UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN-León

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemática

Tema:

Teorema de Extensión de Hahn-Banach y algunas de sus aplicaciones.

Nombres:

- **Br. Darvin Ramón García Rivas.**
- **Br. Josué David Chávez Durón.**

Tutor:

- **Dr. Rafael Avendaño Jiménez.**

León, 28 de Enero del 2015.

"A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD"

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN-León

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Tesis para obtener el título de Licenciado en Matemática

Tema:

Teorema de Extensión de Hahn-Banach y algunas de sus aplicaciones.

Nombres:

- **Br. Darvin Ramón García Rivas.**
- **Br. Josué David Chávez Durón.**

Tutor:

- **Dr. Rafael Avendaño Jiménez.**

León, 28 de Enero del 2015.

"A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD"

AGRADECIMIENTOS

No es fácil emprender un trabajo investigativo como este, por ello reconozco que todo lo alcanzado es gracias a Dios, él es quien día a día me brinda lo necesario para mejorar y lograr los objetivos que me planteo en cada minuto de mi vida.

Realmente no sé qué sería de mi vida sin mi padre él es quien siempre estuvo luchando por mí; creo que incluso un poco más que yo mismo, él quien ha sacrificado hasta sus propios sueños para que yo pueda alcanzar los míos.

Especialmente al Dr. Rafael Avendaño quién a pesar de su difícil agenda siempre estuvo ahí para nosotros motivándonos, enseñándonos y corrigiéndonos, tanto en lo personal como en lo profesional.

Br. Darvin García Rivas

A mi Señor Jesucristo que gracias a su bendición me ha permito culminar mis estudios y así el haber coronado mi carrera.

A mis padres que con todo amor y abnegación me brindaron todo su apoyo en el trayecto de mi formación como profesional.

A mi Tutor Dr. Rafael Avendaño quien me guio en el transcurso de este trabajo monográfico y que me inculcó valores de autoestima y del cual aprendí mucho gracias a la experiencia de haber trabajado con Él.

A todas las personas, maestros, amigos, compañeros que de una u otra manera incidieron durante mi formación como persona y como profesional.

Br. Josué David Chávez Durón

DEDICATORIAS

A mis padres por haberse preocupado y dado todo para que estudiase a pesar de que ellos no tienen ninguna formación académica.

A todos los maestros quienes me enseñaron un poco de todo, por dedicar toda su energía y amor para la educación y desarrollo de cada uno de nosotros.

Br. Darvin García Rivas

Es difícil emprender el camino del éxito, se necesita mucha determinación para poder alcanzar nuestras metas en la vida, hoy que he llegado a alcanzar el éxito dedico este trabajo monográfico primeramente a mi Señor Jesucristo quien ha sido mi principal sustento durante toda mi vida y a quien debo TODO lo que soy.

A mis padres y hermanos que con sus experiencias me dotaron en gran manera de voluntad y perseverancia para que pudiera alcanzar la cima del éxito en mi vida, muchas veces negándose a sí mismos para que yo pudiera seguir adelante.

Br. Josué David Chávez Durón

INTRODUCCIÓN

El Análisis Funcional es un área de las matemáticas que combina dos grandes temas del conocimiento, a saber: La topología de conjuntos que estudia los temas de convergencia, continuidad, conectividad, conexidad, acotamiento, entre otros y la estructura algebraica que estudia los temas de operaciones con conjuntos, grupos, anillos, vectores, entre otros. Los problemas de tales campos pueden ser unificados en un solo campo. Como en la mayor parte de las matemáticas, hay dos corrientes de estudio: La teoría abstracta que se deduce de los resultados generales, empezando por los axiomas y las aplicaciones cuyos ejemplos concretos son demostrados utilizando esta teoría. Inevitablemente, lo primero da la apariencia de ser elegante y poderoso, y lo último parece estar lleno de detalles y quizás se vuelve hasta desalentador. Sin embargo, tanto pedagógicamente como históricamente, a menudo por los ejemplos es que comprendemos lo abstracto, y es por el desarrollo de la teoría que se logran encontrar soluciones a problemas concretos.

Los orígenes del Análisis Funcional yacen en los intentos de resolver ecuaciones diferenciales utilizando las ideas del álgebra lineal. Este se basa en el estudio de espacios vectoriales n dimensionales, su meta siempre ha sido generalizar los resultados conocidos y muy exitosos de álgebra lineal en espacios vectoriales n dimensionales para los espacios más complicados y sutiles de infinitas dimensiones. Por supuesto, en infinitas dimensiones, ciertos asuntos (como Sumabilidad) se vuelven mucho más delicados, y consecuentemente la estructura adicional es impuesta. Quizá la estructura más natural impuesta en un espacio vectorial es lo que solemos llamar norma.

El presente trabajo lo hemos realizado de manera tal que sea comprensible para cualquiera que posea conocimientos básicos sobre matemáticas superiores ya que empezamos desarrollando la teoría básica, para luego ir conociendo de temas un poco más abstractos, hasta llegar a lo que nos interesa en nuestro estudio. Iniciando así con la teoría de los espacios normados y luego pasamos a estudiar los espacios de Banach. En consecuencia, hemos sacrificado algo de generalidad por la comprensión.

Profundizamos en el importante Teorema de Hahn-Banach y exploramos algunas de sus múltiples consecuencias ya que los espacios de Banach disfrutan de muchas propiedades interesantes como resultado de tener una norma completa. En matemáticas, el Teorema de Hahn Banach es una herramienta importante, sobre todo en Análisis Funcional, puesto que, nos permite extender cualquier operador lineal acotado definido en un subespacio vectorial al espacio vectorial que lo contiene, varios teoremas en el Análisis Funcional se han etiquetado como "El Teorema de Hahn-Banach" en el corazón de todos ellos está lo que se conoce como el Teorema de extensión de Hahn-Banach, dado en el Teorema 2.1. Este teorema está en la base del Análisis Funcional moderno, y su uso es tan penetrante que su importancia no puede ser exagerada y es precisamente por esta razón que nuestro trabajo se centrara en el desarrollo y estudio de dicho Teorema y algunas de sus más importantes consecuencias.

Enunciaremos y probaremos el Teorema de Hahn-Banach, que es un resultado crucial de extensión de funcionales lineales, con importantes consecuencias ya que asegura la existencia de diferentes formas lineales continuas lo cual ha permitido construir una teoría de dualidad muy desarrollada.

Mostramos lo que sucede si no se usa dicho teorema en algunos resultados del Análisis Funcional e incluso mencionamos algunas aplicaciones del mismo en otras ciencias por si alguien desea investigar en estos campos. Esperando así que este trabajo sea de utilidad para los interesados en estos temas.

OBJETIVOS

Objetivo General:

- **Dar a conocer el Teorema de Extensión de Hahn-Banach y analizar consecuencias importantes de su aplicabilidad.**

Objetivos Específicos:

- **Dar a conocer el Teorema de Extensión de Hahn-Banach y su importancia dentro del Análisis Funcional.**

- **Analizar la aplicabilidad del Teorema de Extensión de Hahn-Banach en algunos resultados de importancia en el Análisis Funcional.**

JUSTIFICACIÓN

El tema de nuestra tesis tiene como fundamento conceptos de la rama de las matemáticas conocida como Análisis Funcional la cual es uno de los campos más actuales de estudio de la matemática moderna y en donde hay un cierto grado de complejidad en la compresión de conceptos debido a que en su mayoría se tratan conceptos abstractos, una de nuestras inspiraciones de trabajar en este tema ha sido el hecho que existe cierto vacío en la enseñanza y aprendizaje de las ramas abstractas de la matemática. Los estudiantes de la carrera de matemáticas carecen de motivación para profundizar en ramas abstractas como el Análisis Funcional.

Por otro lado, al consultar trabajos anteriores, ninguno de ellos estudia los tópicos del Análisis Funcional y es precisamente ahí donde queremos brindar nuestro humilde aporte, pensamos que, con este tipo de trabajos acerca de esta rama, nos acercamos al objetivo de dar a conocer conceptos relacionados a los Espacios de Banach y exponer la importancia de los teoremas de este último, no solo en el Análisis Funcional como tal, sino también sus aplicaciones a teoremas importantes y resultados dentro de otras ramas de las matemáticas y así despertar en nuestros colegas que nos preceden un cierto grado de interés en esta rama, para promover el estudio de la misma.

Es nuestro deber entonces como matemáticos llenarnos de todo el conocimiento posible y necesario para ser mejores profesionales, y es precisamente con nuestra tesis con la que pretendemos despertar tanto en académicos como estudiantes de matemática la necesidad de atender las ramas abstractas en este caso el Análisis Funcional y así se pueda fomentar la profundización en estos temas, que debido a ciertos factores combinados con el grado de dificultad de dichos temas abstractos, impiden su estudio al nivel requerido.

En resumen, soñamos con el día que se desarrollen temas de matemáticas superiores en pro de la Carrera y el desarrollo de nuestro país ya que se ha dedicado últimamente a la parte aplicada olvidando que toda estas se rigen por la teoría abstracta, subestimando la capacidad del estudiante no creyéndolo capaz de afrontar y superar los retos que esta área exige.

Índice General

1. Preliminares

El Análisis Funcional está basado en el estudio de espacios vectoriales $\boldsymbol{n}$ dimensionales. El objetivo del Análisis Funcional es generalizar los resultados conocidos y muy exitosos del álgebra lineal en espacios vectoriales de finitas dimensiones a los espacios más complicados y sutiles de infinitas dimensiones. Por supuesto, en infinitas dimensiones, ciertos asuntos (como Sumabilidad) se vuelven mucho más delicados, y consecuentemente la estructura adicional es impuesta. Quizá la estructura más natural impuesta en un espacio vectorial es lo que solemos llamar norma.

El concepto de espacio lineal es uno de los más importantes en las matemáticas. Desempeñará un papel esencial en toda la exposición sucesiva. [8]

Definición 1.1. Un conjunto no vacío $\boldsymbol{L}$ de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ se llama *espacio lineal,* o *vectorial,* cuando satisface las siguientes condiciones:

L1. Para cualesquiera dos elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ está definido un tercer elemento $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$, llamado suma de ellos y denotado por $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, tal que
- **i.** $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ **(**conmutatividad).
- **ii.** $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ **(**asociatividad).
- **iii.** Existe $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{L}$ tal que $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$
- **iv.** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ existe $-\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

L2. Para cualquier número $\boldsymbol{\alpha}$ y cualquier elemento $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ está definido el elemento $\boldsymbol{\alpha x} \in \boldsymbol{L}$, de manera que
- **i.** $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta x}) = (\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{x}$
- **ii.** $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

L3. Las operaciones de adición y multiplicación están relacionadas entre sí mediante las leyes distributivas
- **i.** $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta y}$.
- **ii.** $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\alpha y}$.

Definición 1.2. Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, una *seminorma* es una función $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{V} \longrightarrow [\boldsymbol{0}, \infty)$, satisfaciendo:

- **S1.** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ para toda $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{V}$.
- **S2.** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\alpha x}) = |\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{\alpha}$ en $\mathbb{K}$ y $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{V}$.

Se sigue de **S2** que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Una norma es una seminorma $\boldsymbol{p}$ tal que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Usualmente una norma es denotado por $\|\cdot\|$.

Definición 1.3. Un *espacio normado* es un espacio vectorial real o complejo $\boldsymbol{X}$ junto con una función de valor real $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ definida para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, llamada norma, tal que

N1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq \boldsymbol{0}$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, y $\|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{0}$ si y solo sí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,
N2. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para toda $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{X}$, y
N3. $\|\boldsymbol{\lambda x}\| = |\boldsymbol{\lambda}|\|\boldsymbol{x}\|$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ y escalar $\boldsymbol{\lambda}$.

La Propiedad **N1** es conocida como *no negatividad* o *positividad*, la propiedad **N2** es llamada *subaditividad* o *desigualdad triangular*, y la propiedad **N3** es llamada *homogeneidad*.

Una norma en un espacio vectorial $\boldsymbol{X}$ es esencialmente una forma de medir el tamaño de un elemento de $\boldsymbol{X}$. Si $\boldsymbol{x}$ está en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), la norma de $\boldsymbol{x}$ está dada por el valor absoluto (o módulo) de $\boldsymbol{x}$, que se indica (en ambos casos) por $|\boldsymbol{x}|$.

Definición 1.4. Un *espacio métrico* es un conjunto $\boldsymbol{X}$ junto con una aplicación $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

M1. $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{0}$ para toda $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{X}$, y $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,
M2. $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$ para toda $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ en $\boldsymbol{X}$, y
M3. $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ para toda $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{X}$.

La función $\boldsymbol{d}$ se dice que es una *métrica* en $\boldsymbol{X}$. Como fue el caso con una norma, **M1** es conocida como *no negatividad* y **M2** es llamada la desigualdad del triángulo. La propiedad final, **M3**, es llamada *simetría.*

Una métrica es una medida de la distancia sobre el conjunto $\boldsymbol{X}$**.** Cualquier espacio normado es *metrizable*; es decir, siempre podemos introducir una métrica en un espacio normado por

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|, \qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}.$$

Esta métrica mide el tamaño del desplazamiento entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Mientras que cada norma determina una métrica, no todo espacio métrico puede tener una norma. Para más detalles una buena fuente es: A Primer on Hilbert Space Theory por Carlo Alabiso e Ittay Weiss [1]

Definición 1.5. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio métrico con métrica $\boldsymbol{d}$. Una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{X}$ se dice que *converge* a un punto $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{X}$ si para cualquier $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ existe un $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x_n}) < \boldsymbol{\varepsilon}$ siempre que $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$. En tal caso, decimos que la sucesión es *convergente* y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x}$. Una sucesión $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{X}$ es llamada una *sucesión de Cauchy* si para cualquier $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ existe un $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{x_m}) < \boldsymbol{\epsilon}$ siempre que $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{N}$.

Es bien conocido que una sucesión de valores escalares converge si y sólo si es una Sucesión de Cauchy. Esto no es siempre cierto en espacios normados de infinitas dimensiones. Una sucesión convergente siempre será una sucesión de Cauchy, pero puede haber sucesiones de Cauchy que no convergen a un elemento del espacio normado. Tal espacio es llamado *incompleto,* porque nos imaginamos que carece de ciertos puntos deseables. Por esta razón, se está interesado generalmente en espacios normados que son *completos;* es decir, espacios en el que cada sucesión de Cauchy converge. Para estos espacios tenemos un nombre especial.

Definición 1.6. Un espacio normado $\boldsymbol{X}$ es llamado *espacio de Banach* si se trata de un espacio métrico completo en la métrica dada por $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ para todo $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$.

Supongamos que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son espacios de Banach (o simplemente espacios normados) sobre un campo escalar $\mathbb{K}$ (el cual es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un objetivo básico del análisis funcional es resolver ecuaciones de la formar $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{y}$*,* donde $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$*,* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{T}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una aplicación lineal dada (por ejemplo, un operador diferencial o integral). Consecuentemente, se ha hecho mucho estudio de aplicaciones lineales en espacios de Banach. De particular interés son las aplicaciones lineales acotadas.

Definición 1.7. Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ espacios normados. Una aplicación lineal $\boldsymbol{T}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es llamada *acotada* si existe una constante $\boldsymbol{M} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\|\boldsymbol{Tx}\| \leq \boldsymbol{M}$ para todo $\|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{1}$. Denotamos los más pequeños que $\boldsymbol{M}$ por $\|\boldsymbol{T}\|$*;* es decir, si $\boldsymbol{T}$ es una aplicación lineal acotada, entonces $\|\boldsymbol{T}\| = \boldsymbol{sup}\{\|\boldsymbol{Tx}\| \colon \|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{1}\}$. Una aplicación lineal que no está acotada es llamada *no acotada.*

Un resultado temprano e importante en el análisis funcional es la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Sean $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ espacios normados y supongamos $\boldsymbol{T}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una aplicación lineal. Los siguientes son equivalentes:*

i) $\boldsymbol{T}$ *es continua,*
ii) $\boldsymbol{T}$ *es continua en cero, y*
iii) $\boldsymbol{T}$ *está acotada.*

.

Prueba. La implicación *i)* $\Rightarrow$ *ii)* está clara. Para mostrar *ii)* $\Rightarrow$ *iii),* asumamos que $\boldsymbol{T}$ es continua en cero, pero es no acotada. Si $\boldsymbol{T}$ es no acotada, a continuación, para cada $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, existe un elemento $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{X}$ tal que $\|\boldsymbol{x_n}\| \leq \boldsymbol{1}$ y $\|\boldsymbol{Tx_n}\| \geq \boldsymbol{n}$. Por la elección de $\boldsymbol{x_n}$, tenemos que

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{n}}\right\| \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}, \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Resulta que $\left\|\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{n}}\right\| \to \boldsymbol{0}$ cuando $\boldsymbol{n} \to \infty$, y en consecuencia $\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{0}$ en $\boldsymbol{X}$ como $\boldsymbol{n} \to \infty$. Por continuidad en cero, debe ser que

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \left\|\boldsymbol{T}\left(\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{n}}\right)\right\| = \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0})\| = \boldsymbol{0}.$$

Sin embargo,

$$\left\|\boldsymbol{T}\left(\frac{\boldsymbol{x_n}}{\boldsymbol{n}}\right)\right\| = \left\|\frac{\boldsymbol{Tx_n}}{\boldsymbol{n}}\right\| \geq \boldsymbol{1}, \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $\boldsymbol{T}$ debe ser acotada.

Ahora mostramos *iii)* $\Rightarrow$ *i).* Supongamos que $\boldsymbol{T}$ es acotada y sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Entonces $\left\|\boldsymbol{T}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\right\| \leq \|\boldsymbol{T}\|$, porque $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ tiene norma 1. Por la linealidad de $\boldsymbol{T}$,

$$\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\| = \left\|\boldsymbol{T}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) \cdot \|\boldsymbol{x}\|\right\| \leq \|\boldsymbol{T}\|\|\boldsymbol{x}\|, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}.$$

Para probar la continuidad de $\boldsymbol{T}$, usamos la desigualdad anterior junto con la linealidad:

$$\|\boldsymbol{Tx} - \boldsymbol{Ty}\| = \|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| \leq \|\boldsymbol{T}\|\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}.$$

Esto completa la demostración.

Comentario 1.1. En la prueba de la Proposición 1.1, al mostrar *iii)* $\Rightarrow$ *i),* pusimos de manifiesto que $\|\boldsymbol{Tx} - \boldsymbol{Ty}\| = \|\boldsymbol{T}\|\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ para todo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{X}$. Esto nos permitió llegar a la conclusión que $\boldsymbol{T}$ era continua. De hecho, esta propiedad es más fuerte que la continuidad. Una función $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ que satisface la condición $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leq \boldsymbol{K}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ para una constante $\boldsymbol{K} > \boldsymbol{0}$ es llamada *continua de Lipschitz* con *constante de Lipschitz* $\boldsymbol{K}$. Cualquier aplicación lineal acotada $\boldsymbol{T}$ entre espacios de Banach es continua de Lipschitz (con constante de Lipschitz $\|\boldsymbol{T}\|$), pero una aplicación continua de Lipschitz entre espacios de Banach no necesita ser lineal.

La demostración de la Proposición 1.1 proporciona un método alternativo para calcular $\|\boldsymbol{T}\|$.

Corolario 1.1. *Sean* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *espacios normados. Si* $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es una aplicación lineal, entonces

$$\|\boldsymbol{T}\| = \boldsymbol{inf}\{\boldsymbol{K}: \|\boldsymbol{Tx}\| \leq \boldsymbol{K}\|\boldsymbol{x}\|, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}.$$

Además, $\|\boldsymbol{Tx}\| \leq \|\boldsymbol{T}\|\|\boldsymbol{x}\|$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Definición 1.8. Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son espacios normados, entonces $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ denota el conjunto de todas las aplicaciones lineales acotadas (u *operadores)* de $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ de aplicaciones lineales acotadas de $\boldsymbol{X}$ a sí misma es a menudo denotada por $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X})$.

La palabra *operador* implica tanto acotación como linealidad. Sin embargo, con frecuencia, decimos que $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ es un *operador lineal acotado,* a pesar de que esto es redundante.

El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ es un espacio vectorial sobre el campo escalar $\mathbb{K}$ con operaciones del espacio vectorial dadas por:

$$(\boldsymbol{\alpha S} + \boldsymbol{\beta T})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha S}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta T}(\boldsymbol{x}),$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, y $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Proposición 1.2. *Si* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *son espacios normados, entonces,*

$$\|\boldsymbol{T}\| = \boldsymbol{sup}\{\|\boldsymbol{Tx}\|: \|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{1}\}, \qquad \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}),$$

define una norma en $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Proposición 1.3. *Si* $\boldsymbol{X}$ *es un espacio normado y* $\boldsymbol{Y}$ *es un espacio de Banach, entonces* $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *es un espacio de Banach.*

Prueba. Supongamos que $(\boldsymbol{T_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, la sucesión $(\boldsymbol{T_n x})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{Y}$ porque

$$\|\boldsymbol{T_n x} - \boldsymbol{T_m x}\| \leq \|\boldsymbol{T_n} - \boldsymbol{T_m}\|\|\boldsymbol{x}\|,$$

para toda $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \to \infty} \boldsymbol{T_n x}$ existe para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Denotamos este límite por $\boldsymbol{Tx}$, de manera que

$$\boldsymbol{Tx} = \lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} \boldsymbol{T_n x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}.$$

Vamos a demostrar que $\boldsymbol{T}$ es lineal y acotada, por lo que $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

La linealidad de T sigue de la continuidad de las operaciones en el espacio vectorial. Para ver esto, observe que para toda x e y en X,

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = Tx + Ty.$$

Vamos a demostrar que T es acotada. Para cada m y n en $\mathbb{N}$, tenemos que

$$|\|T_m\| - \|T_n\|| \leq \|T_m - T_n\|.$$

Por lo tanto, ya que $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$, se deduce que $(\|T_n\|)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de escalares. En consecuencia, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$, y así, para cada $x \in X$,

$$\|Tx\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\right)\|x\|.$$

Por lo tanto, T es acotada y $\|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|$.

