UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEMA

UNIDAD DIDÁCTICA
ECUACIONES CUADRÁTICAS PARA NOVENO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

PRESENTADO POR:

Bra. Anielka Ercilia Escobar Mendoza

Br. Denis Elisandro López Centeno

Br. Milton Alexander Sánchez Morán

PARA OPTAR AL TITULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MENCIÓN MATEMÁTI CA EDUCATIVA Y COMPUTACIÓN

TUTOR:

M.Sc. Boanerge Méndez Cajina

León, Marzo, 2015

DEDICATORIA

DEDICAMOS NUESTRO TRABAJO, MUY ESPECIALMENTE A NUESTRO CREADOR QUE CON LA LUZ DE SU ESPÍRITU, NOS ILUMINÓ PARA CUMPLIR CON LA REALIZACIÓN DEL MISMO.

A NUESTROS PADRES CON MUCHO AMOR, POR EL SACRIFICIO QUE HACEN, POR NUESTRO BIENESTAR Y EL APOYO QUE HASTA EL DÍA DE HOY NOS BRINDAN.

A NUESTROS MAESTROS POR SU ARDUA LABOR, Y LA SABIA PEDAGOGÍA QUE APLICAN EN NUESTRA EDUCACIÓN, CON TANTA DEDICACIÓN, QUE NOS MOTIVAN PARA SALIR ADELANTE, PROPONIÉNDONOS Y ALCANZANDO METAS.

A NUESTROS COMPAÑEROS POR SU APOYO Y PACIENCIA QUE NOS IMPULSAN A SEGUIR.

AGRADECIMIENTO

EN PRIMER LUGAR, LE DAMOS GRACIAS A DIOS POR LA GRAN FORTALEZA, HABILIDADES Y DESTREZAS QUE DEPOSITÓ EN NOSOTROS, PARA CULMINAR EXITOSAMENTE ESTE TRABAJO.

A NUESTROS PADRES, PORQUE CON SU AMOR, NOS DAN ÁNIMOS PARA POTENCIAR NUESTRA FORMACIÓN.

DE IGUAL MANERA A NUESTROS AMIGOS Y COMPAÑEROS, QUE NOS ANIMAN PARA SEGUIR FORJÁNDONOS, LEVANTÁNDONOS DE LAS CAÍDAS Y SALIR ADELANTE, HASTA LOGRAR NUESTRAS METAS.

A LOS MAESTROS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA - LEÓN, POR LA ASISTENCIA QUE NOS DIERON DURANTE EL PERIODO DE NUESTRA CARRERA.

I N D I C E

I. INTRODUCCIÓN

El uso de las matemáticas debe servir para interpretar y transmitir ideas e información con precisión y rigor, utilizándolas como un lenguaje con distintas vertientes: verbal, gráfica, numérica y algebraica. Por ello es importante habituar a las y los estudiantes a expresarse de modo oral, por escrito y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.

En los últimos años, se ha dado un acelerado desarrollo tecnológico. El ciudadano del siglo XXI no puede ignorar el funcionamiento de una calculadora o de un ordenador, con el fin de poderse servir de ellos, pero debe dársele un trato racional que evite su indefensión ante la necesidad de realizar un cálculo sencillo cuando no tiene a mano su calculadora. Por otra parte, la calculadora y ciertos programas informáticos, resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades, relaciones numéricas y gráficas. El profesor o la profesora decidirán cuándo y cómo plantea la utilización de la calculadora y el ordenador como herramienta instrumental para el estudio de las Ecuaciones Cuadráticas.

Como un aporte al cambio que se ha venido dando en los últimos años, nos propusimos elaborar una unidad didáctica con el propósito de mejorar la enseñanza – aprendizaje de las Ecuaciones Cuadráticas, mediante la aplicación del enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias, lo que permitirá a las y los estudiantes tener una visión de futuro acerca del estudio de las matemáticas orientando los aprendizajes hacia la vida y el trabajo donde sea capaz de responder con agilidad y relevancia a las necesidades que demanda nuestro país.

Nuestra unidad didáctica “Ecuaciones Cuadráticas para Noveno Grado de Educación Secundaria” se basa fundamentalmente en el programa oficial de matemáticas de noveno grado de educación secundaria del Ministerio de Educación (MINED). En la elaboración de nuestra unidad didáctica se integraron las competencias que queremos desarrollar en las y los estudiantes, los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales), las estrategias metodológicas y los criterios de evaluación que han de regular la enseñanza – aprendizaje del tema en mención.

En cuanto a la forma de organizar las competencias y contenidos en nuestra unidad didáctica, la consideramos flexible y abierta a la diversidad de intereses y capacidades de las y los estudiantes, permitiendo además a los centros educativos su desarrollo y contextualización a las características de su entorno. También les permitirá a las y los estudiantes orientar su aprendizaje hacia la vida y el trabajo donde sea capaz de responder a la solución de problemas reales que se presenten en su comunidad. En general, las competencias educativas y los contenidos deben ser analizados, interpretados, comprendidos y aplicados en el marco de las realidades locales de los centros y comunidades educativas en donde se llegue a implementar esta unidad didáctica.

Pretendemos acercarnos de manera certera a lo más común del individuo, del educando, del joven y de la joven, del niño y de la niña, debemos acercar cada uno de los términos matemáticos a lo cotidiano, a la vivencia de los sujetos del aprendizaje. Cambiar objeto de enseñanza a sujeto de enseñanza. Esto quiere decir que implica al individuo en la parte activa y participativa del proceso de enseñanza – aprendizaje. Teniendo en cuenta que dejó de ser un simple receptor y él, ahora con la nueva concepción del mundo, de la ciencia y la tecnología pasa a ser fuerza motriz del proceso educativo.

Es nuestro objetivo, dirigir este documento de manera muy especial, a las y los estudiantes de noveno grado.

II. ANTECEDENTES

La enseñanza del álgebra y la solución de ecuaciones, entre otros temas de Matemáticas Básicas, se presentan en los textos principalmente mencionando primero alguna definición, después los procedimientos aritméticos y operaciones basadas en propiedades y axiomas en los sistemas numéricos y algebraicos y finalmente la solución de ejercicios. Esta forma de presentar los temas no favorece la interacción de los distintos modos de pensamiento, el analítico-aritmético, el analítico-geométrico y el analítico-estructural, por el contrario, acentúan notablemente el desarrollo de procedimientos algorítmicos y aritméticos que no permiten en la mayoría de los casos una comprensión de los conceptos presentados y en los cuales sus soluciones se reducen a “aprendizajes mecánicos”.

Las Ecuaciones Cuadráticas es un tema complejo para su enseñanza – aprendizaje. Los motivos que hacen que este tema sea problema, es que:

1. Se requiere de algunos conocimientos básicos de álgebra y, desde luego, su aplicación y manejo.
2. Es necesario hacer un esfuerzo de abstracción matemática para comprender la utilización del tema y en qué hechos cotidianos se puede utilizar.
3. Las y los profesores, además de conocer el tema, requerimos de mucha habilidad y calma para explicarlo.

De estos tres elementos, tal vez el menos conflictivo sea el primero pues las propias ecuaciones cuadráticas pueden servir como medio para adquirir los conocimientos básicos del álgebra. Los otros dos puntos pueden implicar varias horas, o hasta días, de reflexión de las y los profesores para encontrar el camino adecuado.

