultimo número de izquierda a derecha en este caso es el 1 y nos queda $(012)_5 = (12)_5$

Luego,

$$\begin{array}{r} 4 \quad 4 \quad 3 \\ -\,4 \quad 3 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

Lo cual coinciden con la operación anterior entonces el número buscado usando la resta con complementos es $(12)_5$.

A continuación proseguiremos con los números senarios.

SISTEMA NUMÈRICO SENARIO.

En este sistema numérico solo podemos utilizar seis dígitos numéricos los cuales son: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. En este sistema veremos sus operaciones elementales y su resolución. También observaremos cómo se suman, se restan, se multiplican, se dividen y se calculan los complementos de los números escritos en el sistema senario.

SUMA DE NÙMEROS SENARIOS.

Podremos en práctica la suma mediante un ejercicio ya resuelto y con su debida resolución.

EJEMPLO III-22.

Sume los siguientes números senarios $(5421)_6$ y $(3415)_{6.}$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & & 1 & \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ +\,3 & 4 & 1 & 5 \\ \hline 13 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$1 + 5_6 = 0$ y va 1 de acarreo $\quad 4_6 + 4_6 = 2_6$ y va 1 de acarreo.

$1 + 5_6 + 3_6 = 3_6$ y va 1 de acarreo.

Resolución:

$$(5421)_6 = 5\times6^3 + 4\times6^2 + 2\times6^1 + 1\times5^0 = \quad (1237)_{10}$$

$$\underline{+\ (3415)}_6 = 3\times6^3 + 4\times6^2 + 1\times6^1 + 5\times6^0 = \quad +\ \underline{(803)}_{10}$$

$$(13240)_6 = 1\times6^4 + 3\times6^3 + 2\times6^2 + 4\times6^1 + 0\times6^0 = (2040)_{10}$$

Con el pasado ejercicio concluye la operación suma veamos ahora como se procede con la operación resta de números senarios.

RESTA DE NÙMEROS SENARIOS.

Ejemplificaremos la operación resta con un único ejemplo.

EJEMPLO III-23.

Reste los siguientes números senarios $(5324)_6$ y $(1532)_{6.}$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & 8 & \\ & 6+2 & 6+2 & \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 5 & 2 \end{array}$$

Traslademos los números senarios a decimales y comprobemos la operación resta.

$$(5324)_6 = 5\times6^3 + 3\times6^2 + 2\times6^1 + 4\times6^0 = (1204)_{10}$$
$$\underline{-(1532)_6} = 1\times6^3 + 5\times6^2 + 3\times6^1 + 2\times6^0 = \underline{-(416)_{10}}$$
$$(3352)_6 = 3\times6^3 + 3\times6^2 + 5\times6^1 + 2\times6^0 = (788)_{10}$$

Ahora veremos cómo se resuelve una multiplicación de números senarios.

MULTIPLICACIÒN DE NÙMEROS SENARIOS.

En esta operación se dará un único ejercicio ya resuelto mediante la operación multiplicación con su respectiva comprobación.

EJEMPLO III-24.

Multiplique los siguientes números senarios $(5342)_6$ y $(213)_6$

$$\begin{array}{r} 5342 \\ \underline{\times\ 213} \\ 24510 \\ 5342 \\ \underline{15124} \\ 2035130 \end{array}$$

$5342_6\times3_6 = 24510_6$ $\quad$ $5342_6\times1 = 5342_6$

$5342_6\times2_6 = 2035130_6$

Traslademos los números senarios a números decimales para comprobar la operación.

$$(5342)_6 = 5\times6^3 + 3\times6^2 + 4\times6^1 + 2\times6^0 = (1214)_{10}$$
$$\underline{\times\ (213)_6} = 2\times6^2 + 1\times6^1 + 3\times6^0 = \underline{\times\ (81)_{10}}$$
$$(2035130)_6 = 2\times6^6 + 0\times6^5 + 3\times6^4 + 5\times6^3 + 1\times6^2 + 3\times6^1 + 0\times6^0 = (98334)_{10}.$$

Seguidamente ilustraremos la operación división de números senarios mediante un ejemplo.

DIVISIÒN DE NÚMEROS SENARIO.

Brindaremos un ejemplo ya resuelto para verificar la solución de un problema de división de dos números senario.

EJEMPLO III-25.

Divida los siguientes números senarios $(150)_6$ y $(10)_6$

$$\begin{array}{r|l} 150 & \underline{\ 10\ } \\ \underline{-10} & 15 \\ 50 & \\ \underline{-50} & \\ 0 & \end{array}$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(150)_6 = 1\times6^2 + 5\times6^1 + 0\times6^0 =$ $(66)_{10}$

Divisor $(10)_6 = 1\times6^1 + 0\times6^0 =$ $(6)_{10}$.

Cociente $(15)_6 = 1\times6^1 +5 \times6^0 =$ $(11)_{10}$

Residuo $(0)_6 = 0$.

Luego, $(150)_6 = (15)_6 \times (10)_{10} + 0$.

Realicemos este ejercicio en base diez.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 11 \\ \cline{1-1} 06 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Concluido el ejemplo de división continuaremos viendo cómo se resuelve otra operación la cual es el complemento a b de un número senarios.

COMPLEMENTO A b DE UN NÚMERO SENARIO.

En esta operación de complemento daremos dos ejercicios ya resueltos con sus respectivas comprobaciones el primer ejercicio será con números enteros el segundo será con números fraccionarios.

EJEMPLO III-26.

a) Calcule el complemento a 6 de $(5214)_6$

Para este caso tenemos que N = 5214, n = 4 y b = 6. Usemos la fórmula

$$C_6(N) = b^4 – N. \text{ Así,}$$

$C_6(N) = (6^4)_{10} – (5214)_6 = (1296)_{10} – (5214)_6 = (10000)_6 – (5214)_6 = (00342)_6$

Realicemos la diferencia.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ & 6+0 & 6+0 & 6+0 & 6+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ – & 5 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 & 2. \end{array}$$

a) Calcule el complemento a 6 de (5314.42).

Aquí, N = 5314.42, n = 4 y b = 6. Usemos la fórmula $C_6(N) = b^n - N$. Luego,

$C_6(N) = (6^4)_{10} - (5314.42)_6 = (1296)_{10} - (5314.42)_6 = (10000)_6 - (5314.42)_6$

$= (00241.14)_6$

Verifiquemos la diferencia.

0	5	5	5	5	5	6
	6+0	6+0	6+0	6+0	6+0	6+0
1	0	0	0	0.	0	0
–	5	3	1	4.	4	2
0	0	2	4	1.	1	4

También podemos aplicar el complemento a b –1 de un número senario.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMERO SENARIO.

En esta operación complemento ilustraremos dos ejemplos ya resueltos uno con números enteros y el otro solo con parte fraccionaria. **.**

EJEMPLO III-27.

a) Calcule el complemento a 5 de $(5214)_6$.

Para este ejemplo tenemos que N = 5214, n = 4, m = 0 y b = 6. Usemos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$. Luego,

$C_{6-1}(N) = C_5(N) = (6^4)_{10} - 6^{-0} - (5214)_6 = (1296)_{10} - 1 - (5214)_6$

$= (10000)_6 - (5215)_6 = (00341)_6$

Resolvamos la diferencia.

0	5	5	5	6
	6+0	6+0	6+0	6+0
1	0	0	0	0
–	5	2	1	5
0	0	3	4	1

b) Calcule el complemento a 5 de $(0.531)_6$

En este ejemplo tenemos que N = 0.531, n = 0, m = 3 y b = 6. A continuación usemos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$.