Queda por mostrar que $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ en la norma sobre $\mathcal{L}(X,Y)$. Sea $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(T - T_n)(x)\| \leq \sup_{m\geq n}\|(T_m - T_n)(x)\| \leq \sup_{m\geq n}\|T_m - T_n\|,$$

por el Corolario 1.1. Tomando el supremo sobre todo $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$, tenemos

$$\|T - T_n\| \leq \sup_{m\geq n}\|T_m - T_n\|.$$

La sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto el resultado.

Cuando X e Y son espacios normados, una función $f: X \to Y$ (no necesariamente lineal) es llamada una *isometría* si $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para toda x e y en X. (En este caso, decimos que f *preserva la distancia.*) Cuando f es lineal, esta condición es equivalente a afirmar que $\|f(x)\| = \|x\|$ para toda $x \in X$. (En este caso, decimos que f *preserva la norma.)* Si existe una isometría entre los espacios X e Y, se dice que son *isométricos.*

Recordamos al lector que una aplicación uno a uno es llamada una *inyección* y una aplicación sobre es llamada una *suprayección.* Una suprayección inyectiva también es llamada una *biyección.*

Definición 1.9. Sean X e Y espacios normados. Una aplicación lineal biyectiva $T: X \to Y$ es llamada un *isomorfismo* si tanto T como T^{-1} son continuas. En tal caso, decimos que X e Y son *isomorfos.* Si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$ también se cumple, entonces T es llamada un *isomorfismo isométrico*.

Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio vectorial. Si $\|\cdot\|_{\alpha}$ y $\|\cdot\|_{\beta}$ son dos normas en $\boldsymbol{X}$, entonces son denominadas *normas equivalentes* siempre que haya constantes $\boldsymbol{c_1 > 0}$ y $\boldsymbol{c_2 > 0}$ tal que

$$\boldsymbol{c_1\|x\|_{\alpha} \leq \|x\|_{\beta} \leq c_2\|x\|_{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{x \in X}.$$

En tal caso, hay un isomorfismo lineal entre los espacios $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\alpha})$ y $\left(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|_{\beta}\right)$.

Las siguientes definiciones son fundamentales para lo que estamos trabajando, e incluso indican los orígenes del tema que estamos estudiando.

Definición 1.10. Sea V es un espacio vectorial. Una aplicación $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ se denomina *funcional lineal* si

(i) $\boldsymbol{p(\alpha x) = \alpha p(x)}$ para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x \in V}$ *(homogeneidad),* y

(ii) $\boldsymbol{p(x+y) = p(x) + p(y)}$ para todos los x e y en V *(aditividad).*

Definición 1.11. Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio normado sobre el campo escalar $\mathbb{K}$ (que es ya sea $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). El *espacio dual* de $\boldsymbol{X}$ es el espacio $\boldsymbol{\mathcal{L}(X, \mathbb{K})}$, el cual es denotado por $\boldsymbol{X}^*$. Los elementos de $\boldsymbol{X}^*$ son llamados *funcionales lineales (acotados).*

Destacamos que para cualquier espacio normado $\boldsymbol{X}$, el espacio dual $\boldsymbol{X}^*$ es un espacio de Banach con la norma dada por $\boldsymbol{\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)|: \|x\| \leq 1\}}$ para $\boldsymbol{x^* \in X^*}$. Veremos que se puede aprender mucho acerca de un espacio de Banach mediante el estudio de las propiedades de su espacio dual.

Cerramos este apartado recordando algunas nociones topológicas que aparecerán frecuentemente a lo largo del resto de este texto. Nos encontraremos con estos conceptos en mayor generalidad a la hora de dar algunas aplicaciones, pero por ahora limitaremos nuestra atención a los espacios métricos.

Definición 1.12. Sea $\boldsymbol{M}$ un espacio métrico con métrica $\boldsymbol{d}$. Para $\boldsymbol{x \in M}$, la *bola abierta de radio* $\boldsymbol{\delta}$ *sobre* $\boldsymbol{x}$ es el conjunto $\boldsymbol{B(x,\delta) = \{y \in M: d(x,y) < \delta\}}$. La *bola cerrada de radio* $\boldsymbol{\delta}$ *sobre* $\boldsymbol{x}$ *es el conjunto* $\boldsymbol{\overline{B}(x,\delta) = \{y \in M: d(x,y) \leq \delta\}}$.

Un subconjunto $\boldsymbol{U}$ de $\boldsymbol{M}$ es llamado *abierto* si para cada $\boldsymbol{x \in U}$ existe un $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que $\boldsymbol{B(x,\delta) \subseteq U}$. Un conjunto es llamado *cerrado* si su complemento es abierto. Para cualquier subconjunto $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{M}$, el *interior* de $\boldsymbol{E}$, es denotado por $\boldsymbol{int(E)}$, que es la unión de todos los conjuntos abiertos que son subconjuntos de $\boldsymbol{E}$. *La clausura* de $\boldsymbol{E}$ es denotada por $\boldsymbol{\overline{E}}$ y es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $\boldsymbol{E}$ como un subconjunto. Si $\boldsymbol{\overline{E} = M}$, entonces $\boldsymbol{E}$ es llamado *denso* en $\boldsymbol{M}$. Si existe un subconjunto contable denso de $\boldsymbol{M}$, entonces $\boldsymbol{M}$ es llamado *separable.*

Comentando que un conjunto $\boldsymbol{E}$ en un espacio métrico es cerrado si y sólo si cualquier sucesión convergente $(\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$, donde $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{E}$ para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, converge a algún $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Para un espacio normado, tenemos una terminología y notación especial para la bola abierta $\boldsymbol{B(0,1)}$ y la bola cerrada $\boldsymbol{\overline{B}(0,1)}$.

Definición 1.13. Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio normado, entonces la *bola unitaria cerrada* de $\boldsymbol{X}$ es el conjunto $\boldsymbol{B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}}$ y la *bola unitaria abierta* de $\boldsymbol{X}$ es el conjunto $\boldsymbol{U_X = \{x \in X: \|x\| < 1\}}$.

Observe que $\boldsymbol{U_X = int(B_X)}$. Vamos a utilizar las dos notaciones para la bola unitaria abierta en $\boldsymbol{X}$. Además, si $\boldsymbol{X}$ es un espacio de Banach (o simplemente un espacio vectorial normado), y en consecuencia posee la adición y la multiplicación escalar, podemos escribir las bolas cerradas y abiertas en $\boldsymbol{X}$ (respectivamente) como:

$$\boldsymbol{\overline{B}(x,\delta) = x + \delta B_X} \qquad \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{B(x,\delta) = x + int(\delta B_X)}.$$

Esta es la notación que generalmente utilizaremos cuando se trabaje en un espacio de Banach (o espacio vectorial normado), con el fin de enfatizar la estructura lineal subyacente.

Un conjunto $\boldsymbol{K}$ en un espacio métrico $\boldsymbol{M}$ es llamado *compacto* si cualquier colección $\{\boldsymbol{U_\alpha}\}_{\boldsymbol{\alpha \in A}}$ de conjuntos abiertos para los que $\boldsymbol{K} \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{\alpha \in A}} \boldsymbol{U_\alpha}$ contiene una subcolección finita $\{\boldsymbol{U_{\alpha_1}}, \dots, \boldsymbol{U_{\alpha_n}}\}$ tales que $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{U_{\alpha_1}} \cup \dots \cup \boldsymbol{U_{\alpha_n}}$. En particular, cualquier conjunto compacto en un espacio métrico puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas de radio $\boldsymbol{\delta}$ para cualquier $\boldsymbol{\delta > 0}$.

Los conjuntos compactos tienen muchas propiedades deseables. Por ejemplo, si $\boldsymbol{K}$ es un conjunto compacto y $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{K} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\boldsymbol{f}$ es acotada y alcanza sus valores máximo y mínimo. (Este es el contenido del teorema del valor extremo.)

Si $\boldsymbol{M_1}$ y $\boldsymbol{M_2}$ son espacios métricos, entonces una aplicación $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{M_1} \to \boldsymbol{M_2}$ es llamada un *homeomorfismo* si es una biyección continua con inversa continua. Si tal homeomorfismo existe, decimos que $\boldsymbol{M_1}$ y $\boldsymbol{M_2}$ son *homeomorfos*. Espacios Homeomorfos son considerados idénticos desde un punto de vista topológico.

1.1 Espacios Clásicos de Banach y Sus Duales

En las siguientes dos secciones, consideraremos los espacios clásicos de sucesiones y funciones. El propósito principal de estas secciones es hacer las definiciones necesarias e identificar los espacios duales para estos espacios clásicos. Por consiguiente daremos por hecho que los espacios diversos de Banach son ciertamente espacios de Banach (para ver las pruebas de todo esto una buena fuente es: *Real and Complex Analysis* por W. Rudin [14].

1.1.1 Espacios de Sucesiones

En el contexto de espacios de sucesiones, denotamos por $\boldsymbol{e_n}$ la sucesión con $\mathbf{1}$ en la $\boldsymbol{n-\text{é}sima}$ coordenada, y $\mathbf{0}$ en otra parte, así que $\boldsymbol{e_n} = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \dots)$ para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. También, tenemos que $\boldsymbol{e} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots.)$ es la sucesión constante con $\mathbf{1}$ en cada coordenada.

Definición 1.14. El conjunto $\boldsymbol{\ell_p}$ de *sucesiones p-sumables* para $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$ es la colección de sucesiones:

$$\boldsymbol{\ell_p} = \left\{(\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, \dots, \boldsymbol{\xi_n}, \dots) : \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} |\boldsymbol{\xi_n}|^p < \infty\right\}$$

Se define la norma $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$ por

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} |\boldsymbol{\xi_n}|^p\right)^{\mathbf{1}/\boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell_p}$$

El conjunto $\boldsymbol{\ell_p}$ es un espacio vectorial bajo la misma componente de adición y multiplicación escalar. (Este es un hecho no trivial el cual tomaremos como dado. [Ver Teorema A.8.]) Además, $\boldsymbol{\ell_p}$ es un espacio de Banach cuando la norma $\boldsymbol{p}$ es dada para $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty$.

El próximo lema identifica el espacio dual del espacio$\boldsymbol{\ell_p}$ para $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$.

Lema 1.1. Para $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1}, \infty)$, el espacio $\boldsymbol{\ell_p}^*$ puede ser identificado con $\boldsymbol{\ell_q}$ donde

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1}.$$

Prueba. Por simplicidad, empecemos asumiendo que los escalares son reales (consideraremos el caso complejo al final de la prueba.)

Deseamos identificar el espacio dual del espacio $\boldsymbol{\ell_p}$ para $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1}, \infty)$ como el espacio de sucesiones $\boldsymbol{\ell_q}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \mathbf{1}$. Primero demostremos como los elementos en $\boldsymbol{\ell_q}$ determinan funcionales lineales en $\boldsymbol{\ell_p}$. Sea $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_n})_{n=1}^{\infty}$ un elemento en $\boldsymbol{\ell_q}$ y defina una función de valor escalar $\boldsymbol{\phi_\eta}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$ por

$$\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\xi_n \eta_n} \qquad \textbf{(1.1)}$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi})_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión el $\boldsymbol{\ell_p}$. Por la desigualdad de Hölder (Teorema A. 9), esta serie es absolutamente convergente (de ahí que $\boldsymbol{\phi_\eta}$ es lineal) y

$$\left|\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\xi})\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\xi_n}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\eta_n}|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} = \|\boldsymbol{\xi}\|_{p} \|\boldsymbol{\eta}\|_{q}.$$

Se sigue que $\boldsymbol{\phi_\eta}$ es un funcional lineal acotado en $\boldsymbol{\ell_p}$ y $\|\boldsymbol{\phi_\eta}\| \leq \|\boldsymbol{\eta}\|_{q}$.

Suponemos que $\|\boldsymbol{\phi_\eta}\|$ es igual a $\|\boldsymbol{\eta}\|_{q}$. Para demostrar esto será suficiente encontrar una sucesión $\boldsymbol{\xi}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$ tal que $\|\boldsymbol{\xi}\|_{p} = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\eta}\|_{q}$. Empecemos por construir una sucesión $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta})_{n=1}^{\infty}$ así que $\boldsymbol{\zeta_n} = |\boldsymbol{\eta_n}|^{q-1}(\mathbf{sign}\, \boldsymbol{\eta_n})$ para cada $\boldsymbol{n \epsilon} \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\zeta_n}|^{p} = \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\eta_n}|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\eta_n}|^{q},$$

donde $(\boldsymbol{q} - \mathbf{1})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ se sigue del hecho que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \mathbf{1}$. Consecuentemente la sucesión $\boldsymbol{\zeta}$ está en $\boldsymbol{\ell_p}$ y $\|\boldsymbol{\zeta}\|_{p} = \|\boldsymbol{\eta}\|_{q}^{q/p}$ observe que

$$\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\zeta_n} \cdot \boldsymbol{\eta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\eta_n}|^{q-1}(\boldsymbol{sign}\, \boldsymbol{\eta_n}) \cdot \boldsymbol{\eta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\eta_n}|^{q} = \|\boldsymbol{\eta}\|_{q}^{q},$$

Sea $\boldsymbol{\xi} = \frac{\zeta}{\|\zeta\|_p}$ entonces $\boldsymbol{\xi}$ es una serie en $\boldsymbol{\ell_p}$ tal que $\|\boldsymbol{\xi}\|_{p} = \mathbf{1}$ y tal que

$$\boldsymbol{\phi_n}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{\zeta}\|_{\boldsymbol{p}}} = \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{q}}}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{q/p}}} = \|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{q}-\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}}} = \|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}}.$$

Por consiguiente, para cualquier $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{\ell_q}$, hay un funcional lineal $\boldsymbol{\phi_\eta}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$ tal que $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}} = \|\boldsymbol{\phi_n}\|$ y tal que $\boldsymbol{\phi_n}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{\phi_n \eta_n}$ para toda $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$.

Hemos demostrado que cualquier sucesión en $\boldsymbol{\ell_q}$ determina un funcional lineal acotado en $\boldsymbol{\ell_p}$. Ahora demostraremos que todo funcional lineal en $\boldsymbol{\ell_p}$ puede ser obtenido de esta manera. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\ell_p^*}$ y definamos una sucesión $\boldsymbol{\eta_i} = (\boldsymbol{\eta_i})_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty}$ siendo $\boldsymbol{\eta_i} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{e_i})$ para cada $\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$. Mostremos que la sucesión $\boldsymbol{\eta}$ es un elemento de $\boldsymbol{\ell_q}$ tal que $\|\boldsymbol{\eta}\|_{\boldsymbol{q}} = \|\boldsymbol{\psi}\|$ y tal que $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \boldsymbol{\xi_i \eta_i}$ para toda $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi})_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$.

Primero, demostraremos que $\boldsymbol{\eta}$ es un elemento en $\boldsymbol{\ell_q}$. Para cada $\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$, definamos $\boldsymbol{\zeta_i} = |\boldsymbol{\eta_i}|^{\boldsymbol{q-1}}(\mathbf{sign}\,\boldsymbol{\eta_i})$. Entonces, para cualquier $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\zeta_i}|^{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\eta_i}|^{(\boldsymbol{q-1})\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\eta_i}|^{\boldsymbol{q}}.$$

Calculando la norma $\boldsymbol{\ell_p}$ de la serie finita $\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i e_i}$, concluimos que

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i e_i}\right\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\zeta_i}|^{\boldsymbol{p}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}} = \left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\eta_i}|^{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}}.$$

Por suposición, el funcional lineal $\boldsymbol{\psi}$ es acotado en $\boldsymbol{\ell_p}$, y consecuentemente

$$\left|\boldsymbol{\psi}\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i e_i}\right)\right| \leq \|\boldsymbol{\psi}\| \left\|\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i e_i}\right\|_{\boldsymbol{p}} = \|\boldsymbol{\psi}\| \left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\eta_i}|^{\boldsymbol{q}}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}}}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Sin embargo, calculando directamente, obtenemos

$$\boldsymbol{\psi}\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i e_i}\right) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i \psi}(\boldsymbol{e_i}) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\zeta_i \eta_i} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\eta_i}|^{\boldsymbol{q}}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

De (1.2) y (1.3), se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q \leq \|\psi\| \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dividiendo, vemos que

$$\|\psi\| \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Esta desigualdad se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$, y bien $\eta \in \ell_q$ y $\|\psi\| \geq \|\eta\|_q$.

Falta mostrar que $\|\psi\| \leq \|\eta\|_q$ y que $\psi = \phi_n$, donde ϕ_n está definida por (1.1). Realmente hemos demostrado que $\|\phi_\eta\| \leq \|\eta\|_q$, lo cual es suficiente para mostrar que $\psi = \phi_\eta$.

Supongamos que $\xi = (\xi_i)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ y sea $\xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que $\xi^{(n)}$ converge a ξ en la norma de ℓ_p. Para ver esto, observemos que $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$, por la suposición, y consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \xi - \xi^{(n)} \right\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{n} |\xi_i|^p \right)^{1/p} = 0. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Ahora, veamos que

$$\psi\left(\xi^{(n)}\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i .$$

Por consiguiente, por la continuidad de ψ,

$$\psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi\left(\xi^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \phi_\eta(\xi).$$

De esto se sigue que $\psi = \phi_\eta$, lo cual es el resultado deseado.

Ahora asumamos que el campo escalar es $\mathbb{C}$. La prueba es esencialmente la misma. Sin embargo cuando definimos ζ_n, para $n \in \mathbb{N}$, dejamos $\zeta_n = |\eta_i|^{q-1} \rho_n$, donde ρ_n es un número complejo tal que $|\rho_n| = 1$ y $\eta_n \rho_n = |\eta_n|$. La prueba se procede como se hizo en el caso real.

El teorema previo identificó el dual del espacio $\boldsymbol{\ell_p}$ para $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1}, \infty)$ como el espacio $\boldsymbol{\ell_q}$, donde $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1}$, por la *acción del espacio dual*

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\xi_n \eta_n}\,,$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{n=1}^{\infty}$ está en $\boldsymbol{\ell_p}$ y $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_n})_{n=1}^{\infty}$ está en $\boldsymbol{\ell_q}$. En la ecuación anterior escribimos $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})$ como taquigrafía para $\boldsymbol{\phi_\eta}(\boldsymbol{\xi})$, donde $\boldsymbol{\phi_\eta}$ es el funcional lineal correspondiente a $\boldsymbol{\eta}$ que aparece en $(\mathbf{1.1})$. El objeto $\boldsymbol{\eta}$ es una sucesión en el espacio $\boldsymbol{\ell_q}$, pero escribimos $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})$ porque miramos $\boldsymbol{\eta}$ como un funcional lineal en $\boldsymbol{\ell_p^*}$.

Ahora, deseamos identificar el dual del espacio $\boldsymbol{\ell_1}$. En orden a hacer esto, debemos introducir un nuevo espacio de sucesiones.

Definición 1.15. El conjunto $\boldsymbol{\ell_\infty}$ de *sucesiones acotadas* es la colección de sucesiones

$$\boldsymbol{\ell_\infty} = \left\{(\boldsymbol{\xi_n})_{n=1}^{\infty} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{\xi_n}| < \infty\right\}.$$

Definimos la *norma del supremo* en $\boldsymbol{\ell_\infty}$ por

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{\xi_n}|\,, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_i})_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell_\infty}.$$

El conjunto $\boldsymbol{\ell_\infty}$ es un espacio vectorial bajo la misma componente de adición y multiplicación escalar y es un espacio de Banach cuando se da la norma del supremo.

Lema 1.2. El espacio $\boldsymbol{\ell_1^*}$ puede ser identificado con $\boldsymbol{\ell_\infty}$.

Identificamos el espacio dual de $\boldsymbol{\ell_p}$ con $\boldsymbol{\ell_q}$, es muy común escribir $\boldsymbol{\ell_p^*} = \boldsymbol{\ell_q}$. Cuando escribimos esto, sin embargo, se tiene entendido que hay una manera de identificar el funcional lineal en $\boldsymbol{\ell_p^*}$ con las sucesiones en $\boldsymbol{\ell_q}$ y la identificación es explícitamente mostrada por la acción del espacio dual $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\xi_n \eta_n}$, donde $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{n=1}^{\infty}$ está en $\boldsymbol{\ell_p}$ y $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_n})_{n=1}^{\infty}$ está en $\boldsymbol{\ell_q}$.

Estos resultados previos conllevan al siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea* $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$ *y supongamos que* $\boldsymbol{q}$ *es tal que* $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1}$, *con la convención que* $\boldsymbol{q} = \infty$ *cuando* $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$. *Entonces* $\boldsymbol{\ell_p^*} = \boldsymbol{\ell_q}$.

Prueba: ver Lemas 1.1 y 1.2.

La relación entre los exponentes $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ en el Teorema 1.1 motiva la siguiente definición.

Definición 1.16. Si $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$ y si $\boldsymbol{q}$ es tal que $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1}$, con la convención que $\boldsymbol{q} = \infty$ cuando $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$, entonces $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son llamados *exponentes conjugados*.

Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son exponentes conjugados que son ambos finitos, entonces $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}^* = \boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{q}}$ y $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{q}}^* = \boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}$. Desde $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}^* = \boldsymbol{\ell}_\infty$, es natural preguntarse si $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$ es el espacio dual de $\boldsymbol{\ell}_\infty$. Mientras $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}} \subseteq \boldsymbol{\ell}_\infty^*$, el espacio no coincide. El argumento usado en la prueba del Lema 2.2 para $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{1}, \infty)$ falla en el caso $\boldsymbol{p} = \infty$ porque ahí existen sucesiones acotadas $(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^\infty$ que no satisfacen la ecuación que corresponde a (1.4) para el caso $\boldsymbol{p} = \infty$. Esto es, que podemos encontrar $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$ tal que

$$\lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \left\| \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{(\boldsymbol{n})} \right\|_\infty = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \left(\sup_{\boldsymbol{k}>\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{k}}| \right) \neq \mathbf{0}, \qquad \textbf{(1.5)}$$

donde $\boldsymbol{\xi}^{(\boldsymbol{n})} = (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{1}}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}}, \mathbf{0}, \dots)$. Como un simple ejemplo, sea $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}$, la sucesión constante teniendo cada término igual a 1. Tenemos que $\|\boldsymbol{e}\|_\infty = \mathbf{1}$, y también $\boldsymbol{e}$ es un elemento de $\boldsymbol{\ell}_\infty$, pero $\left\| \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{(\boldsymbol{n})} \right\|_\infty = \mathbf{1}$ para toda $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora el espacio de sucesiones para los cuales el límite en (1.5) es $\mathbf{0}$.

