

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-LEÓN**

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA



**DESCRIPTOR INVARIANTE A POSICIÓN Y ESCALA PARA IMÁGENES DIGITALES
USANDO LA TRANSFORMADA ANALÍTICA DE FOURIER-MELLIN**

T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**

PRESENTA:

LISSETTE DEL CARMEN QUINTERO VARGAS

CO-DIRECTORAS:

**DRA. ADALILA MOLINA MEMBREÑO
DRA. SELENE SOLORZA CALDERÓN**

León, Nicaragua, febrero del 2015

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-LEÓN**
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DESCRIPTOR INVARIANTE A POSICIÓN Y ESCALA PARA IMÁGENES DIGITALES
USANDO LA TRANSFORMADA ANALÍTICA DE FOURIER-MELLIN

T E S I S P R O F E S I O N A L

QUE PRESENTA

LISSETTE DEL CARMEN QUINTERO VARGAS

APROBADO POR:

DRA. ADALILA MOLINA MEMBREÑO

Co-directora de tesis

DRA. SELENE SOLORZA CALDERÓN

Co-directora de tesis

DEDICATORIA

Para:

Melissa Alejandra, mi fuente de inspiración.

AGRADECIMIENTOS

Juan Carlos I.

A todos los que la presente vieran y

entendieren

Juan Carlos I.

Primero que todo agradezco a Dios y más que a nadie a mi madre, que me ha dado todo en esta vida y me ha hecho la persona que soy ahora. Y en general a mi familia, que siempre me ha apoyado para conseguir mis metas. Sin ellos no habría podido ir a México a realizar mi tesis de licenciatura.

Quiero agradecer a la Dra. Selene Solorza Calderón el trabajo y el tiempo que ha dedicado a esta tesis de licenciatura. Quiero agradecerle su apoyo y optimismo en todo momento, porque incluso cuando las ideas, resultados o revisiones no eran favorables, usted siempre ha sabido encontrar el lado positivo. Sin su ayuda, su visión crítica, su exigencia y su guía, esta tesis no habría sido posible. Muchas gracias por confiar en mí, en mis ideas y en definitiva por dirigir esta tesis.

Doy gracias a la Dra. Adalila Molina Membreño por animarme a salir de mi país para adquirir conocimientos nuevos, mejorar el nivel académico y apoyarme siempre en mi trabajo de tesis, gracias Dra. Adalila por su apoyo incondicional.

Agradezco al Mcs. Felipe Campos por todas las gestiones realizadas para mi movilidad, gracias maestro por su apoyo incondicional.

A los colegas de octavo semestre de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Baja California, agradezco los momentos compartidos, los momentos de discusión académica y su apoyo en todo este proceso. Gracias chicos por compartir sus conocimientos.

También agradezco a todas las personas que en el pasado han sido mis profesores y de una forma u otra han contribuido en mi formación y por lo tanto sus lecciones se verán reflejadas en todos los trabajos que hago. Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León y a la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada, por facilitarme los medios para la realización de mis estudios.

Agradezco al CONACyT la beca, con número de becario 21187, que me brindó para realizar esta tesis de licenciatura mediante el proyecto con número 169174 titulado *reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes a posición, rotación y escalamiento*.

RESUMEN de la tesis de Lissette del Carmen Quintero Vargas, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de LICENCIATURA EN MATEMÁTICA. León, Nicaragua, a febrero de 2015.

El reconocimiento de patrones basado en la transformada analítica de Fourier-Mellin ha tenido gran interés por sus múltiples aplicaciones en las áreas civil y militar. En esta tesis se presenta la metodología de un descriptor invariante a posición y escala basado en la transformada de Fourier y en la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM). El descriptor fue validado primeramente con imágenes en blanco y negro de figuras geométricas regulares y luego con imágenes en escalas de grises de mariposas. La implementación del descriptor AFM invariante a posición y escala se realizó en lenguaje de programación Matlab y mediante el uso de las métricas de la distancia euclíadiana d_e y la distancia del máximo d_m se determinó la eficiencia y robustez del descriptor AFM.

Palabras clave: Reconocimiento de patrones, descriptor invariante a posición y escala, transformada analítica de Fourier-Mellin.

DESCRIPCIÓN INvariANTE A POSICIÓN Y ESCALA PARA IMÁGENES DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA ANALÍTICA DE FOURIER-MELLIN

Resumen aprobado:

DRA. ADALILA MOLINA MEMBREÑO

Co-directora de tesis

DRA. SELENE SOLORZA CALDERÓN

Co-directora de tesis

Índice general

1.. <i>Introducción</i>	2
2.. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	5
2.1. Definición de imagen digital	5
2.2. La transformada de Fourier	6
2.3. Funciones periódicas	6
2.3.1. Serie de Fourier	6
2.4. Forma compleja de la serie de Fourier	7
2.4.1. De la serie de Fourier a la integral de Fourier	9
2.5. El par de transformadas de Fourier	10
2.6. Condiciones de Dirichlet	11
2.7. Propiedades de la transformada de Fourier	11
2.8. Convolución	14
2.9. Transformada discreta de Fourier (TDF)	16
2.9.1. La inversa de la transformada discreta de Fourier	18
2.10. La transformada de Fourier en dos dimensiones	21
2.11. La transformada de Mellin	21
2.11.1. El invariante a escala	22
2.12. La transformada analítica de Fourier-Mellin en dos dimensiones	23
2.12.1. La transformada analítica de Fourier- Mellin y el reconocimiento de patrones	23
2.13. Descriptor invariantes a escala	25
2.13.1. La transformada analítica de Fourier-Mellin vía la transformada de Fourier	25
3.. VALIDACIÓN DEL DESCRIPTOR AFM	26
3.1. Algoritmo	26
3.2. Transformación de la imagen a coordenadas logarítmica-polar	27
3.3. Interpolación de vecinos cercanos (nearest neighbor)	28
3.4. Interpolación lineal	29
3.5. Interpolación cúbica	29
3.6. Interpolación trazadores (B-spline)	30
3.7. Programa para calcular el descriptor invariante a posición y escala en una imagen	30

3.7.1. Ejemplo 1	33
3.8. Ejemplo 2	35
4.. <i>Conclusiones</i>	48

Índice de figuras

3.1. Transformaciones de coordenadas cartesianas a logarítmica- polar. (a) Cuadrado en coordenadas cartesianas. (b) Cuadrado en coordenadas log-polares.	28
3.2. Imágenes escaladas. (a) Imagen de referencia. (b) Imagen escalada 10 %. (c) Imagen escalada 20 %. (d) Imagen escalada 50 %. (e) Imagen escala-dada -30 %. (f) Imagen escalada -40 %. (g) Imagen escalada -50 %.	34
3.3. Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	34
3.4. Imágenes de referencias de mariposas en escalas de grises. (a) <i>Cymatogramma arginussa eubaena</i> . (b) <i>Danaus eresimus montezuma</i> . (c) <i>Danaus plexippus plexippus</i> . (d) <i>Dione juno huascuma</i> . (e) <i>Doxocopa laure acca h</i> . (f) <i>Doxocopa laure laure m</i> . (g) <i>Doxocopa pavon m</i>	36
3.5. Resultados del descriptor invariante a posición y escala AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	37
3.6. Resultados del descriptor AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	38
3.7. Resultados del descriptor AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	38
3.8. Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	39
3.9. Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	39
3.10. Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	40
3.11. Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.	40

JUSTIFICACIÓN

El reconocimiento de patrones es un campo muy amplio del conocimiento científico y tecnológico que en la actualidad se ha convertido en una técnica muy útil para la toma de decisiones en diversos campos, tales como la industria civil y militar; en sistemas de seguridad; interpretación y análisis de datos experimentales en: biología, taxonomía, física, entre otras. Debido a su gran importancia, día a día se busca un constante mejoramiento en la capacidad del reconocimiento de patrones.

En este trabajo de tesis se presenta un descriptor invariante a posición y escala basado en la transformada de Fourier y en la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM) para el reconocimiento de patrones en imágenes digitales. Se seleccionaron dichas transformadas debido a las propiedades de su espectro de amplitud. Para la transformada de Fourier, el espectro de amplitud es invariante a posición. Y la normalización del espectro de amplitud de la transformada AFM mediante su valor *dc* es invariante a escala.

Aparentemente el campo de aplicación es limitado al no introducir cambios de rotación en los objetos, sin embargo existe una gran diversidad de aplicaciones de descriptores invariantes a posición y escala, por ejemplo en sistemas de seguridad donde la cámara está fija y los objetos solamente presentan cambios de escala, como es el caso del tránsito vehicular en vialidades rectas; reconocimiento de patrones en imágenes satelitales (asumiendo que el satélite mantiene fija su trayectoria) de acuíferos y zonas mineras; tomografías donde el paciente mantiene una posición fija; entre otras.

OBJETIVOS

Objetivo general

Análisis del descriptor invariante a posición y escala para el reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante la transformada analítica de Fourier-Mellin.

Objetivos particulares

1. Implementación en lenguaje de programación Matlab del invariante a posición mediante el espectro de amplitud de la transformada de Fourier.
2. Implementación en lenguaje de programación Matlab del invariante a escala usando el espectro de amplitud de la razón de la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM) normalizada por su valor dc .
3. Determinación de la métrica apropiada de comparación.
4. Estudio del descriptor AFM invariante a posición y escala usando imágenes en blanco y negro de figuras geométricas.
5. Estudio del descriptor AFM invariante a posición y escala usando imágenes en escala de grises de mariposas.

1. INTRODUCCIÓN

El hombre adquiere conciencia de sí mismo y del mundo que le rodea por medio de sus sentidos. A partir de los estímulos percibidos por los sentidos el hombre descubre, identifica, diferencia, cuenta y clasifica objetos o patrones de la realidad, adquiriendo conciencia de ella por medio de la percepción visual.

La percepción visual es clave en nuestro desarrollo y realización como personas. La mayor parte de la información útil que poseemos nos ha llegado a través de imágenes, expresiones, signos y palabras impresas, todas ellas visibles. Es difícil de creer, pero lo que sentimos al ver algo es un producto cerebral, filtrado, simplificado y reelaborado, es un flujo de información que recorre varios caminos entre las estructuras neuronales de nuestra materia gris[8].

Cuando percibimos se desarrolla un proceso muy largo y complejo en el que colaboran los ojos en interacción con el cerebro, que es el que dirige los movimientos exploratorios de los ojos. Pero es únicamente el cerebro el que realmente percibe y siente las imágenes en una labor de procesamiento de la información que ocupa varias áreas del encéfalo[8].

La visión es el más avanzado de nuestros sentidos por lo que no es de extrañar que las imágenes jueguen un papel importante en la percepción humana. Desde el gran auge tecnológico, el ser humano a tratado de imitar el proceso de reconocimiento de patrones que realiza el cerebro mediante computadoras u ordenadores. El reconocimiento de patrones en

imágenes digitales pertenece al campo del procesamiento digital de imágenes.

En el procesamiento digital de imágenes se manipulan las imágenes para [1; 2]:

1. Mejora o realce de características mediante filtros.
2. Reconocimientos de patrones.
3. Segmentación.
4. Fragmentación.
5. Reconstrucción y restauración.
6. Comprensión.

Los procesos comprendidos en el procesamiento digital de imágenes se clasifican en tres niveles: bajo, medio y alto. Los procesos de bajo nivel implican las operaciones primitivas, tales como el procesamiento previo de la imagen para reducir el ruido, mejora del contraste y la nitidez, entre otros. Un proceso de bajo nivel se caracteriza por el hecho de que tanto sus entradas y salidas son imágenes.

Los procesamientos de nivel medio en las imágenes implican tareas como la segmentación (partición de una imagen en regiones u objetos), descripción de objetos (extracción de atributos) y la clasificación (reconocimiento) de los objetos individuales. Un proceso de nivel medio se caracteriza por el hecho de que sus entradas son generalmente imágenes, pero sus salidas son atributos extraídos de esas imágenes (por ejemplo bordes, contornos y la identidad de los objetos individuales). Por último, el procesamiento de alto nivel implica tener “sentido” de un conjunto de objetos reconocidos como en el análisis de imágenes o como en la realización de las funciones cognitivas normalmente asociadas con la visión.

