UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEMA
UNIDAD DIDÁCTICA: SUCESIONES. SERIES

PRESENTADO POR:

Bra. ***María Auxiliadora Corea***
Br. ***Oscar Danilo Miranda Sánchez***
Br. ***Marcelino José Rodríguez Chavarría***
Bra. ***Griselda del Socorro Rojas***

PARA OPTAR AL TITULO DE:

I. LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MENCIÓN MATEMÁTI CA EDUCATIVA Y COMPUTACIÓN

TUTOR:

Lic. Freddy González

LEÓN, SEPTIEMBRE, 2009

DEDICATORIA

Dedicamos nuestros triunfos y logros:

A Dios

Creador de todas las cosas y nuestro proctector; que nos iluminó en nuestro camino hasta alcanzar nuestra meta.

A Nuestros Padres:

Eslabones y precursores de estímulos con su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTO

Al transcurrir cinco años de nuestra vida profesional, con el cual nos hemos interesado en aprender y conocer sobre una disciplina científica – humanística como es la Matemática Educativa y Computación, para lograrlo tuvimos el apoyo de muchas personas que hoy agradecemos:

- *Al claustro de profesores de la Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades que nos capacitaron e instruyeron en los conocimientos científicos y pedagógicos.*

- *A los Licenciados Ronald López Flores y Héctor Flores Guido, que con su valioso aporte contribuyeron a que culmináramos nuestro trabajo monográfico.*

- *A nuestros/as compañeros/as de clase que con el intercambio de experiencias y solidaridad nos sirvieron para mejorar días a días nuestros conocimientos.*

I N D I C E

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo que proponemos, lo pondremos a disposición de los/as profesores/as de Educación Secundaria ya que constituye un recurso de apoyo, en la iniciación del enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias.

Este nuevo enfoque pedagógico generado en esta época de globalización, y de rápidos cambios en las ciencias, la tecnología y las comunicaciones, es donde la educación nicaragüense necesita de grandes transformaciones en nuestro sistema educativo. Se trata de una guía para que el profesor aproveche al máximo sus encuentros con sus estudiantes y le garantice el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje. Esto proveerá al profesor de la suficiente capacidad de relacionarse con los/as estudiantes y la disponibilidad que este muestre para asumir dicha responsabilidad.

Desde el punto de vista pedagógico e innovador, se ha venido trabajando con una visión congruente a la necesidad de mejorar la calidad educativa, aplicando nuevos enfoques que le faciliten al profesor hacer cambios significativos que le permitan de esta manera el desarrollo de capacidades, habilidades, actitudes y valores permitiendo formar estudiantes competentes para enfrentar este mundo moderno y cambiante.

Finalmente, hay que decir que aunque este documento sea un inicio para el fortalecimiento de la enseñanza de algunos temas contemplados en las matemáticas de la Educación Secundaria, sirva además de guía; también acompañar a los/as estudiantes en sus proyectos finales, convirtiendo estos en herramientas metodológicas interesantes para orientar la realización de proyectos sociales en otros escenarios de la vida social, bien sea institucional o informal.

Así desde este punto de vista, el proceso metodológico de este documento se apoya en el marco de la Enseñanza por Competencias, particularmente en lo relacionado con el proceso para desarrollar unidades didácticas en el aula, lo más importante y lo más definitivo en el acto educativo, tanto para el profesor como para el estudiante. Por eso, definir qué quiero que mis estudiantes comprendan, qué puedo hacer para que comprendan y cómo sé que han comprendido, es fundamental.

El tratamiento que se le ha venido dando a Sucesiones y Series en Educación Secundaria, tradicionalmente ha sido conductista, el cual no le permite al estudiante desarrollar conocimientos aplicables para la vida.

De igual forma la falta de profesionalización docente, debido al alto índice de empirismo, la falta de actualización en los diferentes cambios pedagógicos y metodológicos ha incidido en la calidad de los aprendizajes.

Como un aporte a este cambio, el presente trabajo pretende mejorar la calidad del Proceso Enseñanza – Aprendizaje de Sucesiones y Series, mediante la aplicación del enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias, lo que permitirá a los/as estudiantes tener una visión de futuro acerca del estudio de las matemáticas orientando los aprendizajes hacia la vida y el trabajo donde sea capaz de responder con agilidad y relevancia a las necesidades que demanda nuestro país.

En cuanto a la forma de organizar las competencias y contenidos en nuestra unidad didáctica, debemos considerar que es flexible, el docente asignará el tiempo para su desarrollo de acuerdo a la importancia y características de los/as estudiantes. En general, las competencias educativas y los contenidos deben ser analizados, interpretados, comprendidos y aplicados en el marco de las realidades locales de los centros y comunidades educativas en donde se llegue a implementar esta unidad didáctica.

II. ANTECEDENTES

La preocupación por vincular la escuela con la vida se remonta desde hace mucho tiempo. Es una propuesta que se ha repetido en todos los intentos de reforma educativa, a lo largo de la historia muchos pedagogos tuvieron también esa preocupación y muchos coinciden que la educación sirva para el desarrollo de la persona mediante el aprendizaje para la vida.

A lo largo del tiempo los/as profesores/as buscan maneras de ayudar a sus estudiantes a entender mejor. Tratan de explicar claramente. Buscan oportunidades para hacer aclaraciones. Con frecuencia ponen trabajos sin parámetros fijos tales como la planeación de un experimento o la crítica de comerciales en la televisión, tareas que requieren y que refuerzan la comprensión.

Aunque dichos factores son importantes, igualmente se encuentra una paradoja: a pesar de sus esfuerzos es que, los/as profesores/as aún se encuentran insatisfechos con la comprensión de sus estudiantes.

Es evidente que la comprensión merece una atención especial. En el transcurso del tiempo muchos profesores han creado sus planes de trabajo con la ayuda de un marco sencillo, desarrollado como parte de una colaboración que se encuentra en el curso o entre profesores del área.

Es en este momento que la Enseñanza por Competencias enriquece la comprensión por sobre otras metas educativas, ya que la enseñanza en secundaria que se desarrolla en la actualidad, en nuestros estudiantes se observa un mezcla extraña; unos esbozos de teoría de conocimiento, que vienen a constituir unas cuantas incógnitas cuya relación con las matemáticas consiste en que los/as estudiantes se pueden expresar con unas palabras pasmosas que además tienen su traducción secreta en símbolos misteriosos; una apropiación de palabras asombrosas, que se les dice que son de naturalezas muy importantes, aunque no se les explique muy bien qué se puede hacer con ellas; y, que relación tiene con la vida real.

Resumiendo los defectos que, a nuestro parecer, aquejan más gravemente la enseñanza de Sucesiones y Series, consiste en saber deducir fórmulas, resolver ejercicios y problemas que pueden resultar interesantes.

Es en ese sentido que los problemas que se derivan de la enseñanza – aprendizaje de Sucesiones y Series constituyen un ejemplo del modelo conductista en que los/as estudiantes son únicamente receptores de los conocimientos que transmite el profesor de matemáticas.

Es por eso que pretendemos desarrollar el tema de Sucesiones y Series bajo el modelo pedagógico: "Enseñanza por Competencias". Es así en cuanto a las estrategias, el enfoque trata de desarrollar un modelo de enseñanza que permitiera a los/as profesores/as responder: ***¿Cómo fomentar la comprensión de los/as estudiantes?***

Con la aplicación de este modelo pedagógico pretendemos que el aprendizaje de los conocimientos por parte de los/as estudiantes sea significativo, el cual le ayudará a lo largo de toda la vida, con el fin de ser un ciudadano participativo, activo y colaborativo para aprovechar mejor las oportunidades que le presenta la sociedad en sus diferentes momentos.

III. JUSTIFICACIÓN

La educación de las nuevas generaciones es una labor compleja y sutil de ingeniería humana; se trata, nada menos, de desarrollar y formar el carácter, la inteligencia, la personalidad de las nuevas generaciones, de modo que esta formación los habilite para enfrentar los retos de un mundo complejo, dinámico, informatizado y globalizado.

Los/as estudiantes de Educación Secundaria para afrontar su futuro con éxito deberán conocer una serie de competencias que le permitan desenvolverse en un mundo complejo y cambiante.

Entre las competencias que deben desarrollar los/as estudiantes están:

- Manejo de la tecnología
- Dominio de otros idiomas
- Varias preparaciones técnicas, entre otras.

Existe un mundo complejo, el cual podríamos definirlo, como un mundo exigente, lleno de retos y le pide al estudiante una preparación cada vez más amplia que lo mantenga como un ente activo con las informaciones para dar respuestas a las interrogantes que se le presenten, es este cúmulo de conocimiento que le servirá como brújula para navegar en este mundo complejo.

Una educación de calidad, es aquella que con un adecuado proceso arroja los resultados requeridos, tomando en cuenta las diferencias socio – económica, familiares, individuales, intelectuales y culturales de los/as estudiantes.

El profesor de Matemáticas debe favorecer el desarrollo de la inteligencia de sus estudiantes empleando estrategias que favorezcan el proceso enseñanza – aprendizaje, adaptando el tema en mención al medio en que se desenvuelve, incentivando el espíritu investigativo de los/as estudiantes, manejando los contenidos relacionados a Sucesiones y Series de una manera creativa adoptando un rol de tutoría que le dé oportunidad de trabajo a los/as estudiantes.

El profesor de Matemáticas debe favorecer el aprender a conocer estimulando el espíritu investigativo de cada estudiante, poniéndolo en contacto directo con el medio que lo rodea, a través de la manipulación de objetos y materiales, permitiéndole construir sus propios conocimientos.

Aprender a hacer, este pilar el profesor lo puede favorecer incentivando a que utilicen los saberes y conocimiento de cada estudiante de manera práctica, desarrollando secciones de clases en los laboratorios.

Para favorecer el aprendizaje a vivir junto, el profesor debe promover los trabajos en equipo fuera y dentro del aula, desarrollando así los valores de compañerismo, la cooperación, solidaridad, entre otros.

El aprender a ser se puede favorecer:

- Realizando actividades que le permitan a cada estudiante tener una autoestima equilibrada.
- Promoviendo el respeto a la diversidad, incentivando el amor propio y los trabajos individuales.

En la actualidad existe una gran preocupación por parte nuestra y es por la calidad de los aprendizajes y por eso, es que hemos diseñado una Unidad Didáctica: “Sucesiones y Series” sustentada en el enfoque pedagógico: “Enseñanza por Competencias” con el propósito de contribuir a la mejora del proceso Enseñanza – Aprendizaje del tema en mención.

Para mejorar la calidad del conocimiento los/as estudiantes deben poseer un aprendizaje significativo, el cual le ayudará a lo largo de toda la vida, con el fin de ser un ciudadano participativo, activo y colaborativo para aprovechar mejor las oportunidades que le presenta la sociedad en sus diferentes momentos.

Es por eso que este trabajo monográfico tiene como fin el de proponer estrategias de enseñanza – aprendizaje de Sucesiones y Series bajo el enfoque pedagógico "Enseñanza por Competencias", que sean útiles tanto para el docente al momento de impartir su clase; haciéndola más activa – participativa, así como para los/as estudiantes, la cual le permita mejorar su auto – estudio, retención y comprensión de los contenidos de la misma. Siendo además un material de apoyo para los/as profesores/as y personas interesadas, que quieran adaptarse a un nuevo método de estudio, y que a la vez sirva como un proceso de retroalimentación. Además, hemos tomado en cuenta los tres tipos de contenidos:

1. Conceptuales: Incluyen datos, hechos y principios.
2. Procedimentales: Incluyen una secuencia de pasos o acciones con un orden para alcanzar un propósito o meta; es decir, para hacer algo.
3. Actitudinales: Incluyen actitudes, valores y normas, con el propósito de fortalecer la función moral o ética de la educación. Pueden incluirse tres tipos de actitudes: actitudes hacia los contenidos conceptuales, actitudes y valores comunes a un conjunto de áreas o componentes y un conjunto de actitudes específicamente morales, ambientales que tienen carácter más transversal que es específico de un área.

Considerando estos tres tipos de contenidos en nuestra unidad didáctica nos garantiza el logro de las competencias propuestas.

IV. OBJETIVOS

IV.1. Objetivo general

Diseñar una Unidad Didáctica que contribuya a la mejora del proceso Enseñanza – Aprendizaje de Sucesiones y Series que se imparte en el Cuarto Año de Educación Secundaria, proponiendo nuevas alternativas didácticas bajo el enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias.

IV.2. Objetivos específicos

1. Proponer una Metodología Activa – Participativa que contribuya a que el aprendizaje de Sucesiones y Series sea significativo y funcional.

2. Proporcionar a los/as profesores/as estrategias de enseñanza – aprendizaje que permita a los/as estudiantes comprender los conocimientos relativos a Sucesiones y Series.

3. Propiciar en los/as estudiantes un ambiente de trabajo en concordancia y armonía con la naturaleza, en mutuo respeto con sus compañeros/as y responsabilidad en el desarrollo de las actividades propuestas.

4. Desarrollar hábitos, habilidades y destrezas en las deducciones de las fórmulas relativas a sucesiones y series.

5. Generar habilidad y destreza en la solución de ejercicios de aplicación.

6. Implementar un Sistema de Evaluación que tome en cuenta los contenidos estudiados, las actitudes de los/as estudiantes y las actividades desarrolladas por los/as profesores/as.

7. Fomentar hábitos de respecto, honestidad, solidaridad en la actividad de aprendizaje tanto individual como grupal.

V. MARCO TEÓRICO

V.1. Pilares del conocimiento

Los pilares del cocimiento son: Aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser.

Aprender a conocer

La disposición y desplazamiento que en el ejercicio de investigación se hace necesario ponerlo en práctica.

El profesor de undécimo grado debe favorecer el aprender a conocer estimulando el espíritu investigativo de cada estudiante, poniéndolo en contacto directo con el medio que lo rodea, a través de la manipulación de objetos y materiales, permitiéndole construir sus propios conocimientos.

Aprender hacer

Es apropiarse al contexto en una sociedad determinada.

En este pilar, el profesor lo puede favorecer incentivando a que utilicen los saberes y conocimiento de cada estudiante de manera práctica, desarrollando secciones de clases en los laboratorios.

Aprender a vivir juntos

Como medio de vida en grupo los seres humanos, lo que abarca todas las condiciones materiales y espirituales en el ámbito natural y social, para la búsqueda de respuesta en la vida y en la sobre vivencia, orientada estratégicamente a un desarrollo armonioso e integral de las potencialidades del sujeto.

Para favorecer el aprendizaje a vivir junto, el profesor debe promover los trabajos en equipo fuera y dentro del aula, desarrollando así los valores de compañerismo, la cooperación, solidaridad, entre otros.

Aprender a ser

Capacidad para actuar con autonomía, reproduciéndose como un protagonista de la vida social, adoptando la forma para el tejido de relación que permita una vinculación entre los sujetos del sistema educativo empleando metodología que lleven a valorar su propia identidad.

El aprender a ser se puede favorecer:

- Realizando actividades que le permitan a cada estudiante tener una autoestima equilibrada.
- Promoviendo el respeto a la diversidad, incentivando el amor propio y los trabajos individuales.

V.2. Las Competencias. Nociones y Fundamentos

Hablar de competencia implica potencializar a la capacidad del sujeto para construir conocimiento y llevarlo a la práctica de manera autónoma e innovadora, estas son vistas como campo de atracción a grandes rasgos que priorizan el saber hacer y el ser.

La competencia es un saber hacer frente a una tarea específica, la cual se hace evidente cuando el sujeto entra en contacto con ella, esta competencia supone conocimientos, saberes y habilidades que surgen en la interacción que establecen entre el individuo y la tarea y que no siempre están de antemano.

Podemos decir que la competencia se refiere a un saber “saber hacer en contexto”, por eso la competencia se demuestra a través de los desempeño de una persona, los cuales son observables y medibles y por lo tanto evaluables.

Las competencias se visualizan, actualizan y desarrollan a través de desempeños o realizaciones en los distintos campos de la acción humana.

Esta se refiere a la capacidad del individuo para desenvolverse en muchos ámbitos de la vida personal, intelectual, social, ciudadana y laboral.

Vale la pena resaltar que al hablar de competencia nos hallamos frente a un fenómeno tanto individual como social y cultural, pues es la sociedad la que da sentido y legitima cuales son las competencias esperadas y de mayor reconocimiento.

(a) Es personal, es decir está presente en todos los seres humanos. Esta condición se observa inclusive en nuestro lenguaje cotidiano, cuando decimos que aquella persona es muy competente, lo mismo ocurre con respecto a los objetivos, que aunque son muy útiles no son competentes.

(b) La competencia siempre está requerida a un ámbito o un texto en el cual se materializa. En la medida en que el ámbito de referencia es más delimitado, es más fácil caracterizarlo, ejemplo, es más sencillo explicitar que sería un conductor competente que un ciudadano competente.

(c) La competencia representa potenciales que siempre son desarrolladas en contextos de relaciones disciplinares significativas.

(d) Las competencias se realizan a través de las habilidades. Unas competencias pueden contener varias habilidades que funcionan como anclas para referirlas a los ámbitos en los cuales las competencias se realizan.

(e) Están asociadas a una movilización de saberes. No son un conocimiento acumulado, sino la vinculación de una acción, la capacidad de acudir a lo que se sabe para realizar lo que se desea.

(f) Son patrones de articulación del conocimiento al servicio de la inteligencia. Pueden ser asociadas a los esquemas de acción, desde lo más sencillo hasta las formas más elaboradas de movilización del conocimiento.

(g) Representar las potencialidades para la realización de intenciones referidas: articular los elementos del post-conocimiento, inteligencia, así como el conocimiento – táctico – conocimiento implícito[1].

V.2.1. Elementos de una Competencia

Conocimiento declarativo: cuando el sujeto conoce el objetivo sobre el que actuar, por tanto sobre el qué y por qué lo hace.

Capacidad de ejecución, conociendo el conjunto de normas y procesos, destrezas intelectuales y psicomotoras. Actitud o disposición, haciendo uso del conocimiento declarativo con la capacidad de ejecución en forma concreta[2].

V.2.2. Principales características de la competencia

- Son aprendizaje mayores o comprensivos, resultado de la totalidad de experiencias educativas formales e informales.
- Son habilidades o capacidades generales que la persona desarrolla gradual y acumulativamente a lo largo del proceso educativo.
- Son características generales que la persona manifiesta en multiplicidad de situaciones y escenarios como parte del conocimiento.
- Son características que una comunidad estima como cualidad valiosa del ser humano.
- Son capacidades generales que se desarrollan como parte del proceso de madurez.
- Son un poder o una capacidad para llevar a cabo multiplicidad de tareas en una forma que es considerada eficiente o apropiada.

Las competencias se manifiestan en las distintas áreas del saber, ésta no se observan de manera generalizada, es decir, se miden partiendo de la realización de un determinado oficio.

---

1 Jordi López Camps. Como Aprender en la Sociedad. Febrero 2004. Pág. 40

2 Ángel Villarini. El currículo Orientado del Desarrollo Humano Integral. Febrero 2004. Pág. 47

Para saber que tan competente es una persona debe sacar a la luz sus capacidades, a través de los trabajos realizados ya que son los demás quienes evalúan el nivel de competencia de cada persona.

V.2.3. Clases de Competencias

Cognitivas y las actitudinales son: Competencias del aprendizaje y sirven para valorar la solución de problemas ante el aprendizaje rutinario, exhibiendo capacidad en todos los contextos y momentos.