Definición 1.17 Sea $\boldsymbol{c}_{\mathbf{0}}$ el espacio de todas las sucesiones convergentes a $\mathbf{0}$.

$$\boldsymbol{c}_{\mathbf{0}} = \left\{ (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^\infty : \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0} \right\}.$$

El espacio $\boldsymbol{c}_{\mathbf{0}}$ es un espacio de Banach con la norma del supremo

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} |\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}}|, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^\infty \in \boldsymbol{c}_{\mathbf{0}}.$$

Teorema 1.2. $\boldsymbol{c}_{\mathbf{0}}^* = \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$.

El último espacio de sucesiones que discutiremos es el espacio c.

Definición 1.18. Sea $\boldsymbol{c}$ el espacio de todas las sucesiones convergentes:

$$\boldsymbol{c} = \left\{ (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^\infty : \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}} \text{ existe} \right\}.$$

El espacio $\boldsymbol{c}$ es también un espacio de Banach con la norma del supremo. Quizás sorprendentemente, el espacio dual de $\boldsymbol{c}$ es también $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$, si bien con una acción del espacio dual ligeramente diferente. Es útil demostrar que $\boldsymbol{c}_{\mathbf{0}}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{c}$, y a la vez $\boldsymbol{c}$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{\ell}_\infty$.

1.1.2 Espacios de Funciones

En esta sección, sea $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio medible, donde $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva. Los teoremas en esta sección son ciertos para espacios de medida positiva finita $\boldsymbol{\sigma}$, pero por simplicidad asumiremos $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{\Omega}) \leq \infty$. Como antes, $\mathbb{K}$ denota el subyacente campo escalar, el cual es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Comencemos por recordar algunas definiciones de la teoría de la medida. (Para una discusión más detallada de la teoría de la medida, ver Apéndice; otra buena fuente es el *Análisis Real y Complejo* por W. Rudin [14]).

Definición 1.19. Si A es un subconjunto de $\mathbf{\Omega}$, entonces la función característica de $\boldsymbol{A}$ es la función

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{A}{}^{(\boldsymbol{\omega})} = \begin{cases} \mathbf{1}\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{A} \\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{\omega} \notin \boldsymbol{A} \end{cases}$$

La función característica de $\boldsymbol{A}$ es una función medible si y solo si $\boldsymbol{A}$ es un subconjunto medible de $\mathbf{\Omega}$.

Definición 1.20. Para $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, el conjunto de funciones $\boldsymbol{p}$ −integrables (o funciones $\boldsymbol{L_p}$) en $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\mu})$ es la colección

$$\boldsymbol{L_p}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}) = \left\{ \boldsymbol{f}: \mathbf{\Omega} \to \mathbb{K}\ \textbf{una función medible}: \int_{\mathbf{\Omega}} |\boldsymbol{f}|^p \boldsymbol{d\mu} < \infty \right\}.$$

A menudo escribimos este espacio como $\boldsymbol{L_p}(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\mu})$ o $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ cuando no hay riesgo de confusión.

El conjunto $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ es realmente una colección de *clases de equivalencia* de funciones medibles. Dos funciones en $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ son consideradas equivalentes si ellas se difieren sólo en un conjunto de medida cero $\boldsymbol{\mu}$. A pesar de esto, nosotros generalmente hablamos de los elementos en $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ como funciones, en lugar de clases de equivalencia de funciones. Destacamos que el conjunto $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ es un espacio vectorial con adición puntual y la multiplicación escalar. (Al igual que con $\boldsymbol{\ell_p}$ en la sección anterior, este es un resultado no trivial. [Ver Teorema A.8.])

Definimos la p −*norma* en $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ por

$$\|\boldsymbol{f}\|_p = \left(\int_{\mathbf{\Omega}} |\boldsymbol{f}|^p \boldsymbol{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu}).$$

Como en el caso de los espacios de sucesiones, debemos considerar el caso $\boldsymbol{p} = \infty$ separadamente.

Definición 1.21. Sea $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio medible. La *norma esencial del supremo* de una función medible $\boldsymbol{f}$ se define como

$$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \mathbf{in\,f}\{\boldsymbol{k} :\ \boldsymbol{\mu}(|\boldsymbol{f}| > \boldsymbol{k}) = \mathbf{0}\}.$$

El conjunto de *funciones esencialmente acotadas* (o funciones L_∞) en $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu})$ es la colección

$$\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}) = \{\boldsymbol{f} :\ \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{K} \text{ una funcion medible: } \|\boldsymbol{f}\|_\infty < \infty\}.$$

A menudo escribimos $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mu})$ o $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ cuando no hay riesgo de confusión.

Como es el caso para $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ cuando $\boldsymbol{p}$ es finito, el conjunto $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ es una colección de clases de equivalencia de funciones medibles y (como antes) se consideran dos funciones a ser iguales en $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ si difieren sólo en un conjunto de medida cero $\boldsymbol{\mu}$.

El conjunto $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ es un espacio vectorial con adición puntual y multiplicación escalar. El supremo esencial define una norma en $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ y $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ es un espacio de Banach cuando se da esta norma. (Véase [1].) Nosotros usamos la terminología "esencialmente acotada" para describir las funciones en $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$ y llamamos $\|\boldsymbol{f}\|_\infty$ el "supremo esencial" de $|\boldsymbol{f}|$ en $\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{\mu})$, porque la cantidad $\|\boldsymbol{f}\|_\infty$ es el número más pequeño $\boldsymbol{K}$ tal que $|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{K}$.

Queremos identificar el espacio dual de $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ donde $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$.Veremos que, análogo al caso de espacios de sucesiones, el espacio dual de $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ es $\boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$, donde $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son exponentes conjugados. En este caso, sin embargo, la acción del dual $\boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$ en $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ esta dado por integración. Eso es, si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})$ y $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$, entonces la acción dual de $\boldsymbol{g}$ en $\boldsymbol{f}$ esta dada por

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{d\mu}.$$

Observe que $\boldsymbol{g}$ es una función de $\boldsymbol{\Omega}$. Aquí, sin embargo, se escribe $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f})$ porque vemos $\boldsymbol{g}$ como un elemento del espacio $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})^*$. Al igual que antes, escribimos $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})^* = \boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$ para indicar la identificación de funcionales lineales en $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})^*$ con elementos del espacio de funciones $\boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$.

Teorema 1.3. *Sea* $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu})$ *un espacio de medida positiva. Si* $\boldsymbol{p}$ *y* $\boldsymbol{q}$ *son exponentes conjugados, donde* $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, *entonces* $\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\mu})^* = \boldsymbol{L_q}(\boldsymbol{\mu})$.

El Teorema 1.3. sigue siendo cierto cuando $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva σ-finita. Tal caso puede ser visto en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.1. Considere la medida del espacio $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, m)$, donde $2^{\mathbb{N}}$ denotan el conjunto potencia de $\mathbb{N}$ (la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$), y m es una medida contable en $\mathbb{N}$ (la función determinada para la cuál $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{A})$ es la cardinalidad del conjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{N}$). Supongamos que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_p}(\mathbb{N}, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \boldsymbol{m})$, donde $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$. Entonces,

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_{\mathbb{N}} |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{dm}\right)^{\mathbf{1}/\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})|^{\boldsymbol{p}}\right)^{\mathbf{1}/\boldsymbol{p}}.$$

Vemos que $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{L_p}(\mathbb{N}, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \boldsymbol{m})$ corresponde a la sucesión $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})\right)_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{\ell_p}$. La misma conclusión se cumple para $\boldsymbol{p} = \infty$. Por consiguiente,

$$\boldsymbol{L_p}(\mathbb{N}, \mathbf{2}^{\mathbb{N}}, \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{\ell_p}, \qquad \mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} \leq \infty.$$

Consideremos ahora los espacios de funciones continuas.

Definición 1.22. Sea $\boldsymbol{K}$ un espacio métrico compacto. Denotamos la colección de funciones continuas de valor escalar sobre $\boldsymbol{K}$ por $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$. Definimos la *norma del supremo* en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ por

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\infty} = \sup_{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{K}} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|, \qquad \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{k}).$$

El conjunto $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ es un espacio vectorial bajo la adición y la multiplicación escalar y es un espacio de Banach cuando se da la norma del supremo. Si queremos enfatizar el campo escalar subyacente, escribiremos $\boldsymbol{C}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{K})$ o $\boldsymbol{C}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{K})$. Observe que, para $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$, la cantidad $\|\boldsymbol{f}\|_{\infty}$ es realmente el máximo de $|\boldsymbol{f}|$, desde que una función continua logra su supremo en conjuntos compactos.

Comentario 1.2. Usamos la notación $\|\,.\,\|_{\infty}$ para representar la norma suprema de ambos en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ (para un espacio métrico compacto $\boldsymbol{K}$) y la norma suprema esencial en $\boldsymbol{L}_{\infty}(\boldsymbol{\mu})$ (para un espacio medible $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$). Si hay algún riesgo de confusión, escribiremos $\|\,.\,\|_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})}$ y $\|\,.\,\|_{\boldsymbol{L}_{\infty}(\boldsymbol{\mu})}$ para denotar la norma en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ y $L_{\infty}(\mu)$, respectivamente. Queremos identificar el espacio dual de $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$. Consideremos el siguiente ejemplo, donde $\boldsymbol{K} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. En este caso, escribimos $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Ejemplo 1.2. Consideremos los siguientes funcionales lineales en $\boldsymbol{C[0,1]}$:

a) *(Integración)* $\boldsymbol{f \to \int_0^1 f(t)\, dt}$.

b) *(Punto de evaluación)* $\boldsymbol{f \to f(s)\ para\ s \in K}$.

c) *(Integración ante funciones de* $\boldsymbol{L_1}$*)* $\boldsymbol{f \to \int_0^1 f(t)g(t)dt}$ **para** $\boldsymbol{g \in L_1(0,1)}$.

Usamos $\boldsymbol{L_1(0,1)}$ para denotar el espacio de Banach de $\boldsymbol{L_1}$ −funciones en $\boldsymbol{[0,1]}$ con la medida de Lebesgue.

Note que el punto de evaluación (Ejemplo 1.2. (b)) puede ser considerado como integración, por medio de una medida de Dirac:

$$\boldsymbol{\delta_s(A) = \begin{cases} 1 & si\ s\ \in\ A, \\ 0 & si\ s\ \notin\ A. \end{cases}}$$

Para cualquier $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{[0,1]}$**,** el conjunto de la función δ_s es una medida en $\boldsymbol{[0,1]}$**,** y

$$\boldsymbol{f(s) = \int_{[0,1]} f(t)\delta_s(dt)}.$$

La medida $\boldsymbol{\delta_s}$ es también conocida como la *masa de Dirac en* $\boldsymbol{s}$. Una medida de Dirac es un ejemplo de una medida singular, o una medida que está concentrada en un conjunto de Lebesgue de medida cero.

Ejemplo 1.2. (**c)** provee un funcional lineal en $\boldsymbol{C[0,1]}$ porque

$$\boldsymbol{\left|\int_0^1 f(t)g(t)dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\|_\infty \|g\|_1},$$

Para $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C(K)}$ y $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_1(0,1)}$. Esto, también, puede ser realizado como integración ante una medida. Sea

$$\boldsymbol{v(A) = \int_A g(t)dt, \quad A \in \mathcal{B}},$$

Donde $\mathcal{B}$ denota la colección de subconjuntos medibles de Borel de $\boldsymbol{[0,1]}$. Entonces

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_{[0,1]} f\, dv}.$$

Los funcionales lineales dados en el ejemplo 1.2. no son todos los funcionales lineales en $\boldsymbol{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ (como lo pueden ver al estudiar el teorema de representación de Riesz pero este es un resultado clásico de la teoría de la medida por lo tanto nos limitamos a mencionarlo nada más) pero ellos dan un salto verdadero a la naturaleza de $(\boldsymbol{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}])^*$.

Es natural preguntarse si hay algún espacio de Banach con el espacio dual trivial. El Teorema de Hahn-Banach, el cual probamos en el capítulo 2, garantiza que no hay tal espacio de Banach. En particular, probaremos lo siguiente. (Ver Teorema 2.3.)

Teorema 1.4. (Teorema de Hahn-Banach) *Supongamos que $\boldsymbol{X}$ es un espacio de Banach real y sea $\boldsymbol{E}$ un subespacio lineal de $\boldsymbol{X}$. Si $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{E}^*$, entonces existe un funcional lineal acotado $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{X}^*$ tal que $\|\boldsymbol{\psi}\| = \|\boldsymbol{\phi}\|$ y $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.*

El Teorema de Hahn-Banach implica que no hay espacios de Banach $\boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{X}^* = \{\mathbf{0}\}$. Cualquier subespacio unidimensional de $\boldsymbol{X}$ tendrá funcionales lineales no triviales, y el Teorema de Hahn-Banach establece que estos pueden ser extendidos al espacio $\boldsymbol{X}$.

1.1.3 Completitud en espacios de funciones

En esta sección, probaremos que los espacios de funciones de la sección anterior son completos en sus normas dadas. Los espacios de sucesiones se dejan para ejercitar la mente. Comencemos probando un lema muy útil.

Lema 1.3 (Criterio de Sumabilidad de Cauchy) *Un espacio normado $\boldsymbol{X}$ es completo si y solo si toda serie $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{x_n}$ converge en $\boldsymbol{X}$ cuando $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \|\boldsymbol{x_n}\| < \infty$.*

Prueba. Primero, supongamos que $\boldsymbol{X}$ es completo en la norma $\|\,.\,\|$ y supongamos $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \|\boldsymbol{x_n}\| < \infty$. Para $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, sea $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{x_1} + \cdots + \boldsymbol{x_n}$. Entonces $\|\boldsymbol{S_m} - \boldsymbol{S_n}\| \leq \sum_{\boldsymbol{j}=\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \|\boldsymbol{x_k}\|$ para cada $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ en $\mathbb{N}$, y asi $(\boldsymbol{S_n})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ es una sucesión de cauchy. Por consiguiente, desde que $\boldsymbol{X}$ es completo, la serie $\sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{x_j}$ converge.

Ahora supongamos que $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{x_n}$ converge cuando $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \|\boldsymbol{x_n}\| < \infty$. Sea $(\boldsymbol{y_n})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{X}$. Escojamos una sucesión creciente $(\boldsymbol{n_k})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$\|\boldsymbol{y_p} - \boldsymbol{y_q}\| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}}, \qquad \text{cuando } \boldsymbol{p} > \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{n_k}.$$

Sea $\boldsymbol{y_{n_0} = 0}$. Entonces

$$\boldsymbol{y_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} \left(y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.}$$

Por construcción, tenemos $\left\|\boldsymbol{y_{n_j} - y_{n_{j-1}}}\right\| < \frac{1}{2^{j-1}}$ para toda $\boldsymbol{j \geq 2}$, y así vemos que $\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\boldsymbol{y_{n_j} - y_{n_{j-1}}}\right\| < \infty$. Se sigue que la subsucesión $\left(\boldsymbol{y_{n_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge a algún elemento en $\boldsymbol{X}$. Sea $\boldsymbol{y}$ el límite de esta subsucesión.

Sea $\boldsymbol{\epsilon > 0}$. Podemos escoger $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}$ suficientemente grande así que $\left\|\boldsymbol{y_{n_k} - y}\right\| < \boldsymbol{\epsilon/2}$ y $\boldsymbol{1/2^K < \epsilon/2}$. Por definición, si $\boldsymbol{m > n_k}$, entonces $\left\|\boldsymbol{y_m - y_{n_k}}\right\| < \boldsymbol{1/2^K}$. Así,

$$\|\boldsymbol{y_m - y}\| \leq \left\|\boldsymbol{y_m - y_{n_k}}\right\| + \left\|\boldsymbol{y_{n_k} - y}\right\| < \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2^K}} + \frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\boldsymbol{2}} < \boldsymbol{\epsilon},$$

Cuando $\boldsymbol{m > n_k}$.

Por consiguiente, $(\boldsymbol{y_m})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, como se requería.

Teorema 1.5. Sea $(\boldsymbol{\Omega, \Sigma, \mu})$ un espacio de medida positiva. Si $\boldsymbol{1 \leq p < \infty}$, entonces $\boldsymbol{L_p(\Omega, \Sigma, \mu)}$ es un espacio de Banach dada bajo la norma

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_{\boldsymbol{\Omega}} |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{d\mu}\right)^{\boldsymbol{1/p}}, \qquad \boldsymbol{f \in L_p(\Omega, \mu)}.$$

Prueba. Haremos uso liberal de los Teoremas en el apéndice A. Primero, observemos que $\|\,.\,\|_{\boldsymbol{p}}$ es una norma en $\boldsymbol{L_p(\Omega, \Sigma, \mu)}$, por la desigualdad de Minkowski. Para demostrar que $\|\,.\,\|_p$ es completa, usaremos el Criterio de Sumabilidad de Cauchy (Lema 1.3)

Asumamos $(\boldsymbol{f_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones en $\boldsymbol{L_p(\Omega, \mu)}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|\boldsymbol{f_k}\|_{\boldsymbol{p}} < \infty$. Sea $\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \|\boldsymbol{f_k}\|_{\boldsymbol{p}}$. Para cada $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, definimos $\boldsymbol{g_n}$ en $\boldsymbol{\Omega}$ por $\boldsymbol{g_n(\omega)} = \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{f_k(\omega)}|$ para toda $\boldsymbol{\omega \in \Omega}$. Observemos que $(\boldsymbol{g_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y que $\boldsymbol{g_n \leq g_{n+1}}$ para cada $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Por el Lema de Fatou,

$$\int \liminf_{n\to\infty} |\boldsymbol{g_n}|^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{d\mu} \leq \liminf_{n\to\infty} \int |\boldsymbol{g_n}|^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{d\mu} = \liminf_{n\to\infty} \|\boldsymbol{g_n}\|_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{p}} \leq \boldsymbol{M^p} < \infty.$$

Se sigue que $\liminf_{n\to\infty} |g_n|^p < \infty$, y consecuentemente,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p = \liminf_{n\to\infty} |g_n|^p < \infty.$$

Consecuentemente, la función $g = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$ existe y $\|g\|_p \leq M$.

Ahora sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Se sigue que f existe, porque $|f(\omega)| \leq g(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$. Observe también que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(\omega)\right| \leq g(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

Por consiguiente, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, $\sum_{k=1}^{n} f_k$ converge a f en $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, como se requería.

Teorema 1.6 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida positiva. El espacio* $L_\infty(\Omega, \mu)$ *es un espacio de Banach cuando se da bajo la norma esencial del supremo* $\| \, . \, \|_\infty$.

Prueba. De nuevo usamos el Lema 1.3. Sea $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L_\infty(\Omega, \mu)$ y sea $M = \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty$. Supongamos que $M < \infty$. Por suposición, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos $|f_k| \leq \|f_k\|_\infty$. Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto medible N_k tal que $\mu(N_k) = 0$ y $f_k(\omega) \leq \|f_k\|_\infty$ para toda $\omega \in \Omega/N_k$. Sea $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Entonces $\mu(N) = 0$ (como una unión de conjuntos contables de medida cero) y $f_k(\omega) < \infty$ para toda $\omega \in \Omega/N$ y toda $k \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ y

$$|f(\omega)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(\omega)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty = M,$$

Para toda $\omega \in \Omega/N$.

Tenemos determinado que $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$, pero ahora debemos mostrar que f es el límite de $\sum_{k=1}^{n} f_k$ en la norma esencial suprema. Sea $\epsilon > 0$. Por suposición, $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty < \infty$. Por consiguiente, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m}^{\infty}\|f_k\|_\infty < \epsilon$ cuando $m > n_0$. Entonces

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \epsilon,$$

Siempre y cuando $n \geq n_0 - 1$. Esto completa la prueba.

Teorema 1.7 *Sea $\boldsymbol{K}$ un espacio métrico compacto. El espacio $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ de funciones continuas en $\boldsymbol{K}$ es un espacio de Banach cuando se da la norma del supremo $\| \, . \, \|_{\infty}$.*

Prueba La prueba es similar a la del Teorema 1.6, con modificaciones relativas a la continuidad, y se deja al lector.

El teorema 1.7 queda sigue siendo cierto si reemplazamos $\boldsymbol{K}$ con un espacio de Hausdorff localmente compacto y consideramos el espacio $\boldsymbol{C_0}(\boldsymbol{K})$ de funciones continuas sobre $\boldsymbol{K}$ que se desvanecen en el infinito.

Cuando $\boldsymbol{K}$ es un espacio localmente compacto de Hausdorff, el espacio dual $\boldsymbol{C_0}(\boldsymbol{K})^*$ está estático con $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$**,** pero en este caso este denota el espacio de Banach de medidas *regulares* de Borel sobre $\boldsymbol{K}$ con la norma de variación total. Esta no es una notación inconsistente porque, cuando $\boldsymbol{K}$ es un espacio métrico compacto, $\boldsymbol{C_0}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$ y toda medida de Borel finita en $\boldsymbol{K}$ son regular.

Note que $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$ es necesariamente un espacio de Banach como el espacio dual de un espacio de Banach. (Ver proposición 1.3)

1.2 Nociones Fundamentales para el Teorema de Hahn-Banach.

Cerramos este capítulo detallando brevemente el axioma de elección y funcionales sublineales que son partes esenciales en el desarrollo del teorema de extensión de Hahn-Banach versión analítica y finalmente algunos conceptos sobre hiperplanos y conjuntos convexos que serán de utilidad a la hora de tratar con el teorema de Hahn-Banach en su versión geométrica ya que queremos dejar el siguiente capítulo exclusivamente a dicho teorema y sus consecuencias en diversos campos y lo relacionado con el mismo.

1.2.1 El axioma de elección

Los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) es una lista de declaraciones aceptadas sobre la cual las matemáticas pueden forjarse. Ellos forman lo que es, posiblemente, la base más común de las matemáticas. Cuando el sistema incluye el *axioma de elección,* a menudo se llama (ZFC).