Algunos conocimientos de álgebra que se requieren para la comprensión y asimilación del tema de Ecuaciones Cuadráticas son:

(a) Qué es y para qué sirve una ecuación cuadrática.
(b) Aplicar correctamente los algoritmos para resolver ecuaciones cuadráticas.
(c) Plantear ecuaciones.

Con miras de elevar el nivel académico de las y los estudiantes en su formación matemáticas es que presentamos un nuevo método de enseñanza – aprendizaje para el tema Ecuaciones Cuadráticas. Lo fundamental de esta unidad didáctica es la presentación de un enfoque nuevo y pedagógico para reemplazar al que aún causa malestar a las y los estudiantes por ser muy incompleto y estar plagado de intrincadas reglas, por lo que nos dimos a la tarea de revisar fuentes bibliográficas no encontrando ningún trabajo similar realizado anteriormente.

III. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo monográfico consiste en el diseño y elaboración de una unidad didáctica que tiene como finalidad, orientar de manera significativa, el estudio de las ecuaciones cuadráticas para las y los estudiantes de noveno grado de la educación secundaria, desde una perspectiva constructivista, dinámica, creativa y didáctica, articulando las ecuaciones cuadráticas con los conceptos de variación, variable, dominio, cambio, entre otros.

Nuestra propuesta es de aula en donde relacionaremos en forma ordenada situaciones problémicas que van desde lo experimental, empírico a conceptos más abstractos representados de diferentes formas. Pretendemos que sea una buena estrategia para las y los estudiantes de noveno grado que le permita tener un mejor acercamiento a los conceptos matemáticos y cambiar su actitud hacia ellos. Proponemos actividades que permitan la manipulación de dichos conceptos, a partir de representaciones semióticas autosuficientes al integrar materiales manipulativos, como el Puzzle Algebraico, los cuales permiten manipular algunos conceptos y representar algoritmos.

Por lo tanto la importancia de esta unidad didáctica, radica en favorecer un acercamiento significativo a la construcción del concepto de ecuación cuadrática y algunos métodos de solución, que involucra actividades con el material manipulativo Puzzle Algebraico, y de esta forma favorecer la intervención didáctica de las y los profesores en función de las necesidades y prioridades de las y los estudiantes para superar los errores y las dificultades que se presentan en la construcción de este concepto.

IV. OBJETIVOS

IV.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar una unidad didáctica que contribuya a estimular a las y los estudiantes mediante un proceso de aprendizaje significativo, aplicando estrategias metodológicas y recursos y/o materiales didácticos que promuevan la comprensión y asimilación del concepto de ecuación cuadrática, sus métodos de solución y sus aplicaciones en la resolución de problemas.

IV.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Dotar a las y los profesores de matemáticas de noveno grado de estrategias de enseñanza – aprendizaje que permita a las y los estudiantes comprender y apropiarse de los conocimientos referentes a las ecuaciones cuadráticas.
2. Utilizar situaciones problema para ayudar a construir los conceptos involucrados en contextos significativos para ellos.
3. Desarrollar habilidades y destrezas en la interpretación y resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones cuadráticas.
4. Implementar formas de evaluación en donde se integren competencias, contenidos, actitudes de las y los estudiantes en las actividades desarrolladas por las y los profesores.

V. MARCO TEÓRICO

V.1. Concepto General de Competencia

Las competencias generales se definen como la capacidad del sujeto para conocer, hacer, actuar e interactuar en los diferentes contextos y situaciones.

Se interpretan las competencias como grandes capacidades de actuación que incluyen los conocimientos, pero fundamentalmente el saber hacer y ser. En ese sentido, se diría que un estudiante exhibe competencia en un determinado tema o ámbito cuando sea capaz de actuar, expresando comprensión, sea capaz de argumentar expresando los porqués de una actuación o afirmación y pueda realizar actuaciones de carácter propositivo, en el sentido de construir hipótesis, resolver problemas en diversas situaciones, buscar alternativas, establecer patrones exhibiendo una actitud curiosa, respetuosa y flexible frente al conocimiento y a los demás; expresando en sus actuaciones confianza en sí mismo y en su potencial de aprendizaje y respeto frente al trabajo de los otros y otras y con entusiasmo hacia la producción colectiva.

Otra definición:

> Las competencias son el conjunto de aprendizajes interiorizados no observables directamente. Son los resultados esperados en el mundo real, en situaciones, dentro y fuera de la escuela. Está asociada con criterios que permiten observar el desempeño de una persona.

V.2. Importancia de las Competencias

En sentido general, las competencias son importantes porque nos permiten un desempeño de calidad para hacer bien una determinada tarea o actividad productiva.

La importancia de las competencias, radica en el desenvolvimiento eficaz de una persona en una actividad determinada, de modo que tener aptitud, es indispensable en el desempeño de una labor específica.

En el ámbito educativo, son importantes porque exigen que un profesor o profesora rompa con el esquema tradicional y percibamos que ellos o ellas no son las únicas fuentes del conocimiento, sino que son mediadores que dedican la mayor parte de su tiempo a la observación del desempeño de sus estudiantes y a la asesoría y tutorías académicas.

Además, nos permiten visualizar las metas hacia dónde queremos llegar.

En el estudiante, son importantes porque les permiten actuar con eficiencia, dentro y fuera de la escuela, de modo que pueda argumentar, proponer alternativas a situaciones problemáticas y así poder enfrentar las dificultades que se presentan en el diario devenir.

V.3. Tipos de competencias

Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso, esas competencias son: Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Plantear, Resolver problemas, Representar y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Se considera que los logros de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante este conjunto de competencias, ya que describen los procesos que se requieren para un domino matemático general.

Conviene observar que las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas, relacionadas con algún tipo de análisis conceptual. A continuación se presentan algunos indicadores que ejemplifican cada una de las competencias.

Pensar y Razonar

Incluye las capacidades de: plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así,…entonces etc.); conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones; distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar

Incluye las capacidades de: conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede (o no) ocurrir y por qué?); crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar

Incluye las capacidades de: expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita; entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.

Modelar

Incluye las capacidades de: estructurar el campo o situación que va a modelarse; traducir la realidad a una estructura matemática; interpretar los modelos matemáticos en términos reales; trabajar con un modelo matemático; reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones); dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas

Incluye las capacidades de: plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar

Incluye las capacidades de: decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Incluye las capacidades de: codificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal; manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos; las competencias muestran los modos en que los estudiantes actúan cuando hacen matemáticas.

V.4. Definición del dominio de competencias matemáticas

El dominio de Competencia en Matemáticas concierne a la capacidad de los(as) estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan tareas matemáticas en una variedad de contextos.

El nivel de competencia en matemáticas se refiere a la medida en la que estudiantes pueden ser considerados como ciudadanos reflexivos y bien informados además de consumidores inteligentes. OCDE / PISA [Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes auspiciado por la UNESCO y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)] define de la siguiente manera la competencia matemática:

> *La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.*

V.5. Contenidos

V.5.1. ¿Qué son?

Los contenidos son los conocimientos específicos relacionados con los diferentes campos del saber, los que constituyen un medio para lograr las competencias.

En la organización de los contenidos se han incorporado tres tipos: Conceptuales, Procedimentales y Actitudinales, tomando en cuenta la relevancia y pertinencia que estos tienen para el desarrollo de las competencias de período escolar. Los contenidos se presentan de forma gradual y articulada, en dependencia de la etapa de desarrollo evolutivo de los estudiantes y de cada nivel educativo.