Descontinuando las normas y estructura de razonamiento puramente burocráticas, aprovechando las situaciones aparentemente caóticas como oportunidades para estimular la creatividad y la flexibilidad. Admitiendo expresamente los errores y aprovechándolo para el análisis y búsqueda de soluciones.

Metodológicas: Trasciende el área ocupacional específica y nos habla de desenvolvimiento activo en contextos más amplios en vista a resolver problemas complejos.

Humanas: Se refiere a rasgos de personalidad que nuestros alumnos constituyen a partir de una actitud preactiva en procesos de aprendizajes que prosiguen a lo largo de toda la vida. Describe dimensiones de la personalidad.

Sociales: Siempre se orientan hacia la transversalidad porque intrínsecamente no están restringidas a sólo un contexto de desempeño específico[3].

---

[3] Grondona de Campero, Martha. Formación y Evaluación de Competencia. Febrero 2004. Pág. 50

V.3. Importancia de la Enseñanza por Competencia

La sociedad requiere de una enseñanza que desarrolle capacidades de reflexión – acción. Los sujetos deben ser competentes. La escuela ha de aportar a cada estudiante un conjunto de facilidades para aprender a desenvolverse y tener éxito en la vida.

La educación tiene la responsabilidad de formar personas con capacidad para:

- Aprovechar sus potencialidades y las del medio social y natural.
- Estudiar y comprender la realidad.
- Enfrentar con éxitos las dificultades, los problemas y los desafíos.

La enseñanza basada en competencia constituye un intento serio y profesionalizante por cambiar los énfasis, por llevar la educación a ser significativa para las personas, a reducir sus costos, a encaminarla a que parta de las necesidades de la vida cotidiana, a liberarla de un conjunto de supuestas prácticas que limiten su desarrollo.

La enseñanza educativa se transforma simultáneamente para poder dar respuesta a las normas de competencias que van apareciendo. El modelo educativo predominante, basado en una enseñanza determinada por cursos organizados sobre la base de programas pre – establecidos, se está siendo inoperante ante la demanda que surge a partir de las nuevas competencias. Se tendrá que buscar como evolucionar hacia una aproximación menos academista y orientado más al análisis de las necesidades individuales y competencias interactivas: se refiere a la capacidad de los sujetos de participar como miembros de grupos de referencia próximos, tales como la familia y los grupos de iguales.

V.4. Competencias docentes. Profesores competentes

Para el desarrollo de una docencia exitosa el profesor deberá usar estrategias de conocimientos variados, teniendo en cuenta el área que desempeña, tratando de enriquecer y actualizarse en cuanto a los requisitos argumentativos del proceso enseñanza – aprendizaje, lo cual así podrá tener la facilidad de ser un docente competente.

Es una persona que es capaz de enfrentar los problemas educativos que se presenten en la sociedad educativa y que pueda socializarse con los educandos para que se informen adecuadamente.

Un Profesor es competente cuando se actualiza y se siente capacitado para darle curso a las actividades que se les presenten, debe ser flexible, para así enriquecer el saber de las nuevas metodologías educativas de la enseñanza-aprendizaje.

Fracaso docente: un profesor fracasa cuando no llega a alcanzar los requisitos necesarios para poder enfrentar problemas educativos en la sociedad.

Un buen profesor debe tener conocimiento y buen dominio de la materia que imparte, debe ser hábil, dinámico, investigativo, creativo y debe actualizarse tecnológicamente.

V.4.1. Características del buen docente

(a) Debe utilizar diversos materiales y métodos para hacer las clases más interesante.

(b) Debe prepararse las clases.

(c) Debe Motivar a los estudiantes.

(d) Debe interesarse por los estudiantes, preguntarle sobre lo que hacen e intentar ayudarle.

(e) Debe mantener la disciplina y el orden.

(f) Debe gestionar las clases considerando la diversidad de los/as estudiantes.

(g) Debe realizar una buena tutoría y dar ejemplo.

(h) Debe investigar en el aula aprender con otros estudiantes.

(i) Debe actualizar su conocimiento sobre la asignatura.

(j) Debe hacer trabajar a los estudiantes y poner niveles altos.

(k) Debe Ayudar a los estudiantes hacer independientes y organizar su aprendizaje.

(l) Debe reconocer cuando comete un error o se equivoca en algo.

(m) Debe ser amistoso con los colegas y ayudarles.

(n) Debe colaborar con las actividades de la institución[4].

---

[4] John D. Wilson. Como Valorar la Calidad de la Educación. Febrero 2004.

V.4.2. Aprendizaje auténtico

Es cuando un profesor tiene la capacidad de diseñar e interpretar los objetivos necesarios y que sea una persona con experiencia educativa para interactuar y competir con los educandos para un mejor aprendizaje.

El pseudo aprendizaje es cuando una persona no retiene una información positiva; sino que trata de memorizarla, la cual no podrá enfrentarse en la sociedad educativa.

La construcción de éste tipo de aprendizaje, requiere del profesor la creación de situaciones adecuadas que despierten en el pensamiento del estudiante, también demanda que el profesor formule las estrategias que cumplan con las condiciones requeridas por el mismo.

Este promueve el desarrollo de competencias en el estudiante, formulando un plan estratégico que promueva al desarrollo de competencias significativas, activas, reflexivas, colaborativas y emperadoras.

La mayoría de los docentes de educación secundaria en nuestro país no han alcanzado un crecimiento debido a los siguientes factores que limitan el desarrollo del pensamiento:

- Muchos profesores poseen el nivel académico necesario.
- La falta de actualización profesional.
- Poco dominio en cuanto a los requerimientos del nuevo currículo.
- Un gran porcentaje de los docentes carecen de una buena vocación profesional para ejercer su labor.
- La falta de incentivo al maestro.

V.5. ¿Qué son los indicadores de logros?

Son los indicios o señales que nos permiten observar de manera evidente y especifica los procesos y resultados del aprendizaje a través de conductas observables. Es un indicador que tiene como función hacer evidente qué es lo que aprende el alumno y cómo demuestra.

Los indicadores de logro proporcionan elementos de prueba verificables, para valorar los avances hacia el logro de las competencias, o de los objetivos de un proyecto educativo, o de una unidad, o de un tema o pregunta generadora, etc.

El enunciado de los indicadores de logro debe permitir percibir o demostrar los cambios suscitados en los/as estudiantes. Por esta razón, conviene tener en cuenta que un sólo indicador rara vez puede abarcar la totalidad de los cambios propuestos en el enunciado de una competencia o de los objetivos de un proyecto, unidad o tema generador.

Por ello, es recomendable precisar y formular varios indicadores de logro, para que el estudiante pueda alcanzar la competencia.

V.6. Roles del estudiante

- Observar con curiosidad (observa el entorno real y virtual) armonizar lo conceptual y lo práctico.
- Trabajar de manera individual y colaborativa, alternar el trabajo individual con el trabajo grupal.
- Buscar causas y efectos y saber relacionarlos, investigar, elaborar y verificar hipótesis y aplicar estrategias de ensayo – error en la resolución de problemas y en la construcción de los propios aprendizajes.
- Estar motivado y perseverar, trabajar con intensidad y de manera continua. Desarrollar la autoestima, el afán de la superación y la perseverancia ante las frustraciones.
- Actuar con autonomía. Actuar con iniciativa para tomar decisiones, aceptar la incertidumbre y la ambigüedad.
- Pensar críticamente, actuar con pensamiento crítico y reflexivo y practicar la meta y la auto evaluación permanente.
- Ser creativo, estar abierto al cambio y a nuevas ideas para adaptarse al medio y buscar nuevas soluciones a los problemas, crear y diseñar materiales.

- Responsabilizarse del aprendizaje y auto dirigirlo, elaborando estrategias acordes con los propios estilos cognitivos que consideren el posible uso de diversas técnicas de estudio y materiales didácticos.
- Aceptar orientaciones del profesor, interactuando con el profesor, y atender sus indicaciones, tareas, orientaciones y ayudas.
- Utilizar diversas técnicas de aprendizaje: repetitivos (memorizar, copiar, recitar) elaborativos (relacionar la nueva información con la anterior, subrayar, resumir, esquematizar, elaborar diálogos y mapas conceptuales), explorativos (explorar, experimentar y verificar).

V.7. Evaluación de competencias

La evaluación es un medio eficaz para detectar las dificultades de aprendizaje y poder mejorarla, mediante las adecuadas estrategias de aprendizaje.

La evaluación busca mejorar los procesos y resultados haciendo uso de las actividades y metodología que permitirán obtener los objetivos propuestos. Ofrece la oportunidad de conocer las destrezas, habilidades y limitaciones del individuo, llevándolo a corregir las faltas pero además ayuda a afianzar los aciertos.

La evaluación realizada por el profesor, es importante porque le permite al profesor determinar en términos cualitativos y cuantitativos el aprovechamiento por parte de los estudiantes de los contenidos trabajados durante el proceso educativo, y además le permite medir en qué grado ha alcanzado sus objetivos y hacia donde debe orientar su trabajo docente.

La autoevaluación: Esta le permite al estudiante identificar y valorar su aprendizaje, analizando las condiciones en que éste se ha dado y definiendo las consecuencias que tal juicio tiene para su crecimiento personal.

La coevaluación: Es un procedimiento muy participativo mediante el cual un grupo establece a través de juicios bien fundados, los logros alcanzados en forma individual o grupal de cada miembro durante el proceso de aprendizaje.

Características de la evaluación:

- Integral.
- Continua.
- Sistemática.
- Participativa.
- Flexible.

Entre los principales instrumentos de evaluación están:

- Las pruebas escritas.
- Las pruebas orales.
- Las entrevistas.
- El diálogo.
- Cuestionarios.
- Discusión crítica.

Acciones para la evaluación de competencias

Interpretar:

Conlleva acciones de análisis que vinculan y confrontan los aspectos significativos que están en juego en el texto, proposición o esquema.

Argumentar:

Quiere decir, dar razón y explicación de las afirmaciones y propuesta, respetando la pertinencia y la coherencia esencialmente ligada a juegos de lenguajes determinados, y a formas de vidas especificas, la competencia argumentativa deber ser entendida como aquella acción propia del diálogo personal, de la interacción, donde se puede explicar el punto de vista y ser escuchado y valorado.

Proponer:

No es más que manifestar una idea que deberá ser aprobada o refutada por los demás.

Técnicas Para Desarrollar Competencias:

Las estrategias de aprendizaje deben estar acompañadas de las técnicas y materiales que permitan un buen desarrollo de las capacidades del educando.

V.8. ¿Qué son los Contenidos?

Los contenidos básicos son los conocimientos específicos relacionados con los diferentes campos del saber, los que constituyen un medio para lograr las competencias.

En la organización de los contenidos se han incorporado tres tipos: Conceptuales, Procedimentales y Actitudinales, tomando en cuenta la relevancia y pertinencia que estos tienen para el desarrollo de las competencias de período escolar. Los contenidos se presentan de forma gradual y articulada, en dependencia de la etapa de desarrollo evolutivo de los estudiantes y de cada nivel educativo.

(a) Contenidos Conceptuales

Incluyen datos, hechos y principios.

Los hechos incluyen datos (nombres de ríos, ciudades, capitales), otros datos o hechos forman parte de unidades informativas más amplias (límites, población, actividades productivas); los conceptos son conjuntos de objetos, sucesos o símbolos que tienen características comunes (mamíferos, número primo); los principios son enunciados que explican cómo los cambios que se dan en un objeto, un suceso, una situación o un símbolo suelen describir relaciones de causa y efecto (a menudo se usan las palabras regla y ley como sinónimo de principio como: la ley de gravedad en Física, las reglas de concordancia en Gramática).

(b) Contenidos Procedimentales

Incluyen una secuencia de pasos o acciones con un orden para alcanzar un propósito o meta es decir: para hacer algo.

Se trata de una destreza que se espera aprenda a construir el estudiante. Incluyen desde destrezas cognitivas hasta la utilización de técnicas e instrumentos. Implica no sólo hacer, sino también saber para qué se hace, de forma que puedan aplicarse a otras situaciones (recopilación de información, elaboración de resúmenes, esquemas o mapas conceptuales, construcción de planos, resolución de problemas).

(c) Contenidos Actitudinales

Incluyen actitudes; valores y normas, con el propósito de fortalecer la función moral o ética de la educación. Pueden incluirse tres tipos de actitudes: actitudes hacia los contenidos conceptuales (interés o curiosidad por conocer el medio ambiente, actitud indagadora ante la realidad, actitud crítica ante los hechos sociales); actitudes y valores comunes a un conjunto de áreas o disciplinas, los que se ven como guías para el aprendizaje (cuidado en el uso de materiales, orden y aseo en el trabajo, gusto por el trabajo compartido) y un conjunto de actitudes específicamente morales, ambientales que tienen carácter más transversal que específico de un área (sensibilidad y respeto por el medio ambiente, respeto a la opinión ajena).

V.9. Competencias matemáticas

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forman parte de la competencia matemática los siguientes aspectos:

- La habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida.
- El conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana.
- La puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de diversas informaciones.
- La disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido cuando los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por ello, su desarrollo en la educación secundaria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática implica utilizar en los ámbitos personal y social los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

VI. UNIDAD DIDÁCTICA: SUCESIONES. SERIES

VI.1. COMPETENCIAS DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS (UNDECIMO GRADO)

GRADO	COMPONENTE	COMPETENCIAS	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS
UNDECIMO	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.	1. Resuelve problemas aritméticos y situaciones relacionadas con las ciencias, utilizando sucesiones aritméticas y geométricas. 2. Resuelve ejercicios y problemas utilizando series aritméticas, geométricas y geométricas infinitas.	1. Explica el concepto de sucesiones numéricas. 2. Define sucesiones numéricas mediante fórmulas de recurrencia. 3. Explica la definición de sucesiones o progresiones aritméticas. 4. Determina en progresiones aritméticas: su diferencia, primer término y n-ésimo término.	1. Definición. Notación. 2. Fórmulas de recurrencia. 3. Sucesiones aritméticas. 4. Sucesiones geométricas. 5. Series. 5.1. Series aritméticas. 5.2. Series geométricas. 5.3. Series geométricas infinitas.

GRADO	COMPONENTE	COMPETENCIAS	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS
UNDECIMO	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.		5. Aplica las progresiones aritméticas en la formulación y resolución de ejercicios y problemas vinculados con otras ciencias y la vida real. 6. Explica la definición de progresiones geométricas. 7. Determina en progresiones geométricas: su razón, primer término y n-ésimo término. 8. Diferencia sucesiones aritméticas de las geométricas. 9. Utiliza sucesiones geométricas en el planteo y resolución de ejercicios y problemas vinculados con otras ciencias y la vida real.	

GRADO	COMPONENTE	COMPETENCIAS	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS
UNDECIMO	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.		10. Deduce y Aplica la fórmula de la n-ésima suma parcial de una sucesión aritméticas en la resolución de ejercicios y problemas. 11. Deduce y Aplica la fórmula de la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica. 12. Utiliza series geométricas infinitas en la resolución de ejercicios y problemas. 13. Expresa un número decimal periódico en términos de un número racional mediante series geométricas infinitas.	

GRADO	COMPONENTE	COMPETENCIAS	INDICADORES DE LOGRO	CONTENIDOS
UNDÉCIMO	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.		14. Demuestra en sus interacciones individuales y grupales, aprecio hacia el valor formativo, instrumental y práctico de las matemáticas.	

VI.2.MALLA DE COMPETENCIAS DE GRADO

Educación Secundaria. Área: Matemática

Séptimo grado	Octavo grado	Noveno grado	Décimo grado	Undécimo grado
Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos. • Plantea y resuelve problemas, aplicando la regla de tres simple directa e inversa y el cálculo porcentual.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Crea y resuelve problemas, aplicando la regla de tres compuesta directa e inversa y el interés simple.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Aplica los procedimientos de factorización, identificando las características de cada caso.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Grafica y analiza las funciones trigonométricas y sus inversas diferenciando sus características y propiedades.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Resuelve problemas vinculados con las desigualdades lineales con valores absolutos.
• Analiza y grafica problemas, vinculados con relaciones, funciones, ecuaciones e inecuaciones lineales de **N** a **N** y **Z** a **Z**.	• Plantea y resuelve problemas de su entorno vinculados al área y perímetro de polígonos regulares e irregulares y del círculo.	• Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico en situaciones de la vida diaria.	• Aplica los conceptos de funciones trigonométricas en la demostración de identidades, solución de ecuaciones y el planteo y resolución de problemas de su entorno.	• Aplica funciones exponenciales y logarítmicas en la solución de ecuaciones y el planteo y resolución de su realidad y las ciencias.

Séptimo grado	Octavo grado	Noveno grado	Décimo grado	Undécimo grado
Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Realiza las operaciones con polinomios vinculadas a situaciones prácticas.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Formula y resuelve problemas vinculados con ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Analiza las características y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, las representa.	**Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.** • Plantea y resuelve ejercicios y problemas donde aplica progresiones aritméticas y geométricas, fórmulas de recurrencia, series aritméticas, geométricas y geométricas infinitas.

El área de Matemáticas pretende articular e integrar las capacidades, conocimientos, valores y actitudes de acuerdo con criterios psicológicos, pedagógicos y epistemológicos. Esta área pretende en mayor o menor intensidad, responder a las variadas relaciones que establece la persona: Consigo misma, con las demás, con su entorno y con el mundo del trabajo. En nuestro caso particular, la siguiente tabla resume: Las componentes de Sucesiones y Series y sus propósitos.

Área: Matemáticas

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.	**¿Cuáles son sus propósitos?**
Involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados para analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas de la actividad práctica del hombre, de las ciencias y específicamente de la matemática donde la variación se encuentra como sustrato de ella.	1. Realiza sistemas de representaciones tabulares, gráficas de tipo cartesiano o sagital, las fórmulas y las expresiones analíticas. 2. Formular y resolver problemas que permitan descubrir patrones y modelo de variación.

VI.3. TEMPORIZACION DE LAS ACTIVIDADES

UNIDAD DIDACTICA: SUCESIONES. SERIES		
TEMA	**ACTIVIDAD No.**	**TIEMPO PROBABLE**
Definición. Notación. Clasificación.	1	90’
Fórmulas de recurrencia.	2	90’
Sucesión de Fibonacci	3	90’
Sucesiones aritméticas.	4	90’
Ejercicios.	5	90’
Sucesiones geométricas.	6	90’
Ejercicios.	7	90’
Series aritméticas.	8	90’
Ejercicios.	9	90’
Series geométricas.	10	90’
Ejercicios.	11	90’
Series geométricas infinitas.	12	90’
Evaluación de la unidad	13	90’

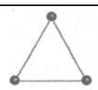
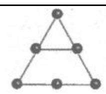
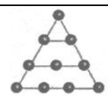
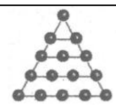
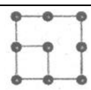
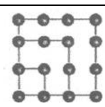
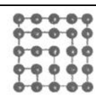
VI.4. DOCUMENTO DE ESTUDIO

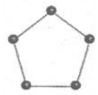
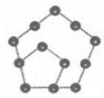
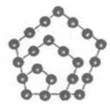
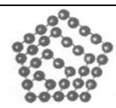
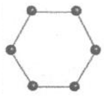
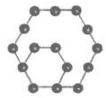
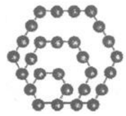
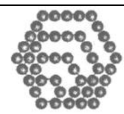
Este documento está elaborado para los/as profesores/as como para los/as estudiantes. A cada estudiante se le facilitará un documento de estudio. Está confeccionado con el fin de que los/as estudiantes se documenten antes de llegar a realizar las actividades que se le orienten en relación al tema a desarrollar.