Este trabajo de tesis aborda el reconocimiento de patrones en imágenes digitales donde solamente hay cambios en la posición y la escala de los objetos. El descriptor invariante a posición y escala se construye mediante la transformada de Fourier y la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM). Se utilizaron dos conjuntos de prueba en el descriptor AFM: el primero consta de imágenes en blanco y negro de figuras geométricas y el segundo de imágenes en escala de grises de mariposas.

Esta tesis está organizada a partir de este capítulo introductorio de la siguiente manera: en el capítulo 2 se exponen los fundamentos matemáticos de la transformada de Fourier y la transformada analítica de Fourier-Mellin. El capítulo 3 trata sobre los experimentos numéricos realizados para validar al descriptor AFM invariante a posición y escala. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Todo saber tiene de ciencia lo que

tiene de matemática.

Poincaré

En este capítulo se presenta el marco teórico en el que sustenta esta tesis. Con el fin de establecer los conceptos relacionados con el reconocimiento de patrones de imágenes digitales, es conveniente exponer los principios y conceptos sobre los cuales se basa el procesamiento de imágenes, entre estos, la representación matemática que nos permite trabajar con imágenes en dos dimensiones. Más específicamente se tratarán los temas de la transformada de Fourier, la transformada analítica de Fourier-Mellin y el uso de éstas para comparar imágenes.

2.1. *Definición de imagen digital*

Una **imagen digital** es simplemente una función bidimensional $f(x, y)$, donde x y y indican las coordenadas espaciales y el valor de f en cualquier punto (x, y) es proporcional a la luminosidad (o nivel de gris) de la imagen en dicho punto. La imagen digital se representa mediante una matriz $I(x, y)$, cuyos índices (x, y) identifican un punto en la imagen llamado píxel y el correspondiente valor del elemento de la matriz $I(x, y)$ es el valor de intensidad [1] .

2.2. *La transformada de Fourier*2.3. *Funciones periódicas*

Una función periódica se define como

$$f(t) = f(t + T), \quad (2.1)$$

para todo valor $t \in R$. La constante mínima T que satisface la relación (2.1) se llama el periodo de la función [3]. Mediante la repetición de (2.1) se obtiene

$$f(t) = f(t + nT), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

2.3.1. *Serie de Fourier*

Sea la función $f(t)$ una función periódica de periodo T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)], \quad (2.3)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.4)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (2.5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

A la ecuación (2.3) se le conoce como serie trigonométrica de Fourier.

2.4. Forma compleja de la serie de Fourier

En muchas aplicaciones de la serie de Fourier, es conveniente expresar la ecuación (2.3) en su forma polar. Usando que

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}), \quad (2.8)$$

$$\operatorname{sen}(n\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}). \quad (2.9)$$

Entonces, la ecuación (2.3) se reescribe como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2i} (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}) \right]. \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{i} = -i$, la ecuación (2.10) se expresa como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\omega_0 t} \right]. \quad (2.11)$$

Definiendo,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (2.12)$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad (2.13)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n), \quad (2.14)$$

y al sustituir las expresiones (2.12) a la (2.14) en la ecuación (2.11), ésta se simplifica a

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) se denomina forma compleja de la serie de Fourier de $f(t)$. Los coeficientes complejos de Fourier c_n se obtienen a partir de a_n y b_n , mediante las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7) como

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right) \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\cos(n\omega_0 t) - i \sin(n\omega_0 t)] f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \end{aligned} \quad (2.17)$$

análogamente, c_{-n} se expresa como

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega_0 t} dt. \quad (2.18)$$

En el caso particular de que $f(t)$ sea real, se tiene que

$$c_n = c_{-n}^*, \quad (2.19)$$

donde $*$ indica el conjugado complejo del escalar. De las ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18) se obtiene que los coeficientes complejos de Fourier se pueden expresar en una sola ecuación mediante

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

Puesto que $f(t)e^{-in\omega_0 t}$ es periódica con periodo T , entonces la ecuación (2.20) también se

puede escribir como

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2.21)$$

En general $c_n \in \mathbb{C}$, por lo tanto el coeficiente complejo de Fourier se puede expresar en la forma polar mediante

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n}, \quad (2.22)$$

donde $|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$ y $\phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$, obtenidos a partir de la ecuación (2.13).

En el caso particular de que $f(t)$ sea real, por la ecuación (2.19) se obtiene que

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-i\phi_n}, \quad (2.23)$$

para todos los valores de $n \neq 0 \in \mathbb{N}$. En el caso de que $n = 0$, $c_0 = \frac{1}{2} a_0 \in \mathbb{R}$.

2.4.1. De la serie de Fourier a la integral de Fourier

Al sustituir la ecuación (2.20) en la ecuación (2.15), se tiene que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx\omega_0} dx \right] e^{inx\omega_0 t}. \quad (2.24)$$

Puesto que

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.25)$$

al sustituir en la ecuación (2.24), ésta se expresa como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inx\omega_0} dx \right] \omega_0 e^{inx\omega_0 t}. \quad (2.26)$$

Por la ecuación (2.25), cuando $T \rightarrow \infty$ se tiene que $\omega_0 \rightarrow 0$. Sea $\omega_0 = \Delta\omega$, entonces la frecuencia de cualquier armónico $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia

que describe el espectro continuo, esto es

$$n\omega_0 = n\Delta\omega \longrightarrow \omega.$$

Entonces la ecuación (2.26) se reescribe como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{inx} dx \right] e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega. \quad (2.27)$$

Para, $T \rightarrow \infty$ se tiene que $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, entonces la ecuación (2.27) es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.28)$$

Si se define

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.29)$$

entonces la ecuación (2.28) se simplifica a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.30)$$

A la ecuación (2.29) se le conoce como la transformada de Fourier y la ecuación (2.30) es la correspondiente transformada inversa de Fourier.

2.5. El par de transformadas de Fourier

La función $F(\omega)$ definida por (2.29) se conoce como la integral de Fourier o transformada de Fourier de $f(t)$ y dicha operación se simboliza frecuentemente por \mathfrak{F} , esto es

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.31)$$

Análogamente \mathfrak{F}^{-1} es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa, es decir

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.32)$$

a $f(t)$ se le denomina transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$. Las ecuaciones (2.31) y (2.32) se conocen a menudo como par de transformadas de Fourier[3].

2.6. Condiciones de Dirichlet

Las condiciones bajo las cuales es posible la representación de $f(t)$ en serie de Fourier son:

1. La función tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
2. La función tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
3. La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo es finita, es decir,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty. \quad (2.33)$$

Una función $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo finito $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ si satisface las condiciones 1 y 2[3].

2.7. Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad de linealidad:

Si $F_1(\omega) = \mathfrak{F}[f_1(t)]$ y $F_2(\omega) = \mathfrak{F}[f_2(t)]$, donde a_1 y b_2 son dos constantes arbitrarias, entonces

$$\mathfrak{F}[a_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + b_2 F_2(\omega). \quad (2.34)$$

Esto es, la transformada de la suma de dos funciones es simplemente la suma de sus transformadas individuales.

Demostración: Este teorema se deriva directamente de la propiedad de linealidad de la integral que define a la transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] e^{-i\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega).\blacksquare\end{aligned}\quad (2.35)$$

Propiedad de similitud o de escalamiento:

Si a es una constante real y $F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$, se tiene que

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.36)$$

Demostración: La transformada de Fourier de $f(at)$, para $a > 0$ está dada por

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.37)$$

Sea $at = x$, entonces,

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\frac{\omega}{a})x} dx. \quad (2.38)$$

Sea $x = t$, entonces la ecuación (2.38) se reescribe como

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\frac{\omega}{a})t} dt \\ &= \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}\quad (2.39)$$

Para el caso de $a < 0$, se tiene que

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.40)$$

Haciendo el cambio de variable $x = at$, la integral (2.40) se expresa por

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-i(\frac{\omega}{a})x} dx \\ &= -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i(\frac{\omega}{a})t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\frac{\omega}{a})t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \blacksquare \quad (2.42)$$

Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

Si $F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)]$, entonces

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-i\omega t_0}. \quad (2.43)$$

Demostración: La transformada de Fourier de $f(t - t_0)$ es

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.44)$$

Haciendo $t - t_0 = x, dt = dx$, por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(t_0+x)}dx \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= e^{-i\omega t_0} F(\omega).\blacksquare\end{aligned}\tag{2.45}$$

2.8. Convolución

Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones dadas. La *convolución* de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está definida por la función

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx,\tag{2.46}$$

la cual se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t).\tag{2.47}$$

Un caso especial importante es aquel en el cual $f_1(t) = 0$ para $t < 0$ y $f_2(t) = 0$ para $t < 0$, entonces, la ecuación (2.46) se convierte en

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx.\tag{2.48}$$

Teorema de convolución

El teorema de convolución en el tiempo afirma que si $\mathfrak{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ y $\mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, entonces

$$\mathfrak{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega).\tag{2.49}$$

Demostración: La transformada de Fourier de $f_1(t) \otimes f_2(t)$ es

$$\mathfrak{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \right] e^{-i\omega t} dt. \quad (2.50)$$

Reagrupando apropiadamente los términos, se llega a

$$\mathfrak{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-i\omega t} dt \right] dx. \quad (2.51)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, ecuación (2.43), se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-i\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-i\omega x}. \quad (2.52)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (2.51), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(\omega) e^{-i\omega x} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx \right] F_2(\omega) \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega). \blacksquare \end{aligned} \quad (2.53)$$

Teorema de Parseval

El teorema de Parseval afirma que si la serie de Fourier de $f(t)$ converge uniformemente hacia $f(t)$ en $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ se tiene

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.54)$$

Demostración: si $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$, entonces multiplicándola por $f(t)$ se obtiene

$$[f(t)]^2 = \frac{1}{2} a_0 f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] f(t) \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2} a_0 f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(t) \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(t) \sin(n\omega_0 t), \quad (2.56)$$

integrando término a término en el periodo definido por $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, se obtiene

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt.$$

Utilizando las definiciones de los coeficientes de Fourier, ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), se obtiene

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \blacksquare \quad (2.57)$$

2.9. Transformada discreta de Fourier (TDF)

Para $f(t)$ una función periódica de periodo T , se tiene que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega_0 t) dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.58)$$

Supongamos que $x(t)$ es periódica con periodo 2ℓ y que se conoce solamente en N valores equiespaciados de t que cubren todo el periodo $0 \leq t \leq 2\ell = T$, esto es

$$t = 0, \frac{2\ell}{N}, 2\frac{2\ell}{N}, \dots, (N-1)\frac{2\ell}{N}, \quad (2.59)$$

entonces

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_0^{2\ell} x(t) \exp\left(-i\frac{n\pi}{\ell} t\right) dt. \quad (2.60)$$

No se puede calcular exactamente la ecuación (2.60), por lo que mediante la suma de Riemann se tendrá una aproximación a los valores de c_n tomando en consideración el área del rectángulo con[4]

$$\text{base} = \frac{2\ell}{N}, \quad \text{altura} = x\left(\frac{2\ell}{N}k\right) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right), \quad \text{para } \frac{2\ell}{N} \leq t < (k+1)\frac{2\ell}{N}. \quad (2.61)$$

Por lo tanto

$$c_n \approx c_n^{(N)} = \frac{1}{2\ell} \sum_{k=0}^{N-1} \left[x\left(\frac{2\ell}{N}k\right) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right) \right] \left(\frac{2\ell}{N}\right). \quad (2.62)$$

Al simplificar la ecuación (2.62) se llega a

$$c_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x\left(\frac{2\ell}{N}k\right) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right). \quad (2.63)$$

Definiendo

$$x[k] = x\left[\frac{2\ell}{N}k\right], \quad (2.64)$$

$$\hat{x}[n] = c_n^{(N)}, \quad (2.65)$$

y al sustituirlas ecuaciones en la ecuación (2.63), ésta se escribe como

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right). \quad (2.66)$$

Periodicidad

Al desplazar la función discreta $\hat{x}[n]$, por la ecuación (2.66) se tiene que

$$\hat{x}[n+N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-i\frac{2\pi(n+N)}{N}k\right). \quad (2.67)$$

Puesto que

$$\exp\left(-i\frac{2\pi(n+N)}{N}k\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k - i2\pi k\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right) \exp\left(-2\pi ik\right), \quad (2.68)$$

y como $\exp(-i2\pi k) = 1$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación (2.68) se simplifica a

$$\exp\left(-i\frac{2\pi(n+N)}{N}k\right) = \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}k\right), \quad (2.69)$$

por lo tanto, sustituyendo la ecuación (2.69) en la ecuación (2.67), se llega a

$$\hat{x}[n+N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-2\pi i \frac{n}{N} k\right) = \hat{x}[n]. \blacksquare \quad (2.70)$$

Análogamente se demuestra que $x[n+N] = x[n]$. A $\hat{x}[n]$ se le conoce como la transformada discreta de Fourier.