$C_{6-1}(N) = C_5(N) = (6^0)_{10} - 6^{-3} - (0.531)_6 = (1 - 0.0046296296)_{10} - (0.531)_6$

$= (0.9953703704)_{10} - (0.531)_6 = (0.024)_6$

Veamos cómo resultan los valores.

$(1– 0.0046296296)_{10} = (0.9953703704)_{10}$

$(0.9953703704)_{10} – (0.531)_6 = (0.555 – 0.531)_6 = (0.024)_6$

$0.9953703704×6 = 5.9722222224$

$0.9722222224×6 = 5.8333333344$

$0.8333333344×6 = 5.0000000064$

$0.0000000064×6 = 0.0000000384.$

Entonces $(0.9953703704)_{10} = (0.555)_6 = 0×6^0+5/6^1+5/6^2+5/6^3$.

Veamos ahora cómo se resuelve un ejercicio mediante la operación resta con complementos.

RESTA DE NÚMEROS SENARIO CON COMPLEMENTO.

Ilustraremos un ejercicio mediante esta operación**.**

EJEMPLO III- 28.

Reste $(5321)_6$ de $(5544)_6$

5544	
5321	
0235	Complemento $C_6(5321)_6$
~~1~~0223	Suma de 5544 + 0235 = 10223.

Calculemos el complemento a 6.

$C_6(5321) = (6^4)_{10} – (5321)_6 = (1296)_{10} – (5321)_{10} = (10000)_6 – (5321)_6 = (00235)_6$.

0	5	5	5	6
	6+0	6+0	6+0	6+0
1	0	0	0	0
–	5	3	2	1
0	0	2	3	5

Ahora, calculemos la suma.

1	1	1	
5	5	4	4
+ 0	2	3	5
~~1~~0	2	2	3

$4_6 + 5_6 = 3_6$ y va 1 de acarreo. $1+4_6 +3_6 = 2_6$ y va 1 de acarreo.
$1+5_6+2_6 = 2_6$ y va 1 de acarreo. $1+5_6 = 0$ y va 1 de acarreo.

Aquí se da un acarreo es por eso que se debe eliminar el ultimo número de izquierda a derecha en este caso es el número 1 y así obtenemos $(0223)_6 = (223)_6$.

Luego,

$$\begin{array}{rrrr} 5 & 5 & 4 & 4 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

lo cual ambas coinciden por tanto el número buscado en la resta con complementos es $(223)_6$.

Con este último ejercicio del sistema senario terminamos el tercer capítulo, el siguiente capítulo tratara de tres sistemas los cuales son: octario u octal, hexadecimal y vigesimal.

CAPÍTULO IV

SISTEMA OCTARIO, SISTEMA HEXADECIMAL Y SISTEMA VIGESIMAL.

Este capítulo abordaremos tres sistemas los cuales son: octario, hexadecimal y vigesimal. También se darán ejemplos ya resueltos de las operaciones elementales y de los complementos de dichos sistemas. El primer sistema a estudiar será el sistema octario.

SISTEMA NUMÈRICO OCTARIO.

Este sistema octario trabaja con ocho símbolos numéricos los cuales son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En este sistema veremos ejercicios resueltos de las operaciones elementales como la suma, la resta, la multiplicación y la división. También trabajaremos con los complementos. El primer tema a abordar en este sistema será la suma.

SUMA DE NÙMEROS OCTARIO.

Daremos un ejemplo resuelto de esta operación.

EJEMPLO IV-1.

Sume los números $(75423.65)_8$ y $(3647.345)_8$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3. & 6 & 5 & 0 \\ + & 3 & 6 & 4 & 7. & 3 & 4 & 5 \\ \hline 10 & 1 & 2 & 7 & 3. & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

$1 + 6_8 + 3_8 = 2_8$ y va 1 de acarreo
$1 + 3_8 + 7_8 = 3_8$ y va 1 de acarreo
$1 + 5_8 + 3_8 = 1$ y va 1 de acarreo
$1 + 7_8 = 0$ y va 1 de acarreo

Comprobemos esto convirtiendo los números octarios en decimales.

$$(75423.65)_8 = 7\times8^4 + 5\times8^3 + 4\times8^2 + 2\times8^1 + 3\times8^0 + 6/8^1 + 5/8^2 = \quad (31507.82813)_{10}$$

$$\underline{+(3647.345)}_8 = 3\times8^3 + 6\times8^2 + 4\times8^1 + 7\times8^0 + 3/8^1 + 4/8^2 + 5/8^3 = \quad + \ \underline{(1959.44726)}_{10}$$

$$(101273.215)_8 = 1\times8^5+0\times8^4+1\times8^3+2\times8^2+7\times8^1+3\times8^0+2/8^1+1/8^2+5/8^3 = (33467.27539)_{10}$$

A continuación ilustraremos la operación resta.

RESTA DE NÙMEROS OCTARIOS.

En esta operación daremos un solo ejercicio resuelto.

EJEMPLO IV- 2.

Reste los siguientes números octonarios $(2546.54)_8$ de $(4317.32)_8$.

3	10	9	6	10	10
	8+2	8+1		8+2	8+2
4	3	1	7.	3	2
– 2	5	4	6.	5	4
1	5	5	0.	5	6

Para comprobar escribamos los números octarios en decimales. Esto es,

$$\begin{array}{rll}
(4317.32)_8 = 4\times8^3 + 3\times8^2 + 1\times8^1 + 7\times8^0 + 3/8^1 + 2/8^2 = & & (2255.40625)_{10} \\
\underline{-\ (2546.54)}_8 = 2\times8^3 + 5\times8^2 + 4\times8^1 + 6\times8^0 + 5/8^1 + 4/8^2 = & & \underline{-\ (1382.68750)}_{10} \\
(1550.56)_8 = 1\times8^3 + 5\times8^2 + 5\times8^1 + 0\times8^0 + 5/8^1 + 6/8^2 = & & (872.71875)_{10}
\end{array}$$

La siguiente operación a estudiar es la multiplicación.

MULTIPLICACIÒN DE NÙMEROS OCTARIOS.

Para esta operación se dará un único ejemplo ya resuelto.

EJEMPLO IV-3.

Multiplique $(7651)_8$ y $(4320)_8$

$$\begin{array}{r}
7651 \\
\underline{\times 4320} \\
0000 \\
17522 \\
27373 \\
\underline{37244.} \\
42400520
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
7651_8\times0 = 0 & 7651_8\times2_8 = 17522_8 \\
7651_8\times3_8 = 27373_8 & 7651_8\times4_8 = 37244_8
\end{array}$$

Transformemos los números octarios a decimales para comprobar.

$$\begin{array}{rr}
(7651)_8 = 7\times8^3 + 6\times8^2 + 5\times8^1 + 1\times8^0 = & (4009)_{10} \\
\underline{\times\ (4320)}_8 = 4\times8^3 + 3\times8^2 + 2\times8^1 + 0\times8^0 = & \underline{\times\ (2256)}_{10} \\
(42400520)_8 = 4\times8^7+2\times8^6+4\times8^5+0\times8^4+0\times8^3+5\times8^2+2\times8^1+0\times8^0 = & (9044304)_{10}
\end{array}$$

La siguiente operación a ilustrar es la división de números octonarios.

DIVISIÒN DE NÙMEROS OCTARIOS.