§.1. SUCESIONES

Los/as niños/as en nuestra cultura aprenden a contar a través de la secuencia o sucesión de los números naturales 1, 2, 3, . . . que es la primera y fundamental sucesión. Contar consiste en poner en relación los objetos de un conjunto con una parte de la secuencia de los números naturales. A partir de ésta nacen las secuencias de los días, de los meses, del número de diagonales de los polígonos regulares, de los sucesivos ingresos familiares o intereses de las cuentas bancarias. Las sucesiones surgen al poner en relación funcional el conjunto de los números naturales con los objetos de otro conjunto.

Pitágoras y los Pitagóricos, para quienes todo lo cognoscible era número, descubrieron pautas numéricas en las disposiciones geométricas de los números, y atribuyeron a algunos de éstos nombres geométricos. Así hablaban de los números triangulares, cuadrados, pentagonales, …

TIPO	**ORDEN**				
	1	2	3	4	5
Triangulares					
	1	3	6	10	15
Cuadrados					
	1	4	9	16	25

TIPO	ORDEN				
	1	2	3	4	5
Pentagonales					
	1	5	12	22	35
Hexagonales					
	1	6	15	28	45

Es posible que estas disposiciones permitieran descubrir algunas relaciones numéricas generales que dieran origen a la aritmética o ciencia abstracta y deductiva de las propiedades y estructuras que atañen a los números. Y a través de la aritmética el poder de la razón y de la deducción se extendiera a las más diversas áreas del conocimiento.

Entre estas relaciones numéricas tenemos:

- La suma de dos números triangulares consecutivos, genera los números cuadrados: 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, etc.
- El primer número hexagonal es el primer número triangular, el segundo número hexagonal es el tercer número triangular, y el tercer número hexagonal es el quinto número triangular, y así sucesivamente.
- El primer número pentagonal es la suma del primer número triangular y del primer número cuadrado menos 1, el segundo número pentagonal es la suma de los segundos números triangular y cuadrado menos 2, etc.

Por otra parte, Euclides en el libro XI de su obra Los Elementos habla de magnitudes “sucesivamente proporcionales”, y nos dice que dado un conjunto de números naturales a, b, c, d, … son sucesivamente proporcionales si:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \cdots$$

De donde llamando $r = \frac{a}{b}$ e invirtiendo los cocientes se obtiene

$$b = ar$$
$$c = br = ar^2$$
$$d = cr = ar^3$$

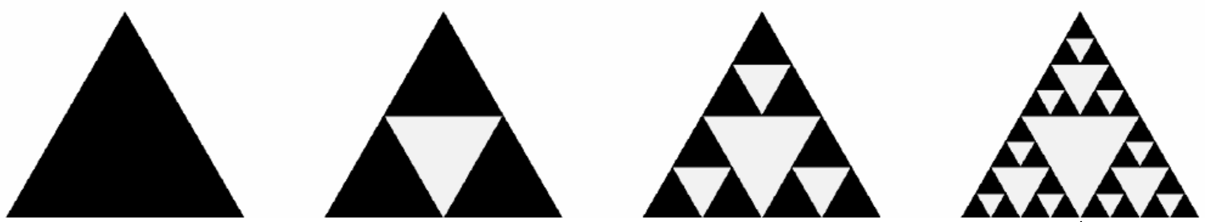
Y, en el libro XXXV llega a obtener una fórmula para hallar la suma de los términos de esta sucesión a, b, c, d, …

La aportación de Euclides a las sucesiones geométricas consiste en una definición indirecta de ellas y la obtención de una expresión para hallar la suma de sus términos.

Pero quizás una de las sucesiones más conocidas haya sido la sucesión de Fibonacci, donde el primer elemento es el 0, el segundo es 1, y los restantes se obtienen como la suma de los dos anteriores. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Antes de que Fibonacci escribiera su trabajo, la sucesión de los números de Fibonacci había sido descubierta por matemáticos hindúes tales como Gopala (antes de 1135) y Hemachandra.

1.1. Definición. Notación. Término general.

En las siguientes figuras observa el proceso que lleva a la creación de nuevos triángulos negros.



1 2 3 4

Siguiendo con el proceso, ¿cuántos triángulos negros tendrá la figura 5? Y, en general, ¿la figura n?

Figura	No. de triángulos
1	$1 = 3^0$
2	$3 = 3^1$
3	$9 = 3^2$
4	$27 = 3^3$
5	$81 = 3^4$

En la figura enésima, el número de triángulos negros es 3^{n-1}. Así, por ejemplo, a partir de la fórmula anterior podemos afirmar que en la figura 10 se obtendrán $3^{10-1} = 3^9 = 19\ 683$ triángulos negros.

La secuencia ordenada de número que hemos obtenido en la tabla anteriro 1, 3, 9, 27, 81, 243, ..., es una sucesión de números reales y a la expresión $a_n = 3^{n-1}$ se le llama término general.

- Una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una secuencia ordenada de infinitos números reales.
- Cada uno de los números de la misma ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) se denomina término de la sucesión.
- Los números naturales 1, 2, 3, . . . se llaman índices, e indican el lugar que ocupa el término en la sucesión. A cada número natural (índice= se le hace corresponder un número real (término).
- Al término a_n se le llama término n-ésimo o término general, y es la expresión que permite conocer el valor de un determinado término si se conoce previamente el lugar que ocupa en la misma.
- Se acostumbra representar la sucesión por el conjunto ordenado de sus términos, con o sin paréntesis, o bien por su término general.

  $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \text{ o bien } (a_n),\ n \in \mathbf{N}$$

  Por ejemplo, la sucesión

  $$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^n, \ldots$$

  puede escribirse en forma compacta como (2^n).

Ejemplo 1

Escribir los cuatro primeros términos y el décimo, de cada una de las sucesiones siguientes:

(a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)$

(b) $(1 + (0,1)^n)$

(c) $\left((-1)^n \frac{n}{3n-1}\right)$

(d) (7)

Solución

Para obtener los cuatro primeros términos se constituye n = 1, 2, 3, 4 en la fórmula de a_n. El décimo término se obtiene sustituyendo 10 en lugar de n. A continuación, se efectúa y se simplifica.

Sucesión	n-ésimo término	Primeros cuatro términos	Décimo término
$\left(\frac{1}{n+1}\right)$	$a_n = \frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{11}$
$(1 + (0,1)^n)$	$a_n = 1 + (0.1)^n$	1.1, 1.01, 1.001, 1.0001	1.000 000 000 1
$\left((-1)^n \frac{n}{3n-1}\right)$	$a_n = (-1)^n \frac{n}{3n-1}$	$-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{11}$	$\frac{10}{29}$
(7)	$a_n = 7$	7, 7 , 7, 7	7

A la sucesión (7) cuyos términos son 7, se le llama sucesión constante. En general, a la sucesión (a), donde $a \in$ **R**. se llama sucesión constante. La sucesión cuyos términos son iguales a cero, se le llama sucesión nula.

Ejemplo 2

Hallar el término general de las siguientes sucesiones.

(a) El conjunto ordenado de los números impares.

(b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, . . .

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

(d) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

Solución

(a) $a_n = 2n - 1$

(b) $b_n = n^2 - 1$

(c) $c_n = \frac{1}{n+1}$

(d) $d_n = \frac{n-1}{n}$

La obtención del término general de una sucesión puede entrañar una notable dificultad. No obstane, se estudiará más adelante dos clases de tipos de sucesiones particulares en las que el hallazgo del término general es sencillo.

EJERCICIOS

1 Escribe los términos primero, segundo, tercero, décimo y vigésimo de las sucesiones dadas por los términos generales siguientes.

(a) $a_n = -3n + 5$

(b) $b_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$

2. Halle el término general de las siguientes sucesiones.

(a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, . . .

(b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . .

(c) 1, 8, 27, 64, 125, . . .

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots$

(e) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots$

(f) $4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \ldots$

1.2. Fórmulas de recurrencia

En lugar de dar el término general de una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots$$

podemos definirla usando una fórmula de recurrencia en la cual se da el valor de a_1 y una regla para obtener a_{k+1} a partir del término anterior a_k cuando $k \geq 1$. En este caso se dice que la sucesión se define recurrentemente.

Ejemplo 3

Enumerar los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión definida por

$$a_1 = 3 \quad y \quad a_{k+1} = 2 \cdot a_k \ \text{ con } \ k \geq 1$$

Solución

Los primeros cuatro términos

$$a_1 = 3 = 2^0 \cdot 3 = 3 \cdot 2^0$$

$$a_2 = 2\ a_1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2^1$$

$$a_3 = 2\ a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2^2$$

$$a_4 = 2\ a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^3$$

Si observamos los primeros cuatro términos, podemos apreciar la naturaleza del n-ésimo término de la sucesión. Entonces,

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

para todo entero positivo n.

Ejemplo 4

Enumerar los primeros cinco términos y el n-ésimo término de la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad y \quad a_{k+1} = (k + 2) \cdot a_k \ \text{ con } \ k \geq 1$$

Solución

Los primeros cinco términos son

$$a_1 = 2 = 2!$$
$$a_2 = (1 + 2)\ a_1 = 3 \cdot 2 = 6 = 3!$$
$$a_3 = (2 + 2)\ a_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 = 4!$$
$$a_4 = (3 + 2)\ a_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 = 5!$$
$$a_5 = (4 + 2)\ a_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720 = 6!$$

Los primeros cinco términos son

$$2, 6, 24, 120, 720$$

Si observamos los primeros cinco términos, podemos apreciar la naturaleza del n-ésimo término de la sucesión. Entonces,

$$a_n = (n + 1)!$$

para todo entero positivo n.

EJERCICIOS

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por la fórmula de recurrencia dada. Obtenga el n-ésimo término.

(a) $a_1 = 2$ y $a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 5$

(b) $a_1 = 5$ y $a_{k+1} = 7 - 2 \cdot a_k$

(c) $a_1 = 3$ y $a_{k+1} = a_k^2$

(d) $a_1 = 128$ y $a_{k+1} = \frac{1}{4} a_k$

(e) $a_1 = 5$ y $a_{k+1} = k \cdot a_k$

(f) $a_1 = 3$ y $a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

(g) $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_k = \frac{(-1)^k}{a_{k-1}}$

1.3. Sucesión de Fibonacci

A finales del siglo XII, vivió en Bugía, una ciudad del norte de África, Leonardo de Pisa, hijo de Bonaccio, responsable de aduanas de la ciudad, más conocido por Fibonacci. Educado por un tutor árabe, aprovechó sus viajes comerciales por todo el Mediterráneo para entablar contacto con los matemáticos más notables de la época.

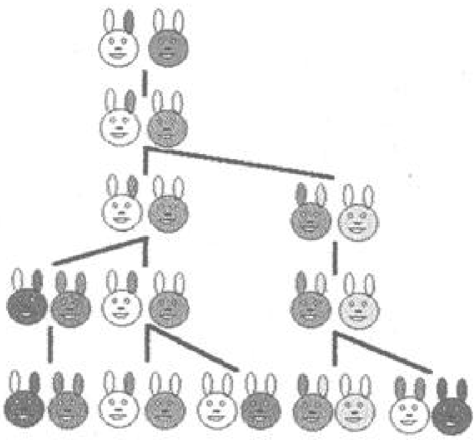
De su deseo de poner en orden todo cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de brindar a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado, nace, en 1202, el Liber Abaci, la primera Summa matemática de la Edad Media.

En él aparecen por primera vez en Occidente, las nueve cifras hindúes y el signo del cero. Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas claras para realizar operaciones con estas cifras tanto con números enteros como con fracciones, pero también proporciona la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.

Pero Fibonacci es más conocido entre los matemáticos por una curiosa sucesión de números: que colocó en el margen de su Liber Abaci junto al conocido "problema de los conejos". El problema en lenguaje actual diría:

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses? Calcula el número de parejas de conejos que habrá al cabo de un mes, de dos meses, de cuatro meses, de cinco meses, de seis meses.

Solución



Número de pares

1	Al final del primer mes, sólo hay una pareja de conejos.
1	Al final del segundo mes se reproducen, luego tenemos dos parejas de conejos.
2	Al final del tercer mes, la primera pareja vuelve a reproducirse; tenemos ahora tres parejas.
3	Al final del cuarto mes, la primera pareja vuelve a reproducirse y la pareja nacida hace dos meses se reproduce por primera vez. Tenemos cinco parejas.
5	Y así sucesivamente.

Nos encontramos con la sucesión

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Es fácil deducir que cada uno de los términos siguientes se obtiene de la suma de los dos anteriores. Entonces,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Esa sucesión se conoce como la famosa Sucesión de Fibonacci.

¿Por qué es tan famosa? Porque los números de la sucesión de Fibonacci, nos los encontramos en un gran número de fenómenos naturales, hasta el punto que sorprende a los biólogos y se ha llegado a llamarla la “sucesión ecológica”.

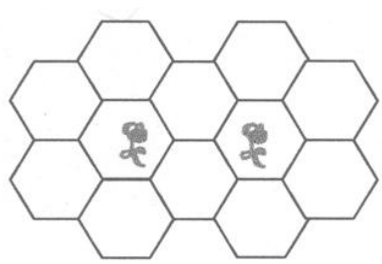
- La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en los números. Cuenta por curiosidad el número de pétalos que tienen las margaritas y otras flores y a menudo te encontrarás con números de la sucesión de Fibonacci.
- El número de espirales en flores y frutos también se ajustan a los términos de esta sucesión.
- Cualquier variedad de piña presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de esta sucesión: 8 y 13 o bien 5 y 8.

Parece que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.

1.4. Sucesiones aritméticas

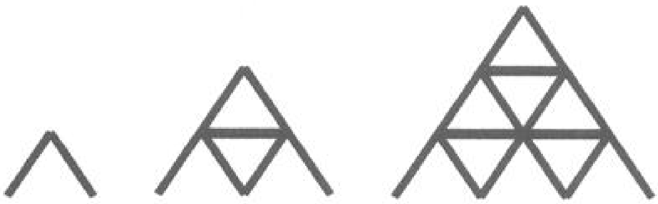
1.4.1. Definición

Para embellecer un paseo recto, se coloca, a lo largo de su línea central, una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma. Se desea saber el número de baldosas necesarias para colocar una hilera de 20 jardineras. ¿Cuántas baldosas se necesitan para n jardineras?



Obsérvese que para la primera jardinera se necesitan seis baldosas y para cada una de las siguientes cuatro más que para la anterior.

Sobre el suelo de una habitación se quiere construir un castillo de naipes de 15 alturas. ¿Cuántos naipes hay en el piso bajo? ¿y en el piso bajo de un castillo de n pisos?



Observe que para el primer piso hacen falta dos naipes, para el segundo piso cinco naipes y para cada piso tres naipes más que para el piso anterior.

Si escribimos las sucesiones correspondientes a:

- El número de baldosas para una jardinera, para dos, para tres,…
- El número de naipes del piso bajo de un castillo de un piso, de dos pisos, de tres pisos, …

Nos daremos cuenta de que en ellas cada término se encuentra sumando una cantidad fija al número anterior (4 en el primer caso y tres en el segundo). Las dos reciben el nombre de sucesiones aritméticas.

Otros ejemplos de sucesiones aritméticas son:

$$2, 5, 8, 11, 14, \ldots; \qquad 6, 2, -2, -6, -10, \ldots; \qquad -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$$

ya que cada una término se obtiene a partir del anterior sumando o restando un número fijo.

Definición. Sucesión aritmética

Una sucesión aritmética es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo, llamado diferencia, y que representamos por d:

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} + d,$$

También podemos definir una sucesión aritmética mediante una fórmula de recurrencia.

Definición. Sucesión aritmética

Una sucesión, tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para n = 1, 2, 3, ..., tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama sucesión aritmética o progresión aritmética. El número d se llama diferencia aritmética de la sucesión.

De $a_{n+1} - a_n = d$, obtenemos la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n + d$$

para una sucesión aritmética con diferencia d.

1.4.2. Término general

Dada una sucesión aritmética, se sabe que

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

para todo entero positivo n, y se obtiene mediante dicha fórmula de recurrencia que:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d,$$
$$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d,$$

y así sucesivamente. En general, el término n-ésimo a_n de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia aritmética d está dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Conocidos el término k-ésimo a_k y la diferencia d, se tiene que $a_n = a_k + (n - k)d$, si $k < n$.

Ejemplo 5

Hallar el término general de la sucesión aritmética 2, 5, 8, 11, 14, . . .

Solución

$a_1 = 2$, $d = 8 - 5 = 3$. Entonces, $a_n = a_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$. Por tanto, $a_n = 3n - 1$.

Ejemplo 6

Hallar el término general de una sucesión aritmética sabiendo que $a_{11} = 35$ y $d = 4$.

Solución

1er. Método:

$a_{11} = 35$ y $d = 4$. Entonces,

$a_n = a_{11} + (n - 11)d = 35 + (n - 11)\cdot 4 = 35 + 4n - 44 = 4n - 9$. Por tanto,

$$a_n = 4n - 9$$

2do. Método:

Calculemos previamente el primer término a_1:

$a_{11} = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 35 = a_1 + (11 - 1)\cdot 4 \Rightarrow 35 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = 35 - 40 \Rightarrow a_1 = -5$

Así,

$a_n = a_1 + (n - 1)d = -5 + (n - 1)\cdot 4 = -5 + 4n - 4 = 4n - 9$. Por tanto, $a_n = 4n - 9$.

Ejemplo 7

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Calcular el décimo quinto término.

Solución

La diferencia aritmética d es

$$d = 16.5 - 20 = -3.5$$

Sustituyendo $n = 15$, $d = -3.5$ y $a_1 = 20$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se tiene

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5),$$
$$a_{15} = 20 + (14)(-3.5),$$
$$a_{15} = 20 + (-49),$$
$$a_{15} = -29$$

El décimo quinto término es -29.

EJERCICIOS

1. Estudia si las siguientes sucesiones son sucesiones aritméticas y, en caso afirmativo, halle su término general.

   (a) 20, 17, 14, 11, 8, . . . (b) $-9, -2, 5, 12, 19, \ldots$

   (c) 4, 8, 16, 32, 64, . . . (d) $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$

2. El quinto término de una sucesión aritmética es 22 y la diferencia es 5. Halle el término general.

3. En una sucesión aritmética conocemos los términos $a_1 = 9$ y $a_{60} = 422$. Hallar su término general.

4. Hallar el término general de una sucesión aritmética de la cual se conocen los términos $a_5 = 1$ y $a_{83} = -38$.

5. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60^0. Calcula el valor de cada ángulo.

6. Hallar la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son términos consecutivos de una progresión aritmética de diferencia 3.

7. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 3?

8. Formen la siguiente secuencia de figuras: la primera es un cubo; la segunda figura, dos cubos unidos por una de sus caras; la tercera, tres cubos, uno a continuación de otro, unidos cada dos por una de sus caras, y así sucesivamente.