V.5.2. Clasificación de los contenidos

(a) Conceptuales

Los contenidos conceptuales corresponden a los conocimientos matemáticos que el entorno social y cultural pide a los ciudadanos y ciudadanas actuales y de un futuro próximo.

Entre los diferentes bloques conceptuales hay relaciones que se han de explicitar en los procesos de enseñanza – aprendizaje: la priorización de algunos de ellos y la conexidad entre conceptos.

Consideraciones que hay que tener en cuenta en el establecimiento de los conceptos:

- Partir de los conocimientos previos de los(as) estudiantes teniendo en cuenta que, como personas, se encuentran en un ambiente cultural concreto.
- Los conceptos prescriben en el sentido de que su idoneidad como conocimiento cultural básico cambia continuamente.
- Se han de escoger los que son adecuados a las posibilidades de comprensión de los(as) estudiantes.

- A la hora de reducir contenidos, hay que recortarlos equilibradamente y no suprimirlo todo en bloque.
- Las secuencias conceptuales se deben adaptar a los(as) estudiantes y no es necesario que sean las mismas para todos.
- La relación entre los bloques y un uso sistemático de los procedimientos optimiza el tiempo.
- Un concepto no se desarrolla de golpe, se debe tratar cíclicamente y, por lo tanto, es necesario decidir qué grado de aproximación al mismo se fija.
- Elegir contenidos que tengan una alta potencialidad, es decir, que conecten con unos y que sean realmente necesarios para desarrollar otros.

(b) Procedimentales

Así como en la educación pre – escolar los procedimientos tienen un papel relevante por encima de los conceptos matemáticos, en la educación primaria tienen una importancia más parecida con estos últimos. Por un lado, son fundamentales para posibilitar el aprendizaje de los conceptos matemáticos asegurando la comprensión, expresión y aplicación posterior. Y, por otro lado, hacen posible que el estudiantado adquiera estrategias que le permitan enfrentarse a situaciones nuevas cada vez de manera más eficaz y perseverante ante las dificultades que surjan.

Debemos tener presente que uno de los objetivos esenciales del aprendizaje de las matemáticas es favorecer una autogestión progresiva. Es decir, el alumno tiene que llegar a un grado de madurez de su capacidad matemática que le permita aplicar las matemáticas aprendidas de la manera más creativa y crítica posible, y al mismo tiempo, ser capaz de decidir el grado de acierto de las soluciones obtenidas.

La mayoría de los procedimientos del área de matemáticas son genéricos, es decir, aplicables a todos los bloques de contenidos de hechos, conceptos y sistemas conceptuales. Su papel es también importante en la adquisición de actitudes favorables al trabajo matemático y que deben llevar a valorar las matemáticas como una herramienta útil y formadora.

A continuación presentamos un listado de procedimientos matemáticos:

- *Observación.*
- *Experimentación.*
- *Manipulación.*
- *Relación.*
- *Estimación.*
- *Tanteo.*
- *Uso de los lenguajes matemáticos.*
- *Resolución de problemas.*
- *Técnicas específicas.*

(c) Actitudes, valores y normas

Aparte de las actitudes, los valores y las normas globales que no se encuentran ligadas a ningún área en concreto, como las relativas a la comunicación, a la organización del trabajo, al respeto y a la tolerancia, a la autonomía, al espíritu crítico, etc., las hay, la que tienen una relación más directa con las matemáticas y que influyen de manera capital en la consecución de los objetivos de esta área.

La actitud hacia las matemáticas y también a la tendencia a pensar y actuar desde las matemáticas significa lo mismo, ya que el hecho de que a un estudiante le gusten las matemáticas no se traduce siempre en una actuación de carácter matemático.

Con demasiada frecuencia la actitud hacia las matemáticas evoluciona negativamente en el transcurso de la educación primaria. Muchos nos tememos que uno de los factores determinantes del sentimiento de fracaso de los(as) estudiantes está causado por un enfoque falto de acierto por parte de los(as) profesores(as) quienes omiten contenidos por no dominarlos y el no uso de la didáctica lúdica crea una predisposición al fracaso, al rechazo y apatía hacia las matemáticas.

Para conseguir que los/as estudiantes tengan una actitud positiva hacia las matemáticas se debe potenciar la confianza en el sentido de quede resolver problemas, explicar y justificar lo que piensa se hace, por parte del profesor, desde una valoración positiva de los errores como fuente de información y no de castigo.

La flexibilidad se desarrolla admitiendo y proponiendo métodos alternativos de resolución de situaciones, con actividades abiertas e interdisciplinarias o reales y no queriendo una manera exacta y determinada de presentación y resolución de los problemas.

V.6. Atención a la diversidad

Al proponer actividades de aprendizaje hay tomar en cuenta la situación sociocultural de los(as) estudiantes para la influencia que tiene en el aprendizaje, como también los diversos ritmos y maneras de aprender; es decir, las actividades estarán conectadas a su realidad y darán oportunidades a todos de avanzar, sin esperar que los niveles lleguen a ser los mismos.

Hay situaciones de aula o de escuela que obligan a plantearse soluciones más radicales para atender la diversidad de ritmos de aprendizaje.

Cuando los ritmos de aprendizaje son muy diferenciados, se hace muy difícil conseguir hacer avanzar a todos a pesar de que se tengan todas las precauciones necesarias. Para solucionar esta situación se hace necesario agrupar a los(as) estudiantes por niveles. La primera tarea difícil es determinar qué se entiende por nivel y qué instrumentos se utilizarán para determinarlo. Habitualmente se escogen el nivel de adquisición de objetivos y el grado de autonomía personal para hacer los grupos y la observación y las pruebas escritas sirven para determinarlos.

La adopción de medidas especiales no comporta una forma diferente de trabajar; es decir, los defectos se reproducen.

La agrupación de las y los estudiantes por niveles sin un planteamiento metodológico correcto no conduce a los objetivos propuestos.

La diversificación de las actividades dentro del aula. En este caso se han de tomar precauciones para no caer en el trabajo puramente rutinario por parte de los discentes con más dificultades.

V.7. ¿Qué son los indicadores de logros?

Son los indicios o señales que nos permiten observar de manera evidente y especifica los procesos y resultados del aprendizaje a través de conductas observables. Es un indicador que tiene como función hacer evidente qué es lo que aprende el estudiante y cómo lo demuestra.

Los indicadores de logro proporcionan elementos de prueba verificables, para valorar los avances hacia el logro de las competencias, o de los objetivos de un proyecto educativo, o de una unidad, o de un tema o pregunta generadora, etc.

El enunciado de los indicadores de logro debe permitir percibir o demostrar los cambios suscitados en los(as) estudiantes. Por esta razón, conviene tener en cuenta que un sólo indicador rara vez puede abarcar la totalidad de los cambios propuestos en el enunciado de una competencia o de los objetivos de un proyecto, unidad o tema generador.

Por ello, es recomendable precisar y formular varios indicadores de logro, para que el estudiante pueda alcanzar la competencia.

V.8. Teoría de los modos de pensamientos de Sierpinska (2000)

Los tres modos de pensamiento sintético – geométrico, analítico – aritmético y analítico - estructural permiten definir, desde el referente teórico, el propósito de presentar algunos objetos matemáticos desde una mirada alternativa a la propuesta por algunos textos de educación matemática a la vez que permiten desarrollar habilidades de pensamiento en los estudiantes para comprender dichos conceptos cuando se considera la interacción entre ellos.