En esta operación solo se dará un ejemplo y resuelto.

EJEMPLO IV-4.

Divida $(17510)_8$ entre $(10)_8$

$$
\begin{array}{r|l}
17510 & 10 \\ \cline{2-2}
-10 & 1751 \\ \cline{1-1}
75 & \\
-70 & \\ \cline{1-1}
51 & \\
-50 & \\ \cline{1-1}
10 & \\
-10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(17510)_8 = 1\times8^4 + 7\times8^3 + 5\times8^2 + 1\times8^1 + 0\times8^0 = (8008)_{10}$

Divisor $(10)_8 = 1\times8^1 + 0\times8^0 =$ $(8)_{10}$

Cociente $(1751)_8 = 18^3 + 7\times8^2 + 5\times8^1 + 1\times8^0 =$ $(1001)_{10}$

Residuo $(0)_8 =$ 0.

Luego,

$(17510)_8 = (10)_8 \times (1751)_8 + (0)$

Resolvamos este ejercicio mediante el sistema decimal.

$$
\begin{array}{r|l}
8008 & 8 \\ \cline{2-2}
-8 & 1001 \\ \cline{1-1}
00 & \\
-0 & \\ \cline{1-1}
00 & \\
-0 & \\ \cline{1-1}
08 & \\
-8 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

En este sistema de numeración también podemos abordar el tema del complemento a b. A continuación ejemplos de complemento a b de un número.

COMPLEMENTO A b DE UN NÚMERO OCTARIO.

En esta operación daremos dos ejemplos ya resueltos un ejemplo será con números enteros y el otro ejercicio será con fracciones.

EJEMPLO IV-5.

a) Encuentre el complemento a 8 de $(75421)_8$

Aquí N = 75421, n = 4 y b = 8. Luego, usando la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos

$C_8(75421) = (8^5)_{10} - (75421)_8 = (32768)_{10} - (75421)_8 = (100000)_8 - (75421)_8$

$= (002357)_8$

Resolvamos la resta.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ & 8+0 & 8+0 & 8+0 & 8+0 & 8+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{array}$$

b) Calcule el complemento a 8 de $(675.32)_8$

Para este caso N = 675.32, n = 3 y b = 8. Usando la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos:

$C_8(675.32) = (8^3)_{10} - (675.32)_8 = (512)_{10} - (675.32)_8 = (1000 - 675.32)_8$

$= (0102.46)_8$

Hagamos la resta.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ & 8+0 & 8+0 & 8+0 & 8+0 & 8+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 \\ - & 6 & 7 & 5. & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2. & 4 & 6. \end{array}$$

A continuación ilustraremos el complemento a b – 1 de un nùmero octario.

COMPLEMENTO A b – 1 DE UN NÚMERO OCTARIO.

En esta operación daremos dos ejemplos ya resueltos uno de números enteros y el otro de números fraccionarios.

EJEMPLO IV- 6.

a) Calcule el complemento a 7 de $(765)_8$

Aquí, N = 765, n = 3, m = 0 y b = 8. Luego, por la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$ tenemos:

$$C_{8-1}(765) = C_7(765) = (8)^3{}_{10} - (8)^{-0} - (765)_8 = (512)_{10} - (1) - (765)_8 = (1000)_8 - (766)_8$$
$$= (0012)_8.$$

Resolvamos la resta.

	7	7	
0	8+0	8+0	8
1	0	0	0
–	7	6	6
0	0	1	2

b) Calcule el complemento a 7 de $(0.764)_8$

Aquí N = 0.764, n = 0, m = 3 y b = 8. Usemos la fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$.

$$C_{8-1}(0.764) = C_7(0.764) = (8)^0 - (8)^{-3} - (0.764)_8 = (1 - 0.001953125)_{10} - (0.764)_8$$
$$= (0.998046875)_{10} - (0.764)_8 = (0.777)_8 - (0.764)_8 = (0.013)_8$$

Escribamos $(0.998046875)_{10}$ como un número octal.

$$0.998046875\times 8 = 7.984375$$
$$0.984375\times 8 = 7.875$$
$$0.875\times 8 = 7.000$$

Entonces $(0.998046875)_{10} = (0.777)_8 = 0\times 8^0 + 7/8^1 + 7/8^2 + 7/8^3$

$$(0.777 - 0.764)_8 = (0.013)_8.$$

A continuación abordaremos la operación resta usando los complementos de números octarios.

RESTA CON COMPLEMENTO DE NÙMEROS OCTARIOS.

En esta operación se dará un único ejemplo.

EJEMPLO IV-7.

Reste $(5721)_8$ de $(7463)_8$

$$
\begin{array}{ll}
\ \ 7463 & \\
\underline{\ \ 5721} & \\
02057 & \text{Complemento } C_8(5721) \\
\cancel{1}1542 & \text{Suma de } 7463 + 02057 = 1542
\end{array}
$$

Encuentre el complemento de $C_8(5721)$.

$C_8(5721) = (8^4)_{10} – (5721)_8 = (4096)_{10} – (5721)_8 = (10000 – 5721)_8 = (02057)_8$

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 7 & 7 & 7 & 8 \\
 & 8+0 & 8+0 & 8+0 & 8+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
– & 5 & 7 & 2 & 1 \\
\hline
0 & 2 & 0 & 5 & 7
\end{array}
$$

Ahora

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & \\
7 & 4 & 6 & 3 \\
+2 & 0 & 5 & 7 \\
\hline
\cancel{1}1 & 5 & 4 & 2
\end{array}
$$

$3_8+7_8 = 2_8$ y va 1 de acarreo $7_8+2_8 = 1$ y va 1 de acarreo

$1+6_8+5_8 = 4_8$ y va 1 de acarreo

Aquí se produce un acarreo por consiguiente se elimina el ultimo número de izquierda a derecha en este caso es el último 1 de izquierda a derecha por tanto el 1 se anula y nos queda $(1542)_8$

Luego,

$$
\begin{array}{cccc}
6 & 12 & & \\
 & 8+4 & & \\
7 & 4 & 6 & 3 \\
– 5 & 7 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 5 & 4 & 2
\end{array}
$$

$(1542)_8$ este es el número buscado en la resta de complementos.

Con el pasado ejemplo damos por concluido el sistema numérico octario a continuación proseguiremos con el sistema hexadecimal.

SISTEMA NUMÈRICO HEXADECIMAL.

Este sistema número trabaja con 16 dígitos numéricos los cuales son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15. Esta vez haremos unos cambios en la simbología o dígitos cambiaremos los últimos 6 dígitos numéricos por las primera 6 letras del alfabeto. Esto es, 10 = A, 11 = B, 12 = C, 13 = D, 14 = E y 15 = F.

De igual manera que en los pasados sistemas numéricos daremos ejemplos resueltos de las operaciones elementales y de los complementos. La primera operación, como ya es costumbre, será la suma.

SUMA DE NÙMEROS HEXADECIMALES.

En esta operación daremos únicamente un ejemplo ya resuelto.

EJEMPLO IV-8.

Sume los números $(C45D.89)_{16}$ y $(76E5.A7)_{16}$.

Recuerde que A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 y F = 15.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
C & 4 & 5 & D. & 8 & 9 \\
+\,7 & 6 & E & 5. & A & 7 \\
\hline
13 & B & 4 & 3. & 3 & 0
\end{array}
$$

$9_{16} + 7_{16} = 0$ y va 1 de acarreo.

$1 + 8_{16} + A_{16} = 3_{16}$ y va 1 de acarreo.