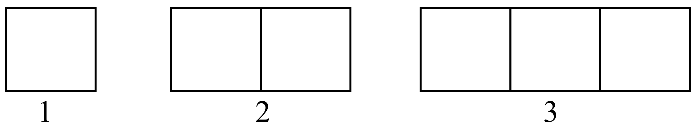
   Construya las sucesiones siguientes:

   (a) La que nos indica el número de caras ocultas.

   (b) La que nos indica el número de caras visibles.

   (c) ¿Cuál es el criterio de formación de cada una?

9. Observa la secuencia de figuras de la siguiente ilustración. Estas figuras pueden realizarse con palillos.



   (a) Completa la tabla que aparece a continuación:

Número de figura	1	2	3	4	5
Número de palillos	4	7			

   (b) ¿Qué número hará la figura que necesita 100 palillos para su construcción?

   (c) ¿Cuántos palillos son necesarios para construir la figura número 200?

10. Juana le dice a su padre que para coger soltura en matemáticas, cada día resolverá tres problemas más que el día anterior. Si el lunes ha resuelto dos problemas, ¿cuántos resolverá el sábado?

11. A Pablo le han regalado un puzle de 1750 piezas para cuya construcción se propone un plan de trabajo. Cada día colocará cinco piezas más que el anterior. Si el primer día coloca 40 piezas, ¿cuántos días tardará en terminarlo?

1.5. Sucesión geométrica

1.5.1. Definición

A Juan y María les han contado un secreto a las 9 de la mañana con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. ¿Está en la naturaleza humana la falta de discreción? El caso es que al cuarto de hora cada uno de ellos solo se lo ha contado a tres amigos, eso sí de absoluta confianza, que al cabo de un cuarto de hora se lo cuentan a otros tres y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente conocía este secreto a las dos de la tarde? ¿Entiendes ahora la causa de que los rumores se propaguen tan rápidamente?

En este caso (que por cierto es un clásico de la enseñanza de progresiones) si escribes la sucesión formada por todo el número de personas que se enteran del secreto cada cuarto de hora, te encontrarás con:

$$2, 6, 18, 54, 152, \ldots$$

Ahora que ya estás entrenado, ¿observas alguna relación entre ellos? Efectivamente cada uno se forma a partir del anterior multiplicándolo por 3. Este tipo de sucesiones se llaman sucesiones o progresiones geométricas.

Otros ejemplos de sucesiones geométricas son:

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots; \qquad 2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots; \qquad 3, -3, 3, -3, 3, -3, \ldots$$

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior multiplicando o dividiendo por un número fijo.

Definición. Sucesión geométrica

Una sucesión o progresión geométrica es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por un número fijo, llamado razón, y que representamos por r:

$$a_2 = a_1 \cdot r, \quad a_3 = a_2 \cdot r, \quad a_4 = a_3 \cdot r, \ldots, \quad a_n = a_{n-1} \cdot r,$$

También podemos definir una sucesión aritmética mediante una fórmula de recurrencia.

Definición. Sucesión geométrica

Una sucesión cuyos términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para n = 1, 2, 3, ..., tiene una razón fija $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, se llama sucesión geométrica o progresión geométrica.

De $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, vemos que una progresión geométrica con una razón r se define mediante la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

1.5.2. Término general

Al igual que en el caso de las sucesiones aritméticas, podemos deducir una expresión que nos proporcione el término general.

Si tenemos $a_1 = a$ como primer término de una sucesión geométrica con razón r, encontramos a partir de la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

se tiene

$a_2 = a_1 \cdot r = a \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a \cdot r \cdot r = a \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a \cdot r^2 \cdot r = a \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a \cdot r^3 \cdot r = a \cdot r^4$, y así sucesivamente.

En general, el término n-ésimo de una sucesión geométrica con primer término a y razón r, es

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

Conocidos el término k-ésimo a_k y la razón r, se tiene que $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$, si $k < n$.

Ejemplo 8

Halle el término general de una progresión geométrica sabiendo que $a_5 = 162$ y $r = 3$.

Solución

Primer método:

$a_5 = 162$ y $r = 3$. Entonces,

$a_n = a_5 \cdot r^{n-5} - \Rightarrow a_n = 162 \cdot 3^{n-5} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^4 \cdot 3^{n-5} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Segundo método:

Calculemos previamente el primer término a_1: $a_5 = a_1 \cdot r^{n-5} \Rightarrow 162 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 162 = 81a_1 \Rightarrow a_1 = 2$.

Así,

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-5} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Ejemplo 9

Halle el primer término y la razón de una sucesión geométrica sabiendo que $a_4 = \frac{8}{3}$ y $a_9 = -\frac{8}{729}$.

Solución

$a_9 = a_4 \cdot r^{9-4} \Rightarrow -\frac{8}{729} = \frac{8}{3} \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = -\frac{1}{243} \Rightarrow r = \sqrt[5]{-\frac{1}{243}} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$

$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \Rightarrow \frac{8}{3} = a_1\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{8}{3} = -\frac{1}{27} \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = -72$

Ejemplo 10

Encuentre el tercer término de una sucesión geométrica con razón $\frac{2}{3}$ y sexto término $\frac{128}{81}$.

Solución

Primero encontremos a. Puesto que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos de $a_n = a \cdot r^{n-1}$ que $a_6 = a \cdot r^{6-1}$,

$\frac{128}{81} = a\left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow \frac{2^7}{3^4} = \frac{2^5}{3^5} \cdot a$

$\Rightarrow a = \frac{2^7 \cdot 3^5}{2^5 \cdot 3^4}$

$\Rightarrow a = 2^2 \cdot 3$

$\Rightarrow\ a = 12$

Aplicando $a_n = a \cdot r^{n-1}$ con $n = 3$, tenemos

$a_3 = 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} \Rightarrow\ a_3 = 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

$\Rightarrow\ a_3 = 12\cdot\frac{2^2}{3^2}$

$\Rightarrow\ a_3 = 12\cdot\frac{4}{9}$

$\Rightarrow\ a_3 = \frac{16}{3}$

El tercer término de la sucesión es $\frac{16}{3}$.

EJERCICIOS

1. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla su término general.
   (a) 2, 6, 18, 54, . . .
   (b) 5, –5, 5, –5, 5, –5, . . .
   (c) 10, 20, 28, 36, 44, . . .
   (d) 18, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, . . .
2. El sexto término de una sucesión geométrica de razón 2 es 96. Calcula el término general.
3. En una sucesión geométrica se sabe que $a_1 = 2$ y $a_5 = \frac{1}{8}$. Halle el término general.
4. Halle el término general de una sucesión de la cual se conocen los términos $a_{10} = 20$ y $a_6 = 5$.
5. Halle cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen $\frac{1}{2}$ y los dos últimos $\frac{1}{8}$.
6. Cierto cultivo tiene inicialmente 10,000 bacterias y aumenta 20% cada hora. Deduzca una fórmula para el número de bacterias N(t) que hay al haber transcurrido t horas.
7. Se observa que la población de cierta comunidad aumenta geométricamente en un factor de 3/2 cada año. Si la población es de 1,000 al comienzo del primer año, halle la población al comienzo de undécimo año.

8. Una pareja de ratones tiene dos crías: un macho y una hembra en un mes. Las crías a su vez, maduran en un mes y tienen un par de crías al siguiente mes, y así sucesivamente. Suponiendo que cada pareja de ratones maduros tiene un par de crías cada mes, ¿cuántos pares de ratones habrá después de ocho meses? Halle una fórmula de recurrencia que dé el número de pares de ratones maduros que habrá en el n-ésimo mes.
9. Todas las personas tienen dos padres. Determine cuántos tatara-tatarabuelos tendrá una persona.
10. Si un cuerpo recorre 16.1 pies durante el primer segundo, el triple de lo anterior durante el segundo segundo, el quíntuplo durante el tercero, y así sucesivamente, ¿cuánto caerá durante el decimocuarto segundo? ¿cuánto en t segundos?

§.2. SERIES

2.1. Series aritméticas

En ocasiones nos referimos a la sucesión formada por los n primeros términos, tratándose en estos casos de una sucesión limitada. Consideremos la sucesión aritmética limitada formada por los siete primeros múltiplos de 5:

$a_1 = 5 \qquad a_2 = 10 \qquad a_3 = 15 \qquad a_4 = 20 \qquad a_5 = 25 \qquad a_6 = 30 \qquad a_7 = 35$

$20 + 20 = 40$

$15 + 25 = 40$

$10 + 30 = 40$

$5 + 35 = 40$

Observemos que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos; es decir, es $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = a_4 + a_4 = 40$

En general, dada una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de diferencia d, se tiene que:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$

$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$

…………………………………………

$a_{h+1} + a_{n-h} = (a_1 + hd) + (a_n - hd) = a_1 + a_n$

En toda sucesión aritmética limitada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$$

Denotemos por S_7 la suma de los siete primeros términos de la sucesión anterior: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.

Una forma de hallarla es mediante el procedimiento inventado por el matemático Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) a la edad de 10 años, consistente en escribir la suma dos veces, invirtiendo los términos en una de ellas:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_7 & = & 5 & + & 10 & + & 15 & + & 20 & + & 25 & + & 30 & + & 35 \\ S_7 & = & 35 & + & 30 & + & 25 & + & 20 & + & 15 & + & 10 & + & 5 \\ \hline 2S_7 & = & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 \end{array}$$

De donde

$2S_7 = 7 \cdot 40 = 7 \cdot (5 + 35) \Rightarrow S_7 = \frac{7 \cdot (5+35)}{2} = 140$

Siguiendo el procedimiento utilizado por Gauss, podemos hallar la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \ldots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \end{array}$$

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$, se tiene:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) \Rightarrow$

$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow$

$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

En consecuencia, la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

vale

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplo 1

El primer término de una sucesión aritmética es 4, y el último término es 31. Si $S_n = 175$, encuéntrese el número de términos de la sucesión y la diferencia aritmética.

Solución

(i) Para obtener el número de términos de la sucesión, sustituimos $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $S_n = 175$ en $S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$, y se obtiene

$$175 = \frac{n\cdot(4+31)}{2} \Rightarrow 175 = \frac{35n}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{(2)(175)}{35}$$

$$\Rightarrow n = 10$$

Concluimos que la sucesión tiene 10 términos.

(ii) Para encontrar la diferencia aritmética, sustituimos $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $n = 10$, en la expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$, y se obtiene

$$31 = 4 + (10-1)d \Rightarrow 31 = 4 + 9d$$

$$\Rightarrow 9d = 27$$

$$\Rightarrow d = 3$$

Por lo tanto, la diferencia aritmética es, 3.

Ejemplo 2

Cada oscilación de un péndulo es 3 pulgadas menor que su oscilación anterior. La primera oscilación es de 8 pies.

(a) Calcule la longitud de la doceava oscilación.

(b) Determínese la distancia total recorrida por el péndulo durante las primeras doce oscilaciones.

Solución

(a) Ya que cada oscilación disminuye en una cantidad constante, este problema puede representarse como una sucesión aritmética, donde el primer término es $a_1 = 8$, la diferencia corresponde al decremento pero como la primera oscilación está dada en pies y el decremento en pulgadas se cambiarán 3 pulgadas a 0.25 pies ($3 \div 12 = 0.25$). La doceava oscilación puede considerarse como a_{12}. Sustituyendo estos valores en $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se obtiene

$a_{12} = 8 + (12 - 1)(-0.25) \Rightarrow a_{12} = 8 + (11)(-0.25) \Rightarrow a_{12} = 8 + (-2.75) \Rightarrow a_{12} = 5.25$

La longitud de la doceava oscilación es 5.25 pies. Obsérvese que la diferencia aritmética d es negativa ya que la distancia disminuye en cada oscilación.

(b) La distancia total recorrida durante las primeras doce oscilaciones puede obtenerse con la fórmula $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$. Entonces,

$S_{12} = \frac{12 \cdot (8 + 5.25)}{2} \Rightarrow S_{12} = 6(13.25) \Rightarrow S_{12} = 79.5$

El péndulo recorre un total de 79.5 pies durante sus primeras doce oscilaciones.

EJERCICIOS

1. Calcula la suma de los números que se indican.
   (a) De los 25 primeros términos de la sucesión 3, 8, 13, . . .
   (b) De los 40 primeros términos de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \ldots$
   (c) De todos los números pares de dos cifras.
   (d) De todos los números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 6.
2. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética –11, –4, 3, 10, . . . hay que sumar para obtener como resultado 570?
3. Hallar la expresión de la suma de los n primeros números impares. A partir de esta expresión, calcula la suma de los 125 primeros números impares.
4. Un individuo ha ahorrado durante un año 4212 dólares, ingresando cada mes 42 dólares más que el anterior. ¿Cuánto dinero ahorró el primer mes? ¿Cuánto dinero ingresó el último mes?
5. Las cinco cifras que forman un número están colocadas en progresión aritmética. La suma de todas ellas es igual a 25, y la segunda (decenas) es doble de la quinta (decenas de millar). ¿Qué número es este?

2.2. Series geométricas

2.2.1. Suma de términos consecutivos

Sea a_1, a_2, a_3, . . ., a_n, . . . una sucesión geométrica de razón r y hallemos la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + . . . + a_{n-1} + a_n$$

Primeramente, reescribimos S_n en términos de $a_1 = a$ y la razón r:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + . . . + ar^{n-1}$$

Multipliquemos por la razón r ambos miembros de la igualdad anterior y obtenemos:

$$r \cdot S_n = a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + . . . + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n$$

Restamos esta expresión a la primera igualdad y obtenemos:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Entonces,

$$(1 - r)S_n = a(1 - r_n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

En consecuencia, la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + . . . + a_{n-1} + a_n$$

es

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ si } r \neq 1$$

Ejemplo 3

Un hombre desea ahorrar aportando C$ 1.00 el primer día, C$ 2.00 el segundo, C$ 4.00 el tercero, y así sucesivamente.

(a) Si continúa duplicando la cantidad que aporta cada día, ¿cuánto debe aportar en el décimo quinto día?

(b) Suponiendo que no se le acabe el dinero, ¿cuál es la cantidad total que ahorra al término de 30 días?

Solución

(a) La cantidad en córdobas que se aporta en días sucesivos forman una sucesión geométrica:

$$1, 2, 4, 8, 16, ...$$

cuyo primer término es 1 y cuya razón es 2. Para calcular la cantidad aportada en el décimo quinto día, se usa la expresión $a_n = ar^{n-1}$, con $a = 1$, $r = 2$ y $n = 15$. Entonces,

$$a_{15} = (1)(2)^{15-1},$$

$$a_{15} = 2^{14},$$

$$a_{15} = 16{,}384$$

Por consiguiente, en el décimo quinto día debe aporta C$ 16,384.00.

(b) Para calcular la cantidad total ahorrada al cabo de 30 días, se aplica la fórmula $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$,

con $n = 30$, y se obtiene, en córdobas,

$$S_{30} = \frac{(1)(1-2^{30})}{1-2}$$

$$S_{30} = 1\,073\,341\,823$$

Entonces, la cantidad total que ahorra al cabo de 30 días es C$ 1, 073, 341, 823.00

Ejemplo 4

Sabiendo que en una sucesión geométrica los términos $a_1 = 3$ y $a_5 = 1875$, halle la suma de los cinco primeros términos.

Solución

Primeramente, encontremos la razón r: $a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 1875 = 3 \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = 625 \Rightarrow r = \pm 5$.

Tenemos, por tanto, dos posibilidades:

Si $r = 5$, dichos términos son: 3, 15, 75, 375, 1875. Entonces, $S_5 = \frac{3(1-5^5)}{1-5} = 2343$.

Si $r = –5$, los términos son: 3, –15, 75, –375, 1875. Entonces, $S_5 = \frac{3(1-(-5)^5)}{1-(-5)} = 1563$.

EJERCICIOS

1. El tercer término de una sucesión geométrica es 12 y la razón 2. Calcula la suma de los diez primeros términos.
2. Calcula las sumas de los números que se indican.

(a) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{10}$

(b) De los 10 primeros términos de la sucesión 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, . . .

(c) De los 20 primeros términos de la sucesión 1, $-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots$

3. Si hoy me das 1 centavo de dólar, mañana 2, pasado 4, al siguiente día 8, y así sucesivamente, ¿cuántos dólares me habrás dado al cabo de un mes?

4. Una motocicleta de gran cilindrada costó inicialmente 15020 dólares. Al cabo de un año se vendió por la mitad de su precio, pasado otro año se volvió a vender a la mitad del último precio, y así sucesivamente.

   (a) ¿Cuánto le costó la motocicleta al quinto propietario? ¿Y al décimo?

   (b) ¿Qué cantidad pagaron entre los seis primeros propietarios? ¿Y entre los diez primeros?

5. ¿Cuántos términos se han tomado en una sucesión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

2.2.2. Series geométricas infinitas

La relevancia de este acápite es que se trata de sumar todos los términos de la sucesión y no sólo una parte de ellos.

Partiendo de la fórmula $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ donde $-1 < r < 1$, a medida que n se va haciendo muy grande la potencia r^n se va haciendo cada vez más pequeña en valor absoluto (tiende a cero), de manera que se puede despreciar.

Los siguientes ejemplos muestran lo aseverado en el párrafo anterior.

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0.125$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} = -0.03125$

…………………… …………………………

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1048576} = 0.000000953\ldots$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{20} = -\frac{1}{1048576} = -0.000000953\ldots$

Si el número de términos n es infinito, se tiene entonces:

$$S_\infty = \frac{a(1-r^\infty)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Por tanto, la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica con razón **$-1 < r < 1$** es

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 5

Halle la suma de los términos de la progresión geométrica ilimitada 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Solución

En esta sucesión, $a = 8$ y $r = \frac{1}{2}$. Como $-1 < r < 1$, la suma de todos sus términos es

$$S_\infty = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

Ejemplo 6

Calcular el número racional que corresponde al número decimal repetido al infinito $5.4\overline{27}$, en el cual los dígitos bajo la sobreraya se repiten indefinidamente.

Solución

A partir de la expresión decimal 5.4 27 27 27 ..., se obtiene la serie infinita

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \ldots$$

La parte de la expresión que sigue al primer término es

$$0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \ldots$$

es una serie geométrica infinita con $a = 0.027$ y $r = 0.01$. Por consiguiente, la suma S de esa serie geométrica infinita, es

$$S_\infty = \frac{0.027}{1-0.01} = \frac{0.027}{0.99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$$

En consecuencia, el número deseado es

$$5.4 + \frac{3}{110} = \frac{597}{110}$$

Ejemplo 7

Se deja caer una pelota de caucho desde 10 metro de altura. Supóngase que rebota y llega hasta la mitad de la altura cada vez. Calcular la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene.

Solución

Si la pelota siempre rebota a la mitad de la altura desde la que cae, entonces teóricamente, nunca se detiene. Sin embargo, la suma de las distancias que recorre hacia abajo, y de las que recorre hacia arriba forma dos series geométricas infinitas:

Serie hacia abajo: 10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625+ ...

Serie hacia arriba: 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + ...

Se supone que la distancia total S que recorre la pelota se puede calcular sumando la suma de esas series infinitas. Esto da

$$S = 10 + 2(5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + ...)$$

$$S = 10 + 2\left[5 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + ...\right]$$

La serie encerrada entre corchetes es una serie geométrica infinita con $a = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, y su suma es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Por lo tanto,

$$S = 10 + 2(10),$$

$$S = 10 + 20$$

$$S = 30$$

En consecuencia, la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene es 30 metros.