V.8.1. Modo sintético – geométrico

Presenta los objetos matemáticos mediados por una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos, etc. Se considera que en este modo de pensamiento es fundamental la visualización matemática, considerada como "*el proceso de formación de imágenes (mentales, o con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología) y el uso de tales imágenes efectivamente, para el descubrimiento de matemáticas y su comprensión*" (Zimmermann y Cunningham 1991). La relevancia de este autor en este modo de pensamiento se presenta puesto que son numerosos los trabajos que presenta en cuanto a la importancia de la visualización para estimular el descubrimiento matemático, dando lugar a una mejor comprensión. En este mismo sentido, el psicólogo francés Duval (1998, p38), propone un modelo cognitivo de razonamiento geométrico donde los procesos de razonamiento se dan por la interacción de tres procesos: la visualización, la construcción y el razonamiento. El primero hace referencia a la representación visual de características geométricas, el segundo, a construcciones mediante el uso de herramientas (se pueden incluir paquetes de programas computacionales de tipo educativo) y el razonamiento, a procesos de extensión del conocimiento y a la explicación de una prueba. Del mismo modo, sostiene que "estos tres tipos de procesos cognitivos están estrechamente relacionados y su sinergia cognitiva es necesaria para el dominio de la geometría".

V.8.2. Modo analítico – aritmético

Considera los sistemas matemáticos a partir de relaciones numéricas. En este trabajo, para el tópico de ecuaciones, éstas se presentan en este modo de pensamiento como ecuaciones con sus relaciones numéricas.

V.8.3. Modo analítico – estructural

Favorece la interpretación a través de propiedades y axiomas en los sistemas matemáticos que contienen los objetos en estudio. Las soluciones de cualquier tipo de ecuaciones algebraicas, en este modo de pensamiento, se encuentran a partir de una secuencia de propiedades y axiomas que requieren su demostración previa o por lo menos su memorización.

V.9. La evaluación de los aprendizajes basados en competencias

Otro aspecto que debe tener en consideración las y los profesores al efectuar su planeamiento didáctico, es la evaluación de los resultados del aprendizaje, logrado por las y los estudiantes y la calidad de la tarea realizada; para ello el profesor o la profesora debe contemplar variadas estrategias e instrumentos para obtener juicios de valor.

La evaluación no debe ser tarea exclusiva de las y los profesores, sino, que también las y los estudiantes se deben involucrar. Esto puede ser a través de la autoevaluación y la coevaluación, lo que les permitirá descubrir y corregir sus dificultades.

La evaluación debe ser continua y sistemática, lo que constituye una fuente importante de información para el estudiante y para el profesor o la profesora, por lo tanto, forma parte del proceso enseñanza – aprendizaje y permite detectar si se han logrado los resultados esperados y si están las condiciones necesarias para proseguir con el aprendizaje.

V.9.1.¿Qué entendemos por evaluación?

La evaluación de los aprendizajes es un componente del proceso educativo, a través del cual se observa, recoge y analiza información significativa, respecto de las posibilidades, necesidades y logros de las y los estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor tomar decisiones pertinentes y oportunas para el mejoramiento de su aprendizaje.

V.9.2. ¿Cuáles son las características de la evaluación?

- Integral.
- Continua.
- Sistemática.
- Participativa.
- Flexible.

V.9.3. ¿Para qué se evalúa?

Según el momento en que tiene lugar la evaluación y la finalidad con que se realiza, da lugar a una toma de decisiones distinta.

(a) ***La evaluación inicial o diagnóstica***

En un enfoque constructivista del aprendizaje los conocimientos previos del estudiante tienen un papel importante. Todo profesor o profesora sabe lo difícil que es determinar cuáles son los conocimientos del estudiantado respecto a los temas de los currículos escolares. Y suponiendo que los pudiéramos determinar, ¿qué haremos cuando sean muy diversos? Este es un reto no resuelto, pero no por eso se debe abandonar esta cuestión que, por otro lado, en el caso de las matemáticas es esencial.

Los conceptos matemáticos están construidos de manera que unos están relacionados con los otros en diversos sentidos, como dependencia estricta, como aplicación, como interdisciplinarios, etc.

Hay momentos clave en que se debe plantear una evaluación de tipo inicial. Al principio del curso y a modo de una revisión del anterior no tiene mucho sentido, a no ser que el desconocimiento de las y los estudiantes sea total Debe consistir en una observación cuidadosa de ciertos aspectos que se consideren esenciales para ir planteando el trabajo. Los aspectos evaluados deben ser pocos y bien escogidos.

Cada vez que se empiece un tema no es necesario hacer una evaluación inicial pero sí que es conveniente hacer un tanteo colectivo para concienciar a las y los estudiantes sobre lo que ya sabe o ya ha trabajado en relación con lo que se plantea.

En temas realmente nuevos y de importancia relativamente grande hay que constatar que algunos conocimientos esenciales están adquiridos.

(b) ***La evaluación formativa o interactiva***

La evaluación de seguimiento debe permitir identificar los contenidos que presentan dificultades de aprendizaje, y así el profesor puede reproducir la secuencia que había previsto. Los métodos que se utilicen para evaluar deben tener en cuenta las características de las y los estudiantes y deben ser coherentes con la manera de enseñar.

La herramienta más importante para evaluar el rendimiento o la superación de los(as) estudiantes es la observación en clase y la revisión del trabajo hecho.

La observación implica mirar cómo hacen el trabajo, escuchar qué preguntas hacen, ver cómo defienden sus ideas, cómo se comunican con las compañeras y los compañeros durante el trabajo en grupo entrevistándolos para aclarar dudas puntuales, todo esto debe ser incluido dentro del trabajo normal de clase y sin otorgarle la formalidad de un examen.

La revisión del trabajo hecho, que suele ser mucha, no puede ser exhaustiva. Queda muy bien decir que hay que reflexionar sobre el trabajo de cada estudiante para captar lo que no ha entendido y después sobre el conjunto de la clase.

La comunicación a las y los estudiantes de los resultados de las evaluaciones se han de hacer de manera informal y enfocándola positivamente, haciéndole ver en qué ha avanzado y no qué es lo que no sabe. Al valorar los esfuerzos de las y los estudiantes se le ayuda moralmente, y los resultados conseguidos le dan la capacidad de llegar a dirigir su propio aprendizaje usando aquellos conocimientos que es consciente que domina.

(c) *Evaluación de conceptos*

Los conceptos son una parte fundamental del conocimiento matemático. No se adquieren de una vez y para siempre, lo que hace que la medida de su comprensión haya de adaptarse al momento evolutivo del alumno y al trabajo realizado. La progresión de un concepto va unida a su campo de aplicación y a las relaciones que se puedan establecer con otros conceptos.

Para evaluar el grado de comprensión de un concepto hay que ver si el escolar es capaz de:

1. Identificar el concepto a partir de ejemplos concretos donde algunos sean correctos y otros incorrectos.
2. Dar ejemplos correctos e incorrectos de un concepto.
3. Usar modelos, dibujos, diagramas o símbolos para expresar un concepto.
4. Reconocer un concepto a partir de una representación dada.
5. Identificar algunas propiedades del concepto.
6. Reconocer diferentes interpretaciones de un concepto.
7. Comparar y contrastar conceptos.
8. Definir el concepto a partir de enumerar partes y propiedades que le caractericen.

(d) *Evaluación de procedimientos*

El conocimiento de los procedimientos se mide por su grado de aplicación, pero también por la capacidad de adaptarlo a situaciones nuevas. Como no se puede separar de los conceptos a veces su evaluación resulta difícil.