Axioma de elección para cualquier colección de conjuntos no vacíos $\boldsymbol{X}$*,* existe una función de elección definida sobre $\boldsymbol{X}$.
Una *función de elección* en una colección de conjuntos no vacíos, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ es una función de $\boldsymbol{c}$*,* que se define en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*,* tal que $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{A}$ para cada conjunto $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

De interés para nosotros es una formulación del axioma alternativa (pero equivalente) del axioma de elección conocido como el Lema de Zorn.

Lema de Zorn. Supongamos que $(\boldsymbol{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si cada cadena en $\boldsymbol{P}$ tiene un límite superior, entonces $\boldsymbol{P}$ contiene un elemento máximo.

Recordemos las definiciones pertinentes.

Definición 1.23. Sea $\boldsymbol{P}$ un conjunto. Una relación $\leq$ en $\boldsymbol{P}$ se dice que es un *orden parcial* si para cada $\boldsymbol{a}$**,** $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{P}$:

i) $(\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \text{ } \boldsymbol{y} \text{ } \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{c}) \Rightarrow \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{c}$,

ii) $(\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \text{ } \boldsymbol{y} \text{ } \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$,

Un subconjunto $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{P}$ es una *cadena* en $\boldsymbol{P}$ si $(\boldsymbol{C}, \ \leq)$ es totalmente ordenado:

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow (\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \text{ } \boldsymbol{o} \text{ } \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}).$$

Si $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{P}$, entonces $\boldsymbol{b}$ se llama una *cota superior* de $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$. Un elemento $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$ se llama *máximo* si $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ implica $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.
Naturalmente, podemos definir un orden parcial inverso $\geq$ de la manera obvia, y reinterpretar el Lema de Zorn en términos de límites inferior y elementos mínimos. Otra formulación (equivalente) del axioma de elección es el principio de maximalidad de Hausdorff.

Principio de maximalidad de Hausdorff. En un conjunto parcialmente ordenado, cada cadena es contenida en una cadena máxima.

El principio de maximalidad de Hausdorff fue formulado por Félix Hausdorff en 1914. El Lema de Zorn se propuso más tarde, en 1935, por Max Zorn. Ambos son equivalentes al Axioma de elección. Una discusión detallada de la historia del axioma de elección y sus formulaciones equivalentes se pueden encontrar en la bibliografía. La formulación que usualmente usaremos es Lema de Zorn.

1.2.2 Funcionales sublineales

Pasaremos brevemente nuestra atención de funcionales lineales a funcionales sublineales.

Definición 1.24. Supongamos que V es un espacio vectorial. Una aplicación $p: V \to \mathbb{R}$ se denomina *funcional sublineal* si

i) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $\alpha \geq 0$ y $x \in V$ *(homogeneidad positivo),* y

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos los x e y en V *(subaditividad).*

Tenga en cuenta que la condición *(i)* implica que $p(0) = 0$. La condición *(ii)* también se denomina *desigualdad del triángulo.*

Ejemplo 1.3. Los siguientes son ejemplos de los funcionales sublineales:

a) Cualquier funcional lineal es un funcional sublineal.
b) Si E es un espacio normado, entonces la función norma definida por $p(x) = \|x\|$ para $x \in E$ es un funcional sublineal.
c) Si $C(K)$ es el espacio de Banach de funciones continuas con valores reales en un espacio métrico compacto K, a continuación,
$$p(f) = \max_{s \in K} f(s), \qquad f \in C(K),$$
define un funcional sublineal.
d) Si l_∞ es el espacio de Banach de sucesiones acotadas de números reales, entonces
$$p(\xi) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n, \qquad \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty,$$
define un funcional sublineal.

Lo que presentamos a continuación será pieza clave al tratar el teorema de Hahn-Banach en su versión geométrica. En lo siguiente, E denota un espacio vectorial normado.

1.2.3 Hiperplanos y conjuntos convexos

Brevemente detallaremos ciertos aspectos sobre hiperplano y conjuntos convexos ya que son de mucha importancia a la hora de tratar el teorema de Hahn-Banach en sus versiones geométricas.

Definición 1.25. Un hiperplano es un subconjunto $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{E}$ de la forma.

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}\},$$

donde $\boldsymbol{f}$ es un funcional lineal que no desaparece idénticamente y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ es una constante. Escribimos $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ y decimos que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}$ es la ecuación de $\boldsymbol{H}$.

Proposición 1.4. El hiperplano $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ es cerrado si y solo si $\boldsymbol{f}$ es continuo.

Prueba. Está claro que $\boldsymbol{f}$ es continuo entonces $\boldsymbol{H}$ es cerrado. Inversamente, asumamos que $\boldsymbol{H}$ es cerrado. El complemento $\boldsymbol{H^c}$ de $\boldsymbol{H}$ es abierto y no vacío. Sea $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{H^c}$, así que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \neq \boldsymbol{\alpha}$, por ejemplo, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) < \boldsymbol{\alpha}$.

Fijemos $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{H^c}$, donde

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < \boldsymbol{r}\}.$$

Vemos que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r}).$$

Ciertamente, supongamos por contradicción que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{\alpha}$ para algún $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r})$. El segmento

$$\{\boldsymbol{x_t} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{x_1}, \qquad \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]\}$$

está contenido en $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r})$ y así $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_t}) \neq \boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$; por otra parte, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_t}) = \boldsymbol{\alpha}$ para algún $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$, también $\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \propto}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})}$, una contradicción, y así hemos probado que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{r})$. De esto se sigue que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{z}) < \boldsymbol{\alpha}, \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}).$$

Consecuentemente, $\boldsymbol{f}$ es continuo y $\|\boldsymbol{f}\| \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\big(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\big)$.

Definición 1.26. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos subconjuntos de $\boldsymbol{E}$. Decimos que el hiperplano $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ separa $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ si

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\alpha}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$$

Decimos que $\boldsymbol{H}$ separa estrictamente $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ si existe algún $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ tal que

$$\boldsymbol{f(x) \leq \alpha - \varepsilon}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{f(x) \geq \alpha + \varepsilon}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}.$$

Geométricamente, la separación significa que $\boldsymbol{A}$ está en uno de los semi-espacios determinados por la línea $\boldsymbol{H}$, y $\boldsymbol{B}$ en el otro lado de la línea; (figura 1).

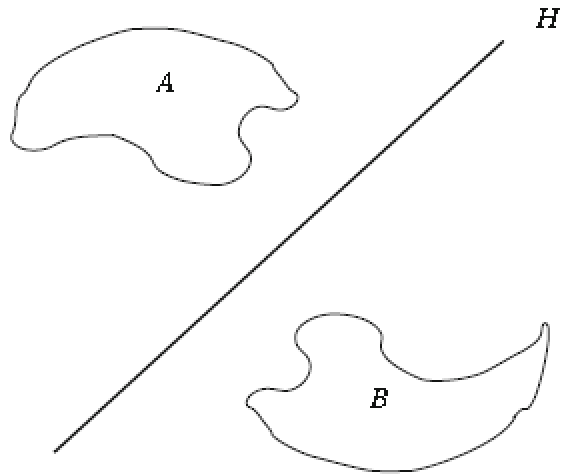

Fig. 1

Definición 1.27. Si $\boldsymbol{V}$ es cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{V}$, luego $\boldsymbol{A}$ es un conjunto convexo si

$$\boldsymbol{tx + (1 - t)y \in A}, \qquad \forall \boldsymbol{x, y \in A}, \qquad \forall \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}].$$

Note que $\{\boldsymbol{tx + (1 - t)y}: \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{1}\}$ es el segmento de línea recta asociado a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Así un conjunto convexo es un conjunto $\boldsymbol{A}$ tal que si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ pertenecen a $\boldsymbol{A}$ el segmento de línea entero asociado a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ está contenido en $\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{V}$ es un espacio vectorial, luego cualquier subespacio en $\boldsymbol{V}$ es un conjunto convexo. La intersección de cualquier colección de conjuntos convexos es convexo.

Ya teniendo claro todos estos hechos preliminares estamos listos para iniciar lo que compete al desarrollo del teorema de extensión de Hahn-Banach en sus distintas formas, sus pruebas y sus consecuencias.

2. Los Teoremas de Hahn-Banach

Varios teoremas en el análisis funcional se han etiquetado como "El Teorema de Hahn-Banach. " En el corazón de todos ellos está lo que llamamos aquí el Teorema de extensión de Hahn-Banach, dado en el teorema 2.1 a continuación. Este teorema está en la base del análisis funcional moderno, y su uso es tan penetrante que su importancia no puede ser exagerada.

2.1 Forma Analítica del Teorema de Hahn-Banach: Extensión de Funcionales Lineales.

Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$**.** Recordemos que un *funcional* es una función definida en $\boldsymbol{E}$, o en algún subespacio de $\boldsymbol{E}$, *con valores en* $\mathbb{R}$. El principal resultado de esta sección concierne a la extensión de un funcional lineal definido en un subespacio de $\boldsymbol{E}$ a un funcional lineal definido sobre todo $\boldsymbol{E}$**.**

Teorema 2.1 (Teorema de Extensión de Hahn-Banach) *Sea* $\boldsymbol{E}$ *un espacio vectorial real y sea* $\boldsymbol{p}$ *un funcional sublineal en* $\boldsymbol{E}$. *Si* $\boldsymbol{V}$ *es un subespacio de* $\boldsymbol{E}$ *y si* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ *es un funcional lineal tal que*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V},$$

entonces hay una extensión $\hat{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$ *de* $\boldsymbol{f}$ *que es lineal y satisface*

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}.$$

Antes de probar el Teorema de extensión de Hahn-Banach, probaremos varios lemas preliminares.

Lema 2.1 *Un funcional sublineal* $\boldsymbol{p}$ *en un espacio vectorial real* $\boldsymbol{E}$ *es lineal si y sólo si* $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Prueba. Ciertamente, si $\boldsymbol{p}$ es lineal, entonces la conclusión sigue. Supongamos ahora que $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Entonces, por la desigualdad triangular,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geq -(\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}).$$

La desigualdad inversa es simplemente la subaditividad de $\boldsymbol{p}$.

Sea $\mathfrak{P}_E$ la colección de todos los funcionales sublineales en un espacio vectorial real $\boldsymbol{E}$. Definimos un orden en el conjunto $\mathfrak{P}_E$ diciendo que $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q}$ siempre que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Lema 2.2 *Supongamos que* $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{P}_E$ y $\boldsymbol{V}$ *es un subespacio lineal de un espacio vectorial real* $\boldsymbol{E}$. *Si* $\boldsymbol{q}$ *es un funcional sublineal en* $\boldsymbol{V}$ *tal que* $\boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{V}}$, *entonces existe un funcional sublineal* $\boldsymbol{r} \in \mathfrak{P}_E$ *de tal manera que* $\boldsymbol{r}|_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{p}$.

Prueba. Defina

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{inf}\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}.$$

Para demostrar que $\boldsymbol{r}$ está bien definida, mostramos que el conjunto $\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$ tiene una cota inferior para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Fijar $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ y dejar que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Por el supuesto, $\boldsymbol{q}(-\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v})$, y así, por la subaditividad de $\boldsymbol{q}$,

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{q}(-\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v}).$$

De ello resulta que $-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v})$. A continuación, utilizando la subaditividad de $\boldsymbol{p}$, tenemos

$$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}).$$

Reorganizando esta desigualdad, y además usando el hecho de que $-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v})$, tenemos

$$-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) \leq -\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}).$$

Esto es cierto para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, por lo que el conjunto $\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$ tiene una cota inferior. Por lo tanto $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ está bien definida para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Es evidente que $\boldsymbol{r}$ es positivamente homogénea y que $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ (tomando $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$). Afirmamos que también $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Para ver esto, supongamos que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Entonces para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}).$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{inf}\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\} \geq \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}).$$

Este ínfimo se logra (cuando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$), y así $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$.

Sólo queda por demostrar que $\boldsymbol{r}$ es subaditiva en $\boldsymbol{E}$. Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{E}$ y suponga un $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$. Escoja $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ en $\boldsymbol{V}$ de manera que

$$\boldsymbol{q(v) + p(x - v) < r(x) + \frac{\epsilon}{2}} \text{ y } \boldsymbol{q(w) + p(y - w) < r(y) + \frac{\epsilon}{2}}.$$

Por la sublinealidad de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$,

$$\boldsymbol{q(v + w) + p(x + y - (v + w)) < r(x) + r(y) + \varepsilon.}$$

Tomando el ínfimo sobre los elementos en $\boldsymbol{V}$, tenemos $\boldsymbol{r(x + y) < r(x) + r(y) + \varepsilon}$. Desde que $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ es arbitrario, $\boldsymbol{r}$ es subaditiva y la prueba está completa.

Lema 2.3 *Si* $\boldsymbol{p \in \mathfrak{P}_E}$*, entonces existe un mínimo* $\boldsymbol{q \in \mathfrak{P}_E}$ *tal que* $\boldsymbol{q \leq p}$.

Prueba. Sea $\boldsymbol{P = \{r \in \mathfrak{P}_E : r \leq p\}}$ y sea $\boldsymbol{C = (r_i)_{i \in I}}$ una cadena en $\boldsymbol{P}$. Para $\boldsymbol{x \in E}$, dejemos

$$\boldsymbol{r(x) = \inf_{i \in I} r_i(x).}$$

Afirmamos que $\boldsymbol{r}$ es un funcional sublineal sobre $\boldsymbol{E}$. En primer lugar debemos demostrar que $\boldsymbol{r}$ está bien definida. Sea $\boldsymbol{i \in I}$ y $\boldsymbol{x \in E}$. Por subaditividad, $\boldsymbol{0 \leq r_i(x) + r_i(-x)}$. Por lo tanto, desde que $\boldsymbol{r_i \in P}$,

$$\boldsymbol{r_i(x) \geq -r_i(-x) \geq -p(-x)}$$

Por lo tanto, el conjunto $\boldsymbol{\{r_i(x) : i \in I\}}$ tiene una cota inferior, y por lo tanto $\boldsymbol{r}$ está bien definida. La Homogeneidad positiva está clara. Ahora mostramos la subaditividad. Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ elementos de $\boldsymbol{E}$. Para cualquier $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, existen índices $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$ en $\boldsymbol{I}$ tal que

$$\boldsymbol{r_i(x) < r(x) + \frac{\epsilon}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{r_j(y) < r(y) + \frac{\epsilon}{2}}$$

Dado que $\boldsymbol{C}$ es una cadena, $\boldsymbol{r_i}$ y $\boldsymbol{r_j}$ son comparables. Sin pérdida de generalidad, suponemos $\boldsymbol{r_i \leq r_j}$. Entonces

$$\boldsymbol{r(x + y) \leq r_j(x + y) \leq r_j(x) + r_j(y) \leq r_i(x) + r_j(y).}$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{r(x + y) < r(x) + r(y) + \varepsilon.}$$

Esto es cierto para todo $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, y así $\boldsymbol{r}$ es subaditiva. Por construcción, $\boldsymbol{r}$ es una cota inferior de la cadena $\boldsymbol{C}$. Por lo tanto, por el Lema de Zorn, $\boldsymbol{P}$ contiene un elemento mínimo $\boldsymbol{q}$.

Afirmamos que $\boldsymbol{q}$ es realmente mínima en $\mathfrak{P}_E$. Supongamos que $\boldsymbol{q_0}$ es un elemento de $\mathfrak{P}_E$ tal que $\boldsymbol{q_0} \leq \boldsymbol{q}$. Entonces $\boldsymbol{q_0} \leq \boldsymbol{p}$, y así $\boldsymbol{q_0} \in \boldsymbol{P}$. De ello se sigue que $\boldsymbol{q_0}$ es un elemento de $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{q_0} \leq \boldsymbol{q}$, y así $\boldsymbol{q_0} = \boldsymbol{q}$ por la minimalidad de $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{P}$. Esto completa la prueba.

Lema 2.4. *Si* $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{P}_E$ *es mínima, entonces* $\boldsymbol{q}$ *es lineal.*

Prueba. Por el lema 2.1, es suficiente mostrar $\boldsymbol{q(-x) = -q(x)}$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Fijar un $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ y dejar $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{\alpha x}: \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}\}$. Definir un funcional lineal en $\boldsymbol{V}$ por

$$\boldsymbol{f(\alpha x) = -\alpha q(-x)}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}.$$

Si $\boldsymbol{\alpha < 0}$, entonces $\boldsymbol{f(\alpha x) = q(\alpha x)}$, por la homogeneidad positiva de $\boldsymbol{q}$. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$. Por la subaditividad de $\boldsymbol{q}$, tenemos que $\boldsymbol{0 \leq q(\alpha x) + q(-\alpha x)}$, y así

$$\boldsymbol{f(\alpha x) = -\alpha q(-x) = -q(-\alpha x) \leq q(\alpha x)}.$$

De ello resulta que $\boldsymbol{f \leq q}$ en el subespacio $\boldsymbol{V}$. Así, por el Lema 2.2, existe un funcional sublineal $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{r \leq q}$ y $\boldsymbol{r|_V = f}$. Entonces $\boldsymbol{r = q}$ por la minimalidad de $\boldsymbol{q}$, y así $\boldsymbol{f = q|_V}$. Por lo tanto (tomando $\boldsymbol{\alpha = 1}$), tenemos

$$\boldsymbol{q(x) = f(x) = -q(-x)}.$$

La elección de $\boldsymbol{x}$ fue arbitraria, y por eso tenemos el resultado deseado.

Ahora estamos listos para probar el Teorema de Extensión de Hahn-Banach

Prueba.

Por el lema 2.2, existe un funcional sublineal $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{q|_V = f}$ y $\boldsymbol{q \leq p}$. Por el lema 2.3, existe un funcional sublineal mínimo $\boldsymbol{q_o}$ en $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{q_o \leq q}$. Por el lema 2.4, la aplicación $\boldsymbol{q_o}$ es lineal en $\boldsymbol{E}$. Sea $\boldsymbol{\hat{f} = q_o}$.

Entonces $\boldsymbol{\hat{f}}$ es lineal y $\boldsymbol{\hat{f} \leq p}$. Debemos mostrar que $\boldsymbol{\hat{f}|_V = f}$.Desde que $\boldsymbol{\hat{f} \leq q}$ y $\boldsymbol{q|_V = f}$, tenemos $\boldsymbol{\hat{f} \leq f}$ en $\boldsymbol{V}$. Sea $\boldsymbol{x \in V}$. Entonces $\boldsymbol{\hat{f}(x) \leq f(x)}$.

Además, $\boldsymbol{\hat{f}(-x) \leq f(-x)}$. Por linealidad, tenemos entonces $\boldsymbol{\hat{f}(x) \geq f(x)}$. Se sigue que $\boldsymbol{\hat{f}(x) = f(x)}$ para todo $\boldsymbol{x \in V}$, según se requería.

Teorema 2.2 (Teorema de Hahn-Banach Extensión Mayorada) *Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{p}$ una seminorma sobre $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{V}$ un subespacio vectorial de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{f}$ un funcional lineal sobre $\boldsymbol{V}$, dominado por $\boldsymbol{p}$, tal que*

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$$

Luego existe una extensión $\tilde{\boldsymbol{f}}$ de $\boldsymbol{f}$ para $\boldsymbol{E}$, dominada por $\boldsymbol{p}$ tal que

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V},$$

$$\left|\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y})\right| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}), \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}.$$

Prueba:

Supongamos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Luego $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ entonces el teorema 2.1 implica que hay una extensión lineal $\tilde{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$. Pero luego $\tilde{\boldsymbol{f}}(-\boldsymbol{x}) = -\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ así $\left|\tilde{\boldsymbol{f}}\right| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$.

Supongamos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Luego $\Re \boldsymbol{f}$ es un funcional lineal real sobre $\boldsymbol{X}$ tal que $|\Re \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Por la primera parte, existe un funcional lineal real $\boldsymbol{f_1}: \boldsymbol{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ el cual extiende a $\Re \boldsymbol{f}$ tal que $|\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Hagamos $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{i}\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{i}\boldsymbol{x})$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es $\mathbb{C}$ lineal y extiende a $\boldsymbol{f}$.

Para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, escribimos $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}}$. Luego

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x}) = \Re \boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$$

Terminando así la prueba.

Teorema 2.3 (Teorema de Hahn-Banach para Espacios Reales Normados Extensión Equinórmica) *Supongamos que $\boldsymbol{X}$ es un espacio vectorial real normado y sea $\boldsymbol{V}$ un subespacio lineal de $\boldsymbol{X}$. Si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^*$, entonces allí existe una extensión $\hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{X}^*$ tales que $\hat{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{f}$* y $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \|\boldsymbol{f}\|$.

Prueba. Definamos $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. Entonces $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{V}$. (Tenga en cuenta que $\boldsymbol{f}$ se define solo en $\boldsymbol{V}$.*)* Por lo tanto, por el Teorema de Extensión de Hahn-Banach (Teorema 2.1), hay un funcional lineal $\hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{X}^*$ tal que $\hat{\boldsymbol{f}} \leq \boldsymbol{p}$ y $\hat{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{f}$. De ello se desprende directamente que $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \|\boldsymbol{f}\|$.