EJERCICIOS

1. En una sucesión geométrica de razón $-\frac{1}{3}$ el tercer término es 1. Halle la suma de sus infinitos términos.
2. La suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica decreciente es 2, y el primer término es $\frac{1}{2}$. Calcula la razón.
3. En un triángulo equilátero de 6 metros de lado, se unen los puntos medios de sus lados, obteniéndose así otro triángulo inscrito en el primero. Este proceso se repite indefinidamente. Calcular la suma de las áreas de todos los triángulos formados.
4. Dado un círculo de radio R, se construye un segundo círculo cuyo diámetro es el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro es el radio del segundo y así sucesivamente. ¿Cuál será la suma de las áreas de todos los círculos así formados?
5. Escriba los decimales periódicos dados como un cociente de enteros.

   (a) 0.4444... (b) 0.19191919... (c) 0.521521521...

   (d) 2.484848... (e) 3.125125... (f) 6.0131313...

VI.5. ACTIVIDADES

Con la puesta en práctica de las actividades aquí planteadas nos proponemos que los/as estudiantes alcancen las siguientes competencias:

1. Comprenda la utilidad de las sucesiones y series en la vida diaria y en otras disciplinas del saber humano.
2. Plantea y resuelve ejercicios y problemas, aplicando las fórmulas relativas a sucesiones, sucesiones aritméticas y geométricas, series aritméticas, geométricas y geométricas infinitas.
3. Crea y resuelve problemas aplicando sucesiones aritméticas y geométricas, series aritméticas, geométricas y geométricas infinitas.

Actividad No. 1

La presente actividad está enfocada a analizar diferentes situaciones tanto aritméticas como de la vida real con el propósito de que los/as estudiantes lleguen a comprender el concepto de sucesión, su notación y su clasificación.

Tema

Sucesiones.

Sumario

Definición. Notación. Clasificación.

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Papel.
3. Lapiceros.

Procedimiento

1. Presentación de la unidad Sucesiones: Competencias a desarrollar, indicadores de logros, actividades a realizar, formas de evaluación, etc.
2. Formación de grupos.
3. En conjunto profesor – estudiantes, mediante la realización de una serie de actividades llegar a establecer y comprender el concepto de sucesión.
4. El profesor hará una síntesis de la definición, notación y clasificación de las sucesiones.
5. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
7. Entregar por escrito los resultados obtenidos en cada actividad.
8. Orientar la resolución de los ejercicios que se proponen en la actividad.

Desarrollo

A. ACTIVIDADES A REALIZAR EN CONJUNTO PROFESOR – ESTUDIANTES

1. Concepto de sucesión

1. Respondan las siguientes interrogantes:
   (a) Orientar a los/as estudiantes a que escriban los días de la semana tal a como ocurren.
   (b) Orientar a los/as estudiantes a que escriban los días de la semana en forma desordenada.

(c) ¿Qué diferencia puede concluir acerca de (a) y (b)?

(d) Presentarle a los/as estudiantes las siguientes lista de números:

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, …
- 1, 5, 7, 3, 11, 9, …
- ¿Qué diferencia puede deducir de ambas listas de números?

(e) ¿Qué concepto nos da un diccionario de la palabra sucesión?

(f) En base a las actividades anteriores enuncie intuitivamente el concepto de sucesión.

(g) ¿Qué ejemplos podemos anunciar de situaciones cotidianas que sean sucesiones?

2. Consideremos una función real de una variable real cuya ecuación funcional está dada por $f(x) = 3x – 2$, la cual es conocida por nosotros.
   - Tracen la gráfica de f si el dominio es el conjunto **N** de los números naturales.
   - Tracen la gráfica de f si restringimos el dominio al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.
   - Establezcamos que tienen en común, y que diferencias existen entre cada una de las gráficas.
   - ¿Son iguales o no las funciones?
   - ¿En qué se diferencian los dominios en cada caso? ¿y el conjunto imagen?
3. Consideremos otra función real de una variable real cuya ecuación funcional esté dada por $f(n) = \frac{1}{n}$, y propongamos como dominio a $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determine el conjunto imagen y tracen su gráfico.
   - Organicen los resultados en una tabla de valores.
   - Expresen el conjunto imagen en forma tabular.
   - ¿Qué caracteriza a los elementos del dominio?
   - ¿Existe alguna relación con el ejemplo anterior, en cuanto a dominio, conjunto imagen y gráficas?
4. En base a las actividades 2 y 3, formulemos la definición matemática de sucesión.

B. SINTESIS DEL PROFESOR

Todos hemos usado la palabra sucesión de una u otra forma, nos referimos por ejemplo a una "sucesión de cartas", "una sucesión de hechos", los/as estudiantes en su salón de clase se sientan en forma “consecutiva” de acuerdo al número de la lista, los días de la semana están en orden “sucesivo”.

Intuitivamente podemos decir que una sucesión es un listado de objetos, eventos o números unos a continuación de otro.

Consideremos las siguientes listas:

Enero, febrero, marzo, ... , diciembre (1)

3, 4, 5, ..., 10, 11, 12 (2)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \qquad (3)$$

Observemos que (1) enumera los meses del año en el orden en que ocurren; (2) y (3) representan listas de números. Tanto (1), (2) y (3) son ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama término de la sucesión. Las listas (1) y (2) donde se indica el último término se conocen como sucesiones finitas, y la lista (3) donde no se indica el último término, se conoce como sucesión infinita. Los tres puntos de (1), (2) y (3) se llaman elipsis e indican que los términos siguientes tienen el mismo patrón que el establecido por los ya dados. Por ejemplo, en la secuencia

2, 4, 8, 16, 32, 64, ... (4)

Los dos siguientes términos son 128 y 256. De lo anterior, podemos decir que una sucesión es una lista de objetos, eventos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido.

En este trabajo a menos que se especifique otra cosa, usaremos la palabra sucesión para referirnos a una sucesión infinita.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto **N** de números enteros positivos. Por ejemplo, una correspondencia uno a uno entre la sucesión 1, 8, 27, 64, 125, ..., y el conjunto **N** de enteros positivos es:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & \ldots & n^3 & \ldots \end{array}$$

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos definir una sucesión matemáticamente.

Definición (Sucesión)

Sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto **N** de los números enteros positivos.

Sucesión finita es una función cuyo dominio es un subconjunto f{1, 2, 3, ..., n} del conjunto **N** de enteros positivos.

Los elementos del contradominio de una sucesión son, simplemente, los términos de la sucesión. Supondremos, de aquí en adelante, que el contradominio de una sucesión es un conjunto de números reales.

Si una función f es una sucesión, entonces a cada entero positivo n corresponde un número real f(n)

Esos números del contradominio de f se pueden representar mediante

$$f(1), f(2), f(3), \ldots , f(n), \ldots \qquad (5)$$

donde f(1) es el primer término f(2) es el segundo término, f(3) el tercer término, en general, f(n) es el n–ésimo término. Más que usar una notación de funciones, representemos comúnmente los términos de una sucesión usando subíndices: $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., y así sucesivamente. El término n–ésimo $f(n) = a_n$ se llama también término general de la sucesión. Así, la sucesión (5) se expresa por

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots \qquad (6)$$

y se denota por $\{a_n\}$ o (a_n). Por ejemplo, la sucesión

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^n, \ldots$$

puede escribirse en forma compacta como $\{2^n\}$, o bien, (2^n).

Analicemos en conjunto el siguiente:

Ejemplo

Escribir los cuatro primeros términos y el décimo, de cada una de las sucesiones siguientes:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ (b) $\left\{2+(0.1)^n\right\}$ (c) $\left((-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right)$ (d) $\{4\}$

Solución

Para obtener los cuatro primeros términos se constituye n = 1, 2, 3, 4 en la fórmula de a_n. El décimo término se obtiene sustituyendo 10 en lugar de n. A continuación, se efectúa y se simplifica.

Sucesión	n–ésimo término	Primeros cuatro términos	Décimos Términos
$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$a_n = \dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
$\{2 + (0.1)^n\}$	$a_n = 2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.000 000 000 1
$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
$\{4\}$	$a_n = 4$	4, 4, 4, 4	4

A la sucesión {4} cuyos términos son 4, se le llama *sucesión constante*. En general, a la sucesión {a}, donde $a \in$ **R**. se llama sucesión constante. La sucesión cuyos términos son iguales a cero, se le llama *sucesión nula*.

C. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Calcule los primeros cuatro términos y el noveno término de las sucesiones siguientes:

(a) $\{ 12 - 3n \}$ (b) $\left\{ \frac{3n-2}{n^2+1} \right\}$ (c) $\left\{ 10 + \frac{1}{n} \right\}$

(d) $\{(n-1)(n-2)(n-3)\}$ (e) $\left\{ \sqrt{2} \right\}$ (f) $\{ 2 + (-0.1)^n \}$

(g) $\left\{ (-1)^n \frac{6-2n}{\sqrt{n+1}} \right\}$ (h) $\{ 1 + (-1)^{n+1} \}$ (i) $\left\{ \frac{2^n}{n^2+2} \right\}$

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el trabajo escrito, evaluar coherencia y dominio cognitivo.
4. En los ejercicios resuelto, presentación, coherencia, orden lógico y cientificidad.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente actividad estudiaremos otra manera de expresar sucesiones aritméticas, mediante las fórmulas de recurrencia. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Fórmulas de Recurrencia”.

Actividad No. 2

El propósito de esta actividad es que los/as estudiantes comprendan que existe otra manera de expresar una sucesión numérica y que mediante la realización de ejercicios llegue a obtener el n-ésimo término de una sucesión cuando ella esté expresada mediante una fórmula llamada fórmula de recurrencia.

Tema

Sucesiones

Sumario

Fórmula de recurrencia.

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.

Procedimiento

1. El profesor explicará las fórmulas de recurrencia.
2. Formación de grupos.
3. EL profesor presentará en papelógrafo varios ejercicios resueltos para ser analizados en conjunto profesor – estudiantes.
4. Orientar la resolución de los ejercicios que se proponen en la actividad.
5. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.
6. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
7. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.

Desarrollo

A. EXPOSICION DEL PROFESOR

Fórmulas de recurrencia

En lugar de expresar una sucesión listando sus elementos

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots$$

podemos definirla usando una fórmula de recurrencia en la cual se da el valor de a_1 y una regla para obtener a_{k+1} a partir del término anterior a_k cuando $k \geq 1$. En este caso se dice que la sucesión se define recurrentemente.

Ejemplo 1

Enumerar los primeros cinco términos y obtenga el n-ésimo término de la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{k+1} = (k + 2)\cdot a_k \ \text{ con } \ k \geq 1$$

Solución

Los primeros cinco términos son

$$a_1 = 2 = 2!$$

$$a_2 = (1 + 2)\, a_1 = 3\cdot 2 = 6 = 3!$$

$$a_3 = (2 + 2)\, a_2 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24 = 4!$$

$$a_4 = (3 + 2)\, a_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 = 5!$$

$$a_5 = (4 + 2)\, a_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720 = 6!$$

Los primeros cinco términos son

$$2, 6, 24, 120, 720$$

Si observamos los primeros cinco términos, podemos apreciar la naturaleza del n-ésimo término de la sucesión. Entonces,

$$a_n = (n + 1)!$$

para todo entero positivo n.

Ejemplo 2

Enumerar los primeros seis términos y obtenga el n-ésimo término de la sucesión definida por

$$a_1 = 5 \quad y \quad a_{k+1} = k \cdot a_k$$

Solución

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot 5$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 1 \cdot 5$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5$$

$$a_5 = 4 \cdot a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5$$

$$a_6 = 5 \cdot a_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5$$

……………………..

$$a_n = (n - 1) \cdot a_n = 5 \cdot (n - 1)!$$

B. RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

I. Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por la fórmula de recurrencia dada. Obtenga el n-ésimo término.

(a) $a_1 = 2 \quad y \quad a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 5$

(b) $a_1 = 5 \quad y \quad a_{k+1} = 7 - 2 \cdot a_k$

(c) $a_1 = 3 \quad y \quad a_{k+1} = a_k^2$

(d) $a_1 = 128 \quad y \quad a_{k+1} = \frac{1}{4} a_k$

(e) $a_1 = 3$ y $a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

(f) $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_k = \frac{(-1)^k}{a_{k-1}}$

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. En el trabajo escrito evaluar: presentación, coherencia, orden lógico y cientificidad.

Autopreparación

El siguiente ejercicio será entregado resuelto en la próxima sesión de clase y se hará de manera individual.

Enumere los primeros cuatro términos de la sucesión definida por la siguiente fórmula de recurrencia

$$a_1 = -6 \quad y \quad a_{k+1} = \frac{2}{3} a_k$$

Obtenga el n-ésimo término

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión estudiaremos una de las sucesiones más famosas e importante, “La Sucesión de Fibonacci”. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Sucesión de Fibonacci”.

Actividad No. 3

Esta actividad está dedicada al estudio de la Sucesión de Fibonacci; además realizaremos dos juegos relacionado con esta sucesión. Aprenderemos a construir sucesiones que verifican algunas de las propiedades de esta sucesión.

Tema

Sucesiones

Sumario

Sucesión de Fibonacci

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Lapiceros.
3. Papel.
4. Tijeras.
5. Cartulina.
6. Calculadora.
7. Fotocopias.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El profesor explicará la regla de formación para obtener los términos de la sucesión de Fibonacci.
3. En conjunto profesor – estudiantes deduciremos las propiedades que verifica la sucesión de Fibonacci.
4. Orientar la realización de dos juegos relacionados con la sucesión de Fibonacci y entregar por escrito las respuestas de las preguntas relativas a cada juego.
5. En conjunto profesor – estudiantes analizaremos el problema de los conejos.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.

Desarrollo

A. EN CONJUNTO PROFESOR - ESTUDIANTES

Sucesión de Fibonacci

Analicemos la siguiente situación:

Mi padre me ha contado esta historia: "En un pequeño pueblo de Alemania (Brunswick), un profesor castigaba a sus alumnos haciéndoles sumar números consecutivos (por ejemplo sumar los 100 primeros números naturales). Era un duro castigo, pues había que hacer muchas sumas (1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 5 = 15,...) y era fácil equivocarse. Pero... una vez, uno de los niños le dio la solución en un tiempo sorprendente, el profesor le preguntó ¿cómo lo has hecho? El niño le dijo: 1 + 100= 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101,... siempre suma 101 y hay 50 sumas, en total 50·101 = 5050. El profesor quedó tan impresionado que le regaló un libro de Aritmética"

Ese niño tenía 10 años y se llamaba Carl Friedrich Gaüs. Fue uno de los más grandes matemáticos.

Leonardo de Pisa (1170 - 1250), también conocido como Fibonacci, fue uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media en Europa. Hizo contribuciones a la aritmética, al álgebra y a la geometría.

Una sucesión de números muy conocida y usada en matemáticas es justamente la sucesión de Fibonacci, que se construye de la siguiente manera:

(a) La sucesión empieza con dos unos.

(b) Cualquier término de la sucesión se obtiene de sumar los dos anteriores. Por ejemplo, el noveno término de la sucesión se construye sumando el séptimo y el octavo.

(c) La sucesión es infinita

Así la sucesión de Fibonacci es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, ...

¿Podrías calcular el término número 100 de la sucesión de Fibonacci?

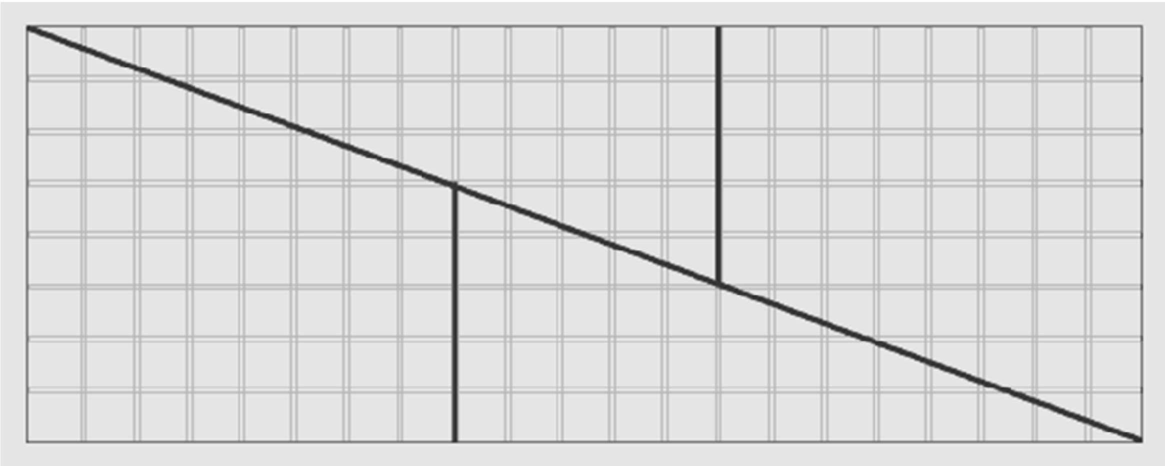
Propiedades

- La suma de los n primeros términos es: $a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+2} - 1$
- La suma de los términos impares es: $a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1} = a_{2n}$
- La suma de los términos pares es: $a_1 + a_4 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$
- La suma de los cuadrados de los n primeros términos es: $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = a_n a_{n+1}$
- Si n es divisible por m entonces a_n es divisible por a_m
- Los números consecutivos de Fibonacci son primos entre si.

B. ANALISIS DE LOS JUEGOS Y EL PROBLEMA DE LOS CONEJOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Primer juego: Una falacia geométrica

Traza un rectángulo cuyos lados midan 8 y 21. Recórtalo por las marcas que se muestran en la figura. Con las piezas que queden construye un cuadrado cuyo lado mida 13.



(a) Calcula el área del rectángulo.

(b) Calcula el área del cuadrado.

(c) ¿Son iguales las áreas?

(d) ¿Qué está sucediendo? ¿es correcto el resultado que obtuviste?

(e) ¿Tendrá algo que ver que 8, 13 y 21 sean números consecutivos de la sucesión de Fibonacci?

Segundo juego: Truco de Fibonacci

Piensa en dos números cualesquiera y construye, empezando con esos números, una sucesión como la de Fibonacci, es decir en la que cada término sea la suma de los dos anteriores.

La suma de los diez primeros términos de tu sucesión será once veces el séptimo término.

Esto sucede en la sucesión de Fibonacci y en cualquier otra que se construya de la misma manera.

¿Te parece sorprendente?

(a) Construye varias sucesiones distintas que se cumplan como la de Fibonacci y comprueba que siempre sucede el truco.

(b) Intenta probar por qué sucede.

Problema de los conejos

(1) Supongamos que tenemos una pareja de conejos (macho y hembra) de un mes de edad que aún no pueden reproducirse, pero que podrán hacerlo cuando cumplan dos meses de edad.

(2) Supongamos también que cada mes, a partir del segundo, nace una nueva pareja de conejos (macho y hembra).