El grado de conocimientos se puede determinar según lo que el estudiante sea capaz de hacer:

1. Saber cuándo hay que usar un procedimiento.
2. Saber utilizar un procedimiento de manera correcta y eficaz.
3. Reconocer si un procedimiento es correcto o incorrecto de manera empírica.
4. Explicar las razones de los diversos pasos de un procedimiento.
5. Adaptar o modificar un procedimiento conocido.
6. Inventar un procedimiento nuevo.

(e) *Evaluación de actitudes, valores y normas*

La mejor manera de recoger información es la observación de las y los estudiantes en su vida en la escuela. Hay que ver la confianza que tienen en el uso de las matemáticas para resolver situaciones cotidianas, su interés por hacer matemáticas, su autonomía en el trabajo, la tendencia a interrogarse y contrastar la información recibida y la perseverancia y flexibilidad en la aplicación de sus ideas.

(f) *La evaluación sumativa*

Para la promoción y certificación, o en caso contrario a la repetición; esta forma de evaluación contrasta fuertemente con la evaluación diagnóstica y la formativa, ya que mientras en éstas se toma en cuenta el proceso de enseñanza – aprendizaje, el ritmo de aprendizaje de las y los estudiantes con la finalidad de evitar errores y fracasos en un momento, en que todavía se pueden realizar actividades alternativas de recuperación y que hacen que la evaluación sea auténtica, la evaluación sumativa en un momento determinado certifica un nivel y puede prescribir una repetición.

V.10. Software educativo o software para la enseñanza

V.10.1.¿Qué es?

El software educativo es un software que ha sido diseñado específicamente para ser utilizado como material de apoyo a las y los profesores, estudiantes y toda aquella persona que desea aprender sobre determinada área del conocimiento.

El software educativo o más específicamente el software para la educación en matemáticas involucran a tres grandes ciencias:

- La sicología, mediante un conocimiento no elemental de las ciencias cognitivas;

- Las matemáticas, mediante la creación de un adecuado dominio de conocimientos para cualquier tipo de sistema o programa y con la creación de algoritmos eficientes.
- La computación, como una ciencia que hace factible el instanciar la reunión de los dos mundos anteriores.

Esto que parece una obviedad no lo es, en evaluaciones recientes de software educativo se ha encontrado que la mayoría del software en el mercado tiene en general uno o dos de los atributos mencionados, pero relegan de manera importante a otro de ellos (Caftori & Paprzycki, 1997. p. 2). Por ejemplo podemos encontrar software con gran capacidad de manejo de imágenes y que en realidad constituye todo un portento de programación pero de una pobreza enorme en su capacidad de enseñar matemáticas. O bien software con intenciones didácticas pero de una pobreza en los algoritmos empleados que conlleva a errores conceptuales matemáticos.

V.10.2. Importancia del software educativo

El software educativo es muy importante ya que implementa una mediación pedagógica como lo es el computador, el cual permite el acceso al conocimiento académico de una manera mucho más rápida.

El desarrollo de un software educativo tiene como base el poder desarrollar herramientas que soporten efectivamente el proceso de enseñanza – aprendizaje. Es así como el uso de las nuevas tecnologías abre nuevas posibilidades de innovación y realización de diferentes modelos pedagógicos que junto con la intrepidez, curiosidad y motivación del maestro para con los estudiantes, se tiende a mejorar y cambiar de una forma positiva el proceso educativo, que a su vez se encuentra vigente con las tendencias a nivel informático y computacional.

Los software educativos fueron pensados tanto en el maestro como para los estudiantes ya que se basa en un modelo de enseñanza-aprendizaje continuo donde el espacio donde por excelencia se desarrolla éste (el aula de clases) no queda reducido a cuatro paredes sino que utiliza una plataforma lo suficientemente amplia como para que no se interrumpa este proceso, el mundo.

De esta forma, además de la flexibilidad tanto física como horaria, nos encontramos con la facilidad y graduación del propio ritmo de aprendizaje, pues el estudiante tiene la autonomía para decidir cuándo y cómo desea hacerlo.

Es por esto que un buen desarrollo de un software educativo debe ir de la mano de una labor constante y motivacional por parte del maestro para que no caiga en la monotonía y sobretodo, que el proceso sea significativo.

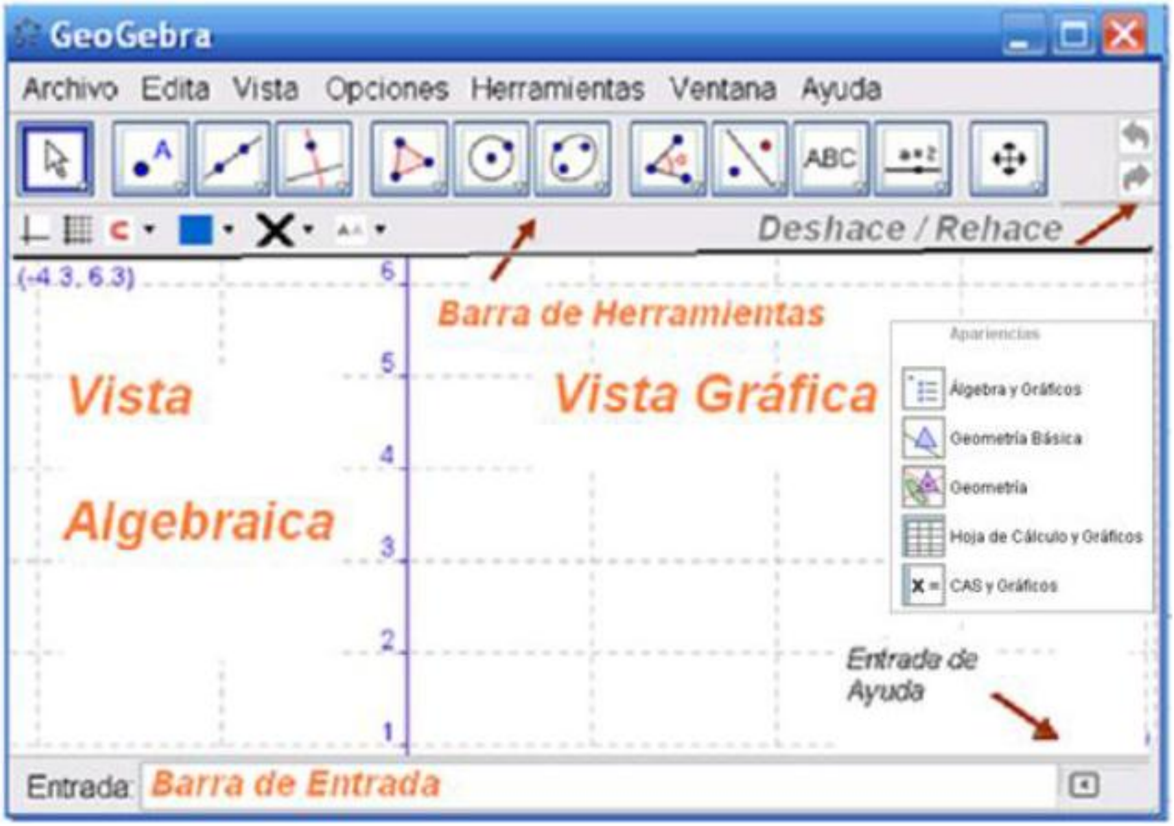
V.11. Software: GeoGebra

V.11.1.¿Qué es?