2.9.1. La inversa de la transformada discreta de Fourier

Sea $\hat{x}[k] = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \exp\left(-i \frac{2\pi k}{N} p\right)$ la transformada discreta de Fourier de $x[p]$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] \exp\left(-i \frac{2\pi n k}{N} p\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \exp\left(-i 2\pi \frac{k}{N} p\right) \right] \exp\left(i \frac{2\pi n}{N} k\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[p] \exp\left(i 2\pi \frac{(n-p)}{N} k\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \sum_{k=0}^{N-1} \left[\exp\left(i 2\pi \frac{(n-p)}{N}\right) \right]^k. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Definiendo

$$r = \exp\left(-i 2\pi \frac{(n-p)}{N}\right), \quad (2.72)$$

la ecuación (2.71) se simplifica a

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \sum_{k=0}^{N-1} r^k. \quad (2.73)$$

Para $p \neq n$, $\sum_{k=0}^{N-1} r^k$ es la serie geométrica, por lo tanto

$$1 + r + r^2 \dots + r^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1 - r^N}{1 - r}. \quad (2.74)$$

Al sustituir la expresión de r , ecuación (2.72), en la ecuación (2.74) se llega a

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^k = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} \right) \right]^k \quad (2.75)$$

$$= \frac{1 - \exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} \right)^N}{1 - \exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} \right)} \quad (2.76)$$

$$= \frac{1 - \exp \left(i2\pi(n-p) \right)}{1 - \exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} \right)}, \quad (2.77)$$

puesto que $n, p \in [0, N-1]$, entonces $m = n - p \in \mathbb{Z}$ y como

$$\begin{aligned} \exp \left(2\pi i(n-p) \right) &= \exp \left(2\pi i m \right) \\ &= \cos(2\pi m) + i \underbrace{\sin(2\pi m)}_0 = 1, \text{ para } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} k \right) = \frac{1 - 1}{1 - \exp \left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} \right)} = 0, \text{ cuando } p \neq n. \quad (2.78)$$

Para el otro caso, $p = n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} r^k &= \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(2\pi i \frac{(n-n)}{N} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left(2\pi i \frac{0}{N} \right)^k = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(k \cdot 0) = N. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} k\right) = \begin{cases} N, & \text{si } p = n, \\ 0, & \text{si } p \neq n. \end{cases} \quad (2.80)$$

Entonces, de la ecuación (2.71) se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] \exp\left(2\pi i \frac{n}{N} k\right) &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-p)}{N} k\right) \\ &= \frac{1}{N} \left[x[0] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-0)}{N} k\right) + x[1] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-1)}{N} k\right) \right. \\ &\quad + \cdots + x[n-1] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-(n-1))}{N} k\right) + x[n] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-n)}{N} k\right) \\ &\quad + \cdots + x[n+1] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-(n+1))}{N} k\right) + \cdots \\ &\quad \left. + x[N-1] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i \frac{(n-(N-1))}{N} k\right) \right] \\ &= \frac{1}{N} x[n] N \\ &= x[n]. \blacksquare \end{aligned} \quad (2.81)$$

Por lo tanto $x[n]$ es la inversa de la transformada discreta de Fourier definida como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] \exp\left(2\pi i \frac{n}{N} k\right). \quad (2.82)$$

2.10. La transformada de Fourier en dos dimensiones

Generalizando, el par de transformadas de Fourier de una función continua $f(x, y)$ de dos variables continuas x y y están definidas por las ecuaciones

$$F(u, v) = \mathfrak{F}\{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\left(-i2\pi(ux + vy)dxdy\right). \quad (2.83)$$

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp\left(i2\pi(ux + vy)dudv\right). \quad (2.84)$$

Haciendo la analogía con el caso en una dimensión, el par de transformadas de Fourier de una imagen $I(x, y)$ de tamaño $M \times N$ están dadas por

$$F(u, v) = \mathfrak{F}\{I(x, y)\} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y) \exp\left(-i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right), \quad (2.85)$$

$$I(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right). \quad (2.86)$$

2.11. La transformada de Mellin

La transformada de Mellin está definida en el plano complejo por la relación

$$M(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx, \quad (2.87)$$

donde $s = -ic + \beta$, con el parámetro fijo $\beta \in \mathbb{R}$ y la variable independiente $c \in \mathbb{R}$. A ésta familia de transformadas se le conoce como la transformada β -Mellin. La parte real de la variable compleja s está parametrizada, para el caso $\beta = \frac{1}{2}$ se tiene la transformada de escala. Es posible usar otros valores para β , cuando $\beta = 0$ se tiene la transformada invariante de compresión/expansión y de $\beta = -1$ se obtiene la transformada invariante a la forma. Por lo tanto, la transformada de escala es una restricción de la transformada de

Mellin en la línea $s = -ic + \frac{1}{2}$. Asimismo, su transformada inversa está dada por [10]

$$f(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{M(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} M(s)x^{-s} dx, \quad (2.88)$$

2.11.1. El invariante a escala

La propiedad principal de la transformada de Mellin es ser invariante a escala.

Demostración: Sea

$$M_x(s) = \mathfrak{M}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx. \quad (2.89)$$

Para $s = i\omega$ se tiene que

$$M_x(\omega) = \mathfrak{M}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)x^{i\omega-1} dx, \quad (2.90)$$

Esto es similar a la relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

De esta manera, la transformada de Mellin de una función escalada $f(\alpha x)$ se expresa como

$$M_{\alpha x}(\omega) = \mathfrak{M}\{f(\alpha x)\} = \int_0^\infty f(\alpha x)x^{i\omega-1} dx, \quad (2.91)$$

donde $\alpha \neq 0$ es el factor de escala, al sustituir $\eta = \alpha x$, la ecuación (2.91) se reescribe como

$$\mathfrak{M}\{f(\alpha x)\} = \int_0^\infty f(\eta) \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^{i\omega-1} \frac{d\eta}{\alpha}. \quad (2.92)$$

Reagrupando apropiadamente los términos en la ecuación (2.92) se llega a

$$\mathfrak{M}\{f(\alpha x)\} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{i\omega} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \eta^{i\omega-1} f(\eta) d\eta, \quad (2.93)$$

y simplificando

$$\mathfrak{M}\{f(\alpha x)\} = \alpha^{-i\omega} \int_0^\infty \eta^{i\omega-1} f(\eta) d\eta. \quad (2.94)$$

Por la ecuación (2.90) se tiene

$$\mathfrak{M}\{f(ax)\} = \alpha^{-i\omega} \mathfrak{M}\{f(x)\}. \quad (2.95)$$

Al reescribir la ecuación (2.95) como

$$\mathfrak{M}\{f(ax)\} = e^{-i\omega \ln \alpha} \mathfrak{M}\{f(x)\}, \quad (2.96)$$

se observa que los cambios de escala se manifiestan en términos sólo de fase en el dominio de Mellin, por lo que

$$|\mathfrak{M}\{f(ax)\}| = |\mathfrak{M}\{f(x)\}|, \quad (2.97)$$

el espectro de amplitud de la transformada de Mellin es un invariante a escala.

2.12. La transformada analítica de Fourier-Mellin en dos dimensiones

En el área de reconocimientos de patrones se utiliza la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM) en coordenadas polares como un medio para obtener el invariante a escala, dicha transformación está definida por[5]

$$M_{f_\sigma}(k, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{\sigma - iv} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}, \quad (2.98)$$

donde $\sigma > 0 \in \mathbb{R}$.

2.12.1. La transformada analítica de Fourier- Mellin y el reconocimiento de patrones

Si se tiene una función escalada un factor α y rotada un ángulo θ , es decir

$$g(r, \theta) = f(\alpha r, \theta + \beta), \quad (2.99)$$

la transformada analítica de Fourier- Mellin de $g(r, \theta)$, por la ecuación (2.98), es

$$\begin{aligned} M_{g_\sigma}(k, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r, \theta) r^{\sigma - iv} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\alpha r, \theta + \beta) r^{\sigma - iv} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Cambiando las variables de integración por

$$R = \alpha r, \quad dR = \alpha dr, \quad (2.101)$$

$$\phi = \theta + \beta, \quad d\phi = d\theta, \quad (2.102)$$

en la ecuación (2.100), se tiene

$$\begin{aligned} M_{g_\sigma}(k, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_\beta^{2\pi+\beta} f(R, \phi) \left(\frac{R}{\alpha}\right)^{\sigma - iv} e^{-ik(\phi-\beta)} d\theta \frac{dR}{\frac{\alpha}{R}} \\ &= \alpha^{-\sigma+iv} e^{ik\beta} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(R, \phi) R^{\sigma - iv} e^{-ik\phi} d\phi \frac{dR}{R}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

es decir

$$M_{g_\sigma}(k, v) = \alpha^{-\sigma+iv} e^{ik\beta} M_{f_\alpha}(k, v). \blacksquare \quad (2.104)$$

En la ecuación (2.104) se observa que cambios en la escala y en la rotación generan cambios de escala y de rotación en el dominio de Mellin.

2.13. Descriptor invariantes a escala

Es posible obtener un descriptor invariante a los cambios de escala al normalizar la transformada analítica de Fourier-Mellin con respecto a su valor dc , esto es

$$\tilde{M}_{g_\sigma} = \frac{M_{g_\sigma}(k, v)}{M_{g_\sigma}(0, 0)}, \quad (2.105)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{M_{g_\sigma}(k, v)}{M_{g_\sigma}(0, 0)} &= \frac{\alpha^{-\sigma} \alpha^{iv} e^{ik\beta} M_{f_\sigma}(k, v)}{\alpha^{-\sigma} \alpha^{i \cdot 0} e^{i \cdot 0 \beta} M_{f_\sigma}(0, 0)} \\ &= \alpha^{iv} e^{ik\beta} \frac{M_{f_\sigma}(k, v)}{M_{f_\sigma}(0, 0)}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

entonces los cambios de escala en la ecuación (2.106) sólo generan cambios en la fase, por lo tanto

$$\left| \frac{M_{g_\sigma}(k, v)}{M_{g_\sigma}(0, 0)} \right| = \left| \frac{M_{f_\sigma}(k, v)}{M_{f_\sigma}(0, 0)} \right|, \quad (2.107)$$

es un invariante a escala.

2.13.1. La transformada analítica de Fourier-Mellin vía la transformada de Fourier

Al hacer el cambio de variable $\rho = \ln(r)$ en la ecuación (2.98), se obtiene que

$$M_{f_\sigma}(k, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(e^\rho, \theta) e^{\rho\sigma} e^{-i(k\theta+\rho)} d\theta d\rho, \quad (2.108)$$

la cual es la transformada AFM en coordenadas logarítmico-polares y se implementa de manera fácil mediante la transformada de Fourier.

3. VALIDACIÓN DEL DESCRIPTOR AFM

*Los encantos de esta ciencia
sublime, las matemáticas, sólo se
revelan a aquellos que tienen el
valor de profundizar en ella.*
Carl Friedrich Gauss

En este capítulo se presentará la metodología en la que se sustenta el descriptor invariante a posición y escala para el reconocimientos de patrones en imágenes digitales.

3.1. Algoritmo

A continuación se hace una descripción del algoritmo para la implementación en lenguaje de programación Matlab del invariante a posición y escala mediante la transformada de Fourier y la transformada analítica de Fourier-Mellin (AFM):

1. Imagen digital.
2. Imagen en formato doble.
3. Sustraer el valor medio de la imagen a la imagen.
4. Calcular la transformada de Fourier de la imagen.