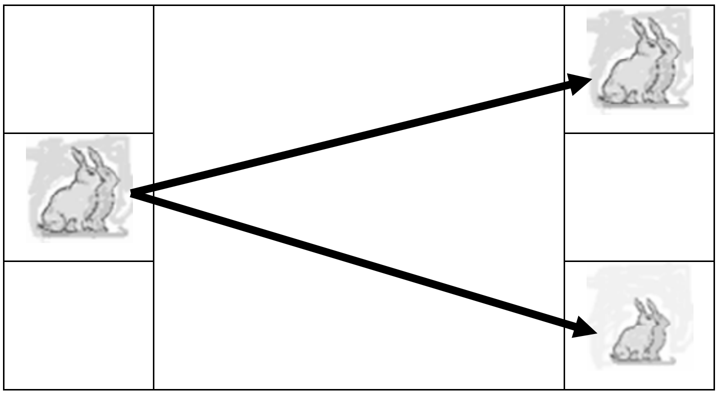
(3) Si cada pareja de conejos se reproduce de la misma forma que la pareja inicial, ¿cuántas parejas habrá al principio de cada mes?

Analicemos la solución del problema:

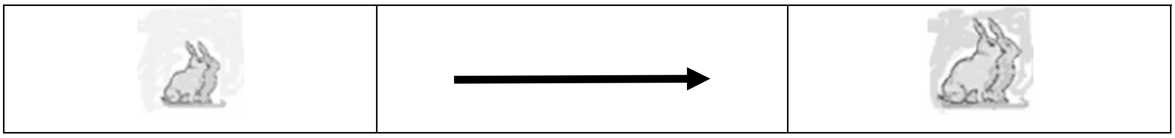
	Pareja capaz de reproducirse
	Pareja joven que no se reproduce

								1
								1
								2
								3
								5
								8

Suponiendo que no se mueren, las parejas viven de la siguiente manera:



Cada pareja capaz de reproducirse, pasa ella misma al siguiente mes y además procrea una nueva pareja.



Cada pareja joven, se vuelve una pareja madura capaz de reproducirse.

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el trabajo escrito, evaluar coherencia y dominio cognitivo.
4. Entregar por escrito la sucesión de Fibonacci expresada mediante una fórmula de recurrencia.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión de clase iniciaremos el estudio de las sucesiones o progresiones aritméticas. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Sucesiones Aritméticas”.

Actividad No. 4

En esta actividad estudiaremos una de las sucesiones más importantes en matemática la cual tiene aplicación en otras disciplinas así como en la vida real.

Tema

Sucesión

Sumario

Sucesiones aritméticas.

Materiales

1. Documento.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El concepto de sucesión aritmética y sus elementos y la obtención de la fórmula para el cálculo del n – ésimo término, se establecerá a partir de la resolución de un ejercicio guiado y orientado por el profesor.
3. Síntesis del profesor acerca del tema sucesiones aritméticas.
4. Discutir y analizar en conjunto profesor – estudiantes los ejercicios resueltos.
5. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
7. Entregar por escrito las conclusiones obtenidas.

Desarrollo

A. ACTIVIDAD A REALIZAR POR LOS/AS ESTUDIANTES

Plantearle a cada grupo de estudiantes la siguiente situación:
"Martha iniciará una etapa de preparación atlética en vista a las competencias intercolegiales que se efectuarán en octubre del corriente año. Su entrenador le recomienda que, para estar en óptima condiciones corra 10,100 metros, iniciando con una carrera de 500 metros, y que luego cada día corra 400 metros más que el día anterior, hasta llegar a la meta propuesta por el entrenador. ¿Cuántos metros correrá el tercer día de iniciado su entrenamiento? ¿Cuánto correrá el noveno día? ¿En qué día alcanzará la meta propuesta por el entrenador para que Martha esté en óptimas condiciones?"

Después de planteada la situación, y de haberla discutido en grupos, le solicitamos a cada grupo que den las respuestas y el procedimiento que utilizaron para obtenerla. Seguidamente, se le pide a uno de los/as estudiantes que pase a la pizarra, y escriba en ella el proceso empleado por su grupo en la obtención de los metros que recorrió Martha en el tercer día, pidiéndole que desglose lo que corrió en el primer y segundo día hasta llegar al tercer día.

Primer día: 500 metros;

Segundo día: 500 + 400 metros;

Tercer día: 500 + 400 + 400 metros.

A continuación, le pedimos a otro estudiante que pase a la pizarra y continúe con el proceso para llegar a obtener los metros que corrió Martha en el quinto día:

Cuarto día: 500 + 400 + 400 + 400 metros;

Quinto día: 500 + 400 + 400 + 400 + 400 metros.

¿De qué otra forma podemos expresar los resultados obtenidos en relación a los metros corridos por Martha desde su inicio del entrenamiento hasta el noveno día?

500, 900, 1300, 1700, 2100, 2500, 2900, 3300, 3700

En base a lo anterior,

- ¿Cuál es el comportamiento que tienen los términos?
- ¿Cómo se obtienen los términos siguientes?

A esos tipos de sucesiones se les llaman *sucesiones aritméticas*.

Proponer a los/as estudiantes a que realicen lo siguiente basándose en los resultados obtenidos:

1. ¿Cómo explicarían el proceso utilizado en la obtención del día en que Martha corrió los 10100 metros? Si en un dado caso, no le fue posible, se le orienta auxiliarse en lo siguiente:

   Primer día: 500

   Segundo día: 500 + 400

   Tercer día: 500 + 400 + 400

   Cuarto día: 500 + 400 + 400 + 400

   Quinto día: 500 + 400 + 400 + 400 + 400

   ………………………………………………

2. Observen las características que tiene cada día en relación a los metros corridos por Martha, y en base a esas características simplifique:

Primer día: 500

Segundo día: $500 + 1 \cdot 400$

Tercer día: $500 + 2 \cdot 400$

Cuarto día: $500 + 3 \cdot 400$

Quinto día: $500 + 4 \cdot 400$

……………………………………………

3. A partir de la representación anterior (2) deduzcan las características que tienen dichas sumas.

4. Haciendo uso de la notación de sucesión, expresen simbólicamente los términos de ella en función del primer término de la sucesión hasta llegar a obtener el día en que corrió los 10,100 metros.

Primer día: $a_1 = 500$

Segundo día: $a_2 = a_1 + 1 \cdot 400$

Tercer día: $a_3 = a_1 + 2 \cdot 400$

Cuarto día: $a_4 = a_1 + 3 \cdot 400$

Quinto día: $a_5 = a_1 + 4 \cdot 400$

……………………………………………

Vigésimo quinto día: $a_{25} = a_1 + 24 \cdot 400$

5. Si Martha sigue corriendo, escriba la expresión para el trigésimo día, y para el trigésimo quinto día.

Trigésimo día: $a_{30} = a_1 + 29 \cdot 400$

……………………………………………

n – ésimo día: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 400$

6. Habiendo llegado a obtener la fórmula para el n – ésimo término de la sucesión aritmética, la cuál está dada por

$$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot 400$$

Le planteamos las siguientes preguntas a los/as estudiantes con el propósito de interpretar y aplicar dicha fórmula.

- ¿Qué representa en la sucesión el término a_n?
- ¿En qué día corrió Martha 7,300 metros?
- Es posible que, ¿un día determinado Martha haya corrido 8,000 metros?

7. En base a los resultados que se obtuvieron, solicitarle a los/as estudiantes que:

- Analicen la relación que existe entre el subíndice de cada término y el coeficiente del factor común que aparece en los productos.

8. Dada la siguiente sucesión aritmética

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

Representen cada término de la sucesión en base a la relación existente entre los subíndices de cada término y el factor que multiplica a la cantidad constante, designando por d dicha cantidad.

a_1

$a_2 = a_1 + (2 - 1)d$

$a_3 = a_1 + (3 - 1)d$

$a_4 = a_1 + (4 - 1)d$

$a_5 = a_1 + (5 - 1)d$

…………………

$a_{11} =$ ¿?

…………………

$a_{50} =$ ¿?

…………………

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

¿Qué representa el subíndice n? ¿Qué representa la cantidad constante d?

B. SINTESIS DEL PROFESOR

En la sucesión

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, ...,$$

nótese que cada término, después del primero, se obtiene sumando el número 3 al término anterior. En otras palabras, los términos sucesivos de la sucesión difieren en 3. Una sucesión de este tipo se conoce como *sucesión aritmética* o *progresión aritmética*.

Definición (Sucesión aritmética)

Una sucesión, tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para n = 1, 2, 3, ..., tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama sucesión aritmética o progresión aritmética. El número d se llama diferencia aritmética de la sucesión.

De $a_{n+1} - a_n = d$, obtenemos la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad (1)$$

para una sucesión aritmética con diferencia d.

Ejemplo 1

(a) Las sucesiones –7, –2, 3, 8, 13, ..., y $\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{18}{2}$, ..., son sucesiones aritméticas con diferencia –2 – (–7) = 5 y $\frac{2}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$, respectivamente.

(b) La sucesión definida por

$$a_1 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{con} \quad n \geq 1$$

es

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, ...$$

Esta sucesión es aritmética y su diferencia es 7 – 3 = 4.

Dada una sucesión aritmética, se sabe que

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

para todo entero positivo n, y se obtiene mediante dicha fórmula de recurrencia que:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d,$$

$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d,$

y así sucesivamente. En general, el término n-ésimo a_n de una sucesión aritmética con primer término a_1 y diferencia aritmética d está dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad (8)$$

Ejemplo 2

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Calcular el décimo quinto término.

Solución

La diferencia aritmética d es

$d = 16.5 - 20 = -3.5$

Sustituyendo $n = 15$, $d = -3.5$ y $a_1 = 20$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se tiene

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5),$$

$$a_{15} = 20 + (14)(-3.5),$$

$$a_{15} = 20 + (-49),$$

$$a_{15} = -29$$

El décimo quinto término es –29.

Ejemplo 3

El cuarto término de una sucesión aritmética es 5, y el noveno es 20. Calcular el sexto término.

Solución

Los datos son

$a_4 = 5,\ a_9 = 20,\quad a_6 = ?$

Para a_4:

$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d,$$

$$5 = a_1 + 3d \qquad \text{(i)}$$

Para a_9:

$$a_9 = a_1 + (9 - 1)d,$$

$$20 = a_1 + 8d \qquad \text{(ii)}$$

De (i) y (ii) formamos el siguiente sistema:

$$5 = a_1 + 3d$$
$$20 = a_1 + 8d$$

Resolviendo el sistema para a_1 y d, se obtiene

$a_1 = -4$ y $d = 3$

Sustituyendo $a_1 = -4$ y $d = 3$ en $a_6 = a_1 + (6 - 1)d$, se tiene que

$$a_6 = -4 + 5(3),$$
$$a_6 = -4 + 15$$
$$a_6 = 11$$

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el trabajo escrito, presentación, coherencia y dominio cognitivo.

Orientación de la próxima actividad

En la próxima clase, se dedicará a la resolución de ejercicios por parte de los/as estudiantes.

Actividad No. 5

La siguiente actividad tiene como propósito comprobar el dominio que tienen los/as estudiantes acerca de las sucesiones aritméticas.

Tema

Sucesiones aritméticas

Contenido

Ejercicios.

Materiales

1. Hoja de ejercicios.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. Orientar la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
4. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
5. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

Desarrollo

RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Para la resolución de los ejercicios que se proponen en esta actividad es necesario recordar:

(a) EL concepto de sucesión aritmética.

(b) La fórmula para obtener el n-ésimo término de una sucesión aritmética.

Ejercicios

I. Precise la cantidad solicitada de la sucesión aritmética.

(a) $a_1 = 4$, $d = 3$; encuentre a_7

(b) $a_1 = -6$, $d = -1$; encuentre a_{18}

(c) $a_1 = 5$, $a_8 = -21$; encuentre d

(d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_7 = \frac{19}{2}$, encuentre d

(e) $a_1 = 4$, $a_n = 28$, $d = 3$, encuentre n

(f) $a_1 = -2$, $a_n = -20$, $d = -3$, encuentre n

II. Calcule el número de términos de cada sucesión.

(a) 1, 4, 7, 10, ..., 43

(b) –8, –6, –4, –2, ..., 42

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, ..., \frac{17}{2}$

(d) $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{6}, -\frac{11}{6}, ..., -\frac{21}{6}$

III. El señor Moreno obtiene un salario inicial de C$ 20,000.00 y le prometen que recibirá un aumento de C$ 1,000.00 al final de cada año, durante 5 años.

(a) Exprese una sucesión que muestre su salario para los siguientes cinco años.

(b) ¿Cuál es el término general para esta sucesión?

IV. Un objeto desciende 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercer segundo, etc. ¿A qué distancia se encontrará en el décimo segundo?

V. Cada vez que un balón rebota alcanza una altura de 6 pulgadas menor que la altura previa lograda. Si su primer rebote alcanza una altura de 6 pies, determine la altura lograda en el onceavo rebote.

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. En el trabajo escrito, presentación, coherencia, orden lógico y dominio cognitivo.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión estudiaremos otra sucesión importante y muy conocida en matemáticas: “Sucesiones Geométricas”. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Sucesiones Geométricas”.

Actividad No. 6

En esta actividad estudiaremos otra sucesión importante y muy conocida en matemática la cual tiene aplicación en otras disciplinas así como en la vida real.

Tema

Sucesiones

Sumario

Sucesiones geométricas.

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.

5. Marcadores permanentes.
6. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El concepto de sucesión geométrica y sus elementos y la obtención de la fórmula para el cálculo del n – ésimo término, se hará a partir de la resolución de un ejercicio guiado y orientado por el profesor.
3. Síntesis del profesor acerca del tema sucesiones geométricas.
4. Discutir y analizar en conjunto profesor – estudiantes los ejercicios resueltos.
5. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.

Desarrollo

A. ACTIVIDAD A REALIZAR POR LOS/AS ESTUDIANTES

Plantearle a cada grupo de estudiantes la siguiente situación:

> "El número de bacterias que hay en un cierto cultivo se duplica cada hora. Si el número inicial de bacterias es de 20,000. ¿Cuántas hay al cabo de una hora? ¿De tres horas? ¿De cinco horas? Obtenga una fórmula para el número de bacterias después de n horas"

Después de planteada la situación, y de haberla discutido en grupos, se le pide a uno de ellos que dé las respuestas de las preguntas planteadas, y el procedimiento utilizado en la obtención de la cantidad de microorganismos al cabo de una hora, tres horas y cinco horas.

Cantidad inicial:	20,000	
Al cabo de una hora:	2(20,000)	= 40,000
Al cabo de dos horas:	2(40,000)	= 80,000

Al cabo de tres horas: 2(80,000) = 160,000

Al cabo de cuatro horas: 2(160,000) = 320,000

Al cabo de cinco horas: 2(320,000) = 640,000

¿De qué otra forma puede expresan los resultados obtenidos?

20 000, 40 000, 80 000, 160 000, 320 000, 640 000, …

Orientaremos a cada grupo a que determinen el comportamiento que tienen los términos de esa colección, y llegar a formular con ayuda nuestra que colecciones ordenadas de números en donde el término siguiente se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad constante se les llaman *sucesiones geométricas*.

¿Qué nombre recibe esa cantidad constante?

A continuación, se le orienta a cada grupo a que representen cada uno de los términos de la colección en términos de la cantidad inicial de microorganismos, y cada coeficiente de la cantidad inicial en términos de una potencia entera.

20 000, 2(20 000), 4(20 000), 8(20 000), 16(20 000), 32(20 000),…

O bien,

$$2^0 \cdot 20\,000,\ 2^1 \cdot 20\,000,\ 2^2 \cdot 20\,000,\ 2^3 \cdot 20\,000,\ 2^4 \cdot 20\,000,\ 2^5 \cdot 20\,000, \ldots$$

Orientar a los/as estudiantes a que hagan uso de la notación empleada en sucesiones para que analicen la relación existente entre los subíndices que representan cada uno de los términos de ella con el exponente de la potencia de 2; después de ese análisis se le orienta que escriban cada término de la colección en términos de la notación usada para representar los términos de una sucesión, esto le ayudará a determinar la fórmula para el n – ésimo término de una sucesión geométrica:

$a_1 = 20\,000$

$a_2 = 2^1 \cdot 20\,000 = 2^1 \cdot a_1 = 2^{2-1} \cdot a_1$

$a_3 = 2^2 \cdot 20\,000 = 2^2 \cdot a_1 = 2^{3-1} \cdot a_1$

$a_4 = 2^3 \cdot 20\,000 = 2^3 \cdot a_1 = 2^{4-1} \cdot a_1$

$a_5 = 2^4 \cdot 20\,000 = 2^4 \cdot a_1 = 2^{5-1} \cdot a_1$

……………………………..

$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1$

Habiendo obtenido la fórmula para el n – ésimo término de nuestra colección, le planteamos a los/as estudiantes las siguientes interrogantes para que hagan uso de dicha fórmula.

- ¿Al cabo de cuántas horas habrán 128 000 bacterias?
- ¿Es posible encontrar una cantidad de 500 000 microorganismos al cabo de determinada hora?

Dada la siguiente sucesión geométrica

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

- Exprese cada término en función del primero de la razón.
- Obtenga la fórmula del n – ésimo término.

B. SINTESIS DEL PROFESOR

En la sucesión 1, 3, 9, 27, 81, ..., cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por el número 3. En este caso, observamos que la razón de un término con el término anterior es una constante, digamos, 3. Se dice que una sucesión de este tipo es una sucesión geométrica o progresión geométrica.

Definición (Sucesión geométrica)

Una sucesión cuyos términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para n = 1, 2, 3, ..., tiene una razón fija $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, se llama sucesión geométrica o progresión geométrica.

De $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, vemos que una progresión geométrica con una razón r se define mediante la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n \cdot r \qquad (1)$$

Ejemplo 1

La sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad y \quad a_{n+1} = -3 \cdot a_n \quad con \quad n \geq 1$$

es

$$2, -6, 18, -54, \ldots$$

Esta es una sucesión geométrica con razón $r = -\frac{6}{2} = -3$.

Si tenemos $a_1 = a$ como primer término de una sucesión geométrica con razón r, encontramos a partir de la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

se tiene

$$a_2 = a_1 \cdot r = a \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a \cdot r \cdot r = a \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a \cdot r^2 \cdot r = a \cdot r^3$$

$a_5 = a_4 \cdot r = a \cdot r^3 \cdot r = a \cdot r^4$, y así sucesivamente. En general, el término n-ésimo de una sucesión geométrica con primer término a y razón r, es

$$a_n = a \cdot r^{n-1} \qquad (10)$$

Ejemplo 2

Encuentre el tercer término de una sucesión geométrica con razón $\frac{2}{3}$ y sexto término $\frac{128}{81}$

Solución

Primero encontremos a. Puesto que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos de $a_n = a \cdot r^{n-1}$ que

$$a_6 = a \cdot r^{6-1} \Rightarrow \frac{128}{81} = a\left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow \frac{2^7}{3^4} = a\frac{2^5}{3^5} \Rightarrow a = \frac{2^7 \cdot 3^5}{2^5 \cdot 3^4} \Rightarrow a = 2^2 \cdot 3$$

$$a = 12$$

Aplicando $a_n = a \cdot r^{n-1}$ con n = 3, tenemos

$$a_3 = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} \Rightarrow a_3 = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow a_3 = 12 \cdot \frac{2^2}{3^2} \Rightarrow a_3 = 12 \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow a_3 = \frac{16}{3}$$

El tercer término de la sucesión es $\frac{16}{3}$.

Ejemplo 3

El tercer término de una sucesión geométrica es 5, y el sexto es –40. Hallar el octavo término.