- Un software libre de matemática para educación en todos sus niveles, elaborado por Markus Hohenwarter y un equipo dedicado a su desarrollo del que, desde sus inicios, forma parte para el desenvolvimiento en Español la responsable de Centro Babbage, Liliana Saidon directora del Instituto GG para Argentina.
- Un utilitario para enseñar y aprender en todos los niveles educativos.
- Un encuadre versátil en que se conjugan geometría interactiva, álgebra, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica.

V.11.2.Vistas Múltiples de los Objetos Matemáticos

GeoGebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una Vista Gráfica, una, numérica, Vista Algebraica y además, una Vista de Hoja de Cálculo. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones), y en celdas de una hoja de cálculo. Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente.



(a) Vista Gráfica

Con el ratón o mouse, empleando las herramientas de construcción disponibles en la Barra de Herramientas, pueden realizarse construcciones geométricas en la Vista Gráfica.

Todo objeto creado en la Vista Gráfica, tiene también su correspondiente representación en la Vista Algebraica.

(b) Vista Algebraica

Desde la Barra de Entrada de GeoGebra pueden ingresarse directamente expresiones algebraicas. Después de pulsar la tecla Enter, lo ingresado aparece en la Vista Algebraica y, automáticamente, su representación gráfica en la Vista Gráfica. Por ejemplo, al ingresar f(x) = x^2 aparece la función cuadrática en la Vista Algebraica y el gráfico de la parábola en la Vista Gráfica. En la Vista Algebraica, se distinguen los objetos matemáticos libres de los dependientes. Es libre todo nuevo objeto creado sin emplear ninguno de los ya existentes y, viceversa, será dependiente, el que derivara de alguno previo.

(c) Vista de Hoja de Cálculo

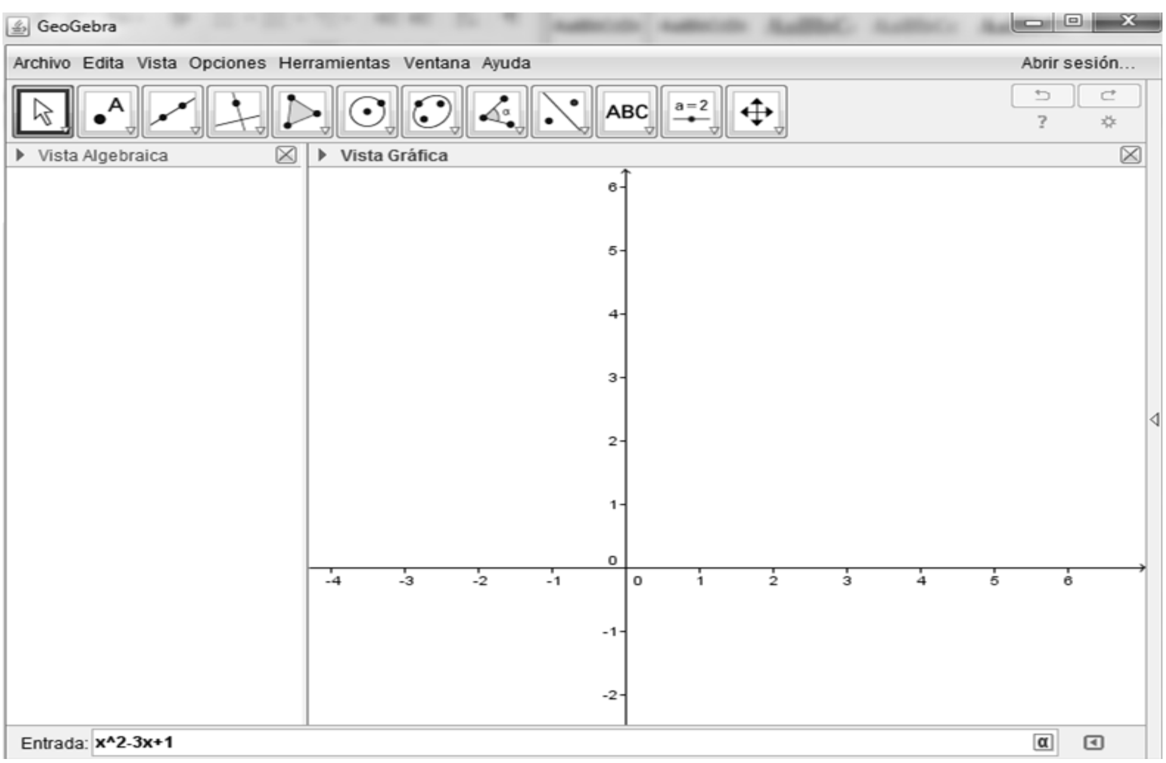
Cada celda de la Vista de Hoja de Cálculo de GeoGebra tiene una denominación específica que permite dirigirse a cada una. Por ejemplo, la celda en la fila 1 de la columna A se llama A1. Atención: El nombre de una celda puede usarse en expresiones y comandos para referir a su contenido. En las celdas de una hoja de cálculo, pueden ingresarse tanto números como cualquier otro tipo de objeto matemático tratado por GeoGebra (sean coordenadas de puntos, funciones, comandos). Cuando corresponde, también aparece de inmediato, en la Vista Gráfica, la representación del objeto ingresado en la celda, cuyo nombre coincide con el de la celda de la hoja de cálculo a partir de la cual fue creado (por ejemplo: A5, C1, D3, etc.).

Ejemplo

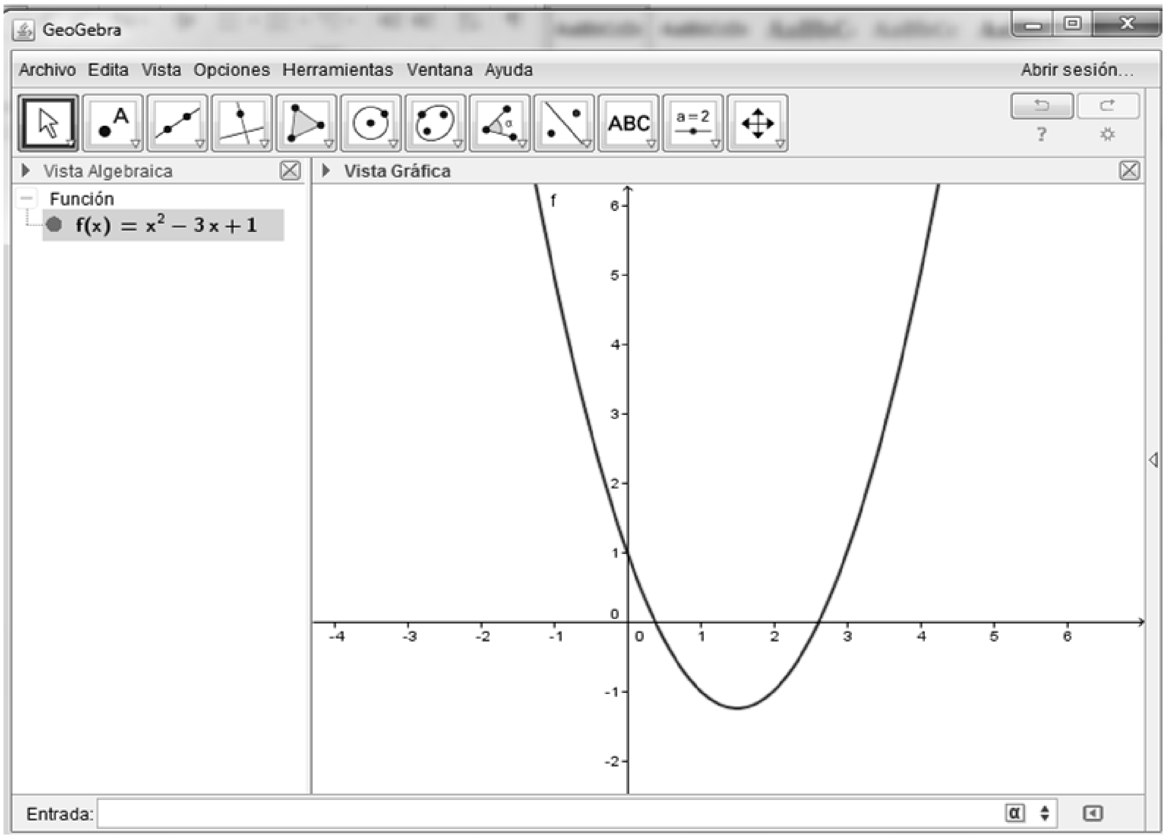
Graficar $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Solución

Ingresmos la ecuación funcional en la barra de entrada de la siguiente vista.