5. Calcular el módulo de la transformada de Fourier de la imagen para obtener el invariante a posición.
6. Representar el módulo de la transformada de Fourier de la imagen en escala logarítmica -polar.
7. Calcular la transformada analítica de Fourier-Mellin de la imagen en escala logarítmica-polar.
8. Normalizar la transformada analítica de Fourier-Mellin con el valor de su *dc*.
9. Calcular el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada para obtener el invariante a escala.

3.2. Transformación de la imagen a coordenadas logarítmica-polar

La transformación de una imagen a coordenadas logarítmica-polar (log-polar) presenta la ventaja de la reducción selectiva de la información, ya que la resolución de una imagen logarítmica-polar varía desde el centro (alta resolución) hasta la periferia (baja resolución). Normalmente la parte con mayor información de una escena se encuentra en el centro[6].

El sistema de coordenadas polares (r, θ) corresponde a la distancia radial r desde el centro (x_c, y_c) a la coordenada (x, y) y θ corresponde al ángulo que forma r con el eje horizontal, es decir la transformación de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (r, θ) está dada por

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \tan^{-1} \frac{(y - y_c)}{(x - x_c)} \right). \quad (3.1)$$

La transformación logarítmica-polar (log-polar) es un mapeo de los puntos en el plano cartesiano (x, y) a los puntos en el plano logarítmico-polar $(\rho, \theta) = (\ln(r), \theta)$.

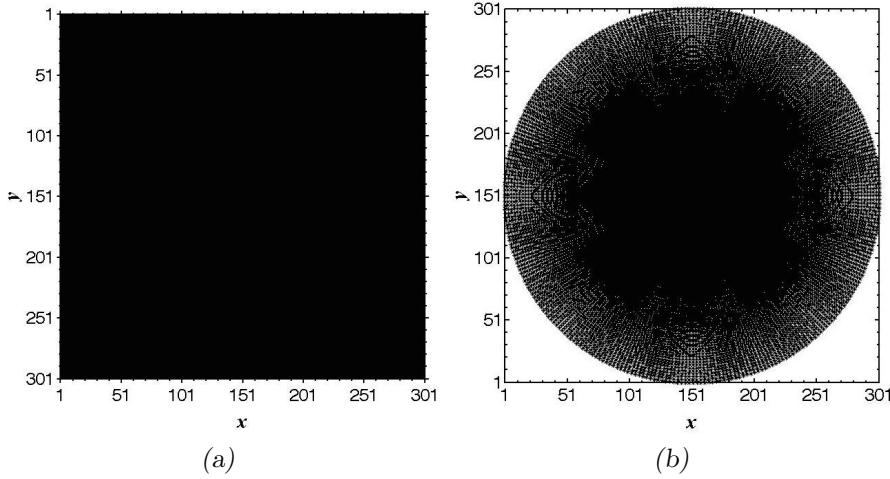


Fig. 3.1: Transformaciones de coordenadas cartesianas a logarítmica-polar. (a) Cuadrado en coordenadas cartesianas. (b) Cuadrado en coordenadas log-polares.

La Fig. 3.1 presenta la transformación del rectángulo $R = \{(x, y) : 1 \leq x, y \leq 301\}$ de la Fig. 3.1a a coordenadas logarítmico-polares, esto es al disco $D = \{(x, y) : x, y \in R, x^2 + y^2 \leq r, r = \lfloor \frac{301}{2} \rfloor + 1\}$, donde $\lfloor z \rfloor$ es la función que trunca el número real z al número entero \tilde{z} . De la Fig. 3.1b se observa que la función de transformación no es sobreyectiva o suprayectiva. Para solucionar el problema se utiliza algún método de interpolación. En el procesamiento de imágenes digitales los métodos de interpolación más comúnmente usados por su simplicidad y rapidez son: vecinos cercanos (nearest neighbor), lineal, cúbica y trazadores (splines).

3.3. Interpolación de vecinos cercanos (nearest neighbor)

En la interpolación de vecinos cercanos a cada píxel se le asigna el valor del punto más cercano de la muestra. Matemáticamente se representa mediante la convolución de la señal

con el filtro espacial

$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq |x|. \end{cases} \quad (3.2)$$

Por lo que, el correspondiente filtro en el dominio de frecuencias está dado por

$$\mathfrak{F}[h(\omega)] = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.3)$$

3.4. Interpolación lineal

La interpolación lineal es un método de primer grado, donde a través de dos puntos consecutivos se traza una línea recta. En el dominio espacial la interpolación lineal es equivalente a la convolución de la señal con el filtro[3]

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & 0 \leq |x| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x|. \end{cases} \quad (3.4)$$

Por lo que, el filtro en el dominio de frecuencias es

$$\mathfrak{F}[h(\omega)] = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.5)$$

3.5. Interpolación cúbica

La interpolación cúbica como su nombre lo indica es un método de interpolación mediante polinomios de tercer grado que se aproxima aceptablemente a la señal $\text{sinc}(x)$, que teóricamente hablando es el filtro ideal. El filtro espacial para éste tipo de interpolación es

$$h(x) = \begin{cases} (a+2)|x|^3 - (a+3)|x|^2, & 0 \leq |x| < 1, \\ a|x|^3 - 5a|x|^2 + 8a|x| - 4a, & 1 \leq |x| < 2, \\ 0, & 2 \leq |x|. \end{cases} \quad (3.6)$$

Y el correspondiente filtro en el dominio de frecuencias está dado por

$$R(\omega) = \frac{12}{\omega^2} \left[\text{sinc}^2 \frac{\omega}{2} - \text{sinc}(\omega) \right] + a \frac{8}{\omega^2} \left[3\text{sinc}^2(\omega) - 2\text{sinc}(\omega) - \text{sinc}(2\omega) \right]. \quad (3.7)$$

3.6. Interpolación trazadores (B-spline)

Un B-spline de grado n se deriva a través de n convoluciones del filtro caja denominado B_0 . Por lo tanto, $B_1 = B_0 * B_0$ denota un B-spline de grado 1, produciendo una señal triángulo. La interpolación B-spline de grado 1 es equivalente a la interpolación lineal. El B-spline B_2 es la convolución $B_0 * B_1$. El B_3 se genera a partir de la convolución de $B_0 * B_2$, esto es $B_3 = B_0 * B_0 * B_0 * B_0$. El filtro espacial para el B-spline cúbico se define como

$$h(x) = \begin{cases} 3|x|^3 - 6|x|^2 + 4, & 0 \leq |x| < 1, \\ -|x|^3 - 6a|x|^2 + 12a|x| + 8, & 1 \leq |x| < 2, \\ 0, & 2 \leq |x|. \end{cases} \quad (3.8)$$

Entre más puntos se tomen en cuenta en la interpolación se obtienen mejores resultados, esto implica que la interpolación a utilizar es la B-spline, pero emplea un gran tiempo de cómputo y debido que el interés de este trabajo es el reconocimiento de patrones en imágenes digitales y no la reconstrucción o restauración de imágenes, la interpolación que se utilizará es la lineal ya que utiliza menos tiempo de cómputo que la de los B-spline y los resultados para el reconocimiento de patrones mediante ambas interpolaciones es prácticamente el mismo.

3.7. Programa para calcular el descriptor invariante a posición y escala en una imagen

A continuación se presenta el programa del invariante a posición y traslación desarrollado en lenguaje de programación MatLab [9]. Debido a que el lenguaje de programación

no permite introducir acentos, ni tildes, los comentarios carecen de estos.

```
clear all; clc; close all;

%leer una imagen
I=imread('trayectoria/nombre_imagen.jpg');

%obtener el tamano de la imagen I
[nn,mm]=size(I);

%renglon central de I
cr=floor(nn/2)+1;

%columna central de I
cc=floor(mm/2)+1;

%extraer el valor medio de la imagen a la imagen
I=I-mean2(I);

%calcular la transformada de Fourier de I
%los valores se desplazan para que el valor dc este en el centro de la
%imagen
FFT_I=fftshift(fft2(fftshift(I)));

%EL INVARIANTE A TRASLACION
%espectro de amplitud de I.
mod_I=abs(FFT_I);

%TRANSFORMACION DE COORDENADAS CARTESIANAS A LOG-POLARES

%si la imagen es de diferente tamano
mx=max(nn,mm);
```

```
%muestreo de la coordenada polar
theta = 0:2*pi/mx:2*pi-2*pi/mx;

%si la imagen es de diferente tamano
mn=min(nn,mm);
r=mn/2;
%muestreo de la coordenada logaritmica
rho = transpose(logspace(0,log10(r),mn));

% coordenadas log-polares
x = rho*cos(theta)+cc;
y = rho*sin(theta)+cr;

%imagen en coordenadas log-polar con el metodo de
%interpolacion lineal
I_LogPolar = interp2(I,x,y,'linear');

% Area fuera del disco para evitar valores Inf o %NaN
D = x>mm | x<1 | y>nn | y<1;
I_LogPolar(D) = 0;

%LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER-MELLIN VIA LA
%TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (TDF)

%muestreo de la funcion exp(t sig) f(exp(t),theta)
sig = 1/2;
alfa = 2*pi*sig/N;

F = zeros(nn,mm)
for n = 0:nn-1
    t = alfa*n;
```

```

for m = 0:mm-1
    F(n+1,m+1) = exp(t)*I_LogPolar(n+1,m+1);
end

end

%calcular la transformada rapida de Fourier-Mellin
%via la transformada de escala
AFMT = fftshift(fft2(fftshift(F)));

%factor de escala de la transformada de Fourier-
%Mellin Analitica (AFMT)
M00 = AFMT(cr,cc);

%AFMT ponderada
AFMT_P = AFMT/M00;

%EL DESCRIPTOR INVARIANTE A POSICION y ESCALA
DIPE = abs(AFMT_P);

```

3.7.1. Ejemplo 1

Este experimento numérico se realizó con una imagen de referencia T en blanco y negro de 301 x 301 píxeles y un cuadrado de 150 x 150 (Fig. 3.2a). El cuadrado se escaló $\pm 50\%$, de 1% en 1%. Cada una de esas imágenes se usaron como imágenes problema P para evaluar al descriptor AFM. Las métricas de comparación analizadas fueron la distancia euclíadiana d_e y la distancia del máximo d_m , definidas por

$$d_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{301} \sum_{j=1}^{301} (T_{i,j} - P_{i,j})^2}, \quad (3.9)$$

$$d_m = \max_{1 \leq i, j \leq 301} \{|T_{i,j} - P_{i,j}|\}. \quad (3.10)$$

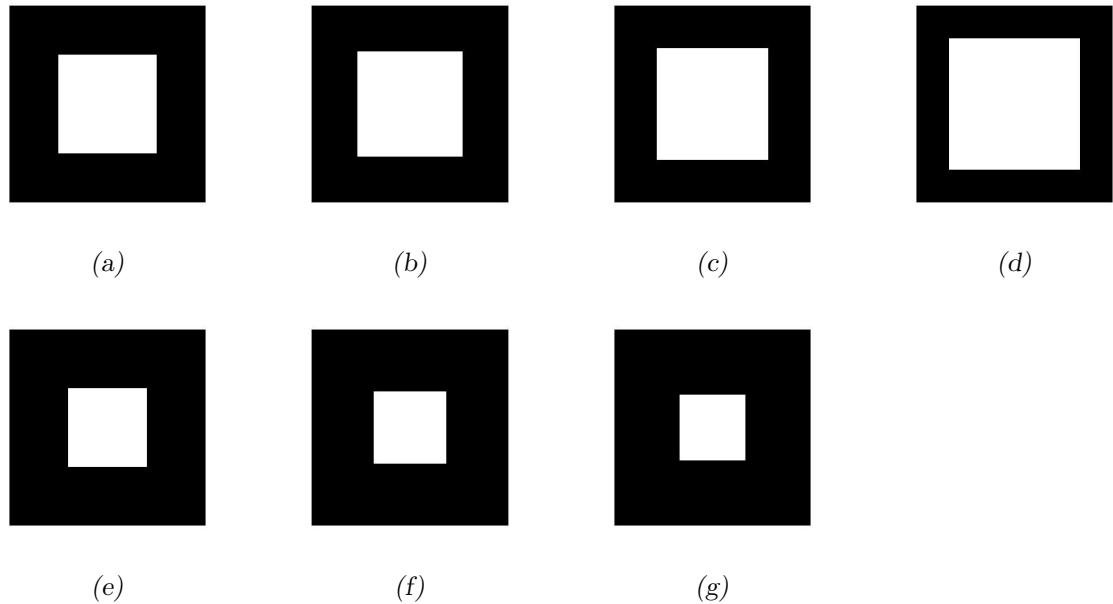


Fig. 3.2: Imágenes escaladas. (a) Imagen de referencia. (b) Imagen escalada 10 %. (c) Imagen escalada 20 %. (d) Imagen escalada 50 %. (e) Imagen escalada -30 %. (f) Imagen escalada -40 %. (g) Imagen escalada -50 %.