Ejemplo 2.1. Consideremos el espacio de sucesiones reales convergentes $\boldsymbol{c}$. La norma en este Espacio de Banach es $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sup\limits_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}} |\boldsymbol{\xi_n}|$, donde $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$. Sabemos que $\boldsymbol{c}$ es un subespacio de $\boldsymbol{\ell}_\infty$, el espacio de todas las sucesiones reales acotadas. Definir un funcional lineal $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{c} \to \mathbb{R}$ por

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} \boldsymbol{\xi_n}, \ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \in \boldsymbol{c} \qquad \textbf{(2,1)}$$

La función $\boldsymbol{f}$ es acotada y $\|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$. Por el Teorema 2.3 (el teorema de Hahn-Banach para espacios reales normados), existe una extensión lineal $\hat{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{\ell}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{f} \text{ y } \|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \mathbf{1}.$$

Por construcción, $\hat{\boldsymbol{f}} \in (\boldsymbol{\ell}_\infty)^*$. Ahora vamos a demostrar que $\hat{\boldsymbol{f}} \notin \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}.$ (Tenga en cuenta que, entre otras cosas, esto demuestra que $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$ no es reflexivo.) Supongamos por el contrario que $\hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}.$ Entonces existe una sucesión de escalares $(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$ de tal manera que $\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}|\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}| = \mathbf{1}$ y tal que

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}} \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell}_\infty. \qquad \mathbf{(2,2)}$$

Si $\boldsymbol{x}$ es una sucesión de valores escalares, entonces denotemos la $\boldsymbol{n} - \text{é}\boldsymbol{sima}$ coordenada de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})$. Sea $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}$ la sucesión con un $\mathbf{1}$ en la $\boldsymbol{m} - \text{é}\boldsymbol{sima}$ coordenada y ceros en cualquier otro lugar, por lo que $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$ si $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$. Ciertamente, tenemos $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}} \in \boldsymbol{C}$ para cada $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}.$ Así, por (2.1),

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}) = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}.$$

Por otra parte, por (2.2),

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}) = \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$$

En consecuencia, $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$ para todo $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\hat{\boldsymbol{f}} = 0$, lo cual es una contradicción (porque $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \mathbf{1}$). Llegamos a la conclusión de que $\hat{\boldsymbol{f}} \notin \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$.

Ejemplo 2.2 Consideremos de nuevo el espacio de sucesiones reales convergentes $\boldsymbol{c}$, esta vez con el funcional sublineal $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}) = \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}}$, donde $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty}$. Como en Ejemplo 2.1, dejemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}} \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{n}})_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \in \boldsymbol{c}$$

Entonces $\boldsymbol{f}$ es una norma funcional lineal en $\boldsymbol{c}$. Está claro que $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{c}$. Por lo tanto, por Teorema 2.1 (Teorema de la Extensión de Hahn-Banach), existe un funcional lineal $\tilde{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{\ell}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{f}$ y $\tilde{\boldsymbol{f}} \leq \boldsymbol{p}$. Como fue el caso en el Ejemplo 2.1, se puede demostrar que $\tilde{\boldsymbol{f}} \notin \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$.

Vale la pena señalar que $\tilde{f}$ tiene una propiedad adicional. Si $\boldsymbol{\xi}$ es una sucesión acotada de los números reales no negativos, entonces $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathbf{0}$. Para ver esto, supongamos que $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión acotada tal que $\boldsymbol{\xi_n} \geq \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{\xi}) = \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}(-\boldsymbol{\xi_n}) \leq \mathbf{0}$$

Por construcción, $\tilde{\boldsymbol{f}} \leq \boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{\ell}_{\infty}$, y así, $\tilde{\boldsymbol{f}}(-\boldsymbol{\xi}) \leq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) \geq \mathbf{0}$, por la linealidad de, $\tilde{\boldsymbol{f}}$**.**

Como una extensión simple, observe que, para las sucesiones $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ y $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{\ell}_{\infty}$, tenemos $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi}) \geq \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\eta}) \geq \mathbf{0}$ siempre que $\boldsymbol{\xi_n} \geq \boldsymbol{\eta_n}$ para toda $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Observación 2.1 La existencia de $\hat{\boldsymbol{f}}$ y $\tilde{\boldsymbol{f}}$ en los ejemplos anteriores está garantizada por el Teorema de Hahn-Banach, pero esto se basa en el axioma de elección. No existe una fórmula para la construcción de $\hat{\boldsymbol{f}}$ o $\tilde{\boldsymbol{f}}$ y de hecho, ninguna fórmula puede existir. Si el axioma de elección se sustituye por un supuesto más débil, entonces $\boldsymbol{\ell}_{\infty}^{*} = \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$. Esto significa, por un lado, que cualquier funcional lineal en $\boldsymbol{\ell}_{\infty}$ que puede escribirse explícitamente debe pertenecer a $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{1}}$.

Cuando una extensión de un funcional lineal es encontrado usando El Teorema de Hahn-Banach, que a veces se llama una *extensión de Hahn-Banach* del funcional. Las extensiones $\hat{\boldsymbol{f}}$ y $\tilde{\boldsymbol{f}}$ en los ejemplos 2.1 y 2.2 (respectivamente) son ambos extensiones de Hahn-Banach del mismo funcional lineal acotado ***f*.** Las extensiones de Hahn-Banach son en general no únicas, como el siguiente ejemplo ilustra.

Ejemplo 2.3 Sea $\boldsymbol{c}$ el espacio de las sucesiones convergentes y sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{\xi_n}$ para toda $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ en $\boldsymbol{c}$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es un funcional lineal en $\boldsymbol{c}$ con $\|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$.

Ahora sea $\mathbf{1}_{\boldsymbol{E}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots)$ la sucesión que tiene $\mathbf{0}$ en cada coordenada impar y **1** en cada coordenada par. Sea $\boldsymbol{X}$ el subespacio de $\boldsymbol{\ell}_{\infty}$ generada por $\boldsymbol{c}$ y $\mathbf{1}_{\boldsymbol{E}}$**.** (Es decir, sea $\boldsymbol{X}$ el subespacio más pequeño de $\boldsymbol{\ell}_{\infty}$ que contiene todas las secuencias en $\boldsymbol{c}$ y la sucesión $\mathbf{1}_{\boldsymbol{E}}$.) Extenderemos el funcional lineal $\boldsymbol{f}$ para $\boldsymbol{X}$ de dos maneras:

$$\boldsymbol{f_E} = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{x_{2n}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{f_O}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{x_{2n+1}},$$

donde $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión en $\boldsymbol{X}$. Observe que $\boldsymbol{f_E}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f_O}(\boldsymbol{\xi})$ para toda sucesión $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{c}$.

Cada uno de los funcionales lineales $\boldsymbol{f_E}$ y $\boldsymbol{f_O}$ son acotados en $\boldsymbol{X}$ y tienen norma uno. Por el teorema de Hahn-Banach, estos funcionales lineales acotados pueden extenderse para la norma uno los funcionales $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{O}}$ (respectivamente) en $\boldsymbol{\ell}_\infty$. Porque

$$\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{E}}|_{\boldsymbol{c}} = \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{O}}|_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{f},$$

y ambos $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{O}}$ tienen norma $\mathbf{1}$, son ambos extensiones de Hahn-Banach de $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{\ell}_\infty$. Se ve fácilmente, sin embargo, que $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{E}}$ **y** $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{O}}$ son funcionales lineales distintos en $\boldsymbol{\ell}_\infty$, porque $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{E}}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{E}}) = \mathbf{1}$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{E}}) = \mathbf{0}.$

En el ejemplo anterior, encontramos dos distintas extensiones de Hahn-Banach para el funcional lineal acotado $\boldsymbol{f}$ dividiendo $\mathbb{N}$ en dos conjuntos, es decir el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares. Podemos encontrar más allá extensiones de Hahn-Banach para $\boldsymbol{f}$ repitiendo el mismo argumento utilizando diferentes particiones de $\mathbb{N}$.

Cuando $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, en realidad se puede escribir una fórmula explícita para los funcionales lineales en $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}$. En última instancia, esto es porque $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}$ es un espacio separable cuando $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$. El espacio $\boldsymbol{\ell}_\infty$ sin embargo, es enorme, y consecuentemente $\boldsymbol{\ell}_\infty^*$ es un "monstruo". Para conseguir alguna perspectiva del tamaño de $\boldsymbol{\ell}_\infty$, considere el conjunto $\boldsymbol{S}$ de todas las sucesiones de ceros y unos, que está sin duda contenida en $\boldsymbol{\ell}_\infty$. Cualquiera de los dos elementos distintos $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ en $\boldsymbol{S}$ deben diferir en al menos una coordenada, y así $\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|_\infty = \mathbf{1}$. El tamaño de $\boldsymbol{S}$ es $|\boldsymbol{S}| = \mathbf{2}^{\aleph_0}$, el tamaño del continuo (también denotado por $\mathfrak{c}$), y así $\boldsymbol{\ell}_\infty$ está lejos de ser separable.

Observación 2.2 (Separabilidad y espacios clásicos) Los comentarios anteriores muestran que el espacio $\boldsymbol{\ell}_\infty$ de sucesiones acotadas no es un espacio separable. Por otro lado, el espacio de $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}$ de sucesiones $\boldsymbol{p}$-sumables es separable cuando $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, porque el conjunto $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}: \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso numerable de $\boldsymbol{\ell}_{\boldsymbol{p}}$, donde $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}$ es la sucesión con $\mathbf{1}$ en la $\boldsymbol{k} -$ é**sima** coordenada y cero en cualquier otra coordenada.

El espacio $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ de funciones continuas en $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ es separable, porque el conjunto $\{\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}\colon \boldsymbol{k} \in \mathbb{N} \cup \{\mathbf{0}\}\}$ es denso en $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, por el teorema de aproximación de Weierstrass. En consecuencia, el espacio $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ de funciones medibles $\boldsymbol{p}$–integrable en $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, donde $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, también es separable, debido a que $\boldsymbol{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ es denso en este espacio, por el teorema de Lusin. El espacio $\boldsymbol{L}_\infty(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ de funciones medibles esencialmente acotadas en $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ no es separable, sin embargo. Observe que $\{\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\boldsymbol{x}]}: \mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}\}$ es una colección innumerable de funciones en $\boldsymbol{L}_\infty(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ y $\left\|\boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\boldsymbol{s}]} - \boldsymbol{\chi}_{[\mathbf{0},\boldsymbol{t}]}\right\|_\infty = \mathbf{1}$ siempre que $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$.

Teorema 2.4 (Teorema de Hahn-Banach para Espacios Complejos Normados) *Suponga que $\boldsymbol{X}$ es un espacio vectorial complejo normado y sea $\boldsymbol{V}$ un subespacio lineal de $\boldsymbol{X}$. Si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^*$, entonces existe una extensión $\hat{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{X}^*$ tales que $\hat{\boldsymbol{f}}|_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{f}$ y $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \|\boldsymbol{f}\|$.*

Prueba. Sea $\boldsymbol{X}_{\mathbb{R}}$ el espacio real de Banach subyacente (olvidemos que se puede utilizar escalares complejos). Definamos $\boldsymbol{f_0}: \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ por $\boldsymbol{f_0}(\boldsymbol{V}) = \Re(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$ para toda $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Entonces $\boldsymbol{f_0}$ es un funcional lineal real en $\boldsymbol{V}$. Por otra parte, para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

$$|\boldsymbol{f_0}(\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})| = \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

y así $\|\boldsymbol{f_0}\| \leq \boldsymbol{f}$. Por el Teorema 2.3 (Teorema de Hahn-Banach para espacios reales normados), el funcional lineal $\boldsymbol{f_0}$ tiene una extensión $\widehat{\boldsymbol{f_0}}: \boldsymbol{X}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ que es lineal y tal que $\|\widehat{\boldsymbol{f_0}}\| = \|\boldsymbol{f_0}\| \leq \|\boldsymbol{f}\|$.

Definamos

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{i}\widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{ix}), \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Observe que si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, entonces (ya que $\boldsymbol{f}$ es lineal complejo)

$$\boldsymbol{f_0}(\boldsymbol{iv}) = \Re(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{iv})) = \Re(\boldsymbol{if}(\boldsymbol{v})) = -\Im(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})).$$

De ello se desprende que, para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f_0}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{if_0}(\boldsymbol{iv}) = \Re(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})) + \boldsymbol{i}\Im(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}).$$

Por lo tanto, $\hat{\boldsymbol{f}}$ es una extensión de $\boldsymbol{f}$. Por construcción, $\hat{\boldsymbol{f}}$ es $\mathbb{R}$-lineal.

Para ver que también es $\mathbb{C}$ -lineal, reemplacemos $\boldsymbol{ix}$ en (2.3), para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$,

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{ix}) = \widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{ix}) + \boldsymbol{i}\,\widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{i}\,\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).$$

Queda por demostrar que $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| = \|\boldsymbol{f}\|$. Sabemos que $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| \geq \|\boldsymbol{f}\|$, ya que $\hat{\boldsymbol{f}}$ es una extensión de $\boldsymbol{f}$. Supongamos que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ con $\|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{1}$. Sabemos que $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$. Tomemos $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Entonces, por linealidad, $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\boldsymbol{x}) = \widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\boldsymbol{x}),$$

y entonces

$$|\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})| = |\widehat{\boldsymbol{f_0}}(\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\boldsymbol{x})| \leq \|\widehat{\boldsymbol{f_0}}\|\|\boldsymbol{e^{i\theta}}\,\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{x}\|.$$

En consecuencia, $\|\hat{\boldsymbol{f}}\| \leq \|\boldsymbol{f}\|$, lo que completa la prueba.

2.2 Forma Geométrica del Teorema de Hahn-Banach: Separación de Conjuntos convexos

Ahora introducimos la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach el cual garantiza la separación de conjuntos convexos en espacios lineales normados por hiperplanos. Este teorema es crucial para investigar o averiguar la existencia de un óptimo en problemas de optimización, constituyendo así una herramienta especial en este tipo de problemas.

Teorema 2.5 (Hahn-Banach, primera Forma Geométrica). *Sean $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$ dos subconjuntos convexos no vacíos tal que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$. Asumamos que uno de ellos es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.*

Similarmente a como se hizo con el teorema de extensión versión analítica la prueba del teorema 2.5 se consigue con los siguientes dos lemas.

Lema 2.5. Sea $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{E}$ un conjunto convexo abierto con $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{C}$. Para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{inf}\{\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}\}$$

($\boldsymbol{p}$ es llamado el calibre de $\boldsymbol{C}$ o el funcional de Minkowski de $\boldsymbol{C}$).

Entonces $\boldsymbol{p}$ satisface

1. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{\lambda p}(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ y $\forall \boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{0}$,
2. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}$.

Y además las siguientes propiedades:

3. Existe una constante $\boldsymbol{M}$ tal que $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{M}\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$,
4. $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{1}\}$.

Prueba del lema 2.5. Es obvio que se satisface **1**.

Prueba de **3**. Sea $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{r}) \subset \boldsymbol{C}$; claramente tenemos

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\|\boldsymbol{r}\|, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}.$$

Prueba de **4**. Primero, supongamos que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$; como $\boldsymbol{C}$ es abierto, se sigue que $(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$ para $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ bastante pequeño y por consiguiente $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon}} < \boldsymbol{1}$. Inversamente, si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{1}$ existe $\boldsymbol{\alpha} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ tal que $\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$, y así $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{C}$.

Prueba de **2**. Sea $x, y \in E$ y sea $\varepsilon > 0$. Usando 1. y 4. obtenemos que $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ y $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Así $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ para todo $t \in [0,1]$. Escogiendo el valor $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, encontramos que $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Usando 1. y 4. una vez más, llegamos a $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$.

Lema 2.6. Sea $C \subset E$ un conjunto abierto convexo no vacío y sea $x_0 \in E$ con $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$. En particular, el hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y C.

Prueba: Podemos asumir siempre que $0 \in C$. Podemos así introducir el calibre p de C (ver lema 2.5). Consideremos el subespacio lineal $G = \mathbb{R}x_0$ y el funcional lineal $g: G \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(tx_0) = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Es claro que

$$g(x) \le p(x), \qquad \forall x \in G$$

(Consideremos los dos casos $t > 0$ y $t \le 0$). Se sigue del Teorema 2.1 que existe un funcional lineal f en E que extiende g y satisface

$$f(x) \le p(x), \qquad \forall x \in E.$$

En particular tenemos $f(x_0) = 1$ y que f es continua por 3. De 4. deducimos que $f(x) < 1$ para toda $x \in C$.

Prueba del teorema 2.5. El conjunto $C = A - B$, así que C es convexo, C es abierto y $0 \notin C$ (porque $A \cap B = \emptyset$). Por el Lema 2.6 existe algún $f \in E^*$ tal que

$$f(z) < 0, \qquad \forall z \in C,$$

Esto es,

$$f(x) < f(y), \qquad \forall x \in A, \qquad \forall y \in B.$$

Fijemos una constante α satisfaciendo

$$\sup_{x \in A} f(x) \le \alpha \le \inf_{y \in B} f(y).$$

Claramente, el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B.

Teorema 2.6 (Segunda Forma Geométrica del Teorema de Hahn-Banach). Sean $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$ dos subconjuntos convexos no vacíos tal que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$. Asumamos que $\boldsymbol{A}$ es cerrado y $\boldsymbol{B}$ es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Prueba. El conjunto $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ es convexo, cerrado, y $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{C}$. Por lo tanto, existe $\boldsymbol{r} > \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{B}(\mathbf{0}, \boldsymbol{r}) \cap \boldsymbol{C} = \emptyset$**.** Por el Teorema 2.5 es un hiperplano cerrado que separa $\boldsymbol{B}(\mathbf{0}, \boldsymbol{r})$ y $\boldsymbol{C}$. Por consiguiente, existe algún $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}(\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

Se sigue que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq -\boldsymbol{r}\|\boldsymbol{f}\|$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$. Haciendo $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{r}\|\boldsymbol{f}\| > \mathbf{0}$, obtenemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}.$$

Escogiendo $\boldsymbol{\alpha}$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \inf_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\varepsilon},$$

Vemos que el hiperplano $[\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ estrictamente separa $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$**.**

Observación 2.3. Asumamos que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$ son dos conjuntos convexos no vacíos tal que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$**.** Si no suponemos más allá, es en general imposible separar $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ por un hiperplano cerrado. Sin embargo, si $\boldsymbol{E}$ es finito-dimensional podemos siempre separar cualquiera dos conjuntos convexos no vacíos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$**.**

Concluimos esta sección con un exitoso hecho:

Corolario 2.1 Sea $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$ un subespacio lineal tal que $\overline{\boldsymbol{F}} \neq \boldsymbol{E}$. Entonces existe $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$**,** tal que

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}.$$

Prueba. Sea $\boldsymbol{x}_\mathbf{0} \in \boldsymbol{E}$ con $\boldsymbol{x}_\mathbf{0} \notin \overline{\boldsymbol{F}}$. Usando el Teorema 2.5 con $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{F}}$ y $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}_\mathbf{0}\}$, encontramos un hiperplano cerrado $[\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ que separa estrictamente $\overline{\boldsymbol{F}}$ y $\{\boldsymbol{x}_\mathbf{0}\}$**.** Así, tenemos

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle < \boldsymbol{\alpha} < \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}_\mathbf{0} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}.$$

Se sigue que $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}$, desde entonces $\boldsymbol{\lambda}\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle < \boldsymbol{\alpha}$ para toda $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$**.**

Observación 2.4. El Corolario 2.1 es usado muy a menudo para probar que un subespacio lineal $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$ es denso. Es suficiente demostrar que todo funcional lineal continuo en $\boldsymbol{E}$ que deja de existir en $\boldsymbol{F}$ debe dejar de existir en todas partes de $\boldsymbol{E}$.

2.3 Otros Resultados

Consecuencia 1.
Sea $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces existe una $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}'$ tal que $\|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$ y $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

Prueba:

Es necesario probar que si

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}' \;:\quad \|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$ y $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

Consideremos

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{\lambda x} \quad : \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}\}.$$

Definimos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|.$$

$\boldsymbol{f}$ es un funcional lineal sobre $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{f}(\underbrace{\boldsymbol{\lambda_1 x}}_{x_1} + \underbrace{\boldsymbol{\lambda_2 x}}_{x_2}) = (\boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\lambda_2})\|\boldsymbol{x}\|$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{\lambda_1}\|\boldsymbol{x}\|}_{f(x_1)} + \underbrace{\boldsymbol{\lambda_2}\|\boldsymbol{x}\|}_{f(x_2)} \;.$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha x_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}\,\underbrace{\boldsymbol{\lambda_1 x}}_{x_1})$$

Aplicando ahora la definición de $\boldsymbol{f}$

$$= \boldsymbol{\alpha}\,\underbrace{\boldsymbol{\lambda_1}\|\boldsymbol{x}\|}_{f(x_1)} = \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x_1}).$$

Para $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$.

$\boldsymbol{f}$ continuo sobre $\boldsymbol{M}$:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x})| = |\boldsymbol{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|| = |\boldsymbol{\lambda}|\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{\lambda x}\| \Rightarrow \|\boldsymbol{f}\| \leq \mathbf{1} \;.$$

Luego,

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0} \qquad \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x})|}{\|\boldsymbol{\lambda x}\|} = \mathbf{1} \leq \sup_{\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|}{\|\boldsymbol{y}\|} = \|\boldsymbol{f}\| \;,$$

de donde $\|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$.

Luego por el teorema 2.3 $\exists \tilde{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{X}' \;:\quad \|\tilde{\boldsymbol{f}}\| = \|\boldsymbol{f}\| = \mathbf{1}$ y $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$.

Observación

El funcional lineal construido así se llamará **"**funcional lineal normalizador al punto $\boldsymbol{x}$**"**, y se denotará por $\boldsymbol{f_x}$. Este funcional lineal no necesita ser único en general (desde que las extensiones no son únicas como veremos después).

La consecuencia 1 afirma la existencia de algún espacio lineal normado no trivial de un funcional lineal continuo diferente de cero, esto es, de la consecuencia se deduce que si para algún elemento $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ se cumple que $\boldsymbol{f(x) = 0}$ para $\boldsymbol{f}$ funcional lineal del espacio conjugado $\boldsymbol{X}^*$ entonces $\boldsymbol{x = 0}$.

La consecuencia 1 tiene también un aprovechamiento geométrico así a través de cualquier punto $\boldsymbol{x_0}$ en alguna bola $\|\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{r}$ esto es, $\|\boldsymbol{x_0}\| = \boldsymbol{r}$ se puede trazar un plano en esta bola.

Consecuencia 2.
Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio normado, $\boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x \neq y}$. Demostrar que si existe una $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}'$ tal que, $\boldsymbol{f(x) \neq f(y)}$.
Prueba:

Sea $\boldsymbol{x - y \neq 0} \Rightarrow \exists \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}' : \boldsymbol{f(x-y)} = \|\boldsymbol{x-y}\|$. Entonces

$$\boldsymbol{f(x-y) = f(x) - f(y)} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{f(x) = f(y)} + \underbrace{\|\boldsymbol{x-y}\|}_{\boldsymbol{>0}}$$

$$\Rightarrow \;\; \boldsymbol{f(x) \neq f(y)}$$

Observación

Esto se resume diciendo que el funcional $\boldsymbol{f}$ separa $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{y}$, o también que $\boldsymbol{X}^*$ separa los puntos de $\boldsymbol{X}$.