Dando ENTER resulta la siguiente pantalla.



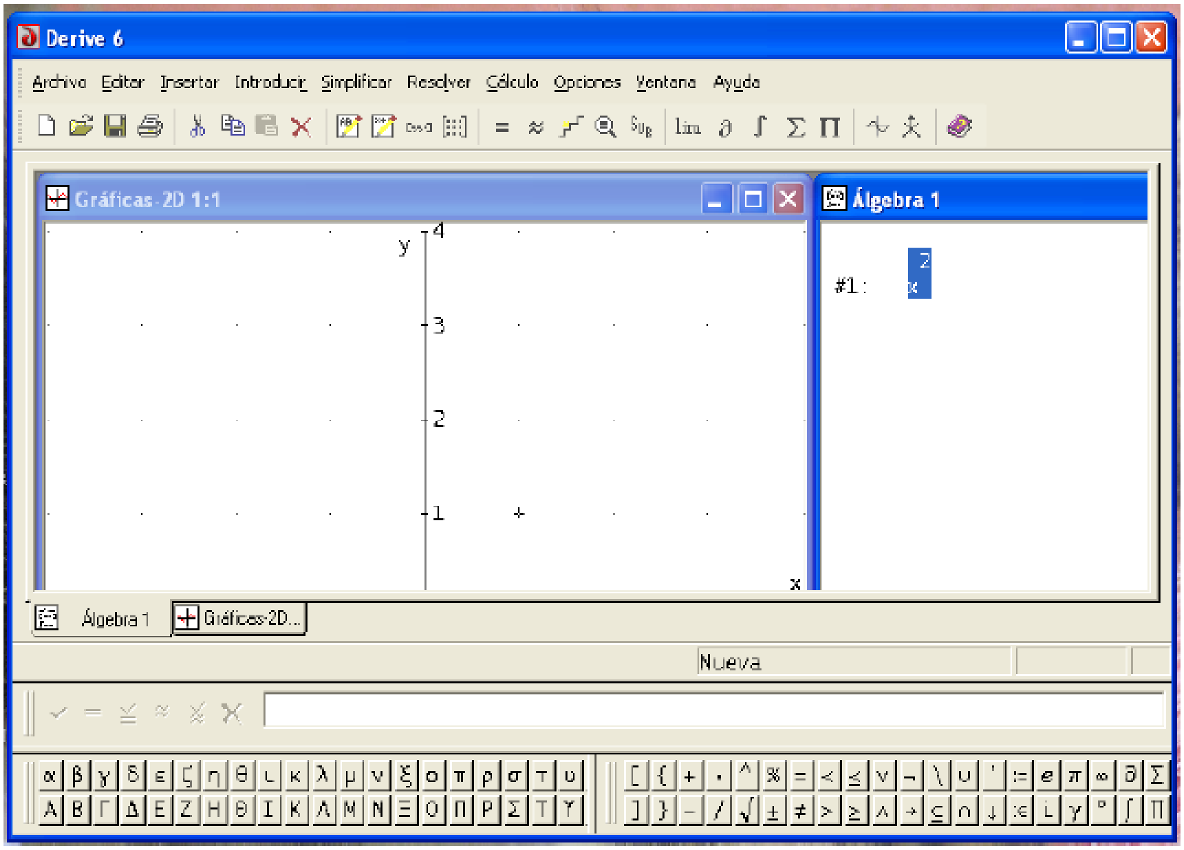
V.12.Software: Derive

DERIVE es un programa de cálculo simbólico muy sencillo de utilizar que permite manipular expresiones algebraicas sin necesidad de dar valores numéricos a las variables. Utiliza, por defecto, aritmética exacta, es decir, maneja expresiones racionales e irracionales sin tener que operar con decimales, aunque esto también es posible. Admite estructuras de tipo vectorial y matricial, y es posible desarrollar pequeños programas de tipo funcional.

Iniciar/Salir de DERIVE

Al ser un programa que se ejecuta bajo Windows, la forma de **iniciar** es la usual: hacer doble clic sobre el icono correspondiente

El aspecto de la ventana de trabajo de DERIVE en una sesión puede ser



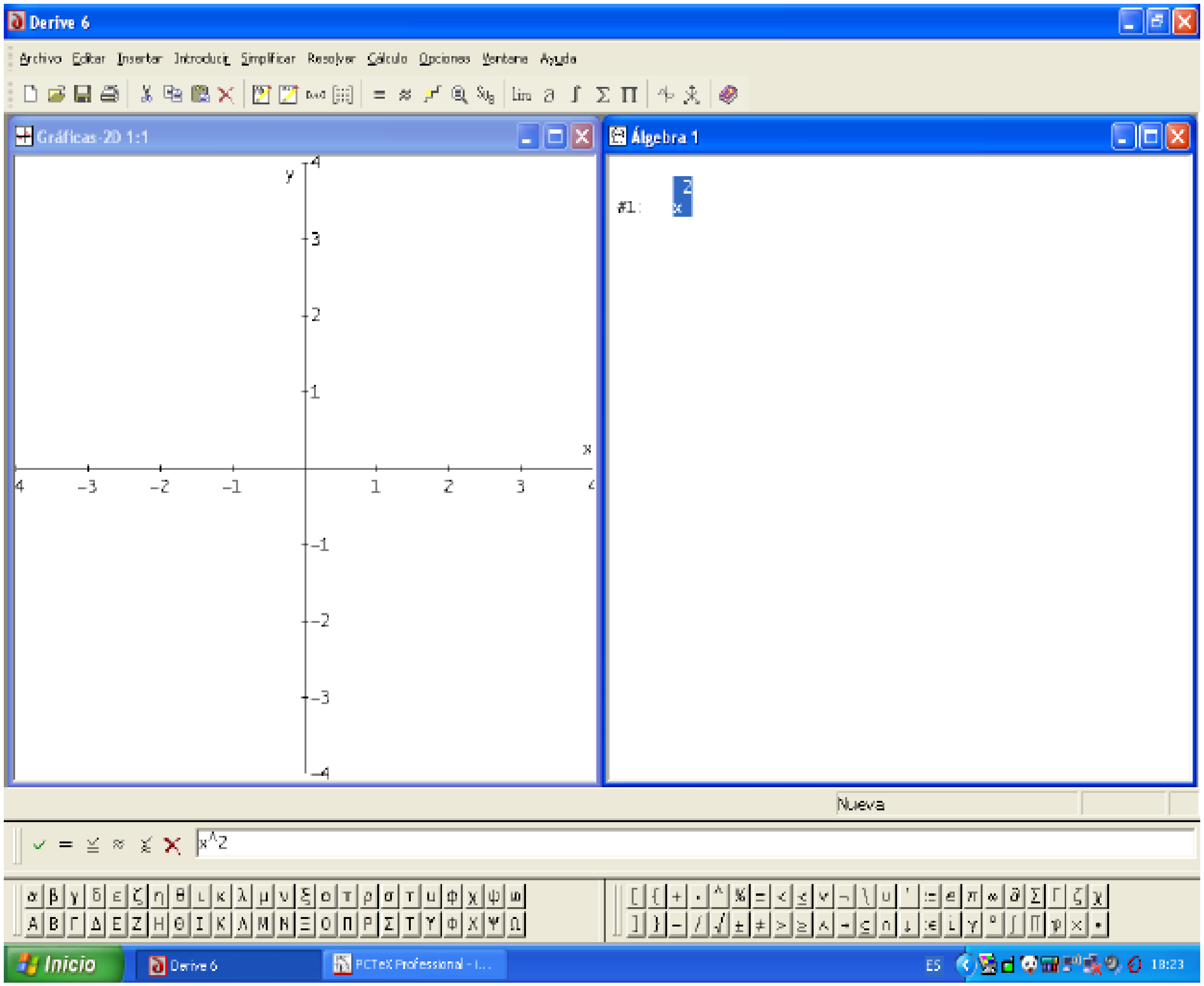
Para **salir** de la aplicación, basta hacer clic en el botón  de la esquina superior derecha, como es habitual en Windows, o bien *Archivo/Salir* del menú principal.