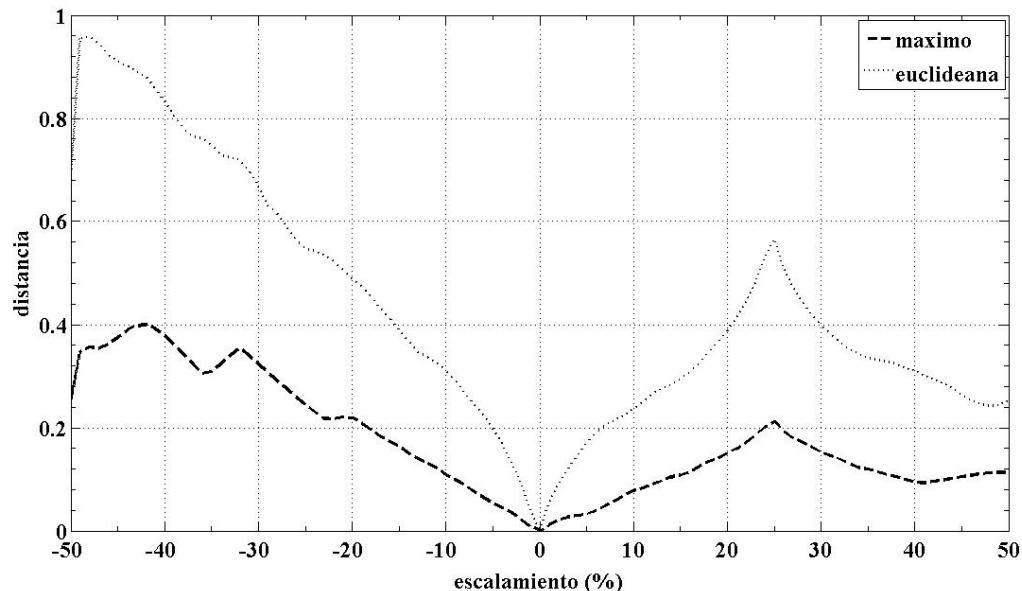


Fig. 3.3: Resultados del descriptor AFM con la distancia euclídea y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

En la Fig. 3.3 se muestra el desempeño del descriptor invariante a posición y escala AFM con las distancias d_e y d_m . En el eje horizontal se presentan los cambios de escala de $\pm 50\%$ y en el eje vertical de los valores de las distancias. La distancia d_e se representa mediante una curva punteada negra y la d_m por una curva discontinua negra. Como es de esperarse cuando se compara la imagen de referencia consigo misma ambas distancias tienen valor 0. En la Fig. 3.3 se observa que ambas curvas tienen la misma forma, pero la de d_e está escalada con respecto a la d_m por un factor mayor a 1. También se tiene que los valores de distancia son mayores cuando se reduce el tamaño del cuadrado que cuando se incrementa. De dicha figura se puede deducir que la métrica apropiada para llevar a cabo la comparación en el descriptor AFM es la d_m .

3.8. Ejemplo 2

Para el segundo ejemplo del descriptor AFM, se tomaron como imágenes de referencia imágenes en escala de grises de mariposas Fig. 3.4. Dichas imágenes fueron escaladas $\pm 20\%$ de 1% en 1%. En este ejemplo la métrica de comparación que se utilizó para validar al descriptor es la distancia d_m . Los resultados del descriptor se muestran de la Fig. 3.5 a la Fig. 3.11. Los correspondientes valores de la distancia del máximo en los que se basan dichas figuras se muestran en las tablas de la 1 a la 7, respectivamente.

Para generar el plano de salida de la Fig. 3.5 se utilizó como imagen de referencia a la mariposa de la Fig. 3.4a. Cada una de las imágenes problema se comparó con la imagen de referencia. Los resultados de la distancia d_m para las mariposas A, B, C, D, E, F, G se presentan mediante las curvas con punto en azul, roja, verde, magenta, cyan, amarillo y negro, respectivamente. En el eje horizontal se muestran los distintos valores de escala y en el eje vertical los correspondientes valores d_m de la comparación de las imágenes invariantes a posición y escala generadas por el descriptor AFM.

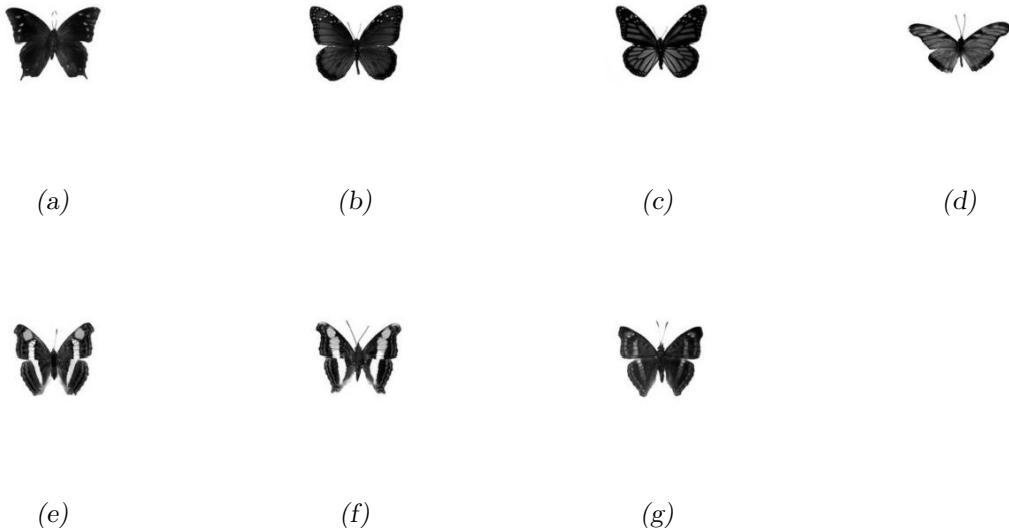


Fig. 3.4: Imágenes de referencias de mariposas en escalas de grises. (a) *Cymatogramma arginussa eubaena*. (b) *Danaus eresimus montezuma*. (c) *Danaus plexippus plexippus*. (d) *Dione juno huascuma*. (e) *Doxocopa laure acca h*. (f) *Doxocopa laure laure m*. (g) *Doxocopa pavon m*.

Lo que se busca en los planos de salida de las Figs. 3.5 a la 3.11 es que los puntos de las curvas de las imágenes problema no tengan los mismos valores que ninguno de los puntos de la curva de la imagen de referencia. Por ejemplo, en la Fig. 3.5 se observa el valor d_m de la escala del 15 % de la imagen problema D es muy parecido al de la imagen de referencia A. De la tabla I se obtiene que el d_m para D es 0.1603 y para A es 0.1609, aunque la diferencia sea mínima al no ser iguales dichos valores es un indicativo de que las imágenes son diferentes. Por otro lado, en la Fig. 3.7 se tiene que el valor d_m de la escala del 5 % para la imagen problema A es igual al valor d_m de la imagen de referencia C, de la tabla III se observa que el valor d_m para ambas imágenes es 0.0813, por lo tanto aquí no se llevó a cabo eficientemente la clasificación. Los otros casos donde sucede lo mismo, es cuando la imagen de referencia es D y la imagen problema es E para el valor de escala del 16 %, ambas tienen $d_m = 0.0222$; cuando la imagen de referencia es F y la imagen problema es D para el valor

de escala del 15 % ambas tienen $d_m = 0.2350$. En general se puede concluir que el descriptor AFM invariante a posición y escala tiene un desempeño eficiente al comparar imágenes de mariposas en escala de grises con una variación del $\pm 20\%$ en la escala.

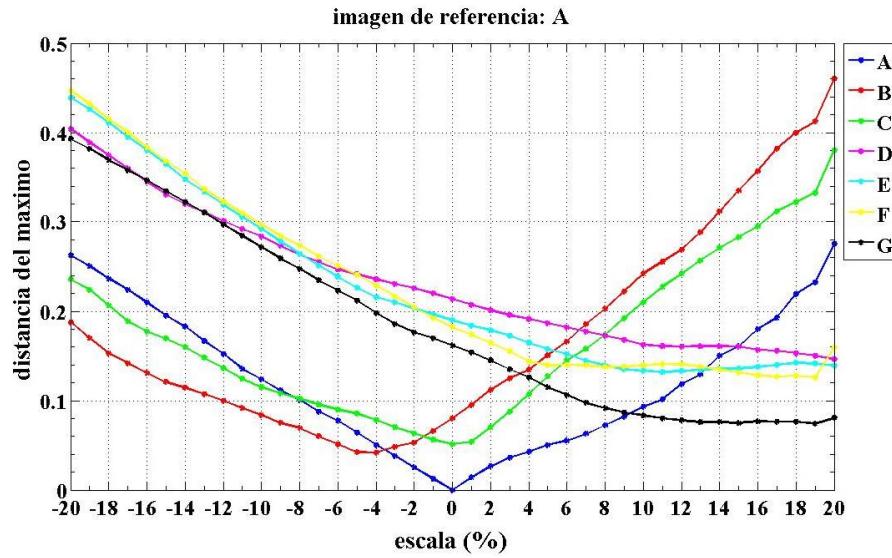


Fig. 3.5: Resultados del descriptor invariante a posición y escala AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

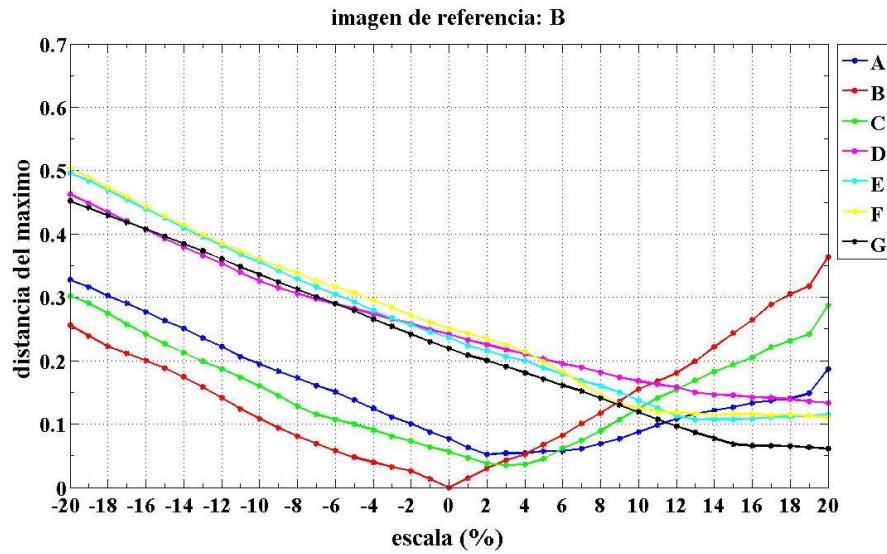


Fig. 3.6: Resultados del descriptor AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

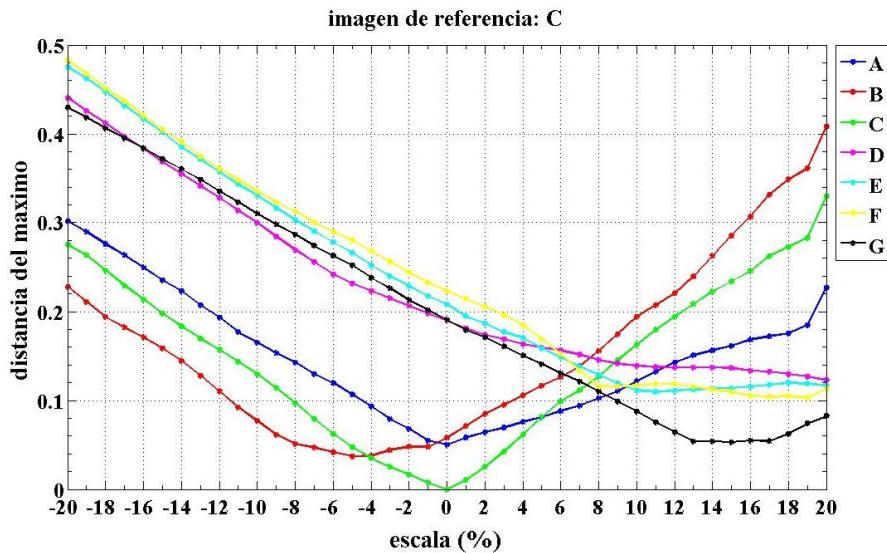


Fig. 3.7: Resultados del descriptor AFM con la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