Consecuencia 3.
Sean $\boldsymbol{X}$ un espacio normado, $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$ y supongamos que para cualquier $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}'$, tal que $\|\boldsymbol{f}\| = \boldsymbol{1}$, se cumple la desigualdad $|\boldsymbol{f(x_0)}| \leq \boldsymbol{1}$. Demostrar que $\|\boldsymbol{x_0}\| \leq \boldsymbol{1}$

Para el caso de que $\boldsymbol{x_0 = 0}$ tenemos una trivialidad. Para el caso $\boldsymbol{x_0 \neq 0}$, por la consecuencia 1 tenemos que $\exists \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}'$ tal que $\|\boldsymbol{f}\| = \boldsymbol{1}$ y $|\boldsymbol{f(x_0)}| = \|\boldsymbol{x_0}\|$ aplicando directamente la hipótesis tenemos que $\|\boldsymbol{x_0}\| \leq \boldsymbol{1}$.

Consecuencia 4.
Sea $\boldsymbol{x_0(t)} \in \boldsymbol{C[0,1]}$, $\boldsymbol{x_0} \neq 0$, consideramos el subespacio unidimensional **L**= $\{\boldsymbol{\lambda x_0(t)}\}$ donde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Definamos sobre **L** un funcional lineal $\boldsymbol{f}$ mediante la igualdad $\boldsymbol{f(x) = \lambda}$ si $\boldsymbol{x = \lambda x_0}$.

a) Demostrar que $\|\boldsymbol{f}\| = \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x_0}\|}$.

b) Según el teorema 2.3 $\boldsymbol{f}$ se puede prolongar sobre todo el espacio $\boldsymbol{C[0,1]}$ conservando la norma. ¿Es única esta prolongación si $\boldsymbol{x_0(t) = 1 - 2t}$?

Prueba:

Inciso **a)** $\boldsymbol{f(\lambda x_0) = \lambda}$ es lineal

$$|\boldsymbol{f}\,(\underbrace{\boldsymbol{\lambda x_0}}_{\boldsymbol{x}})| = |\boldsymbol{\lambda}|\frac{\|\boldsymbol{x_0}\|}{\|\boldsymbol{x_0}\|} = \frac{|\boldsymbol{\lambda}|\|\boldsymbol{x_0}\|}{\|\boldsymbol{x_0}\|} = \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x_0}\|}\|\boldsymbol{x}\| \Rightarrow \underbrace{\sup_{\boldsymbol{x\neq 0}}\frac{|\boldsymbol{f(x)}|}{\|\boldsymbol{x}\|}}_{\|\boldsymbol{f}\|} = \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x_0}\|}.$$

Inciso **b)**

$$\boldsymbol{x_0(t) = 1 - 2t} \qquad \boldsymbol{f(\lambda x_0) = \lambda} \quad \|\boldsymbol{f}\| = \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{x_0}\|} = \frac{\boldsymbol{1}}{\max\limits_{\boldsymbol{t\in[0,1]}}|\boldsymbol{x_0(t)}|} = \boldsymbol{1}$$

Consideremos

$$\boldsymbol{f_1(x) = x(0)} \;\; \boldsymbol{y} \;\; \boldsymbol{f_2(x) = -x(1)}$$

Se tiene que

$$\|\boldsymbol{f_1}\| = \|\boldsymbol{f_2}\| = \boldsymbol{1}$$

Probemos que $\boldsymbol{f_1}$ y $\boldsymbol{f_2}$ coinciden con f sobre **L**

$$\boldsymbol{f_1(\lambda x_0)} \underset{Def.\ de\ \boldsymbol{f_1}}{=} (\boldsymbol{\lambda x_0})(0) = \boldsymbol{\lambda x_0(0)} = \boldsymbol{\lambda}\underbrace{\boldsymbol{(1 - 2(0))}}_{\boldsymbol{=1}}$$

$$= \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{f(\lambda x_0)}$$

$$\boldsymbol{f_2(\lambda x_0)} \underset{Def.\ de\ \boldsymbol{f_2}}{=} (-\boldsymbol{\lambda x_0})(1) = -\boldsymbol{\lambda x_0}(1) = (-\boldsymbol{\lambda})\underbrace{\boldsymbol{(1 - 2(1))}}_{\boldsymbol{=-1}}$$

$$= \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{f(\lambda x_0)}$$

Luego $\boldsymbol{f_1}$ y $\boldsymbol{f_2}$ son dos prolongaciones de $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{C[0,1]}$ que preservan la norma.

Observación

Este resultado muestra que las extensiones pueden ser o no ser únicas.

Consecuencia 5.
Sean $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{X}$ una variedad lineal, $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x_0} \notin \boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{L}) > \mathbf{0}$. Entonces una $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}'$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ para cualquier $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{1}$ y $\|\boldsymbol{f}\| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}$

Consideremos

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{\lambda x_0} + \boldsymbol{l}: \quad \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}, \qquad \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}\}$$

Definamos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x_0} + \boldsymbol{l}) = \boldsymbol{\lambda}.$$

Hay que probar que $\boldsymbol{f}$ es un funcional lineal, continua sobre $\boldsymbol{L}$ y que $\|\boldsymbol{f}\| = {}^{\mathbf{1}}/_{\boldsymbol{d}}$ para aplicar seguidamente la consecuencia 1.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha x_1} + \boldsymbol{\beta x_2}) &= \boldsymbol{f}[\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\lambda_1 x_0} + \boldsymbol{l_1}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\lambda_2 x_0} + \boldsymbol{l_2})] \\ &= \boldsymbol{f}[(\boldsymbol{\alpha\lambda_1} + \boldsymbol{\beta\lambda_2})\boldsymbol{x_0} + (\boldsymbol{\alpha l_1} + \boldsymbol{\beta l_2})] \\ &= \boldsymbol{\alpha\lambda_1} + \boldsymbol{\beta\lambda_2} = \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{\beta f}(\boldsymbol{x_2}) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f}$ continua:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x_0} + \boldsymbol{l})| = |\lambda|\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}|\lambda|\left\|x_0 - \left(-\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{d}}\right)\right\|, \qquad \forall\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}, \qquad donde\ -\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{d}} \in \boldsymbol{L}$$

$$\therefore |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x_0} + \boldsymbol{l})| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}\|\boldsymbol{\lambda x_0} + \boldsymbol{l}\|$$

Observemos que si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, entonces

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{l})| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}\|\boldsymbol{l}\|$$

Luego,

$$\|\boldsymbol{f}\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}$$

Se tiene que

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x_0} - \boldsymbol{l})| \leq \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{l}\|, \qquad \forall\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$$

Como

$$\boldsymbol{d} = \inf_{\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{L}}\|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{l}\|, \qquad \exists\{\boldsymbol{l_n}\} \subset \boldsymbol{L}: \ \boldsymbol{l_n} \to \|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{l_n}\| \underset{\boldsymbol{n}\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{d}$$

Sustituyendo

$$\mathbf{1} \leq \|\boldsymbol{f}\|\|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{l}\|, \qquad \forall \boldsymbol{n}$$

Pasando el límite

$$\mathbf{1} \leq \|\boldsymbol{f}\|\boldsymbol{d} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}} \leq \|\boldsymbol{f}\|$$

Por la consecuencia 1. $\exists \tilde{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{X}'$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{1}$ y $\|\tilde{\boldsymbol{f}}\| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}}$.

Observación

Esta consecuencia tiene la siguiente interpretación:

Para que $\boldsymbol{x_0}$ sea un punto límite de alguna combinación lineal de funcionales tipo $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C_i X_i}$ es necesario y suficiente que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{f}$, funcionales lineales que son iguales a cero en $\{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots \boldsymbol{X_n}, \ldots\}$.

Consecuencia 6.
Si $\boldsymbol{X} \neq \{\boldsymbol{\theta}\}$ es un espacio real lineal normado, entonces existen siempre funcionales lineales no triviales en X.

Prueba. En el teorema de Hahn-Banach tomamos $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$. Ahora tomamos cualquier $\boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{\theta}$ y definamos $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{\alpha x_0}, \boldsymbol{\alpha\ real}\}$. Entonces $\boldsymbol{M}$ es un subespacio y si se tiene $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha x_0}) = \boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{x_0}\|$ entonces $\boldsymbol{f}$ es lineal y continuo en $\boldsymbol{M}$. De aquí podemos extender $\boldsymbol{f}$ hasta $\boldsymbol{X}$ con preservación de la norma (por el teorema 2.3). Así cada elemento $\boldsymbol{x_0}$ distinto de cero de $\boldsymbol{X}$ genera un funcional lineal continuo en $\boldsymbol{X}$ cuyo valor en $\boldsymbol{x_0}$ es $\|\boldsymbol{x_0}\| > \mathbf{0}$.

Consecuencia 7.
Sea $\boldsymbol{X}$ un espacio real lineal normado y supongamos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ para toda $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}^*$. Entonces se debe tener $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Prueba. Si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\theta}$ existe, por el resultado anterior, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}^*$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$, mientras asumamos que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ para toda $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}^*$. De aquí el resultado.

Consecuencia 8.

Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial topológico real, $\boldsymbol{A}$ subconjunto convexo abierto no vacío, $\boldsymbol{B}$ subconjunto convexo no vacío en el cual no se encuentra $\boldsymbol{A}$. Entonces hay un funcional lineal continuo $\boldsymbol{f}$ y un número real $\boldsymbol{\alpha}$ tal que:

$$\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}\}, \qquad \boldsymbol{B} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}.$$

Prueba:

El conjunto $\boldsymbol{C} = \bigcup_{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}} (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ **(**conjunto de diferencias de elementos de $\boldsymbol{A}$ y elementos de $\boldsymbol{B}$, no $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$**)** es abierto, como una reunión de conjuntos abiertos y este es convexo, desde que este es la imagen de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ por la aplicación $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \to \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$. Este es no vacío, y no contiene al $\boldsymbol{0}$. Por el teorema de Hahn-Banach versión geométrica, existe un hiperplano cerrado en el cual no se halla $\boldsymbol{C}$: uno puede encontrar un funcional lineal continuo $\boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}$, para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$.

Por consiguiente, tenemos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$, para toda $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$, y toda $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}$. Así, si ponemos $\boldsymbol{\alpha} = \inf_{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$, tenemos

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}), \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}.$$

Esto no es aún nuestra declaración pero desde que $\boldsymbol{A}$ es abierto, tenemos

$$\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}\},$$

lo cual finaliza la prueba.

Si tenemos $\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\alpha}\}$ y $\boldsymbol{B} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$ decimos que el hiperplano $\{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}\}$ separa $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ cada una de estas líneas recae sobre un espacio medio cerrado. Si tenemos $\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}\}$ y $\boldsymbol{B} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{\alpha}\}$, decimos que este hiperplano *separa estrictamente* $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Ahora establecemos el análogo del resultado anterior para espacios vectoriales complejos. Diremos que un conjunto $\boldsymbol{A}$, contenido en un espacio vectorial complejo $\boldsymbol{E}$, es $\mathbb{C}$ $-$***simétrico*** si, cuandoquiera $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, luego, para toda $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$ con $|\boldsymbol{\lambda}| = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{A}$ (tales conjuntos son además llamados **"**balanceados**"**).

Consecuencia 9.
Sea $\boldsymbol{E}$ un espacio vectorial topológico complejo, $\boldsymbol{A}$ un conjunto convexo, abierto, $\mathbb{C}$ $-$*simétrico,* y no vacío. $\boldsymbol{B}$ un conjunto convexo no vacío, el cual no contiene $\boldsymbol{A}$**.** Luego hay un funcional lineal continuo (complejo) $\boldsymbol{f}$ y un número $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ tal que:

$$\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{\alpha}\}, \qquad \boldsymbol{B} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \geq \boldsymbol{\alpha}\}.$$

Prueba:

Por resultado anterior, hay un funcional lineal continuo $\boldsymbol{g}$ sobre $\boldsymbol{E}$ y un número $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boldsymbol{A} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}\}, \qquad \boldsymbol{B} \subset \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E};\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}.$$

Desde que $\mathbf{0} \in \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ es convexo y $\mathbb{C}$ $-$*simétrico*), tenemos $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha}$. Pongamos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{ig}(\boldsymbol{ix})$; luego $\mathfrak{R}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$, y así

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \geq \mathfrak{R}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}.$$

Tomemos ahora $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$**,** y $\boldsymbol{\theta}$ tal que

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \mathfrak{R}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x}).$$

Desde que $\boldsymbol{A}$ es $\mathbb{C}$ $-$*simétrico*, $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\theta}}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ y $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{\alpha}$, lo cual prueba el resultado.

Consecuencia 10.
En cualquier espacio polinormado $\boldsymbol{L}$ hay suficientemente muchos funcionales lineales continuos para separar cualesquiera dos puntos.

Prueba:

Ciertamente, si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, sabemos que cada vecindad de ceros en un espacio convexo localmente contiene un conjunto convexo balanceado abierto; esto es existe una vecindad convexa balanceada $\boldsymbol{U}$ de cero que no contiene $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. Sea $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{U}}$, $\boldsymbol{L}_{\mathbf{0}}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, y $\boldsymbol{f}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathbf{1}$. Por teorema de Hahn-Banach existe un funcional $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{*}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\mathbf{1}$ y $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x})$.

Consecuencia 11.
Sea $\boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}$ conjuntos convexos disjuntos en $\boldsymbol{L}$, uno de los cuales es abierto. Luego existe un hiperplano $\boldsymbol{T}$ separando $\boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}$.

Ciertamente, dejemos $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}-\boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}=\{\mathbf{0}\}$. Luego $\boldsymbol{U}$ es un conjunto convexo abierto, y $\boldsymbol{S}$ es una variedad lineal disjunta de $\boldsymbol{U}$. Sea $\boldsymbol{T}$ un hiperplano conteniendo $\boldsymbol{S}$ y disjunto de $\boldsymbol{U}$. Desde que $\boldsymbol{T}$ contiene al cero, este es determinado por una ecuación $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{f}$ es un funcional lineal sobre $\boldsymbol{L}$ desde que $\boldsymbol{U}$ es convexo y disjunto de $\boldsymbol{T}$, toma valores de un solo signo sobre $\boldsymbol{U}$.

Suponga por definiciones que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>\mathbf{0}$ para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Recordando la definición de $\boldsymbol{U}$, vemos que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})>\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})$ para toda $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \in \boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \in \boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}$. Dejemos $\boldsymbol{c}=\sup\limits_{\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \in \boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})$. Luego el hiperplano $\boldsymbol{T}=\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\}$ separa $\boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}$.

Comentario

El requerimiento que $\boldsymbol{U}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{U}_{\mathbf{2}}$ sean abiertos en la afirmación anterior es esencial.

Comentarios del capítulo 2

1. Generalizaciones y variantes de los teoremas Hahn-Banach

La primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.4) es aun válida en Topología General de espacios vectoriales. La segunda forma geométrica (Teorema 2.5) se aplica en *espacios localmente convexos*−tales espacios juegan un papel importante, por ejemplo, en la *teoría de distribuciones*. Los lectores interesados pueden consultar N. Bourbaki [13].

El Teorema de Hahn-Banach es un poderoso teorema de existencia cuya forma es particularmente apropiada para aplicaciones en problemas lineales. Algunas formas en las cuales resuenan a lo largo del análisis funcional incluyen:

a) **El teorema de Krein-Milman**
La segunda forma geométrica del teorema de Hahn-Banach es un ingrediente básico en la prueba del teorema de Krein-Milman.
Teorema (Krein-Milman). Sea $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{E}$ un conjunto convexo compacto. Entonces $\boldsymbol{K}$ coincide con la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremos. El teorema de (Krein-Milman) tiene por sí mismo numerosas aplicaciones y extensiones (tales como el teorema de representación integral de Choquet, el teorema de Bochner, teorema de Berstein, etc.). En este tema muy extenso, recomendamos ver N. Bourbaki [13], W. Rudin [14].

b) **En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales.**
Mencionemos, por ejemplo, que la existencia de una solución fundamental para un operador diferencial general $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D})$ con coeficientes constantes (el teorema de Malgrange−Ehrenpreis) se sustenta en la forma analítica de Hahn-Banach; ver W. Rudin [14].

c) **Teorema de la Integral de Cauchy:** para funciones analíticas de valor vectorial $\boldsymbol{x}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ un espacio de Banach, $\boldsymbol{D}$ un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$.

d) **Criterio de Helly:** para resolver sistemas de ecuaciones lineales en espacios normados reflexivos.

El alcance del Teorema de Hahn-Banach se extiende más allá del análisis funcional

El análisis convexo y los principios de dualidad son temas que considerablemente se han incrementado y se han hecho progresivamente populares en los últimos años.

Entre las aplicaciones mencionamos las siguientes:

a) **Teoría de Juegos, teoría de control, economía, optimización, programación convexa.**
b) **Mecánica y Termodinámica.**
c) **La teoría de operadores monótonos y semigrupos no lineales; ver H. Brezis [11].**
d) **Prueba de la existencia de Funciones de Green.**
e) **Problemas de variación que involucran soluciones periódicas de sistemas Hamiltonianos y cuerdas vibrantes no lineales.**
f) **La teoría de desviaciones grandes en probabilidad; ver Tailen Hsing [3].**
g) **La teoría de ecuaciones diferenciales parciales y análisis complejo; ver H. Brezis [11].**

3. CONCLUSIONES

Junto con los teoremas de Banach-Steinhaus, la aplicación abierta y el grafo cerrado, el teorema de extensión de Hahn-Banach constituye uno de los cuatro pilares fundamentales del Análisis Funcional lineal , este permite asegurar la existencia, sobre un espacio vectorial o un espacio normado, de funcionales lineales que satisfagan cualquier propiedad razonable, sin más que construir un subespacio adecuado, definir un funcional sobre ese subespacio verificando las condiciones requeridas y aplicar un teorema de extensión.

La riqueza del teorema de Hahn-Banach como generador de funcionales hace que dicho teorema se encuentre en la base de la teoría de la dualidad de espacios normados, la cual es a su vez importante porque muchas propiedades de un espacio normado tienen su reflejo e, incluso, se estudian mejor, en el espacio dual que en el primal.

La presente tesis recoge solamente una parte muy pequeña del potencial del teorema de Hahn-Banach, de manera que el campo que se abre ante quien desee profundizar en su estudio es inmenso. Nos hemos limitado a considerar los aspectos básicos del teorema en espacios vectoriales y normados.

El teorema de Hahn-Banach sirve como parte fundamental de soporte de otros resultados, los cuales se mencionaron al final del capítulo 2, este teorema se basa en el axioma de elección, garantizando la existencia de la prolongación de un funcional, la cual puede ser o no ser única.

El teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de la extensión más no proporciona un método para obtenerla salvo en espacios finitos. Este teorema es un resultado grávido en espacios lineales más falla en general en espacios no lineales.

Además del impacto en el análisis funcional, este resultado alcanza otras áreas de las matemáticas, tales como la teoría de la aproximación, la optimización, el análisis complejo, las ecuaciones en derivadas parciales; e incluso, a otras disciplinas, entre las que cabe citar las finanzas, la termodinámica o la mecánica de fluidos.

Bibliografía

1. **Alabiso, C. Weiss, I. (2015). A Primer on Hilbert Space Theory, Springer-Switzerland.**
2. **Sbestyén, Z. Szucs, Z. Tarcsay, Z. (2015). Extentions of positive operators and functionals. Elsevier.**
3. **Hsing, T. Eubank, R. (2015). Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators. Wiley.**
4. **Manetti, M. (2015). Topology. Springer-Switzerland.**
5. **Cobzas, S. (2015). Functional Analysis. Birkhäuser.**
6. **Scott Osborne, M. (2014). Locally Convex Space. Springer.**
7. **Gasinski, L. Papageorgiou, N. (2014). Exercises in Analysis. Springer.**
8. **Muscat, J. (2015). Functional Analysis. Springer.**
9. **Sen, R. (2013). A First Course in Functional Analysis, Anthem Press. UK.**
10. **Bressan, A. (2013). Lecture Notes On Functional Analysis. American Mathematical Society. USA.**
11. **Brezis, H. (2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.**
12. **Morrison, T. (2001). An Introduction to Banach Space Theory. Wiley.**
13. **Bourbaki, N. (1987). Topological Vector Spaces, Springer.**
14. **Rudin, W. (1991). Functional Analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics, 2nd edn. McGraw-Hill Inc.. New York.**
15. **Diestel, A. Spalsbury, A. (2014). The Joys of Haar Measure, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence.**
16. **Nikodym O. (1930). Sur une genéralisation des intégrales de M. J. Radon. Fundam. Math. 15, 131–17.**
17. **Lusin N. (1912). Sur les propriétés des fonctions mesurables. C. R. Acad. Sci. (Paris) 154, 1688–1690.**
18. **Riesz F. (1909). Sur les opérations fonctionnelles linéaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) 149, 974–977.**
19. **Tonelli L. (1909). Sull' integrazione per parti. Rom. Accad. Lincei. Rend. (5). 18(2), 246–253.**
20. **Kirillov, (Aleksaqdr Aleksandrovich) (1936). Theorems and problems in functional analysis. Springer.**

ANEXOS

Poster

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH

Br. Darvin Ramón García Rivas
Br. Josué David Chávez Durón
UNAN-León

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA
UNAN-León

Extracto

El teorema que hoy en día llamamos de Hahn-Banach constituye una piedra angular del Análisis Funcional. En la literatura matemática varios teoremas se han etiquetado como "El Teorema de Hahn-Banach. "En el corazón de todos ellos está lo que llamamos aquí el Teorema de extensión de Hahn-Banach encontramos comúnmente variantes del mismo, forma analítica y la forma geométrica (el teorema de separación, en espacios lineales y normados). El objetivo de este trabajo es realizar un estudio del Teorema de Extensión de Hahn-Banach y analizar consecuencias importantes de su aplicabilidad.