$1 + D_{16} + 5_{16} = 3_{16}$ y va 1 de acarreo.

$1 + 5_{16} + E_{16} = 4_{16}$ y va 1 de acarreo.

$1 + 4_{16} + 6_{16} = B_{16}$.

$C + 7_{16} = 3$ y va 1 de acarreo.

Escribamos los sumandos hexadecimales como decimales para comprobar. Así,

$$
\begin{array}{rl}
(C45D.89)_{16} = 12\times16^3 + 4\times16^2 + 5\times16^1 + 13\times16^0 + 8/16^1 + 9/16^2 = & (50269.53516)_{10} \\
\underline{+\ (76E5.A7)_{16}} = 7\times16^3 + 6\times16^2 + 14\times16^1 + 5\times16^0 + 10/16^1 + 7/16^2 = & \underline{+\ (30437.65234)_{10}} \\
(13B43.30)_{16} = 1\times16^4+3\times16^3+11\times16^2+4\times16^1+3\times16^0+3/16^1+0/16^2 = & (80707.18750)_{10}.
\end{array}
$$

Continuaremos con la resta de números hexadecimales.

RESTA DE NÙMEROS HEXADECIMALES.

En esta operación solo se dará un ejemplo con su respectiva respuesta.

EJEMPLO IV- 9.

Reste $(A572.39)_{16}$ de $(F78C.54)_{16}$.

Recuerde que A = 10, B =11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 4 & 14_{16} \\ 0 & & & & \multicolumn{2}{c}{10_{16}+4} \\ F & 7 & 8 & C. & 5 & 4 \\ -A & 5 & 7 & 2. & 3 & 9 \\ \hline 5 & 2 & 1 & A. & 1 & B \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10_{16} = 16 \\ 10_{16}+4_{16} = 14_{16} \end{array}$$

Expresemos cada número hexadecimal a decimales y comprobemos la resta.

$$(F78C.54)_{16} = 15\times16^3+7\times16^2+8\times16^1+12\times16^0+5/16^1+4/16^2 = (63372.3281)_{10}$$

$$\underline{-\ (A572.39)}_{16} = 10\times16^3+5\times16^2+7\times16^1+2\times16^0+3/16^1+9/16^2 = \underline{-\ (42354.2266)}_{10}$$

$$(521A.1B)_{16} = 5\times16^3+2\times16^2+1\times16^1+10\times16^0+1/16^1+11/16^2 = (21018.1015)_{10}.$$

Proseguiremos con la operación multiplicación de números hexadecimales.

MULTIPLICACIÒN DE NÚMEROS HEXADECIMALES.

Daremos únicamente un ejemplo resuelto**.** Recordemos D = 13, B = 11 y F = 15.

EJEMPLO IV-10.

Multiplique los números

$$\begin{array}{r} DBF \\ \underline{\times\ \ 98} \\ 6DF8 \\ \underline{7BB7\ \ .} \\ 82968 \end{array} \qquad DBF_{16}\times8_{16} = 6DF8_{16} \qquad DBF_{16}\times9_{16} = 7BB7_{16}$$

Escribamos los números hexadecimales como números decimales para comprobar.

$$(DBF)_{16} = 13\times16^2 + 11\times16^1 + 15\times16^0 = (3519)_{10}$$

$$\underline{\times\ (98)}_{16} = 9\times16^1 + 8\times16^0 = \underline{\times\ (152)}_{10}$$

$$(82968)_{16} = 8\times16^4 + 2\times16^3 + 9\times16^2 + 6\times16^1 + 8\times16^0 = (534888)_{10}.$$

Terminado este ejemplo ahora daremos un ejemplo para la división de números hexadecimales.

DIVISIÒN DE NÙMEROS HEXDECIMALES

Veamos mediante un ejemplo cómo se resuelve una división en el sistema hexadecimal.

EJEMPLO IV-11.

Recordemos D = 13,   F = 15 y A = 10.

$$
\begin{array}{r|l}
DFA & \ 8 \\ \cline{2-2}
-8 & 1BF \\ \cline{1-1}
5F & \\
-58 & \\ \cline{1-1}
07A & \\
-78 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $(DFA)_{16} = 13\times16^2 + 15\times16^1 + 10\times16^0 = (3578)_{10}$

Divisor $(8)_{16} = 8\times16^0 = (8)_{10}$

Cociente $(1BF)_{16} = 1\times16^2+11\times16^1+15\times16^0 = (447)_{10}$

Residuo $(2)_{16} = (2)_{10}$.

Luego, $(DFA)_{16} = (1BF)_{16} \times (8)_{16} + (2)_{16}$

Hagamos este mismo ejercicio en decimal para verificar ambos resultados.

$$
\begin{array}{r|l}
3578 & \ 8 \\ \cline{2-2}
-32 & 447 \\ \cline{1-1}
37 & \\
-32 & \\ \cline{1-1}
58 & \\
-56 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

De esta manera se constata que ambos sistemas coinciden.

Proseguiremos con la operación complemento a b de un número hexadecimal.

COMPLEMENTO A b DE UN NÙMERO HEXADECIMAL.

En esta operación se dará dos ejemplos claros y sencillos de complementos, los elementos serán números enteros y números fraccionarios como se observará a continuación.

EJEMPLO IV-12.

a) Calcule el complemento a b de $(E9AB)_{16}$

Luego, N = E9AB, n = 4 y b = 16. Usando la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos que

$C_{16}(N) = C_{16}(E9AB) = (16^4)_{10} - (E9AB)_{16} = (65536)_{10} - (E9AB)_{16}$

$= (10000)_{16} - (E9AB)_{16} = (01655)_{16}$

Recordemos $E_{16} = 14_{10}$, $A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$ y $E_{16}=14_{10}$, $F_{16} = 15_{10}$ y $10_{16} = 16_{10}$

Realicemos la resta.

0	15	15	15	16
	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$
1	0	0	0	0
–	14	9	10	11
0	1	6	5	5

b) Calcule el complemento a b de $(AB.BDC)_{16}$.

Para este caso N = AB.BDC, n = 2 y b = 16. Por la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos,

$C_{16}(N) = C_{16}(AB.BDC) = (16^2)_{10} - (AB.BDC)_{16} = (256)_{10} - (AB.BDC)_{16}$

$= (100)_{16} - (AB.BDC)_{16} = (054.424)_{16}$

Recordemos A = 10, B = 11, D = 13, C = 12 y F = 15.

Resolvamos la resta.

0	F_{16}	F_{16}	F_{16}	F_{16}	10_{16}
	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$	$10_{16}+0$
1	0	0.	0	0	0
–	A	B.	B	D	C
0	5	4.	4	2	4

Concluida la parte de complementos a b de un número ahora veremos la operación complemento a b – 1 de un número hexadecimal.

COMPLEMENTO A b -1 DE NÙMEROS HEXADECIMALES.

En esta operación se darán un único ejemplo de complementos a b – 1 de un número hexadecimal, el ejemplo que daremos será con números fraccionarios.

EJEMPLO IV-13.

Calcule el complemento a 15 de $(0.AB)_{16.}$

Para este ejemplo tenemos que N = 0.AB, n = 0, m = 2 y d = 16. Usemos la fórmula

$C_{b-1} = b^n – b^{-m} – N$. Luego,

$C_{16-1}(0.AB) = C_{15}(0.AB) = (16)^0{}_{10} – (16)^{-2} – (0.AB)_{16} = (1 – 0.00390625)_{10} – (0.AB)_{16}$

$= (0.99609375)_{10} – (0.AB)_{16} = (0.FF – 0.AB)_{16} = (0.54)_{16}$

Recordemos A = 10, B = 11 y F = 15.