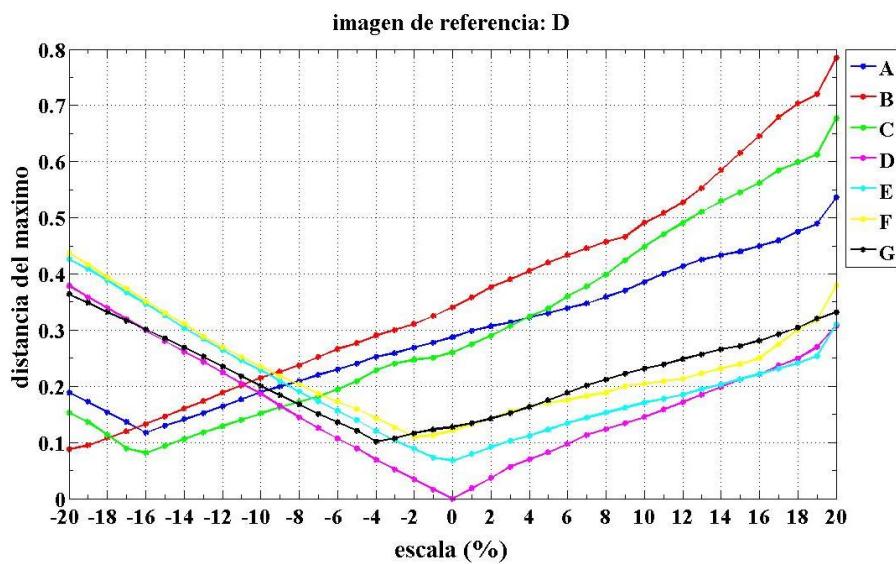


Fig. 3.8: Resultados del descriptor AFM con la distancia euclídea y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

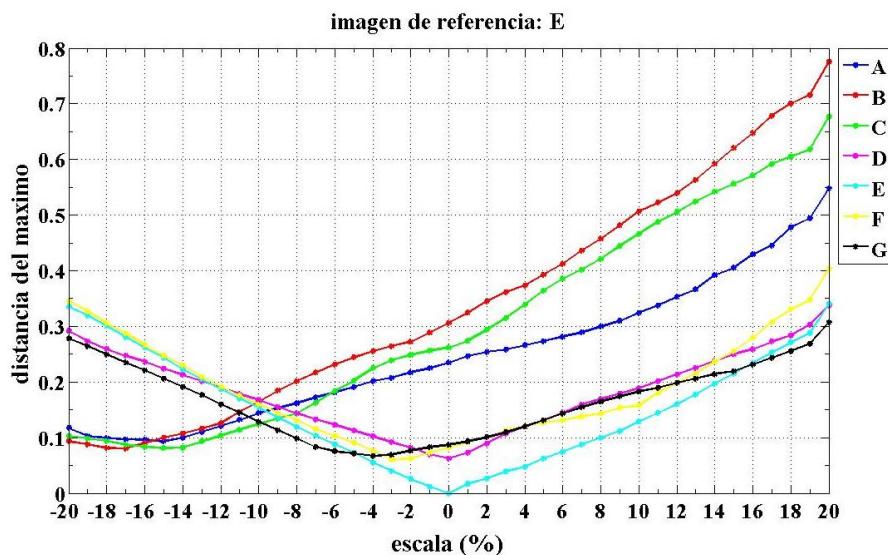


Fig. 3.9: Resultados del descriptor AFM con la distancia euclídea y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

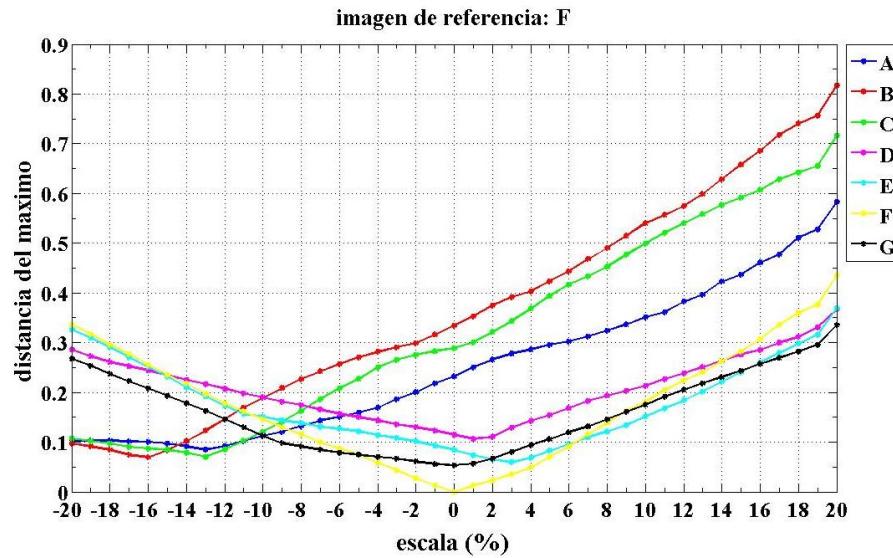


Fig. 3.10: Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

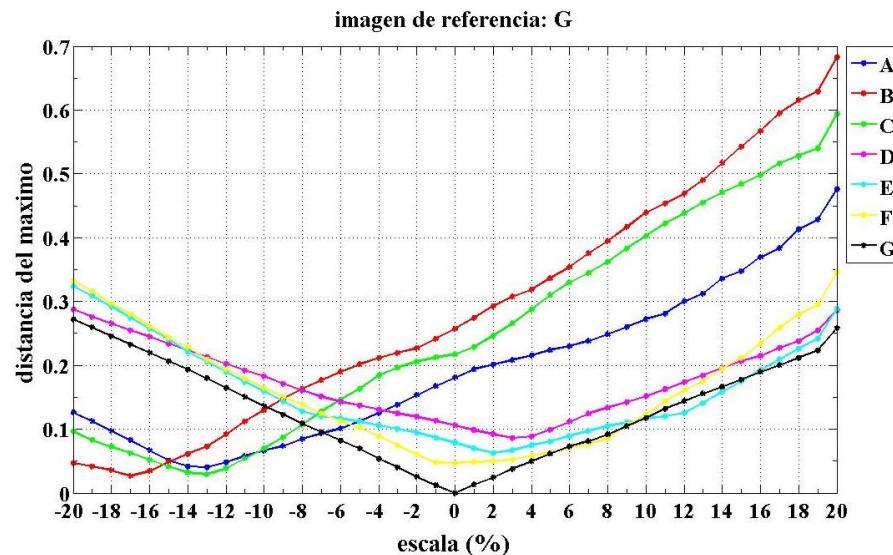


Fig. 3.11: Resultados del descriptor AFM con la distancia euclíadiana y la distancia del máximo. El lenguaje de programación Matlab no permite poner acentos, es por eso la falta de los mismos en la gráfica.

Tab. I: Imagen de referencia A.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.2626	0.1877	0.2359	0.4040	0.4392	0.4470	0.3929
-19	0.2507	0.1703	0.2239	0.3890	0.4262	0.4321	0.3818
-18	0.2366	0.1530	0.2067	0.3747	0.4110	0.4150	0.3693
-17	0.2240	0.1416	0.1889	0.3599	0.3951	0.4003	0.3577
-16	0.2097	0.1311	0.1772	0.3451	0.3799	0.3832	0.3464
-15	0.1951	0.1210	0.1696	0.3308	0.3648	0.3677	0.3342
-14	0.1826	0.1144	0.1600	0.3200	0.3477	0.3538	0.3223
-13	0.1666	0.1074	0.1481	0.3108	0.3337	0.3367	0.3105
-12	0.1522	0.0999	0.1362	0.3009	0.3191	0.3226	0.2970
-11	0.1358	0.0916	0.1246	0.2921	0.3052	0.3097	0.2845
-10	0.1238	0.0841	0.1152	0.2837	0.2925	0.2970	0.2715
-9	0.1116	0.0751	0.1082	0.2733	0.2779	0.2844	0.2592
-8	0.1008	0.0692	0.1022	0.2640	0.2641	0.2738	0.2473
-7	0.0877	0.0601	0.0954	0.2553	0.2511	0.2612	0.2347
-6	0.0776	0.0511	0.0899	0.2470	0.2386	0.2507	0.2232
-5	0.0642	0.0422	0.0854	0.2415	0.2264	0.2408	0.2120
-4	0.0503	0.0419	0.0784	0.2358	0.2155	0.2288	0.1977
-3	0.0383	0.0485	0.0704	0.2304	0.2098	0.2166	0.1859
-2	0.0253	0.0528	0.0632	0.2257	0.2032	0.2042	0.1762
-1	0.0125	0.0663	0.0564	0.2200	0.1963	0.1924	0.1698
0	0	0.0801	0.0512	0.2136	0.1901	0.1825	0.1618
1	0.0140	0.0952	0.0542	0.2070	0.1837	0.1738	0.1541
2	0.0265	0.1120	0.0702	0.2012	0.1786	0.1647	0.1451
3	0.0361	0.1251	0.0876	0.1957	0.1727	0.1551	0.1350
4	0.0427	0.1348	0.1072	0.1911	0.1648	0.1438	0.1259
5	0.0501	0.1507	0.1273	0.1867	0.1576	0.1396	0.1151
6	0.0554	0.1662	0.1450	0.1819	0.1519	0.1399	0.1065
7	0.0630	0.1857	0.1581	0.1775	0.1448	0.1397	0.0976
8	0.0724	0.2030	0.1737	0.1727	0.1394	0.1378	0.0916
9	0.0822	0.2223	0.1923	0.1678	0.1350	0.1379	0.0867
10	0.0934	0.2423	0.2101	0.1626	0.1336	0.1393	0.0833
11	0.1014	0.2554	0.2273	0.1610	0.1320	0.1410	0.0804
12	0.1183	0.2691	0.2421	0.1606	0.1331	0.1406	0.0780
13	0.1293	0.2884	0.2568	0.1610	0.1344	0.1380	0.0760
14	0.1500	0.3120	0.2712	0.1610	0.1357	0.1348	0.0761
15	0.1609	0.3349	0.2829	0.1603	0.1359	0.1318	0.0749
16	0.1803	0.3568	0.2950	0.1567	0.1378	0.1283	0.0768
17	0.1928	0.3820	0.3118	0.1559	0.1399	0.1271	0.0764
18	0.2194	0.3996	0.3223	0.1531	0.1423	0.1278	0.0762
19	0.2325	0.4122	0.3327	0.1502	0.1414	0.1261	0.0740
20	0.2756	0.4602	0.3803	0.1461	0.1391	0.1593	0.0807