Introducción

El teorema de Hans Hahn (1879-1934) y Stefan Banach (1892-1945) está localizado en la base de la teoría de dualidad y por consiguiente constituye una piedra angular del análisis funcional lineal. El impacto de este resultado importante alcanza otras áreas de la matemática, como la teoría de la aproximación, optimización, análisis complejo, ecuaciones diferenciales parciales o la teoría ergódica, entre otras disciplinas como, incluyendo finanzas, termodinámica y la mecánica de fluidos.

El teorema de Hahn-Banach tiene tres versiones ya antes mencionadas, pero muchas otras versiones han sido formuladas en varios ambientes: el topológico, espacios vectoriales, los módulos, algebras booleanas, grupos, semigrupos etc.

Figure 1: H. Hahn (1879-1934)

Figure 2: S. Banach (1892-1945)

Objetivos y Plan de Trabajo

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio del Teorema de Extensión de Hahn-Banach y analizar consecuencias importantes de su aplicabilidad.

El capítulo 1 recoge un sinnúmero de definiciones y conceptos básicos en el análisis funcional tal como distancia, norma, conjunto convexo, funcional lineal, espacio normado, espacio vectorial entre otros, los cuales son útiles para el desarrollo del tema en capítulo siguiente.

En el capítulo *2* se enuncia las distintas versiones del teorema y algunas consecuencias inmediatas. Además se presenta una serie de resultados y aplicaciones de las distintas versiones del teorema.

1. Versión analítica

1.1 Teorema de extensión de Hahn (1927)-Banach (1929)
Teorema 1.1 (Teorema de extensión de Hahn-Banach) Sea E un espacio vectorial real y sea p un funcional sublineal en E. Si V es un subespacio de E y si $f: V \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que

$$f(x) \le p(x), \quad x \in V,$$

Entonces hay una extensión $\hat{f}: E \to R$ de f que es lineal y satisface

$$\hat{f}(x) \le p(x), \quad x \in E.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Hahn-Banach Extensión Mayorada por Seminormas) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, p una seminorma sobre E, V un subespacio vectorial de E y f un funcional lineal sobre V, dominado por p, tal que

$$|f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in V$$

Luego existe una extensión $\hat{f}$ de f para E, dominada por p tal que

$$\hat{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in V,$$
$$|\hat{f}(y)| \le p(y), \quad \forall y \in E.$$

1.3 Teorema *1.3* (Teorema de Hahn-Banach para espacios reales normados) Supongamos que X es un espacio vectorial real normado y sea V un subespacio lineal de X. Si $f \in V^*$, entonces allí existe una extensión $f \in X^*$ tales que $f|_V = f$ y $\|f\| = \|f\|$.

1.4 Teorema *1.4* (Teorema de Hahn-Banach para espacios complejos normados) Suponga que X es un espacio vectorial complejo normado y sea V un subespacio lineal de X. Si $f \in V^*$, entonces existe una extensión $f \in X^*$ tales que $f|_V = f$ y $\|f\| = \|f\|$.

2. Versión geométrica

2.1 Teorema *2.1* (Hahn-Banach, primera forma geométrica). *Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos subconjuntos convexos no vacíos tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Asumamos que uno de ellos es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B.*

2.2 Teorema *2.2* (Hahn-Banach, Segunda forma geométrica). *Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos subconjuntos convexos no vacíos tal que $A \cap B = \emptyset$. Asumamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B.*

3. Otros resultados

3.1 Dado un espacio lineal normado X, un subespacio Y, y un vector x_1 en una distancia d positiva en Y. Entonces existe un funcional lineal acotado f tal que:

i) $f(Y) = 0.$
ii) $f(x_1) = 1.$
iii) $\|f\| = 1/d.$

3.2 Sea E un espacio normado, $x_0 \in E$. Hay un funcional lineal continuo f, con $\|f\| = 1$, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.

3.3 Sea U_1 y U_2 conjuntos convexos disjuntos en L, uno de los cuales es abierto. Luego existe un hiperplano T separando U_1 y U_2.

3.4 Sea E un espacio vectorial topológico real, A subconjunto convexo abierto no vacío, B subconjunto convexo no vacío en el cual no se encuentra A. Entonces hay un funcional lineal continuo f y un número real α tal que:

$$A \subset \{x \in E;\ f(x) < \alpha\}, \qquad B \subset \{x \in E;\ f(x) \ge \alpha\}.$$

Conclusiones

El teorema de Hahn-Banach asegura la existencia, en un espacio lineal o en un espacio normado, de funcionales lineales satisfaciendo cualquier propiedad razonable. Esto se consigue simplemente construyendo un subespacio adecuado, definiendo un funcional lineal el cual encuentra las condiciones requeridas en este subespacio, y aplicando el teorema de extensión.

Referencias

1. Carlo Alabiso, Ittay Weiss, A Primer on Hilbert Space Theory, Springer, 2015.
2. Zoltan Sbestyén, Zsolt Szucs, Zsigmond Tarcsay, Extentions of positive operators and functionals, elsevier, 2015.
3. Leszek Gasinski, Nicolaos S. Papageorgiou, Exercises in Analysis, Springer, 2014.
4. Joseph Muscat, Functional Analysis, Springer, 2014.
5. Haim Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.
6. Rabindranath Sen. A First Course in Functional Analysis, Anthem Press. UK., 2013

Agradecimientos

Este proyecto de fin de grado se ha hecho bajo la supervisión de Dr. Emilio Rafael Avendaño Jiménez durante el segundo semestre del año académico 2015. La fotografía de H. Hahn y S. Banach ha sido tomada de MacTutor History of Mathematics archive [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/].

Apéndice A

Fundamentos de la Teoría de la Medida

En este apéndice, le damos un breve resumen de los fundamentos de la teoría de la medida. Para discusión detallada de la teoría de la medida, una buena fuente es el Análisis *Real y Complejo* por W. Rudin **[14].**

A.1.Mensurabilidad

Definición A.1. Sea $\boldsymbol{X}$ un conjunto. Una colección $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de subconjuntos de $\boldsymbol{X}$ se llama una $\boldsymbol{\sigma}-$ álgebra de conjuntos en $\boldsymbol{X}$ si las tres afirmaciones siguientes son verdaderas:

- **a)** El conjunto $\boldsymbol{X}$ está en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**.**
- **b)** Si $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$*,* entonces $\boldsymbol{A^c} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$*,* donde $\boldsymbol{A^c}$ es el complemento de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{X}$.
- **c)** Si $\boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ para toda $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, y si $\boldsymbol{A} = \bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n}$, entonces $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Un conjunto $\boldsymbol{X}$ junto con una $\boldsymbol{\sigma}-$álgebra $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es llamado un ***espacio medible*** y se representado por $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\mathcal{A}})$, o simplemente por $\boldsymbol{X}$ cuando no existe ningún riesgo de confusión. Los elementos $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ son conocidos como ***conjuntos medibles.***

A partir de **a) y b)**, podemos ver fácilmente que el conjunto vacío es siempre medible; esto es, $\emptyset \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Si $\boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ para toda $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n}$ siempre es medible, por **b) y c)**, porque

$$\bigcap_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} = \left(\bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n}^{\boldsymbol{c}}\right)^{\boldsymbol{c}}.$$

Entre otras cosas, podemos concluir que, para los conjuntos medibles $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$*,* el conjunto $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B^c}$ es medible.

El $\boldsymbol{\sigma}$ en el nombre $\boldsymbol{\sigma}$ **−algebra** se refiere al supuesto de contabilidad en **c)** de la definición **A.1.** Si se requiere sólo uniones finitas de conjuntos medibles para estar en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**,** entonces $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es llamada ***una álgebra de conjuntos en X***.

Definición A.2. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Una función de valores escalares $\boldsymbol{f}$ con dominio $\boldsymbol{X}$ es llamada ***medible*** si $\boldsymbol{f^{-1}(V)} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ siempre que $\boldsymbol{V}$ sea un conjunto abierto en el campo escalar.

Ejemplo A.1. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Si $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, entonces la ***función característica (o función indicadora)*** de $\boldsymbol{E}$ es la función definida por

$$\boldsymbol{X_E(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{si\; x \in E} \\ \boldsymbol{o} & \boldsymbol{si\; x \notin E} \end{cases}$$

La función característica de $\boldsymbol{E}$ es medible si y solo si $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. La función característica $\boldsymbol{X_E}$ también se denota por $\boldsymbol{1_E}$.

Supongamos que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones de valores reales. Entonces $\boldsymbol{f = u + iv}$ es una función de medida compleja si y sólo si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones reales medibles. Además, si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones medibles, entonces también lo es $\boldsymbol{f + g}$.

Funciones medibles tienen un buen comportamiento. Por ejemplo, si $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ **es** una sucesión de funciones medibles con valores reales, entonces las funciones

$$\sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \boldsymbol{f_n} = \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{f_n}$$

son medibles siempre que los valores de la función sean finitos. En particular, si $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión convergente de funciones medibles con valores escalares, entonces el límite de la sucesión es también una función medible de valor escalar.

Definición A.3. Una ***función simple*** es cualquier combinación lineal de funciones características; esto es

$$\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_j X E_j},$$

donde $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a_1, \dots, a_n}$ son escalares, y $\boldsymbol{E_1, \dots, E_n}$ son conjuntos medibles.

Ciertamente, cualquier función simple es medible, ya que es una suma finita de funciones medibles.

El siguiente teorema es clave para el futuro desarrollo de la teoría de la medida.

Teorema A.1. *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio *medible. Si* $\boldsymbol{f}$ *es una función medible positiva, entonces existe una sucesión* $(\boldsymbol{s_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ *de funciones simples tales que:*

$$\boldsymbol{0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \lim_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{s_n(x)}, \qquad \boldsymbol{x \in X}.$$

A.2. Medidas positivas e Integración

En esta sección, consideraremos las funciones definidas en una $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Tales funciones son llamadas ***conjuntos de funciones***. Por ahora, limitaremos nuestra atención al conjunto de funciones que toman valores en el intervalo $[\mathbf{0}, \infty]$.

Definición A.4. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Una conjunto de función $\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to [\mathbf{0}, \infty]$ se dice que es ***numerable aditivo*** si

$$\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}\left(\boldsymbol{A_j}\right), \qquad (\boldsymbol{A.1})$$

siempre que $\left(\boldsymbol{A_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de parejas disjuntas de conjuntos medibles. Por ***parejas disjuntas*** nos referimos $\boldsymbol{A_j} \cap \boldsymbol{A_k} = \emptyset$ siempre que $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{k}$.

Un conjunto contablemente aditivo de función $\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to [\mathbf{0}, \infty]$ tal que $\boldsymbol{\mu}(\emptyset) = \mathbf{0}$ se llama ***medida positiva en*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. En tal caso, llamamos la tripleta $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un ***espacio de medida positiva.*** Si la $\boldsymbol{\sigma}$ **−algebra** se sobrentiende, a menudo escribimos $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ para el espacio de medida positiva y decimos que $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva sobre $\boldsymbol{X}$.

Nótese que permitimos que $\boldsymbol{\mu}$ alcance valores infinitos. La suposición de que $\boldsymbol{\mu}(\emptyset) = \mathbf{0}$ es para evitar el caso trivial en que la función de conjunto es siempre ∞. De manera equivalente, podríamos suponer que existe algún $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que $\boldsymbol{\mu}\,(\boldsymbol{A}) < \infty$.

Ejemplo A.2. El $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra de *Borel* en** $\mathbb{R}$ es el $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra** más pequeña que contiene todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. A medida definida en la $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra de *Borel* en** $\mathbb{R}$ es llamada una ***medida de Borel*** **en** $\mathbb{R}$**.**

Sea $\boldsymbol{\mu}$ una medida positiva en una $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra**. Un conjunto mensurable que tiene medida cero con respecto a $\boldsymbol{\mu}$ es llamada un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−nulo** o un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−medida-cero**. Un subconjunto de un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−nulo** es ***llamado*** $\boldsymbol{\mu}$ ***−insignificante.*** Un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−insignificante** puede o no ser medible. Si cada conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−insignificante** es medible **(**y por lo tanto un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−nulo)**, luego la medida $\boldsymbol{\mu}$ es llamada ***completa.*** **(**Es decir, $\boldsymbol{\mu}$ es completa si cada subconjunto de un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−nulo** es $\boldsymbol{\mu}$ **−medible** y tiene $\boldsymbol{\mu}$ **−medida cero**.**)**

Ejemplo A.3. (Medida de Lebesgue) *Sea* $\mathfrak{B}$ $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra** de ***Borel*** en $\mathbb{R}$ y *sea* m una medida positiva de Borel en $\mathfrak{B}$ definida de modo que $\boldsymbol{m((a,b)) = b - a}$ *cada* vez que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales tales que $\boldsymbol{a < b}$. **(**Esta medida se puede demostrar que existe.**)** Ahora definimos una medida completa en $\mathbb{R}$ que está de acuerdo con $\boldsymbol{m}$ para todos los conjuntos medibles de Borel en $\mathfrak{B}$. Para ello, vamos a ampliar nuestra $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra**.

La $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra *de Lebesgue* en** $\mathbb{R}$ es la colección de todos los conjuntos de la forma $\boldsymbol{B \cup N}$, donde $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{B}$ *y* $\boldsymbol{N}$ es un conjunto $\boldsymbol{m}$ **−insignificante**. Definamos una medida $\boldsymbol{\lambda}$ en esta colección de conjuntos por la regla $\boldsymbol{\lambda(B \cup N) = m(B)}$ para cualquier conjunto $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{m}$ **−medible** y cualquier conjunto $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{m}$ **−insignificante**. Se puede demostrar que $\boldsymbol{\lambda}$ es una medida aditiva contablemente completa en la $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra *de Lebesgue* en** $\mathbb{R}$. La medida $\boldsymbol{\lambda}$ es llamada ***medida de Lebesgue* sobre** $\mathbb{R}$**.**

La $\boldsymbol{\sigma}$ −álgebra *de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ es la menor $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra** en $\mathbb{R}$ que contiene los conjuntos mensurables de Borel y todos los subconjuntos de los conjuntos de $\boldsymbol{m}$ **−medida−cero**. En consecuencia, todo conjuntos medible de Borel son medibles de Lebesgue, pero hay conjuntos medibles de Lebesgue que no son medible de Borel.

Ejemplo A.4. (Contando medida) Otro ejemplo clásico de una medida positiva es la llamada ***medida de conteo*** en $\mathbb{N}$. Sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *el* conjunto potencia, que es la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, a menudo denotado por $\boldsymbol{P}(\mathbb{N})$ o $\boldsymbol{2}^{\mathbb{N}}$. Para cualquier subconjunto $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{N}$, definimos $\boldsymbol{n(A)}$ siendo el tamaño **(o cardinalidad)** del *conjunto* $\boldsymbol{A}$. Entonces n es una medida positiva en $\mathbb{N}$ **y** $\boldsymbol{n}(\mathbb{N}) = \infty$**.**

Definición A.5. Una medida positiva que alcanza sólo valores finitos es llamada ***finita***. Si $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva en $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{\mu(X) = 1}$, entonces llamamos $\boldsymbol{\mu}$ una ***medida de probabilidad.***

Ejemplo A.5. La restricción de la medida $\boldsymbol{\lambda}$ del ejemplo **A.3** para el intervalo unitario $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ es una medida de probabilidad.

Hagamos algunas observaciones obvias acerca de las medidas positivas. Supongamos que $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ es un espacio de medida positiva. *Si* $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son conjuntos medibles tales que $\boldsymbol{A \subseteq B}$, entonces $\boldsymbol{\mu(A) \le \mu(B)}$. También, observe que si $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva finita, entonces $\boldsymbol{\mu(\cdot)/\mu(X)}$ es una medida de probabilidad.

Definición A.6. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida positiva y sea $\boldsymbol{s} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_j \chi_{E_j}}$ una función simple. Para cualquier $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, definimos la *integral de* $\boldsymbol{s}$ *sobre* $\boldsymbol{A}$ *con respecto a* $\boldsymbol{\mu}$ por

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(A \cap E_j).$$

(El valor de esta integral no depende de la representación de $\boldsymbol{s}$ que se utiliza.**)**

Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ es una función medible *no negativa,* entonces definimos la *integral de f en A con respecto a* $\boldsymbol{\mu}$ por

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A s d\mu \right\},$$

donde se toma el supremo sobre todas las funciones simples $\boldsymbol{s}$ tales que $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Con el fin de ampliar de manera significativa nuestra noción de una integral a una clase más amplia de funciones, primero definimos la clase de funciones para las cuales nuestra integral existirá.

Definición A.7. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida positiva. Una función medible de valor escalar $\boldsymbol{f}$ es llamada ***integrable de Lebesgue*** **(o simplemente *integrable*)** con respecto a $\boldsymbol{\mu}$ si**.**

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Si *f es* integrable con respecto a $\boldsymbol{\mu}$, entonces escribimos $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\mu})$.

Ahora, sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida positiva y sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ una función integrable de valor real. Definamos la integral de $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{A}$ *por*

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu,$$

donde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

es *la* parte positiva de $\boldsymbol{f}$, y

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \\ 0 \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

es *la* parte negativa de $\boldsymbol{f}$.

Si $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{C}$ es una función integrable de valor complejo, definir la integral de $\boldsymbol{f}$ sobre $\boldsymbol{A}$ por

$$\int_A f d\mu = \int_A \Re(f) d\mu + i \int_A \Im(f) d\mu,$$

donde $\Re(f)$ y $\Im(f)$ denotan las partes real e imaginaria de $\boldsymbol{f}$*,* respectivamente.

Para evitar ciertas dificultades aritméticas que se derivan de las definiciones anteriores, adoptamos la convención de que $\mathbf{0} \cdot \infty = \mathbf{0}$. Consecuentemente, $\int_A f d\mu = 0$ siempre que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$*,* incluso si $\mu(A) = \infty$. Además, si $\mu(A) = 0$ para un conjunto medible $A \in \mathcal{A}$*,* entonces $\int_A f d\mu = 0$ para todas las funciones medibles *f*.

En algunos casos, es útil para mostrar explícitamente la variable dependiente en una integración, y en tal situación escribimos

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x) \mu dx.$$

A.3. Teoremas de convergencia y el Lema de Fatou

Definición A.8. Sea $(\boldsymbol{X}, \mathcal{A}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida positiva. Dos funciones medibles $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ se dice que son iguales ***en casi todas partes,*** si $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son iguales en casi todas partes, escribimos $f = g a.e. (\mu)$ **(*a.e.* proviene de la abreviación del ingles almost everywhere)**. A veces decimos $f(x) = g(x)$ para casi toda $\boldsymbol{x}$.

La definición anterior es importante porque, si $f = g a.e. (\mu)$*,* entonces

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Esto es así porque la integral sobre un conjunto de medida cero es siempre cero. Funciones que son iguales en casi todas partes son indistinguibles desde el punto de vista de la integración. Con esto en mente, extendemos nuestra noción de una función medible. Sea $(\boldsymbol{X}, \mathcal{A}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida. Una función $\boldsymbol{f}$ *se* define $a.e. (\mu)$ sobre $\boldsymbol{X}$ si el dominio $\boldsymbol{D}$ de $\boldsymbol{f}$ es un subconjunto de $\boldsymbol{X}$ y $X \backslash D$ es un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−insignificante**. *Si* $\boldsymbol{f}$ es definida $a.e. (\mu)$ sobre $\boldsymbol{X}$ y hay un conjunto $\boldsymbol{\mu}$ **−nulo** $\boldsymbol{E} \in \mathcal{A}$ tal que $f^{-1}(V) \backslash E$ es medible para cada conjunto abierto $\boldsymbol{V}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es llamada $\boldsymbol{\mu}$ **−medible**. Cada función medible **(en el sentido de la Definición A.2)** es $\boldsymbol{\mu}$ **−medible** y cada función $\boldsymbol{\mu}$ **−medible** es igual casi en todas partes **(con respecto a *μ*)** a una función medible.

La noción de $\boldsymbol{\mu}-$ **mensurabilidad** nos permite ampliar nuestras construcciones a una más amplia colección de funciones. Decimos que una función $\boldsymbol{\mu}$ **−medible** $\boldsymbol{f}$ es ***integrable*** si es igual $\boldsymbol{a.e.}(\boldsymbol{\mu})$ a una función medible $\boldsymbol{g}$ que es integrable con respecto a $\boldsymbol{\mu}$ y definimos $\int_A \boldsymbol{f d\mu}$ para ser $\int_A \boldsymbol{g d\mu}$ para cada conjunto medible $\boldsymbol{A}$.

Una sucesión de funciones medibles $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ se dice que converge ***en casi todas partes*** a una función $\boldsymbol{f}$ si el conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) \nrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\}$ tiene $\boldsymbol{\mu}$ **−medida−cero**. En este caso, escribimos $\boldsymbol{f_n} \to \boldsymbol{f a.e.}(\boldsymbol{\mu})$. Una función $\boldsymbol{f}$ que es el $\boldsymbol{a.e.}(\boldsymbol{\mu})$ **−límite de funciones medibles es** $\boldsymbol{\mu}$ **−medible**.

Teorema A.2. (Teorema de Convergencia Monótona) *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un *espacio de medida positiva. Supongamos que* $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles tales que*

$$\boldsymbol{0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots}$$

para casi toda $\boldsymbol{x}$*. Si* $\boldsymbol{f_n} \longrightarrow \boldsymbol{f a.e.}(\boldsymbol{\mu})$*, entonces* $\boldsymbol{f}$ *es una función integrable y*

$$\int_X \boldsymbol{f d\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_X \boldsymbol{f_n d\mu}.$$

El Teorema de Convergencia Monótona es una herramienta muy útil y uno de las mejores consecuencias conocidas de la misma es el **Lema de Fatou**, llamado así por el matemático **Pierre Fatou**.

Teorema A.3. (Lema de Fatou) *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ *un espacio de medida positiva. Si* $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles con valores escalares, entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |\boldsymbol{f_n}|\right) \boldsymbol{d\mu} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |\boldsymbol{f_n}| \boldsymbol{d\mu}.$$

Tal vez el uso más importante del Lema de Fatou es probar el siguiente teorema, que es una de las piedras angulares de la teoría de la medida.