Traslademos el número decimal $(0.99609375)_{10}$ a un número hexadecimal.

$0.99609375×16 = 15.9375$

$0.9375×16 = 15.0$

Entonces $(0.99609375)_{10} = (0.FF)_{16}= (0.1515)_{16}$.

Hagamos la resta.

$$\begin{array}{r} 0.FF \\ \underline{–\ 0.AB} \\ 0.54 \end{array}$$

Terminado este ejemplo proseguiremos con la operación resta con complementos de números hexadecimales.

RESTA DE NÙMEROS HEXADECIMALES UTILIZANDO COMPLEMENTOS

Brindaremos un único ejemplo ya resuelto.

EJEMPLO IV-14.

Resta $(DBA)_{16}$ de $(FC5)_{16}$ usando complemento a 16.

FC5

<u>DBA</u>

246 Complemento de C_{16}(DBA) = 246

~~1~~20B Suma de FC5 + 246 = 120B

Calculemos el $C_{16}(DBA)$.

$C_{16}(DBA) = (16^3)_{10} – (DBA)_{16} = (4096)_{10} – (DBA)_{16} = (1000)_{16} – (DBA)_{16} = (246)_{16}$

Recordemos $A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$, $D_{16} = 13_{10}$, $F_{16} = 15_{10}$, $11_{16} = 16_{10}$, $10_{16} = 16_{10}$.

Efectuemos la resta.

$$\begin{array}{cccc}
0 & F_{16} & F_{16} & 10_{16} \\
 & 10_{16}+0 & 10_{16}+0 & 10_{16}+0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
– & D & B & A \\
\hline
0 & 2 & 4 & 6
\end{array}$$

Calculemos la suma FC5 + 246.

$$\begin{array}{ccc}
1 & & \\
F & C & 5 \\
+\,2 & 4 & 6 \\
\hline
\cancel{1}2 & 0 & B
\end{array}$$

$5_{16} + 6_{16} = 11_{10} = B_{16}$ $C_{16} + 4_{16} = 0$ y va 1 de acarreo.

$1+F_{16} +2_{16} = 2_{16}$ y va 1 de acarreo.

Aquí se produce un acarreo por lo tanto, debemos de eliminar el último número de izquierda a derecha, en este caso es 1 y nos queda $(20B)_{16} = (2011)_{10}$.

Ahora

$$\begin{array}{ccc}
F_{16} & & F_{16} \\
 & & 10_{16}+5 \\
F & C & 5 \\
–\,D & B & A \\
\hline
2 & 0 & B
\end{array}$$

$F_{16} – D_{16} = 2_{16}$ $10_{16}+5_{16} = 15_{16}$ $C_{16} –1 = B_{16}$

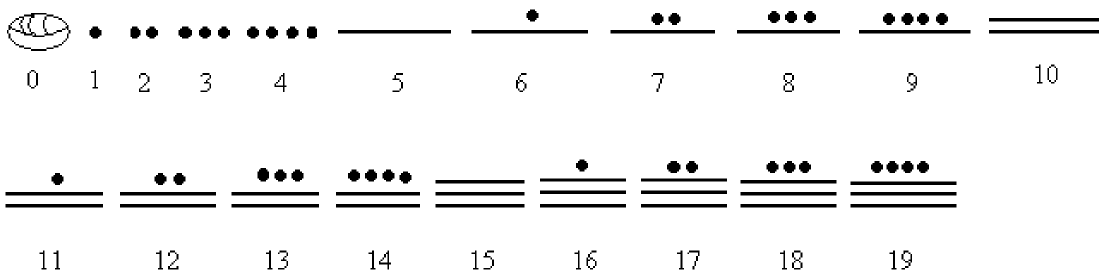
Se verifica que ambos números coinciden en los últimos dos ejercicios por tanto el complemento es $(20B)_{16}$

Con este ejercicio terminamos la parte de los números hexadecimales a continuación veremos los números vigesimales y sus operaciones más comunes.

SISTEMA NÚMERICO VIGESIMAL

En este sistema solo podemos utilizar 20 dígitos numéricos los cuales son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19 pero cambiaremos los últimos diez dígitos numéricos por letras del alfabeto quedando así, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15, G = 16, H = 17, I = 18 y J = 19.

Los mayas usaban los siguientes veinte símbolos en su sistema de numeración que era el vigesimal o de base 20. Ellos ya conocían el cero no así los europeos que desconocían su existencia. He aquí los símbolos.



SUMA DE NÚMEROS VIGESIMALES.

Daremos un ejemplo ya resuelto con números enteros.

EJEMPLO IV-15.

Sume los números $(J982EC)_{20}$ y $(93D81H)_{20}$.

Recuerde que A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15, G = 16, H = 17, I = 18 y J = 19.

		1			1	
	J	9	8	2	E	C
+	9	3	D	8	1	H
	18	D	1	A	G	9

Explicación.

$C_{20}+H_{20} = 9_{20}$ y va 1 de acarreo

$1+E_{20}+1 = G_{20}$ $2_{20}+8_{20} = A_{20}$,

8 + D = 1 y va 1 de acarreo $1+9_{20}+3_{20} = D_{20}$

$J_{20}+9_{20} = 8_{20}$ y va 1 de acarreo.

Traslademos los números vigesimales a números decimales.

$$
\begin{array}{rl}
(J982EC)_{20} = 19\times20^5 + 9\times20^4 + 8\times20^3 + 2\times20^2 + 12\times20^1 + 12\times20^0 = & (62305052)_{10} \\
\underline{+\ (93D81H)_{20}} = 9\times20^5 + 3\times20^4 + 13\times20^3 + 8\times20^2 + 1\times20^1 + 17\times20^0 = & \underline{+\ (29387237)}_{10} \\
(18D1AG9)_{20} = 1\times16^6+8\times16^5+13\times16^4+1\times16^3+10\times16^2+16\times16^1+9\times16^0 = & (91692289)_{10}
\end{array}
$$

Prosiguiendo continuaremos con la operación reta de números vigesimal.

RESTA DE NÚMEROS VIGESIMALES.

En esta operación se dará un ejemplo ya resuelto y su comprobación.

EJEMPLO IV-16.

Dado los números vigesimales $(A45G.EC)_{20}$ y $(FC23.AG)_{20}$. Reste $(A45G.EC)_{20}$ de $(FC23.AG)_{20}$.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & B_2 & 11_{20} & 12_{20} & 1A_{20} & \\
 & & 10_{20}+1 & 10_{20}+2 & 10_{20}+A_{10} & \\
F & C & 2 & 3. & A & G \\
-\,A & 4 & 5 & G. & E & C \\
\hline
5 & 7 & G & 6. & G & 4
\end{array}
$$

Escribamos los números vigesimales a decimales para comprobar.

$$
\begin{array}{rl}
(FC23.AG)_{20}= 15\times20^3+12\times20^2+2\times20^1+3\times20^0+10/20^1+16/20^2 = & (124843.54)_{10} \\
\underline{-\ (A45G.EC)_{20}} = 10\times20^3+4\times20^2+5\times20^1+16\times20^0+14/20^1+12/20^2 = & \underline{-\ (81716.73)}_{10} \\
(57G6.G4)_{20}= 5\times20^3+7\times20^2+16\times20^1+6\times20^0+16/20^1+4/20^2 = & (43126.81)_{10}
\end{array}
$$

Ahora ilustraremos la operación multiplicación de números vigesimales.