Tab. II: Imagen de referencia B.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.3276	0.2559	0.3020	0.4627	0.4963	0.5038	0.4521
-19	0.3162	0.2393	0.2906	0.4484	0.4839	0.4896	0.4414
-18	0.3027	0.2228	0.2741	0.4347	0.4694	0.4732	0.4295
-17	0.2906	0.2116	0.2571	0.4206	0.4542	0.4592	0.4185
-16	0.2770	0.2005	0.2420	0.4064	0.4396	0.4428	0.4076
-15	0.2631	0.1883	0.2266	0.3927	0.4253	0.4280	0.3960
-14	0.2511	0.1746	0.2126	0.3792	0.4089	0.4147	0.3846
-13	0.2358	0.1584	0.1991	0.3663	0.3955	0.3983	0.3733
-12	0.2221	0.1415	0.1869	0.3530	0.3815	0.3849	0.3604
-11	0.2063	0.1239	0.1739	0.3394	0.3682	0.3725	0.3484
-10	0.1949	0.1090	0.1601	0.3259	0.3561	0.3604	0.3361
-9	0.1832	0.0939	0.1451	0.3148	0.3421	0.3483	0.3243
-8	0.1729	0.0806	0.1284	0.3059	0.3290	0.3382	0.3129
-7	0.1604	0.0689	0.1155	0.2976	0.3166	0.3262	0.3009
-6	0.1507	0.0578	0.1070	0.2897	0.3046	0.3162	0.2899
-5	0.1379	0.0477	0.0995	0.2818	0.2929	0.3067	0.2792
-4	0.1247	0.0393	0.0906	0.2738	0.2791	0.2953	0.2655
-3	0.1108	0.0324	0.0811	0.2658	0.2674	0.2835	0.2543
-2	0.1002	0.0261	0.0729	0.2578	0.2567	0.2717	0.2415
-1	0.0873	0.0132	0.0639	0.2489	0.2455	0.2605	0.2302
0	0.0766	0	0.0565	0.2416	0.2367	0.2510	0.2198
1	0.0631	0.0144	0.0465	0.2329	0.2236	0.2427	0.2086
2	0.0518	0.0304	0.0374	0.2251	0.2159	0.2340	0.2005
3	0.0540	0.0430	0.0352	0.2173	0.2063	0.2249	0.1905
4	0.0540	0.0522	0.0364	0.2103	0.1998	0.2140	0.1807
5	0.0570	0.0675	0.0451	0.2028	0.1886	0.1982	0.1711
6	0.0571	0.0823	0.0620	0.1951	0.1789	0.1823	0.1611
7	0.0609	0.1009	0.0745	0.1893	0.1686	0.1637	0.1520
8	0.0690	0.1174	0.0894	0.1818	0.1597	0.1469	0.1412
9	0.0770	0.1359	0.1073	0.1736	0.1501	0.1313	0.1301
10	0.0877	0.1550	0.1243	0.1681	0.1370	0.1244	0.1194
11	0.0982	0.1675	0.1407	0.1628	0.1251	0.1193	0.1074
12	0.1081	0.1806	0.1548	0.1581	0.1127	0.1184	0.0967
13	0.1161	0.1991	0.1689	0.1504	0.1066	0.1166	0.0868
14	0.1214	0.2216	0.1826	0.1463	0.1076	0.1150	0.0775
15	0.1265	0.2435	0.1938	0.1457	0.1074	0.1157	0.0683
16	0.1331	0.2645	0.2054	0.1423	0.1085	0.1151	0.0659
17	0.1368	0.2885	0.2214	0.1415	0.1106	0.1140	0.0655
18	0.1401	0.3054	0.2315	0.1388	0.1115	0.1147	0.0653
19	0.1485	0.3174	0.2414	0.1360	0.1135	0.1130	0.0632
20	0.1868	0.3633	0.2869	0.1332	0.1150	0.1101	0.0611

Tab. III: Imagen de referencia C.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.3016	0.2280	0.2754	0.4404	0.4750	0.4827	0.4296
-19	0.2899	0.2109	0.2636	0.4257	0.4623	0.4681	0.4186
-18	0.2760	0.1939	0.2467	0.4117	0.4473	0.4512	0.4064
-17	0.2636	0.1824	0.2292	0.3972	0.4317	0.4368	0.3950
-16	0.2497	0.1711	0.2137	0.3826	0.4167	0.4200	0.3838
-15	0.2353	0.1586	0.1978	0.3686	0.4020	0.4048	0.3719
-14	0.2231	0.1444	0.1835	0.3547	0.3852	0.3912	0.3602
-13	0.2074	0.1278	0.1696	0.3414	0.3714	0.3743	0.3486
-12	0.1932	0.1104	0.1571	0.3278	0.3570	0.3605	0.3354
-11	0.1770	0.0923	0.1437	0.3138	0.3434	0.3478	0.3231
-10	0.1653	0.0770	0.1296	0.2999	0.3309	0.3354	0.3104
-9	0.1533	0.0615	0.1141	0.2844	0.3166	0.3230	0.2982
-8	0.1427	0.0510	0.0970	0.2694	0.3030	0.3126	0.2866
-7	0.1298	0.0469	0.0791	0.2558	0.2903	0.3002	0.2742
-6	0.1199	0.0417	0.0625	0.2420	0.2780	0.2899	0.2629
-5	0.1068	0.0373	0.0475	0.2314	0.2660	0.2802	0.2519
-4	0.0931	0.0376	0.0350	0.2233	0.2518	0.2684	0.2378
-3	0.0789	0.0442	0.0252	0.2150	0.2398	0.2564	0.2263
-2	0.0679	0.0481	0.0168	0.2068	0.2288	0.2442	0.2132
-1	0.0547	0.0479	0.0076	0.1977	0.2173	0.2327	0.2016
0	0.0503	0.0581	0	0.1901	0.2082	0.2230	0.1909
1	0.0583	0.0710	0.0103	0.1812	0.1948	0.2144	0.1794
2	0.0644	0.0847	0.0253	0.1737	0.1869	0.2055	0.1711
3	0.0695	0.0949	0.0423	0.1689	0.1770	0.1961	0.1608
4	0.0759	0.1058	0.0616	0.1635	0.1703	0.1849	0.1507
5	0.0813	0.1165	0.0813	0.1595	0.1589	0.1687	0.1408
6	0.0879	0.1264	0.0986	0.1564	0.1488	0.1524	0.1305
7	0.0941	0.1386	0.1116	0.1517	0.1383	0.1332	0.1213
8	0.1025	0.1556	0.1268	0.1455	0.1291	0.1159	0.1101
9	0.1107	0.1746	0.1452	0.1415	0.1192	0.1156	0.0987
10	0.1217	0.1942	0.1626	0.1389	0.1114	0.1170	0.0877
11	0.1325	0.2071	0.1795	0.1374	0.1098	0.1186	0.0754
12	0.1427	0.2206	0.1940	0.1370	0.1109	0.1183	0.0644
13	0.1509	0.2395	0.2085	0.1374	0.1122	0.1158	0.0542
14	0.1564	0.2627	0.2226	0.1374	0.1134	0.1126	0.0540
15	0.1616	0.2852	0.2341	0.1367	0.1137	0.1096	0.0528
16	0.1684	0.3067	0.2460	0.1332	0.1155	0.1053	0.0547
17	0.1721	0.3314	0.2625	0.1324	0.1175	0.1041	0.0543
18	0.1755	0.3487	0.2728	0.1297	0.1199	0.1048	0.0625
19	0.1846	0.3611	0.2830	0.1267	0.1191	0.1031	0.0742
20	0.2269	0.4082	0.3298	0.1227	0.1168	0.1127	0.0826

Tab. IV: Imagen de referencia D.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.1886	0.0877	0.1526	0.3788	0.4262	0.4367	0.3639
-19	0.1725	0.0947	0.1364	0.3587	0.4088	0.4167	0.3489
-18	0.1535	0.1077	0.1133	0.3395	0.3883	0.3936	0.3321
-17	0.1365	0.1199	0.0894	0.3195	0.3669	0.3739	0.3166
-16	0.1174	0.1328	0.0813	0.2996	0.3464	0.3509	0.3013
-15	0.1294	0.1465	0.0940	0.2803	0.3261	0.3300	0.2849
-14	0.1412	0.1600	0.1055	0.2613	0.3031	0.3113	0.2689
-13	0.1525	0.1736	0.1181	0.2431	0.2842	0.2882	0.2529
-12	0.1639	0.1885	0.1289	0.2244	0.2645	0.2693	0.2348
-11	0.1765	0.2016	0.1403	0.2052	0.2458	0.2519	0.2180
-10	0.1897	0.2147	0.1517	0.1862	0.2288	0.2348	0.2005
-9	0.1994	0.2260	0.1624	0.1650	0.2091	0.2178	0.1839
-8	0.2090	0.2377	0.1720	0.1444	0.1905	0.2036	0.1679
-7	0.2200	0.2519	0.1823	0.1257	0.1731	0.1866	0.1510
-6	0.2298	0.2665	0.1939	0.1069	0.1562	0.1725	0.1355
-5	0.2403	0.2767	0.2089	0.0895	0.1397	0.1592	0.1205
-4	0.2521	0.2906	0.2282	0.0690	0.1203	0.1431	0.1012
-3	0.2589	0.3003	0.2404	0.0521	0.1038	0.1266	0.1076
-2	0.2691	0.3110	0.2472	0.0347	0.0888	0.1099	0.1160
-1	0.2776	0.3252	0.2507	0.0159	0.0730	0.1122	0.1227
0	0.2876	0.3402	0.2606	0	0.0679	0.1216	0.1275
1	0.2985	0.3580	0.2747	0.0185	0.0794	0.1322	0.1341
2	0.3069	0.3767	0.2899	0.0366	0.0919	0.1428	0.1425
3	0.3138	0.3907	0.3073	0.0562	0.1027	0.1548	0.1520
4	0.3226	0.4056	0.3240	0.0701	0.1120	0.1638	0.1633
5	0.3300	0.4202	0.3385	0.0825	0.1229	0.1703	0.1753
6	0.3391	0.4338	0.3600	0.0976	0.1342	0.1753	0.1888
7	0.3476	0.4460	0.3778	0.1131	0.1441	0.1827	0.2011
8	0.3591	0.4575	0.3987	0.1240	0.1531	0.1889	0.2123
9	0.3703	0.4659	0.4238	0.1343	0.1619	0.1996	0.2223
10	0.3854	0.4911	0.4478	0.1451	0.1706	0.2042	0.2314
11	0.4003	0.5087	0.4709	0.1588	0.1779	0.2091	0.2392
12	0.4141	0.5272	0.4908	0.1717	0.1848	0.2138	0.2485
13	0.4254	0.5532	0.5106	0.1847	0.1946	0.2228	0.2568
14	0.4329	0.5849	0.5299	0.1987	0.2031	0.2310	0.2659
15	0.4401	0.6158	0.5457	0.2117	0.2127	0.2393	0.2721
16	0.4494	0.6453	0.5620	0.2220	0.2220	0.2502	0.2812
17	0.4595	0.6791	0.5846	0.2367	0.2317	0.2744	0.2927
18	0.4754	0.7028	0.5987	0.2490	0.2412	0.2998	0.3043
19	0.4892	0.7197	0.6127	0.2697	0.2538	0.3177	0.3203
20	0.5359	0.7844	0.6768	0.3074	0.3099	0.3793	0.3318