Teorema A.4. (Teorema de Convergencia Dominado de Lebesgue) *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ *un espacio de medida positiva y supongamos que* $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles con valores escalares que convergen en casi todas partes a* $\boldsymbol{f}$*. Si existe una función* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\mu})$ *tal que* $|\boldsymbol{f_n}| \leq \boldsymbol{g a.e.}(\boldsymbol{\mu})$ *para toda* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$*, entonces* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\mu})$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\boldsymbol{f_n} - \boldsymbol{f}| \boldsymbol{d\mu} = \boldsymbol{0}.$$

En particular,

$$\int_X \boldsymbol{f d\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_X \boldsymbol{f_n d\mu}.$$

La última igualdad se deduce del hecho de que $\left|\int_X \boldsymbol{f d\mu}\right| \leq \int_X |\boldsymbol{f}| \boldsymbol{d\mu}$ siempre que $\boldsymbol{f}$ es una función integrable.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.

Corolario A.1. (Teorema de Convergencia Acotada) *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un *espacio de medida positiva finita y supongamos que* $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ *es una sucesión funciones medibles uniformemente acotada de valores escalares. Si* $\boldsymbol{f_n \to f a.e.(\mu)}$ entonces $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_1(\mu)}$ y

$$\int_X \boldsymbol{f d\mu} = \lim_{n\to\infty} \int_X \boldsymbol{f_n d\mu}.$$

A.4 Medidas complejas y continuidad absoluta

Definición A.9. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Una función determinada contablemente aditiva $\boldsymbol{\mu}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{C}$ es llamada ***una medida compleja***. Cuando decimos que $\boldsymbol{\mu}$ es contablemente aditiva, queremos decir

$$\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\mu}\left(\boldsymbol{A_j}\right), \qquad (\mathbf{A.2})$$

siempre que $\left(\boldsymbol{A_j}\right)_{\boldsymbol{j=1}}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos por pares en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, donde la serie en **(A.2)** es absolutamente convergente. **(**Compare con la Definición **A.4)**. Una medida compleja que toma valores en $\mathbb{R}$ es llamada ***una medida real o una medida firmada.***

Si $\boldsymbol{\mu}$ es una medida compleja sobre $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, entonces la tripleta $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ es llamada un *espacio de medida* **(compleja)**. Si se sobrentiende el $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra**, entonces podemos escribir $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$.

En términos más generales, podemos definir una medida para ser una función determinada contablemente aditiva que toma valores en cualquier espacio vectorial topológico, tan grandes como la convergencia de las series en **(A.2)** tiene sentido. Para nuestros propósitos, tal generalidad no es necesario, y así que nos limitaremos a las medidas complejas y medidas positivas.

Hay una significante diferencia entre las medidas positivas y medidas complejas. En la definición **A.9,** requerimos que una medida compleja $\boldsymbol{\mu}$ sea finita; esto es, $|\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})| < \infty$ para toda $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Esto no fue un requisito para una medida positiva.

Definición A.10. Sea $\boldsymbol{\mu}$ una medida compleja en la $\boldsymbol{\sigma}$ ***−álgebra*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Definimos la ***medida de variación total*** *de* $\boldsymbol{\mu}$ que es la función determinada por $|\boldsymbol{\mu}|: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ dada por

$$|\boldsymbol{\mu}|(\boldsymbol{E}) = \mathbf{sup}\left\{\sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E}_j)|\right\},$$

Donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones finitas de pareja disjuntas de conjuntos medibles $(\boldsymbol{E}_j)_{j=1}^{\infty}$, para toda $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, tal que $\boldsymbol{E} = \bigcup_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j$.

Como su nombre indica, la medida de variación total es una medida. Adicionalmente, es una medida finita, un hecho que afirmamos en el siguiente teorema.

Teorema A.5. *Si* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ es un *espacio de medida compleja, entonces* $|\boldsymbol{\mu}|$ *es una medida positiva en* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *y* $|\boldsymbol{\mu}|(\boldsymbol{X}) < \infty$**.**

Hay naturalmente, una relación entre una medida y su medida de variación total. Por ejemplo, si $|\boldsymbol{\mu}|(\boldsymbol{E}) = \mathbf{0}$ para algún conjunto $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, debe ser el caso de que $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E}) = \mathbf{0}$. Esta es una instancia de una propiedad llamada ***continuidad absoluta***.

Definición A.11. Sea $\boldsymbol{\mu}$ una medida compleja de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *y* supongamos que $\boldsymbol{\lambda}$ es una medida positiva sobre $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Decimos que $\boldsymbol{\mu}$ es ***absolutamente continua*** con respecto a $\boldsymbol{\lambda}$ si, para todo $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, tenemos que $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ siempre que $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$. Cuando $\boldsymbol{\mu}$ es absolutamente continua con respecto a $\boldsymbol{\lambda}$, escribimos $\boldsymbol{\mu} \ll \boldsymbol{\lambda}$.

En breve, vamos a indicar el Teorema de Radon-Nikodým, uno de los resultados clave en teoría de la medida. Antes de eso, sin embargo, introducimos una definición.

Definición A.12. Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Una medida positiva $\boldsymbol{\mu}$ en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *se* dice ***σ-finito*** si existe una sucesión contable $(\boldsymbol{E}_j)_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos de medibles de tal manera que $\boldsymbol{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{E}_j$ y $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E}_j) < \infty$ para cada $\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}$.

Ejemplos importantes de medidas $\boldsymbol{\sigma}$ **−finita** incluyen medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ **y** contando la medida en $\mathbb{N}$**. (**Ver ejemplos **A.3** **y** **A.4,** respectivamente). Uno también puede tener una medida de recuento en $\mathbb{R}$, pero no es $\boldsymbol{\sigma}$ **−finito.**

Teorema A.6. (Teorema de Radon-Nikodým) *Supongamos que* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *es un espacio medible y sea* $\boldsymbol{\lambda}$ *una medida* $\boldsymbol{\sigma}$ ***−finita*** *positiva en* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. *Si* $\boldsymbol{\mu}$ *es una medida compleja en* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *que es absolutamente continua con respecto a* $\boldsymbol{\lambda}$, *entonces existe un único* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\lambda})$ *de tal manera que*

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E}) = \int_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{dx}), \qquad \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}. \qquad (\boldsymbol{A.3})$$

La ecuación en **(A.3)** se escribe a veces $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{dx})$ o $\boldsymbol{d\mu} = \boldsymbol{gd\lambda}$. *La* función $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\lambda})$ es llamada la ***derivada de Radon-Nikodým*** de $\boldsymbol{\mu}$ con respecto a $\boldsymbol{\lambda}$ y, a veces se denota $\boldsymbol{d\mu}/\boldsymbol{d\lambda}$. Cuando decimos que la derivada de **Radon-Nikodým es única**, nos referimos a un conjunto de medida cero. Es decir, si $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{h}$ son ambos derivadas de **Radon-Nikodým** de $\boldsymbol{\mu}$ con respecto a $\boldsymbol{\lambda}$, entonces $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h a.}\,\mathbf{e.}\,(\boldsymbol{\lambda})$ (y en consecuencia $\boldsymbol{a.e.}\,(\boldsymbol{\mu})$).

El supuesto de $\boldsymbol{\sigma}$ **−finita** en $\boldsymbol{\mu}$ en el Teorema **A.6** no puede estar relajado.

Buscamos definir una integral con respecto a una medida compleja. Para ello, sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ un espacio de medida compleja. Desde $\boldsymbol{\mu} \ll |\boldsymbol{\mu}|$, existe **(por el Teorema de Radon-Nikodým)** una única **(hasta conjuntos de medida cero)** *función* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L_1}(|\boldsymbol{\mu}|)$ tales que $\boldsymbol{d\mu} = \boldsymbol{gd}|\boldsymbol{\mu}|$. Podemos, por lo tanto, definir la integral de una función medible $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{C}$ por

$$\int_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{f d\mu} = \int_{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{f g d}|\boldsymbol{\mu}|, \qquad \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}. \quad (\boldsymbol{A.4})$$

Se puede decir más de la derivada de Radon-Nikodým de $\boldsymbol{\mu}$ con respecto a $|\boldsymbol{\mu}|$. La siguiente proposición es un corolario del teorema **A.6** y, a menudo se le llama **la *representación polar o descomposición polar* de** $\boldsymbol{\mu}$.

Proposición A.1. *Si* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$ es un *espacio de medida compleja, entonces existe una función medible* $\boldsymbol{g}$ *tal que* $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| = \boldsymbol{1}\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ *y tal que* $\boldsymbol{d\mu} = \boldsymbol{gd}|\boldsymbol{\mu}|$.

Como una consecuencia de la Proposición **A.1** y la definición de **(A.3), versiones del Teorema de Convergencia Monótona, Lema de Fatou y Teorema de Convergencia dominado de Lebesgue se cumplen para integrales con respecto a las medidas complejas.** Aplicamos los teoremas existentes a la medida finita positiva $|\boldsymbol{\mu}|$ y observe que

$$\left|\int_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{f d\mu}\right| \le \int_{\boldsymbol{X}} |\boldsymbol{f}|\boldsymbol{d}|\boldsymbol{\mu}|,$$

para todas las funciones medibles $\boldsymbol{f}$ *en X*.

El Teorema de Radon-Nikodým lleva el nombre de Johann Radon, quien comprobó el teorema para $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ en **1913** ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$), y por Otton Nikodým, quien demostró el teorema para el caso general en **1930** **[16].**

A.5. Espacios $\boldsymbol{L_p}$

En esta sección, consideramos un espacio de medida $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mu})$, donde $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva. Vamos a identificar ciertos espacios de funciones medibles *sobre* $\boldsymbol{X}$. *Para* $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, sea

$$\boldsymbol{L_p(\mu)} = \left\{\boldsymbol{una\ funci\text{ó}n\ medible\ f}: \int_{\boldsymbol{X}} |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{d\mu} < \infty\right\}.$$

Este es el *espacio* de las ***funciones*** $\boldsymbol{p}$ ***−integrables,*** también conocido como ***funciones*** $\boldsymbol{L_p}$, *sobre* $\boldsymbol{X}$. Para *cada* $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{1}, \infty)$, sea

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_{\boldsymbol{X}} |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{d\mu}\right)^{\mathbf{1}/\boldsymbol{p}}.$$

donde $\boldsymbol{f}$ es una función medible $\boldsymbol{\mu}$ en $\boldsymbol{X}$. Observe que $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} < \infty$ si y sólo $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_p(\mu)}$. Para el caso $\boldsymbol{p} = \infty$, dejamos

$$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \mathbf{inf}\{\boldsymbol{K}: \boldsymbol{\mu}(|\boldsymbol{f}| > \boldsymbol{K}) = \mathbf{0}\},$$

para todas las funciones medibles $\boldsymbol{f}$. La cantidad $\|\boldsymbol{f}\|_\infty$ es llamada la ***norma esencial de supremo*** de $\boldsymbol{f}$, y es el número más pequeño que tiene la propiedad de que $|\boldsymbol{f}| \leq \|\boldsymbol{f}\|_\infty \boldsymbol{a.e.}(\boldsymbol{\mu})$.

El conjunto

$$\boldsymbol{L_\infty(\mu)} = \{\boldsymbol{una\ funci\text{ó}n\ medible\ f}: \|\boldsymbol{f}\|_\infty < \infty\}$$

es el espacio de las ***funciones medibles esencialmente acotadas*** **en** $\boldsymbol{X}$.

Teorema A.7. *Sea* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ *un espacio de medida positiva. Si* $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} \leq \infty$, *entonces* $\|\cdot\|_{\boldsymbol{p}}$ *es una norma completa sobre* $\boldsymbol{L_p(\mu)}$. *En particular,* $\boldsymbol{L_p(\mu)}$ es *un espacio de Banach.*

De hecho, los Espacios $\boldsymbol{L_p}$ son colecciones de ***clases de equivalencia*** de funciones medibles. Dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ en $\boldsymbol{L_p(\mu)}$ son consideras equivalentes si $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g a.e.}(\boldsymbol{\mu})$. A pesar de esto, por lo general hablan de los elementos en Espacios $\boldsymbol{L_p}$ como funciones, en lugar de clases de equivalencia de funciones.

La prueba del Teorema **A.7** confía con exceso en la siguiente desigualdad fundamental, lo cual provee la desigualdad del triángulo para $\boldsymbol{L_p(\mu)}$**.**

Teorema A.8. (Desigualdad de Minkowski) *Sea* (X, μ) *un espacio de medida positiva. Si* f *y* g *están en* $L_p(\mu)$*,* donde $1 \leq p \leq \infty$*, entonces* $f + g \in L_p(\mu)$ *y*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Antes de dar otro teorema, hay que introducir una definición.

Definición A.13. Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, luego q *es* llamado el *exponente conjugado de* p. El exponente conjugado de $p = 1$ se define como $q = \infty$ **(**y *viceversa)*.

Si $p \in [1, \infty]$ *y* q es el exponente conjugado de p*, entonces* también podemos decir que q es conjugado a p*,* o incluso que p *y* q son conjugados entre sí. *Si* $p \in (1, \infty)$ y q es conjugado a p*,* a veces es conveniente escribir $q = \frac{p}{p-1}$.

El siguiente teorema, que es ubicuo en la teoría de la medida, puede ser visto como una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema A.9. (Desigualdad de Hölder) *Sea* (X, μ) un espacio de *medida positiva. Suponga* $1 \leq p < \infty$ *y sea* q *conjugado a p. Si* $f \in L_p(\mu)$ *y* $g \in L_q(\mu)$*, entonces* $fg \in L_1(\mu)$ y

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

La desigualdad de Hölder asegura que, dado cualquier $g \in L_q(\mu)$*,* la aplicación

$$f \mapsto \int_X f(x)g(x)\mu(dx), \qquad f \in L_p(\mu),$$

define un funcional lineal acotado en $L_p(\mu)$ siempre que $1 \leq p < \infty$. Resulta que cualquier funcional lineal acotado en $L_p(\mu)$ se puede lograr de esta manera, que es el contenido del siguiente teorema.

Teorema A.10. *Sea **(X, μ)*** un espacio de *medida positiva* σ ***−finita****. Si* $1 \leq p < \infty$*, y si* q *es conjugado a* p*, entonces* $L_p(\mu)^* = L_q(\mu)$**.**

Con frecuencia, con el fin de demostrar algo sobre espacios L_p, es suficiente probarlo para funciones simples. Esto es una consecuencia del siguiente teorema, que sigue del teorema **A.1** y el teorema **A.2** **(el Teorema de Convergencia Monótona).**

Teorema A.11. (Densidad de funciones simples) *Sea* (X, μ) *un espacio de medida positiva. El conjunto de funciones simples es denso en* $L_p(\mu)$ siempre que $1 \leq p \leq \infty$.

A.6 Mensurabilidad y Medidas de Borel

Definición A.14. Supongamos que $\boldsymbol{X}$ es un espacio topológico. El $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra más pequeña en** $\boldsymbol{X}$ que contiene los conjuntos abiertos en $\boldsymbol{X}$ es llamado la ***σ −álgebra de Borel, o*** **el campo** ***de Borel,*** en $\boldsymbol{X}$. Una función que es mensurable con respecto a la $\boldsymbol{\sigma}$ **−algebra de Borel** es denomina ***función medible de Borel, o una función de Borel***. Una medida en la $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra de Borel** es llamada ***una*** **medida de** ***Borel.***

Recordamos que un espacio topológico se dice que es ***localmente compacto*** si cada punto tiene un entorno compacto. Naturalmente, todos los espacios compactos son localmente compacto, pero el recíproco no necesita ser cierto. Por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$ con su topología estándar es localmente compacto, pero no compacta.

Si $\boldsymbol{X}$ es un espacio localmente compacto de Hausdorff, entonces denotamos por $\boldsymbol{C_0(X)}$ la colección de todas las funciones continuas que se ***desvanecen (o se anulan) en el infinito***. Decimos que $\boldsymbol{f}$ *se anula en el infinito* si para cada $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, existe un conjunto compacto $\boldsymbol{K}$ tal que $\boldsymbol{|f(x)| < \varepsilon}$ para todo $\boldsymbol{x \notin K}$. El conjunto $\boldsymbol{C_0(X)}$ es un espacio de Banach bajo la norma del supremo.

Ejemplo A.6. El espacio de Banach $\boldsymbol{C_0}(\mathbb{N})$ es el clásico espacio de sucesiones $\boldsymbol{c_0}$ de sucesiones que tiende a cero.

Definición A.15. *Sea* $\boldsymbol{X}$ un espacio localmente compacto de Hausdorff y supongamos $\boldsymbol{\mu}$ es una medida positiva de Borel en $\boldsymbol{X}$. Si, para cada *conjunto* medible $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{\mu(E) = inf\{\mu(V): E \subseteq V, \qquad V\ es\ un\ conjunto\ abierto\}},$$

entonces $\boldsymbol{\mu}$ es llamada ***regularmente exterior***. Si, para cada conjunto medible $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{\mu(E) = sup\{\mu(K): K \subseteq E, K\ es\ un\ conjunto\ compacto\}},$$

entonces $\boldsymbol{\mu}$ se llama ***regularmente interior***. Si $\boldsymbol{\mu}$ es tanto regular interior como exterior, entonces lamamos a $\boldsymbol{\mu}$ *una* ***medida regular***. Una medida compleja es llamada regular si $\boldsymbol{|\mu|}$ es regular.

La definición **A.15** nos permite describir el espacio dual de $\boldsymbol{C_0(X)}$.

Teorema A.12. (Teorema de Representación de Riesz) *Sea* $\boldsymbol{X}$ *un espacio localmente compacto de Hausdorff. Si* $\boldsymbol{\Lambda}$ *es un funcional lineal acotado en* $\boldsymbol{C_0(X)}$*, entonces existe una medida de Borel regular compleja única* $\boldsymbol{\mu}$ *de tal manera que*

$$\boldsymbol{\Lambda(f) = \int_X f\,d\mu}, \qquad \boldsymbol{f \in C_0(X)}.$$

y $\boldsymbol{\Lambda = |\mu|(X)}$.

El Teorema **A.12** lleva el nombre de F. Riesz, que en un principio demostró el teorema para el caso especial $\boldsymbol{X = [0,1]}$ **[18].** El teorema que lleva el nombre de Nikolai Lusin (o Luzin), quien también trabajó en el contexto de la recta real **[17].**

Teorema A.13. (Teorema de Lusin) *Sea* $\boldsymbol{X}$ *un espacio localmente compacto de Hausdorff y supongamos que* $\boldsymbol{\mu}$ *es una medida de Borel regular positiva finita en* $\boldsymbol{X}$*. El espacio* $\boldsymbol{C_0(X)}$ es *denso en* $\boldsymbol{L_p(\mu)}$ *para toda* $\boldsymbol{p} \in [\boldsymbol{1}, \infty)$.

La hipótesis del Teorema de Lusin puede estar relajada. De hecho, el teorema se cumple para toda medida de Borel positiva que son finita sobre conjuntos compactos. Tenga en cuenta que el Teorema de Lusin no es cierto cuando $\boldsymbol{p} = \infty$. La convergencia en la norma $\boldsymbol{L_\infty}$ es la misma como la convergencia uniforme, y el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua; sin embargo, las funciones en $\boldsymbol{L_\infty(\mu)}$ no necesitan ser continuas.

Proposición A.2. *Si* $\boldsymbol{X}$ *es un espacio metrizable localmente compacto, entonces cualquier medida de Borel finita en* $\boldsymbol{X}$ *es necesariamente regular.*

Una vez más, la medida de Borel en cuestión sólo tiene que ser finita en conjuntos compactos para la conclusión a sostener. A la luz de la Proposición **A.2,** el teorema **A.12** se afirma a menudo por un espacio metrizable $\boldsymbol{X}$, en cuyo caso el término "regular" se omite de la conclusión.

A.7 Medidas del Producto

Sean $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *y* $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ dos espacios medibles. *Un rectángulo medible en* $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ es cualquier conjunto de la forma $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, donde $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *y* $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Denotamos por $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$ la más pequeña $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra** que contiene todos los rectángulos medibles en $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$.

Proposición A.3. *Sea* $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\mathcal{A}})$ *y* $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *dos espacios medibles. Si una función de valor escalar* $\boldsymbol{f}$ *sobre* $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ *es* $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$ ***−medible****, entonces la aplicación* $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ***−medible*** *para todo* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, *e* $\boldsymbol{Y} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ *es* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ***−medible*** *para todo* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Ahora sean $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mu})$ y $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\nu})$ dos espacios de medida $\boldsymbol{\sigma}$ **−finita**. Definimos la ***medida del producto*** *en* $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$ que es la función determinada por $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}$ dada por la fórmula

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{Q}) &= \int_X \left(\int_Y \mathcal{X}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{dy})\right)\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx}) \\ &= \int_Y \left(\int_X \mathcal{X}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx})\right)\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{dy}).\end{aligned}$$

para toda $\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$. Como el nombre implica, $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}$ es una medida en $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$. Además, la medida $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}$ es tal que $(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{F})$ para toda $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ ***y*** $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

El resultado fundamental en esta sección se conoce como el teorema de Fubini. Lleva el nombre después de Guido Fubini, quien demostró una versión del teorema en 1907 **[13].**

Teorema A.14. (Teorema de Fubini) *Sean* $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mu})$ *y* $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{B}},\boldsymbol{\nu})$ *dos espacios de medida* $\boldsymbol{\sigma}$ ***−finita****. Si* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu})$, *entonces*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \boldsymbol{f}\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}) &= \int_X \left(\int_Y \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{dy})\right)\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx}) \\ &= \int_Y \left(\int_X \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx})\right)\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{dy}).\end{aligned}$$

La misma conclusión es válida si $\boldsymbol{f}$ *es una función* $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$ ***−medible*** *tal que*

$$\int_X \left(\int_Y |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{dy})\right)\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{dx}) < \infty$$

El Teorema de Fubini a veces se llama el teorema de **Fubini-Tonelli**, después de Leonida Tonelli, quien probó una versión del teorema **A.14** en 1909 **[19].**