MULTIPLICACIÒN DE NÚMEROS VIGESIMAL.

A continuación tenemos un ejemplo de la operación multiplicación en el sistema vigesimal.

EJEMPLO IV-17.

Multiplique los siguientes números vigesimales $(AE9G)_{20}$ y $(120)_{20}$.

Recordemos A = 10, B = 11, C = 12, E = 14, F = 15, G = 16, I = 18, J = 19.

$$\begin{array}{r} AE9G \\ \times\ 120 \\ \hline 0000 \\ 11\ 8JC \\ AE9G \\ \hline BFIFC0 \end{array}$$

$AE9G_{20}\times 0 = 0$ $\quad$ $AE9G_{20}\times 2_{20} = 118JC_{20}$

$AE9G_{20}\times 1 = AE9G_{20}$

Escribamos los números vigesimales en decimales para comprobar.

$$(AE9G)_{20} = 10\times 20^3 + 14\times 20^2 + 9\times 20^1 + 16\times 20^0 = \qquad (85796)_{10}$$

$$\times\ (120)_{20} = 1\times 20^2 + 2\times 20^1 + 0\times 20^0 = \qquad \times\ (440)_{10}$$

$$(BFIFC0)_{20} = 11\times 20^5+15\times 20^4+18\times 20^3+15\times 20^2+12\times 20^1+0\times 20^0 = \quad (37750240)_{10}.$$

Concluido el ejemplo anterior continuaremos con la operación división de números vigesimales.

DIVISIÒN DE NÙMEROS VIGESIMALES.

En esta operación se dará un ejemplo con su respectiva respuesta y su debida resolución.

EJEMPLO IV-18.

Divida $(FGI)_{20}$ entre $(C)_{20}$.

$$\begin{array}{l|l} \ FGI & \ C \\ \cline{2-2} -C & 168 \\ \cline{1-1} \ 3G & \\ -3C & \\ \cline{1-1} \ \ 04I & \\ \ -4G & \\ \cline{1-1} \ \ \ 02 & \end{array}$$

Comprobemos esta división traduciendo el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo a números decimales.

Dividendo $\quad (FGI)_{20} = 15\times 20^2 + 16\times 20^1 + 18\times 20^0 = (6338)_{10}$

Divisor $\quad (C)_{20} = \qquad (12)_{10}$

Cociente $\quad (168)_{20} = 1\times 20^2 + 6\times 20^1 + 8\times 20^0 = \qquad (528)_{10}$

Residuo $\quad (2)_{20} = \qquad (2)_{10}$.

$(FGI)_{20} = (168)_{20} \times (C)_{20} + (2)_{20}$.

Hagamos el ejercicio anterior en el sistema decimal.

$$
\begin{array}{r|l}
6338 & 12 \\ \cline{2-2}
-60 & 528 \\ \cline{1-1}
33 & \\
-24 & \\ \cline{1-1}
98 & \\
-96 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Con este ejemplo terminamos la parte de división ahora prosiguen los complementos

COMPLEMENTO A b DE UN NÙMERO VIGESIMAL.

Resolvamos un ejercicio de complemento a b de un número vigesimal.

EJEMPLO IV-19.

a) Calcule el complemento a b de $(JDC)_{20}$.

Aquí N = JDC, n = 3 y b = 20. Luego, por la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos

$C_{20}(N) = C_{20}(JDC) = (20^3)_{10} - (JDC)_{20} = (8000)_{10} - (JDC)_{20} = (1000)_{20} - (JDC)_{20.}$

$= (0068)_{20.}$

Recordemos $J_{20} = 19_{10}$, $D_{20} = 13_{10}$, $C_{20} = 12_{10}$ y $10_{20} = 20_{10}$.

Calculemos la diferencia para comprobar.

0	J_{20}	J_{20}	10_{20}
	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$
1	0	0	0
–	J	D	C
0	0	6	8

b) Calcule el complemento a b de $(FB.IDC)_{20.}$

En este caso N = $(FB.IDC)_{20}$, n = 2 y b = 20. Por la fórmula $C_b(N) = b^n - N$ tenemos,

$C_{20}(N) = C_{20}(FB.IDC) = (20^2)_{10} - (FB.IDC)_{20} = (400)_{10} - (FB.IDC)_{20.}$

$= (100)_{20} - (FB.IDC)_{20} = (048.168)_{20.}$

Recordemos B = 11, C = 12, D = 13, F = 15, I = 18, J = 19.

Realicemos la resta.

0	J_{20}	J_{20}	J_{20}	J_{20}	10_{20}
	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$	$10_{20}+0$
1	0	0**.**	0	0	0
–	F	B**.**	I	D	C
0	4	8**.**	1	6	8

Con estos ejemplos terminamos la parte de complemento a b, ahora proseguiremos con el complemento a b – 1 de un número vigesimal.

COMPLEMENTO b – 1 DE UN NÚMERO VIGESIMAL.

En esta operación brindaremos un ejemplo con su respectiva respuesta y su realización.

EJEMPLO IV-20.

a) Calcule el complemento a 19 de $(0.IJC)_{20}$

Usemos al fórmula $C_{b-1}(N) = b^n - b^{-m} - N$. Para este ejemplo tenemos que

$N = 0.IJC$, $n = 0$, $m = 3$ y $b = 20$. Así,

$$C_{20-1}(0.IJC) = C_{19}(0.IJC) = (20)^0{}_{10} - (20)^{-3}{}_{10} - (0.IJC)_{20.}$$

$$= (1 - 0.000125)_{10} - (0.IJC)_{20} = (0.999875)_{10} - (0.IJC)_{20}.$$

$$= (0.191919)_{20} - (0.IJC)_{20} = (0.JJJ)_{20} - (0.IJC)_{20} = (0.107)_{20.}$$

Recordemos $I = 18$, $J = 19$ y $C = 12$.

Escribamos $(0.999875)_{10}$ como un número fraccionario en el sistema vigesimal.

$$0.999875\times 20 = 19.9975$$

$$0.9975\times 20 = 19.95$$

$$0.95\times 20 = 19.00$$

Entonces, $(0.999875)_{10} = (0.191919)_{20} = (0.JJJ)_{20}$.

Realicemos la resta $(0.JJJ)_{20} - (0.IJC)_{20}$.

$$\begin{array}{r} 0.JJJ \\ \underline{-\ 0.IJC} \\ 0.107 \end{array}$$

Terminado este ejemplo proseguiremos con la operación resta con complementos de números vigesimales.

RESTA DE DOS NÚMEROS VIGESIMALES USANDO COMPLEMENTOS.

En esta operación se brindara un ejemplo ya resuelto además se comprobara su resultado.

EJEMPLO IV-21

Calcule la resta de $(JDH)_{20} - (EGB)_{20}$ usando complemento a 20.

$$\begin{array}{r} JDH \\ \underline{EGB} \\ 539 \\ \cancel{1}4H6 \end{array}$$

539 Complemento $C_{20}(EGD) = 539$.

$\cancel{1}$4H6 Suma de JDH + Complemento $C_{20}(EGD)$.

Calculemos el complemento a 20. Recordemos que B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, G = 16, H = 17, I = 18 y J = 19.