Solución

Los datos son $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$. Se desea calcular a_8. Los siguientes sistema de ecuaciones, con variables a y r son equivalentes.

$$\begin{cases} a_3 = a \cdot r^{3-1} \\ a_6 = a \cdot r^{6-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a \cdot r^{2} \\ -40 = a \cdot r^{5} \end{cases}$$

Despejando a de la primera ecuación se tiene $a = \frac{5}{r^2}$, y sustituyéndola en la segunda ecuación, tenemos

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5 \Rightarrow -40 = 5 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 = -8 \Rightarrow r = -2$$

Se sustituye $r = -2$, en $a = \frac{5}{r^2}$, y se obtiene

$$a = \frac{5}{(-2)^2} \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

Para obtener el octavo término $a = \frac{5}{4}$ y $n = 8$. Luego,

$$a_8 = a \cdot r^{8-1} \Rightarrow a_8 = \frac{5}{4} \cdot (-2)^7 \Rightarrow a_8 = \frac{5}{4} \cdot (-128) \Rightarrow a_8 = -160$$

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el reporte escrito, presentación, coherencia, orden lógico.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión, la dedicaremos a la resolución de ejercicios por parte de los/as estudiantes.

Actividad No. 7

La siguiente actividad tiene como propósito comprobar si el aprendizaje de los/as estudiantes referentes a los contenidos relativos a sucesiones geométricas fue significativo.

Tema

Sucesiones geométricas

Sumario

Ejercicios

Materiales

1. Hoja de ejercicios.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.

2. Orientar la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
4. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
5. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

Desarrollo

RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Para la resolución de los ejercicios que se proponen en esta actividad es necesario recordar:

(a) EL concepto de sucesión geométrica.

(b) La fórmula para obtener el n-ésimo término de una sucesión geométrica.

Ejercicios

1. Proliferación de bacterias. El número de bacterias en determinado cultivo es, inicialmente, 500, y se duplica cada día.
   (a) Calcule el número de bacterias presentes después de uno, dos y tres días.
   (b) Deduzca la fórmula del número de bacterias presentes después de n días.
2. La sucesión de Fibonacci. La definición recurrente de la sucesión de Fibonacci es

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \text{ para } k \geq 2$$

   (a) Calcule los primeros diez términos de la sucesión.
   (b) Los términos de la sucesión $r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ producen mejores aproximaciones progresivas a τ, la razón áurea. Calcule los primeros diez términos de esta sucesión.

3. Calcule el quinto, octavo y n-ésimo término de la sucesión geométrica.

(a) 8, 4, 2, 1, ...	(b) 4, 1.2, 0.36, 0.108, ...	(c) 300, -30, 3, -0.3, ...
(d) $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \ldots$	(e) 5, 25, 125, 625, ...	(f) 2, 6, 18, 24, ...
(g) $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$	(h) $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$	(i) $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

4. Determine el sexto término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son 4 y 6.

5. Determine el séptimo término de la sucesión geométrica cuyo segundo y tercer término son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

6. Dada una sucesión geométrica tal que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, calcule r y a_{10}.

7. Dada una sucesión geométrica tal que $a_2 = 3$ y $a_5 = -81$, calcule r y a_9.

8. Cierto cultivo tiene inicialmente 10,000 bacterias y aumenta 20% cada hora. Deduzca una fórmula para el número de bacterias N(t) que hay al haber transcurrido t horas.

9. Se observa que la población de cierta comunidad aumenta geométricamente en un factor de $\frac{3}{2}$ cada año. Si la población es de 1,000 al comienzo del primer año, halle la población al comienzo del undécimo año.

10. Una pareja de ratones tiene dos crías: un macho y una hembra en un mes. Las crías a su vez, maduran en un mes y tienen un par de crías al siguiente mes, y así sucesivamente. Suponiendo que cada pareja de ratones maduros tiene un par de crías cada mes, ¿cuántos pares de ratones habrá después de ocho meses? Halle una fórmula de recurrencia que dé el número de pares de ratones maduros que habrá en el n-ésimo mes.

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. En el trabajo escrito, presentación, coherencia, orden lógico y dominio cognitivo.
3. Entregar resuelto de manera individual el siguiente problema:
   “Todas las personas tienen dos padres. Determine cuántos tatara-tatarabuelos tendrá una persona”

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión estudiaremos la notación sigma, notación importante en matemática y que la utilizaremos en los temas relacionados a series. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Notación Sigma”.

Actividad No. 8

En esta actividad desarrollaremos las series aritméticas importante en la matemática, en otras disciplinas y en la vida real.

Tema

Series

Sumario

Series aritméticas

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.
6. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El concepto de serie aritmética y la obtención de la fórmula para el cálculo de la suma finita, se hará a partir de la resolución de un ejercicio guiado y orientado por el profesor.
3. Síntesis del profesor acerca del tema series aritméticas.
4. Discutir y analizar en conjunto profesor – estudiantes los ejercicios resueltos.
5. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
7. Entregar por escrito las conclusiones obtenidas en el desarrollo de la actividad.

Desarrollo

A. ACTIVIDAD A REALIZAR POR LOS/AS ESTUDIANTES

Plantearle a cada grupo de estudiantes la siguiente situación:
"Martha iniciará una etapa de preparación atlética en vista a las competencias intercolegiales que se efectuarán en octubre del corriente año. Su entrenador le recomienda que, para estar en óptima condiciones corra 10,100 metros, iniciando con una carrera de 500 metros, y que luego cada día corra 400 metros más que el día anterior, hasta llegar a la meta propuesta por el entrenador. ¿Cuántos metros corrió desde que inició su entrenamiento hasta el día en que corrió los 10 100 metros?"

Después de planteada la situación, y de haberla discutido en grupos, le solicitamos a cada grupo que den las respuestas y el procedimiento que utilizaron para obtenerla. Si en un dado caso, el procedimiento utilizado por los/as estudiantes consistió en determinar los metros que corrió cada día, y después sumar dichos totales, entonces se le reorientará el trabajo de tal manera que le facilite los cálculos y le permita deducir una fórmula para encontrar ese total que corresponderá a una suma finita.

Este procedimiento consistirá en:

- Escribir la colección de metros corrido por Martha desde el inicio de su entrenamiento hasta el día en que corrió los 10 100 metros.
- Indicar la suma de los términos de esa colección y represente dicha suma por algún símbolo que le indique los números de términos que se han sumado.
- Escribir cada suma, ordenando del primer término al último, y viceversa.
- Siguiendo este procedimiento los/as estudiantes llegarán a obtener lo siguiente:

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (500 + 400)}{2}$$

- ¿Qué representa esa suma?

A partir del resultado anterior, proponemos a los/as estudiantes que traten de generalizar la suma finita de una sucesión aritmética en base a las características presentadas en la suma de los veinticinco primeros términos de la sucesión anterior, hasta que lleguen a obtener la fórmula para el cálculo de la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética en general.

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

B. SINTESIS DEL PROFESOR

Series aritméticas

Sea a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n , ..., una sucesión aritmética con diferencia aritmética d. entonces, la sucesión aritmética también puede escribirse como

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots , a_1 + (n - 1) d, \ldots$$

y la suma de los primeros n términos, es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[a_1 + (k-1)d\right] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [(a_1 + (n-1)d] \qquad \text{(a)}$$

es llamada serie aritmética. Si denotamos al último término de (a) por a_n; es decir,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

entonces

$$a_1 = a_n - (n-1)d,$$

y sustituyéndolo en (a), obtenemos

$$S_n = [a_n - (n-1)d] + ... + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \qquad \text{(b)}$$

Invirtiendo los términos de (a), se tiene

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + ... + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \qquad \text{(c)}$$

Sumando (b) y (c), obtenemos

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{\text{n - veces}}$$

$$2S_n = n\cdot(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n\cdot\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \qquad \text{(d)}$$

En otras palabras, la suma de los primeros n términos (n-ésima suma parcial) de una sucesión aritmética es n veces el promedio de los términos primero y n-ésimo de la sucesión.

Ejemplo 1

Calcular la suma de todos los enteros pares desde 2 a 100.

Solución

Este problema equivale a calcular la suma de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n, ...$$

Sustituyendo $n = 50$, $a_1 = 2$ y $a_{50} = 100$ en $S_n = n\cdot\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$, se obtiene

$$S_{50} = 50\cdot\left(\frac{2+100}{2}\right) \Rightarrow S_{50} = 50\cdot\left(\frac{102}{2}\right) \Rightarrow S_{50} = (50)(51) \Rightarrow S_{50} = 2{,}550$$

La suma de todos los enteros pares desde 2 a 100 es, 2,550.

Ejemplo 2

El primer término de una sucesión aritmética es 4, y el último término es 31. Si $S_n = 175$, encuéntrese el número de términos de la sucesión y la diferencia aritmética.

Solución

(i) Para obtener el número de términos de la sucesión, sustituimos $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $S_n = 175$ en $S_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$, y se obtiene

$$175 = n \cdot \left(\frac{4+31}{2} \right) \Rightarrow 175 = n \cdot \left(\frac{35}{2} \right) \Rightarrow n = \frac{(2)(175)}{35} \Rightarrow n = 10$$

Concluimos que la sucesión tiene 10 términos.

(ii) Para encontrar la diferencia aritmética, sustituimos $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $n = 10$, en la expresión $a_n = a_1 + (n - 1)d$, y se obtiene

$$31 = 4 + (10 - 1)d \Rightarrow 31 = 4 + 9d \Rightarrow 9d = 27 \Rightarrow d = 3$$

Por lo tanto, la diferencia aritmética es, 3.

Ejemplo 3

Una mujer desea pagar un préstamo libre de interés de \$ 1,300.00, cancelando \$ 10.00 el primer mes y aumentando su pago en \$ 15.00 cada mes. ¿En cuántos meses pagará la totalidad del préstamo? Halle la totalidad del último pago.

Solución

Los pagos mensuales forman una progresión aritmética con el primer término $a_1 = 10$, y diferencia aritmética $d = 15$. Puesto que la suma de la serie aritmética formada por la secuencia de pagos es \$ 1,300.00, establecemos que $S_n = 1{,}300$. Sabemos que

$$S_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right),$$

pero, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, y sustituyéndolo en S_n, se obtiene

$$S_n = n \cdot \left(\frac{2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d}{2} \right)$$

Luego,

$$1300 = n \cdot \left(\frac{2 \cdot (10) + (n-1) \cdot 15}{2} \right) \Rightarrow 2600 = n(20 + 15n - 15) \Rightarrow 2600 = n(15n + 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2600 = 5n(3n + 1) \Rightarrow n(3n + 1) = 520 \Rightarrow 3n^2 + n = 520 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n^2 + n - 520 = 0 \Rightarrow (3n + 40)(n - 13) = 0$$

Así, $n = -\frac{40}{3}$, o bien, n = 13. Puesto que n debe ser positiva, concluimos que empleará trece meses en pagar el préstamo.

El pago final, será

$$a_{13} = 10 + (13 - 1)15 = 10 + (12)(15) = 10 + 180 = 190 \text{ dólares.}$$

Ejemplo 4

Cada oscilación de un péndulo es 3 pulgadas menor que su oscilación anterior. La primera oscilación es de 8 pies.

(a) Calcule la longitud de la doceava oscilación.

(b) Determínese la distancia total recorrida por el péndulo durante las primeras doce oscilaciones.

Solución

(a) Ya que cada oscilación disminuye en una cantidad constante, este problema puede representarse como una sucesión aritmética, donde el primer término es $a_1 = 8$, la diferencia corresponde al decremento pero como la primera oscilación está dada en pies y el decremento en pulgadas se cambiarán 3 pulgadas a 0.25 pies (3÷12 = 0.25). La doceava oscilación puede considerarse como a_{12}. Sustituyendo estos valores en $a_n = a_1 + (n - 1)d$, se obtiene

$a_{12} = 8 + (12 - 1)(-0.25) \Rightarrow a_{12} = 8 + (11)(-0.25) \Rightarrow a_{12} = 8 + (-2.75) \Rightarrow a_{12} = 5.25$

La longitud de la doceava oscilación es 5.25 pies. Obsérvese que la diferencia aritmética d es negativa ya que la distancia disminuye en cada oscilación.

(b) La distancia total recorrida durante las primeras doce oscilaciones puede obtenerse con la fórmula $S_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$. Entonces,

$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{8 + 5.25}{2}\right) \Rightarrow S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{13.25}{2}\right) \Rightarrow S_{12} = (6)(13.25) \Rightarrow S_{12} = 79.5$

El péndulo recorre un total de 79.5 pies durante sus primeras doce oscilaciones.

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el trabajo escrito, presentación, coherencia y dominio cognitivo.

Orientación de la próxima actividad

En la próxima clase, se dedicará a la resolución de ejercicios por parte de los/as estudiantes.

Actividad No. 9

La siguiente actividad tiene como propósito comprobar si el aprendizaje de los/as estudiantes referentes a los contenidos de series aritméticas es significativo.

Tema

Series aritméticas

Sumario

Ejercicios

Materiales

1. Hoja de ejercicios.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. Orientar la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
4. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
5. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

Desarrollo

RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Para la resolución de los ejercicios que se proponen en esta actividad es necesario recordar:

(a) EL concepto de serie aritmética.

(b) La fórmula para obtener la n-ésima suma parcial de una sucesión aritmética.

Ejercicios

1. Si $\{ a_n \}$ es una sucesión aritmética con $a_1 = 4$ tal que $S_8 = 86$, halle a_8 y d.

2. Suponga que $a_1 = 5$ y $a_n = 45$ son los términos primero y n-ésimo de una serie aritmética para la cual $S_n = 2{,}000$. Halle n.

3. Halle la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética y, $\frac{x+3y}{2}$, $x + 2y$, ...

1. Halle la suma de los números enteros entre 7 y 1,610 que son divisibles por 6.

2. Un almacenista de víveres necesita colocar comida enlatada para perros en una pirámide con 20 latas en la fila que sirve de base, 19 en la siguiente, 18 en la siguiente, y así sucesivamente, con una sola lata en la última fila. ¿Cuántas latas de comida para perros necesita para disponerlos de esta forma?

3. El peldaño de una escalera tiene 30 centímetros de largo, y el peldaño superior tiene 15 centímetros de largo. Si hay 17 peldaños, ¿cuántos centímetros de material para peldaño son necesarios para hacer la escalera, suponiendo que no hay desperdicios?

4. Un reloj suena una vez a las 13:00 horas, dos veces a las 14:00, y así sucesivamente. ¿Cuántas veces ha sonado entre las 10:30 horas del lunes y las 22:30 horas del martes?

5. Si Raúl gana C$ 10.00 el primero de enero, C$ 20.00 el dos de enero, C$ 30.00 el tres de enero, y así en adelante, ¿cuánto dinero ganó durante el mes de enero?

6. Una pila de leños tiene 70 en la capa inferior, 69 leños en la siguiente capa, y así en adelante, en la capa superior hay 10 leños. ¿Cuántos leños hay en la pila?

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo en el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. Entregar resuelto los ejercicios.
4. Resolver los siguientes ejercicios y entregarlo en la próxima actividad:
   (a) Halle una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos pares.
   (b) Halle una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos impares.
   (c) En una sección de palco del estadio de béisbol de la ciudad de Chinandega, hay 26 asientos en la primera fila, 28 en la segunda, 30 en la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a la última fila que es la décima. Nos interesa saber el porcentaje del total de entrada que representa la sección de dicho palco, si cada asiento se vende a un precio de C$ 30.00, y el total de entrada es de C$ 60,000.00.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente clase estudiaremos otro tema importante de las matemáticas debido a sus múltiples aplicaciones en otros campos del saber humano: “Series Geométricas”. Orientarle a los grupos de estudiantes a que lean, discutan y analicen en el documento de estudio “Series Geométricas”.

Actividad No. 10

En esta actividad enunciaremos el concepto de Series Geométricas, deduciremos la fórmula para obtener la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica y veremos algunas aplicaciones en otras disciplinas y en la vida real.

Tema

Series

Sumario

Series geométricas

Materiales

1. Documento de estudio.
2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.

5. Marcadores permanentes.
6. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El concepto de serie geométrica y la obtención de la fórmula para el cálculo de la suma, se hará a partir de la resolución de un ejercicio guiado y orientado por el profesor.
3. Síntesis del profesor acerca del tema series geométricas.
4. Discutir y analizar en conjunto profesor – estudiantes los ejercicios resueltos.
5. Aclaración de dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.

Desarrollo

A. ACTIVIDAD A REALIZAR POR LOS/AS ESTUDIANTES

Plantearle a cada grupo de estudiantes la siguiente situación:
"Cuando el rey de Persia aprendió a jugar ajedrez estaba tan contento con el juego que determinó recompensar al inventor, un hombre llamado Sessa. Llamaron a Sessa al palacio, el rey prometió cumplirle cualquier petición que hiciera. Con un aire de modestia, Sessa astutamente pidió un grano de trigo por el primer cuadrado del tablero de ajedrez, dos por el segundo, cuatro por el tercero y así sucesivamente. El rey estaba divertido con tal petición excéntrica; no obstante, llamó a un sirviente y le dijo que consiguiera un costal de trigo y empezara a contar. ¿Cumplió el rey la petición de Sessa?"

Se le propone a los/as estudiantes que:

1. Ilustren mediante una figura la petición que hizo Sessa al rey.
2. Enumeren los términos de la sucesión.
3. Indiquen la petición de Sessa.

Las respuestas por parte de los/as estudiantes, serían:

Sucesión geométrica: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{63}$

Petición de Sessa: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$

A continuación, preguntamos a los/as estudiantes de qué manera podrían obtener dicha suma. Si en un dado caso no le es posible determinar dicha suma, orientamos la siguiente actividad, la cual nos permitirá determinar la suma finita de cualquier sucesión geométrica, planteándoles a los/as estudiantes el siguiente procedimiento:

4. Considérese una sucesión geométrica finita, expresando cada término de ella en función de la notación utilizada para sucesiones aritméticas.

5. Exprese los términos de dicha sucesión a partir del segundo en función del primero y de la razón r.
6. Indique la suma de los términos de dicha sucesión y represéntelo mediante un símbolo el cuál indique el número de términos a sumar.

7. Utilice procedimientos algebraicos para llegar a la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r}; \quad r \neq -1$$

8. ¿Por qué $r \neq 1$ en la fórmula de S_n?

9. Si en la fórmula S_n es $r = 1$, ¿a qué es igual S_n?

B. SINTESIS DEL PROFESOR

Series geométricas

Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión geométrica de razón r y hallemos la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Primeramente, reescribimos S_n en términos de $a_1 = a$ y la razón r:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

Multipliquemos por la razón r ambos miembros de la igualdad anterior y obtenemos:

$$r \cdot S_n = a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \ldots + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n$$

Restamos esta expresión a la primera igualdad y obtenemos:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Entonces,

$$(1 - r)S_n = a(1 - r_n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

En consecuencia, la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

es

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ si } r \neq 1$$

Ejemplo 1

Calcule la suma $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$

Solución

Esta es una serie geométrica con el primer término a = 3, y una razón $r = \frac{1}{2}$. Siendo n = 6 en (5), tenemos

$$S_6 = \frac{3 \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_6 = \frac{3 \cdot \left[1 - \frac{1}{64}\right]}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_6 = 6 \cdot \left(\frac{63}{64}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{189}{32}$$

Entonces, la suma de dicha serie geométrica es, $\frac{189}{32}$

Ejemplo 2

Un hombre desea ahorrar aportando C$ 1.00 el primer día, C$ 2.00 el segundo, C$ 4.00 el tercero, y así sucesivamente.