Tab. V: Imagen de referencia E.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.1174	0.0935	0.1027	0.2921	0.3355	0.3452	0.2784
-19	0.1027	0.0877	0.0981	0.2735	0.3195	0.3268	0.2646
-18	0.0989	0.0809	0.0935	0.2594	0.3007	0.3056	0.2492
-17	0.0971	0.0802	0.0870	0.2474	0.2811	0.2875	0.2349
-16	0.0964	0.0901	0.0832	0.2365	0.2623	0.2664	0.2209
-15	0.0928	0.0995	0.0811	0.2242	0.2437	0.2473	0.2059
-14	0.0997	0.1076	0.0819	0.2129	0.2226	0.2301	0.1912
-13	0.1101	0.1161	0.0934	0.2015	0.2052	0.2089	0.1765
-12	0.1205	0.1259	0.1034	0.1893	0.1872	0.1916	0.1599
-11	0.1321	0.1458	0.1138	0.1783	0.1700	0.1756	0.1444
-10	0.1442	0.1651	0.1243	0.1680	0.1543	0.1599	0.1285
-9	0.1532	0.1845	0.1340	0.1551	0.1363	0.1443	0.1132
-8	0.1619	0.2018	0.1429	0.1436	0.1192	0.1312	0.0985
-7	0.1720	0.2168	0.1624	0.1330	0.1032	0.1156	0.0830
-6	0.1811	0.2312	0.1833	0.1227	0.0878	0.1028	0.0753
-5	0.1907	0.2443	0.2021	0.1125	0.0726	0.0905	0.0713
-4	0.2015	0.2551	0.2249	0.1022	0.0548	0.0757	0.0669
-3	0.2077	0.2640	0.2388	0.0919	0.0397	0.0605	0.0689
-2	0.2171	0.2722	0.2487	0.0816	0.0259	0.0627	0.0766
-1	0.2249	0.2889	0.2563	0.0701	0.0117	0.0731	0.0828
0	0.2348	0.3059	0.2619	0.0623	0	0.0817	0.0871
1	0.2460	0.3245	0.2739	0.0725	0.0169	0.0914	0.0932
2	0.2541	0.3452	0.2937	0.0891	0.0269	0.1012	0.1009
3	0.2582	0.3615	0.3151	0.1071	0.0392	0.1122	0.1096
4	0.2662	0.3734	0.3394	0.1199	0.0477	0.1205	0.1200
5	0.2730	0.3931	0.3642	0.1313	0.0621	0.1265	0.1310
6	0.2814	0.4123	0.3860	0.1451	0.0747	0.1310	0.1434
7	0.2892	0.4363	0.4022	0.1594	0.0880	0.1378	0.1547
8	0.2997	0.4577	0.4215	0.1694	0.0995	0.1435	0.1650
9	0.3100	0.4815	0.4445	0.1789	0.1120	0.1534	0.1742
10	0.3238	0.5062	0.4665	0.1887	0.1289	0.1576	0.1825
11	0.3375	0.5224	0.4877	0.2013	0.1442	0.1803	0.1897
12	0.3531	0.5394	0.5059	0.2132	0.1603	0.1990	0.1982
13	0.3667	0.5632	0.5241	0.2251	0.1773	0.2152	0.2058
14	0.3923	0.5923	0.5419	0.2379	0.1968	0.2367	0.2141
15	0.4056	0.6206	0.5564	0.2499	0.2151	0.2557	0.2198
16	0.4296	0.6477	0.5713	0.2591	0.2346	0.2797	0.2314
17	0.4451	0.6787	0.5921	0.2728	0.2531	0.3074	0.2430
18	0.4779	0.7005	0.6050	0.2841	0.2713	0.3307	0.2551
19	0.4942	0.7161	0.6178	0.3030	0.2885	0.3472	0.2687
20	0.5474	0.7754	0.6767	0.3377	0.3399	0.4037	0.3066

Tab. VI: Imagen de referencia F.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.1027	0.0975	0.1070	0.2860	0.3264	0.3363	0.2676
-19	0.1027	0.0916	0.1022	0.2728	0.3099	0.3174	0.2534
-18	0.1030	0.0845	0.0975	0.2611	0.2906	0.2956	0.2375
-17	0.1013	0.0744	0.0908	0.2525	0.2704	0.2769	0.2228
-16	0.1005	0.0690	0.0869	0.2442	0.2509	0.2552	0.2083
-15	0.0967	0.0834	0.0848	0.2350	0.2318	0.2350	0.1929
-14	0.0913	0.1018	0.0789	0.2254	0.2101	0.2178	0.1778
-13	0.0849	0.1233	0.0701	0.2167	0.1922	0.1960	0.1627
-12	0.0917	0.1458	0.0854	0.2072	0.1736	0.1781	0.1456
-11	0.1026	0.1692	0.1026	0.1982	0.1567	0.1617	0.1296
-10	0.1119	0.1890	0.1210	0.1901	0.1507	0.1456	0.1132
-9	0.1204	0.2091	0.1410	0.1817	0.1437	0.1295	0.0977
-8	0.1327	0.2268	0.1632	0.1743	0.1384	0.1160	0.0911
-7	0.1430	0.2424	0.1863	0.1655	0.1312	0.1000	0.0842
-6	0.1510	0.2572	0.2079	0.1569	0.1269	0.0867	0.0788
-5	0.1591	0.2706	0.2272	0.1504	0.1214	0.0741	0.0746
-4	0.1691	0.2817	0.2506	0.1431	0.1144	0.0589	0.0701
-3	0.1865	0.2909	0.2650	0.1362	0.1083	0.0433	0.0665
-2	0.2008	0.2994	0.2751	0.1302	0.1016	0.0275	0.0613
-1	0.2179	0.3165	0.2830	0.1229	0.0929	0.0126	0.0558
0	0.2322	0.3340	0.2888	0.1149	0.0842	0	0.0532
1	0.2500	0.3532	0.3011	0.1065	0.0739	0.0125	0.0565
2	0.2659	0.3745	0.3215	0.1109	0.0656	0.0234	0.0672
3	0.2781	0.3913	0.3436	0.1294	0.0595	0.0358	0.0806
4	0.2865	0.4035	0.3685	0.1425	0.0682	0.0493	0.0936
5	0.2958	0.4239	0.3941	0.1543	0.0830	0.0702	0.1064
6	0.3026	0.4436	0.4165	0.1685	0.0960	0.0914	0.1197
7	0.3123	0.4683	0.4332	0.1832	0.1097	0.1162	0.1317
8	0.3242	0.4903	0.4530	0.1935	0.1215	0.1386	0.1461
9	0.3367	0.5149	0.4768	0.2032	0.1344	0.1629	0.1609
10	0.3509	0.5403	0.4994	0.2134	0.1518	0.1804	0.1752
11	0.3611	0.5570	0.5212	0.2264	0.1676	0.2048	0.1911
12	0.3827	0.5744	0.5400	0.2386	0.1841	0.2240	0.2054
13	0.3967	0.5990	0.5588	0.2508	0.2017	0.2406	0.2186
14	0.4230	0.6289	0.5770	0.2640	0.2217	0.2628	0.2309
15	0.4367	0.6581	0.5919	0.2764	0.2405	0.2823	0.2432
16	0.4614	0.6860	0.6073	0.2859	0.2607	0.3071	0.2574
17	0.4773	0.7179	0.6287	0.3000	0.2797	0.3356	0.2693
18	0.5112	0.7404	0.6420	0.3116	0.2984	0.3595	0.2818
19	0.5279	0.7564	0.6552	0.3311	0.3162	0.3765	0.2957
20	0.5827	0.8175	0.7158	0.3668	0.3691	0.4347	0.3348

Tab. VII: Imagen de referencia G.

escala/mariposa	A	B	C	D	E	F	G
-20	0.1262	0.0468	0.0963	0.2875	0.3238	0.3326	0.2720
-19	0.1129	0.0416	0.0829	0.2759	0.3093	0.3159	0.2595
-18	0.0970	0.0354	0.0725	0.2656	0.2923	0.2967	0.2456
-17	0.0829	0.0265	0.0627	0.2548	0.2745	0.2803	0.2327
-16	0.0670	0.0344	0.0518	0.2449	0.2574	0.2612	0.2199
-15	0.0507	0.0487	0.0412	0.2338	0.2406	0.2438	0.2063
-14	0.0414	0.0611	0.0320	0.2235	0.2215	0.2283	0.1930
-13	0.0403	0.0731	0.0290	0.2132	0.2057	0.2091	0.1797
-12	0.0483	0.0918	0.0386	0.2021	0.1894	0.1933	0.1647
-11	0.0579	0.1124	0.0538	0.1922	0.1738	0.1789	0.1506
-10	0.0661	0.1298	0.0699	0.1829	0.1596	0.1647	0.1362
-9	0.0736	0.1475	0.0875	0.1712	0.1432	0.1505	0.1223
-8	0.0844	0.1631	0.1070	0.1607	0.1278	0.1387	0.1090
-7	0.0935	0.1767	0.1274	0.1511	0.1203	0.1246	0.0950
-6	0.1010	0.1898	0.1464	0.1430	0.1165	0.1129	0.0821
-5	0.1126	0.2016	0.1634	0.1372	0.1117	0.1018	0.0696
-4	0.1253	0.2113	0.1840	0.1308	0.1055	0.0884	0.0535
-3	0.1383	0.2194	0.1966	0.1247	0.1002	0.0746	0.0404
-2	0.1536	0.2269	0.2056	0.1195	0.0943	0.0608	0.0254
-1	0.1677	0.2420	0.2125	0.1131	0.0866	0.0477	0.0122
0	0.1812	0.2574	0.2176	0.1060	0.0789	0.0468	0
1	0.1938	0.2743	0.2284	0.0986	0.0699	0.0485	0.0131
2	0.2013	0.2931	0.2464	0.0921	0.0626	0.0497	0.0242
3	0.2082	0.3078	0.2658	0.0860	0.0668	0.0519	0.0377
4	0.2155	0.3186	0.2878	0.0889	0.0746	0.0585	0.0498
5	0.2238	0.3365	0.3102	0.0992	0.0806	0.0634	0.0615
6	0.2298	0.3538	0.3300	0.1118	0.0893	0.0701	0.0730
7	0.2383	0.3756	0.3447	0.1247	0.0971	0.0766	0.0815
8	0.2488	0.3949	0.3621	0.1337	0.1050	0.0854	0.0920
9	0.2597	0.4166	0.3830	0.1423	0.1104	0.1068	0.1050
10	0.2723	0.4389	0.4029	0.1512	0.1165	0.1222	0.1176
11	0.2812	0.4536	0.4222	0.1626	0.1201	0.1436	0.1316
12	0.3002	0.4690	0.4387	0.1734	0.1255	0.1606	0.1442
13	0.3125	0.4906	0.4552	0.1842	0.1409	0.1752	0.1558
14	0.3357	0.5170	0.4713	0.1958	0.1585	0.1947	0.1666
15	0.3478	0.5426	0.4844	0.2067	0.1751	0.2119	0.1775
16	0.3695	0.5672	0.4979	0.2150	0.1929	0.2337	0.1900
17	0.3835	0.5953	0.5167	0.2274	0.2095	0.2588	0.2005
18	0.4133	0.6150	0.5285	0.2377	0.2260	0.2799	0.2114
19	0.4280	0.6291	0.5401	0.2548	0.2417	0.2948	0.2237
20	0.4762	0.6829	0.5934	0.2862	0.2883	0.3460	0.2581

4. CONCLUSIONES

El descriptor invariante a posición y escala para imágenes digitales, estudiado en esta tesis cumplió con los objetivos planteados. El sistema fue probado exitosamente en la identificación de patrones de diversas imágenes. Debido a los resultados de los experimentos realizados se pudo decir que el sistema funciona eficientemente para el reconocimiento de patrones sin importar la posición y la escala de las imágenes, también se puede decir que la métrica apropiada para la comparación en el descriptor AFM es la distancia del máximo d_m .

La eficacia del descriptor fue probado con imágenes de cuadrados geométricos en blanco y negro y con imágenes en escalas de grises de mariposas, los resultados fueron programados y obtenidos mediante el lenguaje programación Matlab, obteniendo desventajas por la velocidad de procesamiento que tarda en llevar a cabo los cálculos del mapeo polar. Al usar el descriptor AFM es muy importante que la calidad de la imagen sea buena. Se tiene bastante flexibilidad, pero entre menor sea la resolución o si se tiene mucho ruido, menos fiables serán los resultados.

Bibliografía

- [1] GONZÁLEZ R.C. y WOODS R.E., *Digital Image Processing*, 1ra Ed, Prentice Hall, New York, NY, 2002.
- [2] GONZÁLEZ R.C. , WOODS R.E., EDDINS S.L., *Digital Image Processing Using MATLAB*, 2da Ed, Tata McGraw Hill Education Private Limited, New York, NY, 2010.
- [3] HSU, H., *Análisis de Fourier*, Prentice Hall, New York, 1970.
- [4] FELDMAN, J., *Discrete-times Fourier Series and Fourier transforms*, Marzo, 2007.
- [5] DERRODE, S. y GHORBEL, F., *Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description*, Computer vision and image understanding, vol. 83, no. 1, pp. 57-78, 2010.
- [6] ANÓNIMO, *Transformación log-polar en FPGAS Utilizando TAPEC*.
- [7] DR. BORIS ESCALANTE RAMÍREZ, *Apuntes*, Agosto, 2006.
- [8] ANÓNIMO, contenidos.educarex.es/mci/2002/24/menu-principal.html,
- [9] VILLEGAS-SANTAMARÍA, M., *Determinación de la posición de objetos en imágenes usando la transformada de Fourier-Mellin analítica*, Tesis de licenciatura, Universidad Politécnica de Valencia.
- [10] CORONEL-BELTRÁN, A., *Reconocimiento de patrones no lineal invariante a posición, rotación, escala y ruido de imágenes digitales*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Baja California, 2010.