$C_{20}(EGB) = (20^3)_{10} - (EGB)_{20} = (8000)_{10} - (EGB)_{20} = (1000)_{20} - (EGB)_{20} = (0539)_{20}$.

$$\begin{array}{cccc} 0 & J_{20} & J_{20} & J_{20} \\ & 10_{20}+0 & 10_{20}+0 & 10_{20}+0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & E & G & B \\ \hline 0 & 5 & 3 & 9 \end{array}$$

Ahora,

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ J & D & H \\ +5 & 3 & 9 \\ \hline \cancel{1}4 & H & 6 \end{array}$$

$H_{20}+9_{20} = 6_{20}$ y va 1 de acarreo. $D_{20}+3_{20}+1 = H_{20}$.

$H_{20}+5_{20} = 4_{20}$ y va 1 de acarreo.

Aquí se produce un acarreo por lo tanto, debemos de eliminar el primer número de izquierda a derecha en este caso es el 1 y nos queda $(4H6)_{20}$.

Hagamos la operación resta directamente.

Luego,

$$\begin{array}{ccc} I_{20} & 1D_{20} & \\ & 10_{20}+D_{20} & \\ J & D & H \\ -E & G & B \\ \hline 4 & H & 6 \end{array}$$

$10_{20}+D_{20} = 1D_{20}$ $J_{20} - 1 = I_{20}$

$H_{20} - B_{20} = 6_{20}$

Esto coincide con el número encontrado por medio de la resta usando complemento.

Recordemos que existen un número infinito de sistemas de numeración, pero no seguiremos abordando otros sistemas.

A continuación proseguiremos con el capítulo quinto el cual hemos llamado anexos, en este capítulo solo ilustraremos tres sistemas numéricos los cuales son: el sistema decimal, sistema binario y sistema vigesimal.

CAPITULO V

ANEXOS

Continuaremos con un anexo de la monografía el cual tratara únicamente tres sistemas de numeración los cuales son el decimal, binario y vigesimal. En esta parte ilustraremos de manera rápida los siguientes temas: Teorema Fundamental de la Aritmética, la sucesión de Fibonacci, los catorce primeros números primos y algunos números cuadrados los cuales serán escritos en los tres sistemas antes mencionados (decimal, binario y vigesimal). Veamos cómo se escriben.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÈTICA.

Todo entero $n > 1$ puede ser expresado como producto de primos. Esta representación es única, salvo el orden de los factores.

El teorema anterior garantiza que todo entero n se puede escribir de forma única de la manera siguiente: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_k^{\alpha_k}$, donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son números primos y los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots ., \alpha_k$ son enteros positivos.

Resultados similares se pueden obtener en el caso en que n sea un entero negativo.

EJEMPLO V-1.

$(1001)_{10}$ se puede escribir como producto de primos de forma única, como:

$$(1001)_{10} = (7)_{10} \times (11)_{10} \times (13)_{10}.$$

Ahora hagámoslo en binario.

El número $(1001)_{10}$ en binario es $(1111101001)_2$. Los números $(7)_{10}$, $(11)_{10}$ y $(13)_{10}$ en el sistema binario son $(7)_{10} = (111)_2$, $(11)_{10} = (1011)_2$ y $(13) = (1101)_2$.

Luego,

$(1111101001)_2 = (111)_2 \times (1011)_2 \times (1101)_2.$

EJEMPLO V-2.

El número $(24)_{10}$ se puede escribir como producto de factores primos de forma única, esto es:

$(24)_{10} = (2)_{10} \times (2)_{10} \times (2)_{10} \times (3)_{10}.$

Ahora hagámoslo en binario.

El número decimal $(24)_{10}$ en el sistema binario es $(11000)_2$. Luego, $(11000)_2$ se puede escribir de manera única como: $(11000)_2 = (10)_2 \times (10)_2 \times (10)_2 \times (11)_2$.

Con este ejemplo concluimos la parte del sistema binario a continuación daremos un ejemplo utilizando el Teorema Fundamental de la Aritmética en el sistema vigesimal.

El Teorema Fundamental de la Aritmética también lo podemos expresar para los números vigesimales, veamos un ejemplo.

EJEMPLO V-3.

Exprese $(517)_{10}$ como factores de números primos esto es:

$(517)_{10} = (11)_{10} \times (47)_{10}$

Ahora hagámoslo en el sistema vigesimal.

El número $(517)_{10}$ en vigesimal es $(15H)_{20}$

$(11)_{10} = (B)_{20}$

$(47)_{10} = (27)_{20}$.

Entonces $(15H)_{20}$ se puede expresar de la forma única $(B)_{20} \times (27)$

$(15H)_{20} = (B)_{20} \times (27)_{20}$.

Con esta parte concluimos los ejemplos aplicando el teorema fundamental de la aritmética.

La sucesión o números de Fibonacci también se pueden expresar mediante los números binarios.

SUCESIÓN O NÚMEROS DE FIBONACCI.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377…

La sucesión comienza con los números 1 y 1, y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define.

A los elementos de esta sucesión se les llama **números de Fibonacci**. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos.

Los números de Fibonacci quedan definidos por la ecuación:

$F_N = F_{N-1}+F_{N-2}$ para $2 \leq N$.

Partiendo de dos primeros valores predeterminados:

$F_0 = (1)_{10}$

$F_1 = (1)_{10}$

Se obtienen los siguientes números:

$F_2 = (1)_{10} + (1)_{10} = (2)_{10}$

$F_3 = (2)_{10} + (1)_{10} = (3)_{10}$

$F_4 = (3)_{10} + (2)_{10} = (5)_{10}$

$F_5 = (5)_{10} + (3)_{10} = (8)_{10}$

$F_6 = (8)_{10} + (5)_{10} = (13)_{10}$

$F_7 = (13)_{10} + (8)_{10} = (21)_{10}$

$F_8 = (21)_{10} + (13)_{10} = (34)_{10}$

$F_9 = (34)_{10} + (21)_{10} = (55)_{10}$

$F_{10} = (55)_{10} + (34)_{10} = (89)_{10}$

$F_{11} = (89)_{10} + (55)_{10} = (144)_{10}$

$F_{12} = (144)_{10} + (89)_{10} = (233)_{10}$

Para N = 2,3,…12

Esta manera de definir, de hecho considerada algorítmica, es usual en Matemática discreta.

EJEMPLO V-4.

Ahora veremos cómo se comportan los números binarios baja esta sucesión o números de Fibonacci.

$F_0 = (1)_2$

$F_1 = (1)_2$

$F_2 = (1)_2 + (1)_2 = (10)_2$

$F_3 = (10)_2 + (1)_2 = (11)_2$

$F_4 = (11)_2 + (10)_2 = (101)_2$

$F_5 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2$

$F_6 = (1000)_2 + (101)_2 = (1101)_2$

$F_7 = (1101)_2 + (1000)_2 = (10101)_2$

$F_8 = (10101)_2 + (1101)_2 = (100010)_2$

$F_9 = (100010)_2 + (10101)_2 = (110111)_2$

$F_{10} = (110111)_2 + (100010)_2 = (1011001)_2$

$F_{11} = (1011001)_2 + (110111)_2 = (1110000)_2$

$F_{12} = (1110000)_2 + (1011001)_2 = (111101000)_2$

Para N = 2,3…,12.

De este modo se escriben y se generan los primeros doce números de Fibonacci en el sistema binario.

A continuación ilustraremos como se generan los primeros doce números de Fibonacci en el sistema vigesimal.

EJEMPLO V-5.

Veamos la generación de números vigesimales mediante los números de Fibonacci.