(a) Si continúa duplicando la cantidad que aporta cada día, ¿cuánto debe aportar en el décimo quinto día?

(b) Suponiendo que no se le acabe el dinero, ¿cuál es la cantidad total que ahorra al término de 30 días?

Solución

(a) La cantidad en córdobas que se aporta en días sucesivos forman una sucesión geométrica:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

cuyo primer término es 1 y cuya razón es 2. Para calcular la cantidad aportada en el décimo quinto día, se usa la expresión $a_n = ar^{n-1}$, con $a = 1$, $r = 2$ y $n = 15$. Entonces,

$$a_{15} = (1)(2)^{15-1},$$

$$a_{15} = 2^{14},$$

$$a_{15} = 16{,}384$$

Por consiguiente, en el décimo quinto día debe aporta C$ 16,384.00.

(b) Para calcular la cantidad total ahorrada al cabo de 30 días, se aplica la fórmula

$S_n = \dfrac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$, con $n = 30$, y se obtiene, en córdobas,

$$S_{30} = \frac{(1)\cdot(1-2^{30})}{1-2}$$

$$S_{30} = 1\,073\,341\,823$$

Entonces, la cantidad total que ahorra al cabo de 30 días es C$ 1, 073, 341, 823.00

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo durante el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En las conclusiones obtenidas evaluar: presentación, coherencia, orden lógico y cientificidad.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión está dedicada a la resolución de ejercicios y problemas relativos a series geométricas. La resolución de ejercicios por parte de los/as estudiantes estará supervisada y orientada por el profesor.

Actividad No. 11

La siguiente actividad tiene como propósito comprobar si el aprendizaje de los/as estudiantes referentes a los contenidos de series geométricas es significativo.

Tema

Series geométricas

Sumario

Ejercicios

Materiales

1. Hoja de ejercicios.
2. Papel.
3. Lapiceros.

4. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. Orientar la resolución de los ejercicios propuestos.
3. Aclaración de dudas que surjan durante el desarrollo de la actividad.
4. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
5. Entregar resuelto los ejercicios propuestos.

Desarrollo

RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS ESTUDIANTES

Para la resolución de los ejercicios que se proponen en esta actividad es necesario recordar:

(a) EL concepto de serie geométricas.

(b) La fórmula para obtener la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica.

Ejercicios

1. En un programa de erradicación de plagas, se sueltan cada día N moscas machos esterilizados, en la población general, y 90% de ellas sobrevivirá un día dado.
   (a) Determine una fórmula para el número de moscas esterilizadas en la población general, n días después del inicio del programa.
   (b) Si el objetivo a largo plazo del programa es mantener en la población 20 000 insectos machos esterilizados, ¿cuántas moscas deben soltarse cada día?

2. Cierto cultivo de bacterias se duplica cada semana. Si ahora hay 100 bacterias, ¿cuántas habrá después de 10 semanas enteras?

3. El padre de María le ofrece dos alternativas a escoger como regalo de cumpleaños. La primera alternativa, consiste en ofrecerle dinero durante los primeros veinte días del mes de diciembre, distribuido de la siguiente manera: un centavo el primero de diciembre, dos

centavos el dos de diciembre, cuatro centavos el tres de diciembre, y así sucesivamente. La segunda alternativa es entregarle C$ 10 000.00 ¿Cuál alternativa le es más favorable escoger a María?

4. Empezando a una distancia de 500 metros, Marlene y Mercedes avanzan caminando una hacia la otra, Marlene a una velocidad de 4 metros por segundo y Mercedes a 6 metros por segundo. El perro de Karina, Ranger, empieza a correr junto con Marlene hacia Mercedes con una velocidad de 12 metros por segundo. Cuando Ranger alcanza a Mercedes se da la vuelta de inmediato y se dirige hacia Marlene, y así en adelante. ¿Cuánto recorrió Ranger durante el tiempo que tardaron en encontrarse Marlene y Mercedes?

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo durante el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En el trabajo escrito, presentación, coherencia, orden lógico y cientificidad.
4. Resolver los siguientes ejercicios y entregarlo en la próxima actividad:
   (a) Una pelota se deja caer de una altura inicial de 10 metros. En cada salto rebota un tercio de su altura previa. Halle la distancia total que la pelota ha recorrido cuando golpea el suelo por séptima vez.
   (b) Un paciente toma 50 mg de una droga cada día y de la cantidad acumulada, 90% se elimina cada día mediante las funciones del cuerpo. Determine cuánta cantidad de droga se ha acumulado en el cuerpo, inmediatamente después de la octava dosis.
   (c) Una sustancia pierde la mitad de su masa por día. Si hay al inicio 300 gramos de la sustancia, determine:

- El número de días después de los cuales quedan solamente 37.5 gramos de la misma.
- La cantidad de sustancia restante después de 8 días.

Orientación de la próxima actividad

En la siguiente sesión abordaremos otro tema conocido e importante de las matemáticas por sus múltiples aplicaciones en otros campos del saber humano: "Series Geométricas Infinitas".

Actividad No. 12

En esta actividad explicaremos el concepto de series geométricas infinitas, deduciremos la suma de una serie geométrica infinita, ejemplificaremos como aplicar dicha fórmula y propondremos una serie de ejercicios y problemas para que sean resueltos por los/as estudiantes.

Tema

Series

Sumario

Series geométricas infinitas

Materiales

1. Documento de estudio.

2. Papel.
3. Lapiceros.
4. Papelógrafo.
5. Marcadores permanentes.
6. Regla.
7. Escuadra.
8. Calculadora.

Procedimiento

1. Formación de grupos.
2. El profesor expondrá lo relacionado a las series geométricas infinitas.
3. En conjunto profesor – estudiantes discutir y analizar los ejercicios resueltos.
4. Orientar la resolución de los ejercicios propuestos.
5. Aclarar dudas surgidas durante el desarrollo de la actividad.
6. Fomentar la participación activa de los/as estudiantes.
7. Entregar por escrito la resolución de los ejercicios propuestos.

Desarrollo

A. EXPOSICION DEL PROFESOR

Series geométricas infinitas

Partiendo de la fórmula $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ donde $-1 < r < 1$, a medida que n se va haciendo muy grande la potencia r^n se va haciendo cada vez más pequeña en valor absoluto (tiende a cero), de manera que se puede despreciar.

Los siguientes ejemplos muestran lo aseverado en el párrafo anterior.

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0.125$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} = -0.03125$

…………………… $\qquad$ …………………………

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1048576} = 0.000000953\ldots$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{20} = -\frac{1}{1048576} = -0.000000953\ldots$

Si el número de términos n es infinito, se tiene entonces:

$$S_\infty = \frac{a(1-r^\infty)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Por tanto, la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica con razón **$-1 < r < 1$** es

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 1

Halle la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Solución

Puesto que $a = 1$ y $r = -\frac{1}{3}$ y $-1 < r = -\frac{1}{3} < 1$; encontramos de que

$$S_\infty = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2

Halle la suma de la serie geométrica infinita

$$3 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \ldots$$

Puesto que $a = 3$ y $r = -\frac{2}{3}$ y $-1 < r = -\frac{2}{3} < 1$; encontramos de que

$$S_\infty = \frac{3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}$$

Ejemplo 3

Calcular el número racional que corresponde al número decimal repetido al infinito $5.4\overline{27}$, en el cual los dígitos bajo la sobreraya se repiten indefinidamente.

Solución

A partir de la expresión decimal 5.4 27 27 27 ..., se obtiene la serie infinita

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \ldots$$

La parte de la expresión que sigue al primer término es

$$0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \ldots$$

es una serie geométrica infinita con $a = 0.027$ y $r = 0.01$. Por consiguiente, la suma S de esa serie geométrica infinita, es

$$S = \frac{0.027}{1-0.01} = \frac{0.027}{0.99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$$

En consecuencia, el número deseado es

$$5.4 + \frac{3}{110} = \frac{597}{110}$$

Ejemplo 4

Se deja caer una pelota de caucho desde 10 metros de altura. Supóngase que rebota y llega hasta la mitad de la altura cada vez. Calcular la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene.

Solución

Si la pelota siempre rebota a la mitad de la altura desde la que cae, entonces teóricamente, nunca se detiene. Sin embargo, la suma de las distancias que recorre hacia abajo, y de las que recorre hacia arriba forma dos series geométricas infinitas:

Serie hacia abajo: $10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \ldots$

Serie hacia arriba: $5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \ldots$

Se supone que la distancia total S que recorre la pelota se puede calcular sumando la suma de esas series infinitas. Esto da

$$S = 10 + 2(5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \ldots)$$

$$S = 10 + 2 \cdot \left[5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots \right]$$

La serie encerrada entre corchetes es una serie geométrica infinita con a = 5 y $r = \frac{1}{2}$, y su suma es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

Por lo tanto,

S = 10 + 2(10),

S = 10 + 20

S = 30

En consecuencia, la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene es 30 metros.

B. RESOLUCION DE EJERCICIOS POR PARTE DE LOS/AS *ESTUDIANTES*

1. Encuentres la suma de las series geométricas infinitas dadas.

   (a) $2+1+\frac{1}{2}+...$ (b) 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + ... (c) $4+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+...$

   (d) $5-1+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+...$ (e) $10-5+\frac{5}{2}-\frac{5}{4}+...$ (f) $-12-\frac{12}{5}-\frac{12}{25}-\frac{12}{125}-...$

2. Escriba los decimales periódicos dados como un cociente de enteros.

   (a) 0.4444... (b) 0.19191919... (c) 0.521521521...

   (d) 2.484848... (e) 3.125125... (f) 6.0131313...

3. Cada oscilación de un péndulo recorre 80% de su oscilación previa. Si la primera oscilación es de 8 pies de longitud, determine la distancia total recorrida por el péndulo hasta que éste queda en reposo.

4. Un balón se deja caer desde una altura de 10 pies. La pelota rebota a una altura de 9 pies. En cada rebote sucesivo el balón alcanza una altura del 90% de su altura previa. Calcula la distancia vertical total recorrida por el balón hasta que éste queda en reposo.

Evaluación

1. Participación, disciplina, orden y compañerismo durante el desarrollo de la actividad.
2. Valorar la capacidad de análisis e interpretación de los/as estudiantes.
3. En la resolución de los ejercicios propuestos, presentación, coherencia, orden lógico y cientificidad.

Actividad No. 13

Esta actividad está dedicada a evaluar si los/as estudiantes comprendieron los temas referentes a sucesiones y series. Se realizará individualmente.

Nombres y Apellidos: ____

1. Tres números están en progresión aritmética. Si la suma de los tres es 24, ¿cuál es el término central?

(a) 4 (b) 8 (c) 6 (d) 12

2. En una sucesión aritmética de primer término 2 y razón 3, el término trigésimo primero es

(a) 65 (b) 63 (c) 98 (d) 92

3. Calcule a de modo que 3a, 6a + 3, 15a + 21 sea una sucesión aritmética

(a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $-\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

4. ¿Cuántos impares de dos cifras son mayores o iguales que 10?

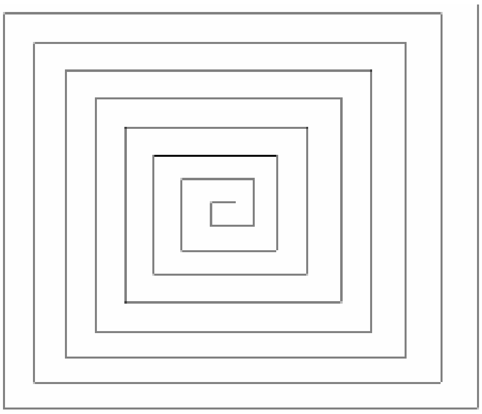
(a) 45 (b) 35 (c) 55 (d) 60

5. Un asalariado gana un salario bruto de 18000 córdobas. La Dirección decide subirle el salario durante diez años, de manera que el nuevo salario de cada año va a ser el del anterior multiplicado por 1.1 (es decir, aumentado en un 10%). Construye la sucesión que indica el salario en los distintos años, halla el término general y cuánto ganará en el último año.

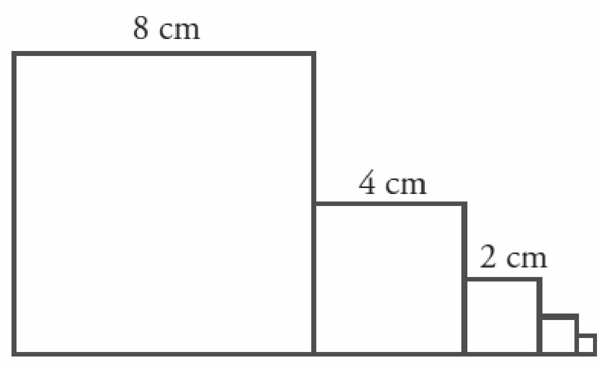
6. Un buscador de oro encuentra el primer día 3 gramos de dicho metal y cada día consigue doble cantidad que el día anterior. ¿Cuánto oro reunió en 15 días?

7. Depositamos en un banco 2000 dólares al 5% anual al comienzo de un cierto año. Calcula el dinero que tendremos al final de cada año, durante cinco años consecutivos, si no sacamos ningún dinero.

8. Calcule la longitud total de la línea laberíntica de la figura, si el ancho del laberinto formado por la línea es de 16 pulgadas y los corredores del mismo tiene un ancho de 1 pulgada. ¿Cuál sería la longitud si el ancho del laberinto fuera de 32 pulgadas?



9. A partir de un cuadrado de 8 centímetros de lado se construyen cuadrados como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de las áreas de los infinitos cuadrados que podríamos hacer de ese modo?



VII. CONCLUSIONES

Tanto el documento de estudio como las actividades a desarrollar en el salón de clase la hemos diseñado básicamente para los/as estudiantes, lo que les permitirá relacionar los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, contribuyendo a despertar un mayor interés por aprender los temas relativos a sucesiones o progresiones y series. Es importante hacer notar que los errores que cometan los/as estudiantes en el desarrollo de las actividades lo utilizaremos en algunos casos como recursos de aprendizaje; en otros casos, con relación a aquellos/as estudiantes que presenten necesidades educativas especiales hay que desarrollar actividades específicas con el fin que formen parte activa y esencial al momento de impartir los contenidos y resolver las actividades propuestas.

Pasamos a señalar algunos de los aspectos más esenciales que hemos tomado en cuenta al momento de elaborar nuestra unidad didáctica.

En relación con los/as estudiantes

- Posibilidad de dirigirse a una población heterogénea en cuanto a la edad y las cualificaciones frente a la enseñanza que en general va dirigida a una población homogénea, al menos en cuanto a la edad.
- Aprendizaje en situación libre.
- Registros completos, precisos y conteniendo numerosa información.

En relación con los medios

- Un tiempo mínimo de respuesta a los problemas y a las demandas de los/as estudiantes, se podrían desarrollar estrategias que mejorasen el tiempo de respuesta.

En relación con la metodología

- Enseñanza a través de combinación de diversos medios técnicos.
- Requiere producción de material específico y muy bien elaborado.
- La oferta de actividades se puede adaptar a entornos, niveles y estilos diversos de aprendizaje.
- Convertir al alumno en el centro del proceso de aprendizaje y en sujeto activo de su formación.
- El material didáctico se puede estructurar de manera que sea posible la auto-evaluación, con lo que de motivador tiene conocer con inmediatez los progresos del propio aprendizaje.
- Se potencia la iniciativa personal, el estudiante adquiere actitudes, intereses, valores y hábitos formativos que le facilitan los mecanismos precisos para regirse a sí mismo y para aprender a aprender.
- Es fundamental a la hora de preparar las actividades tener en consideración el tipo de estudiantes destinatarios de la formación.

VIII. RECOMENDACIONES

1. Implementar talleres y capacitaciones sobre los nuevos enfoques pedagógicos que se están implementando en los centros de Educación Secundaria.

2. Implementar capacitaciones en el área de Matemáticas con el propósito de mejorar la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de Sucesiones y Series.

3. Incrementar la práctica motivadora del alumno y su implicación en el proceso de aprendizaje, desde el punto de vista cognitivo.

4. Relacionar los contenidos de Sucesiones y Series con otros campos del saber humano y la vida diaria para consolidar sus conocimientos.

5. Compartir experiencias de la enseñanza – aprendizaje de Sucesiones y Series bajo el enfoque pedagógico "Enseñanza por Competencias".

6. Plantear nuevas propuestas de problemas que tomen como punto de partida, el entorno y las necesidades comunitarias.

7. Identificar los conocimientos previos que poseen los/as estudiantes con el fin de nivelarlo para que el aprendizaje de los nuevos contenidos sea significativo y funcional.

8. Aplicar las distintas formas de evaluación propuesta u otras que consideren convenientes con el propósito de superar aquellos aspectos que presentan dificultad.

9. Fomentar en el alumnado la autopreparación constante y el trabajo en equipo para enriquecer sus experiencias y aprendizajes, así como la creación de estrategias propias de aprendizaje.

10. Poner en práctica el documento y compartirlo con los demás centros de estudio.

IX. BIBLIOGRAFÍA

- Antúnez, S. (1992). **Del Proyecto Educativo al Aula**. Editorial Graó. Barcelona, España

- Dunham, W. (1996). **El universo de las matemáticas**. Editorial Pirámide.

- Fleming, Walter. (1990). **Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.** Editorial Limusa. México, D.F.

- Gil, D. y otros. **La enseñanza de la Ciencia en la Educación Secundaria.**

- Guzmán, M. (1991). **Para pensar mejor**. Editorial Labor.

- Jiménez, Manuel. Briales José Francisco. (1988). **Matemática viva**. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. Madrid, España.

- Kasner, E. y Newman, J. (1972). **Matemáticas e imaginación**. C.E.C.S.A.

- Leithold, K. (1989). **Matemáticas Previas al Cálculo.** Editorial Harla, S.A. México, D.F.

- Massut, María Fernanda. (Julio, 2003). **Curso de matemática a la vida cotidiana.** UNAN-UB.

- MECD. (2004). **Reforma de Educación Secundaria**. Enseñanza para la Comprensión. Managua, Nicaragua.

- MECD. (2005). **Presentación. Estrategia de Matemática**. Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2004). **Estrategias metodológicas del aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.** Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2005). **Compendio de los documentos curriculares con enfoque de competencias**. Educación Secundaria. Área: Matemáticas. Managua, Nicaragua.

- Ministerio de Educación de Cuba. (1977) **Matemática 9).** Editorial Pueblo y Educación. La habana, Cuba.

- Morales Molina, Xavier. (Julio / agosto del 2003).**Estrategias para trabajar en grupos en el aula.** Brigada, Rubén Darío.

- Poyla, G. (1965). **Cómo plantear y resolver problemas**. Editorial Trillas. México.

- Swokwoski, Earl. (1989). **Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica**. Editorial Iberoamérica. México, D.F.

- Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (1999). **Hacia la construcción de Nuevos Métodos y Estrategias en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje**. León, Nicaragua.

- Vizmanos, José. Anzola, Máximo. (2000). **Algoritmo 2000**, **matemáticas**. Ediciones SM. Madrid, España.

- Vizmanos, José. Anzola, Máximo. (2000). **Algoritmo 2000**, **matemáticas**. Ediciones SM. Madrid, España.