Recordemos que A = 10, B = 11, C =12, D = 13, E = 14, F = 15, G = 16, H = 17, I = 18 y J = 19.

$F_0 = (1)_{20}$

$F_1 = (1)_{20}$.

Se obtienen los siguientes números:

$F_2 = (1)_{20} + (1)_{20} = (2)_{20}$

$F_3 = (1)_{20} + (2)_{20} = (3)_{20}$

$F_4 = (2)_{20} + (3)_{20} = (5)_{20}$

$F_5 = (3)_{20} + (5)_{20} = (8)_{20}$

$F_6 = (5)_{20} + (8)_{20} = (D)_{20}$

$F_7 = (8)_{20} + (D)_{20} = (11)_{20}$

$F_8 = (D)_{20} + (11)_{20} = (1E)_{20}$

$F_9 = (11)_{20} + (1E)_{20} = (2F)_{20}$

$F_{10} = (1E)_{20} + (2F)_{20} = (49)_{20}$

$F_{11} = (2F)_{20} + (49)_{20} = (74)_{20}$

$F_{12} = (49)_{20} + (74)_{20} = (BD)_{20}$.

para N = 2,3…,12.

Con esta parte termina la generación de números mediante la sucesión de Fibonacci a continuación proseguiremos con la escritura de los catorce primeros números primos.

LOS CATORCE PRIMEROS NÙMEROS PRIMOS ESCRITOS EN LOS SISTEMAS DECIMAL, BINARIO Y VIGESIMAL.

Veamos cómo es la simbología de los primeros quince números primos en los siguientes tres sistemas los cuales son: El sistema decimal, sistema binario y el sistema vigesimal.

EJEMPLO V-6

Escribamos los catorce primeros números primos en los sistema decimal, binario y vigesimal.

Primeros catorce números primos en el sistema decimal.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

Así se escriben los primeros catorce números primos en binario.

10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, 10010, 10111, 11101, 11111, 100101, 101001, 101011.

Los primeros catorce números primos en vigesimal.

1, 2, 3, 7, B, D, H, J, 13, 19, 1B, 1H, 21, 23.

Con la pasada tabla concluye la escritura de los primeros catorce números primos en los tres sistemas los cuales fueron: El sistema decimal, binario y vigesimal. Prosiguiendo se mostrara la escritura de los primeros quince cuadrados perfectos en los sistemas decimal, binario y vigesimal.

LOS PRIMEROS DIECISÈIS CUADRADOS PERFECTOS ESRITOS EN LOS SISTEMAS DECIMAL, BINARIO Y VIGESIMAL.

A continuación escribiremos los primeros dieciséis cuadrados perfectos en tres distintos sistemas de numeración los cuales serán el sistema decimal, binario y vigesimal.

EJEMPLO V-7.

Veamos cómo se ven los primeros dieciséis cuadrados perfectos escritos en el sistema decimal, sistema binario y vigesimal.

Primeros dieciséis cuadrados perfectos en el sistema decimal.

$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2.$

Resultado de los primeros dieciséis cuadrados perfectos en sistema decimal.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

Este es el resultado de los primeros dieciséis cuadrados perfectos en el sistema binario.

0, 1, 100, 1001, 10000, 11001, 1001000, 110001, 1000000, 1010001, 1100100,1111001, 10010000, 10101001, 11000100, 11100001.

Así se escriben los primeros dieciséis cuadrados perfectos en el sistema vigesimal.

0, 1, 4, 9, G, 15, 1G, 29, 34, 41, 50, 61, 74, 89, 9G, B5.

Como se puede observar en las tres últimas tablas en el sistema binario los números se escriben con un número mayor de dígitos que en los otros dos sistemas, mientras en el sistema vigesimal los números se escriben con menos dígitos. Esto se debe a que entre más grande sea b (base), menos dígitos se utilizan para escribir un número.

Proseguiremos agrupando las tres tablas para ver y comparar que tan grande son los símbolos de los sistemas con respecto al número de dígitos de los números. Recordemos que la primera columna pertenece al sistema decimal, la segunda al sistema binario y la tercera al sistema vigesimal.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

0, 1, 100, 1001, 10000, 11001, 100100, 110001, 1000000, 1010001, 1100100, 1111001, 10010000, 10101001, 11000100,11100001.

0, 1, 4, 9, G, 15, 1G, 29, 34, 41, 50, 61, 74, 89, 9G, B5.

Con esta parte termina el capítulo quinto, posteriormente para concluir este trabajo monográfico analizaremos el contenido general de esta monografía mediante la conclusión de dicho trabajo.

CONCLUSIÒN

Desde el inicio de la vida del ser humano sobre la tierra ha sentido la necesidad de resolver sus problemas que van originándose como consecuencia de su desarrollo social, intelectual y tecnológico. Esto dio origen a que el hombre buscara cómo inventar los números y operar con ellos. Con esto se comenzó el invento de las diferentes áreas de la Matemática y que dichosamente continúa para el bien de todos nosotros. Desde muy temprano se inventaron los sistemas: binario, decimal, vigesimal y el sexagesimal.
En esta monografía ponemos de manifiesto el hecho que existe un número infinito de sistemas de numeración. Algunos de ellos son: el sistema binario, el sistema octario u octal y el sistema hexadecimal los cuales son de mucha utilidad en el área de la Ciencia de la Computación. Además, el sistema de numeración decimal que es el que comúnmente usamos los seres humanos para hacer nuestros cálculos cotidianos y las investigaciones científicas.

En este trabajo hacemos un estudio de los siguientes sistemas numéricos: el binario, el ternario, el cuaternario, el quinario, el sextario, el octonario, el hexadecimal y el vigesimal. Ejemplificamos cómo se suman, se restan, se multiplican, se dividen y la manera de usar sus complementos de los números en cada sistema.
También, ejemplificamos cómo se transforma un número de cada sistema al sistema decimal y viceversa.

Al final ejemplificamos el Teorema Fundamental de la Aritmética para los sistemas: decimal, binario y vigesimal. Seguidamente escribimos los primeros números de Fibonacci en el sistema decimal, binario y vigesimal. También veremos cómo se ven algunos números decimales elevados al cuadrado y posteriormente lo haremos con el sistema binario y vigesimal.

Recomendaciones

1) No hay mucha literatura que toque el tema desarrollado en este trabajo monográfico. Esperamos que las personas entusiastas de las matemáticas, como un pasatiempo, sigan ahondando en esta área.

2) Esperamos que este tema haya sido de interés para el jurado de este trabajo para que ellos se animen a abordar este como un componente curricular ya que muchos estudiantes no tienen aún nociones e incluso no conocen nada acerca de oros sistemas numéricos excluyendo únicamente al decimal ya que es el utilizado en la vida cotidiana.

3) A los futuros estudiantes que se animen hacer su tesis en esta área se les sugiere que hagan programas sencillos computacionales de conversión de un sistema numérico a otro.

BIBLIOGRAFÌA

Manuel Antón Urbina.
Elementos de lógica matemática y de teoría de conjuntos.
Editorial universitaria UNAN-LEÒN.
Edición 2013.

M.A.AL - Gwaiz y S.A Elsanousi.
Elements of Real Analysis.
Editorial Chapman. Hall / CRC. Boca Raton, FL.
2007 Edition.

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and its Aplications.
Editorial Mc Craw Hill.
Sixth Edition.

http://www.monografias.com/trabajos60/sistemas-numeracion/sistemas-numeracion2.shtml#ixzz3TwnhgcQa.