Interfaz gráfica de DERIVE

Las ventanas principales de Derive 6, al igual que otras aplicaciones bajo Windows, constan de una barra de herramientas con iconos que facilitan el uso de las funciones más frecuentes que ejecuta la aplicación, una línea de menús desplegables y una línea de título como cabecera de cada ventana que permite minimizar, maximizar/restaurar y cerrar dicha ventana:

Hay tres ventanas principales o entornos: **Álgebra**, **Gráficas-2D** y **Gráficas-3D**. En cada una de las ventanas, la barra de herramientas y la línea de menús tienen elementos comunes y otros propios de su entorno. Cuando trabajamos con más de una ventana a la vez, está activa la que está resaltada.

En el siguiente grafico se indican las partes principales del interfaz gráfico de DERIVE con la ventana *Álgebra 1* activa:



←—Línea de título
←—Línea de Menús
Barra de herramientas
←—Línea de títulos

Entorno gráfico
(ventana no activa)

Entorno algebraico
(ventana activa)

←—Línea de Estado
←—Línea de edición

Alfabeto Griego
Símbolos Matemáticos

Entorno algebraico: Ventana de ´Algebra

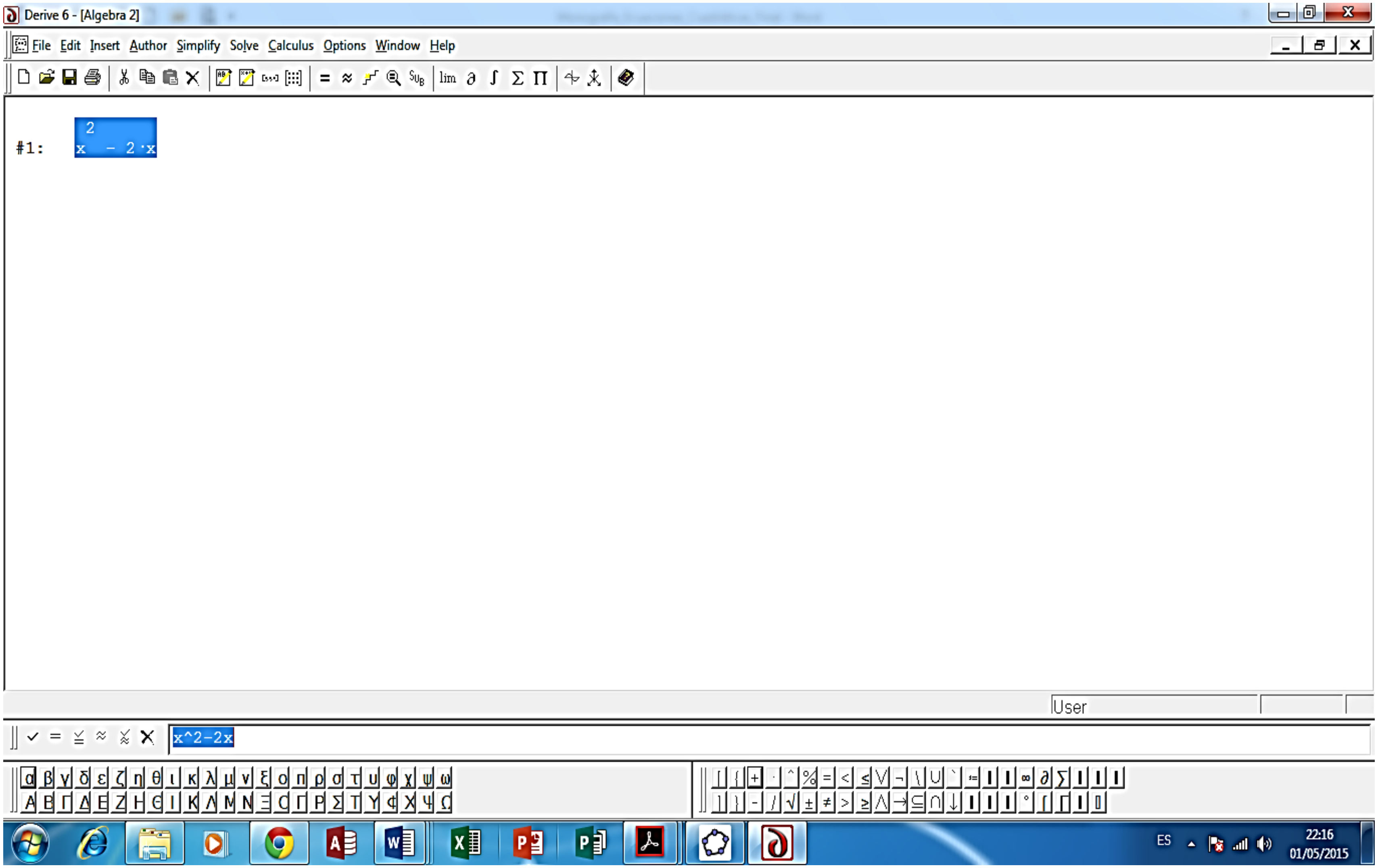
Este es el entorno principal de Derive. Utilizando la **línea de edición** podemos ir introduciendo las expresiones (simbólicas y/o numéricas) con las que vamos a operar, o también los comandos que queramos aplicar, con sus respectivos parámetros.

El orden de evaluación de las operaciones en una expresión viene dada por las reglas usuales de precedencia:

> *Las expresiones se evalúan de izquierda a derecha, con la operación de potencia teniendo el orden de precedencia más alto, seguido por multiplicación y división que tienen ambas igual precedencia y seguidas, finalmente, por suma y resta que tienen ambas igual precedencia.*

Para alterar este orden hay que utilizar los paréntesis ( ), en cuyo caso la evaluación se inicia dentro del paréntesis más interno y procede hacia afuera.

Este es el aspecto que toma la ventana de Álgebra cuando introducimos una expresión:

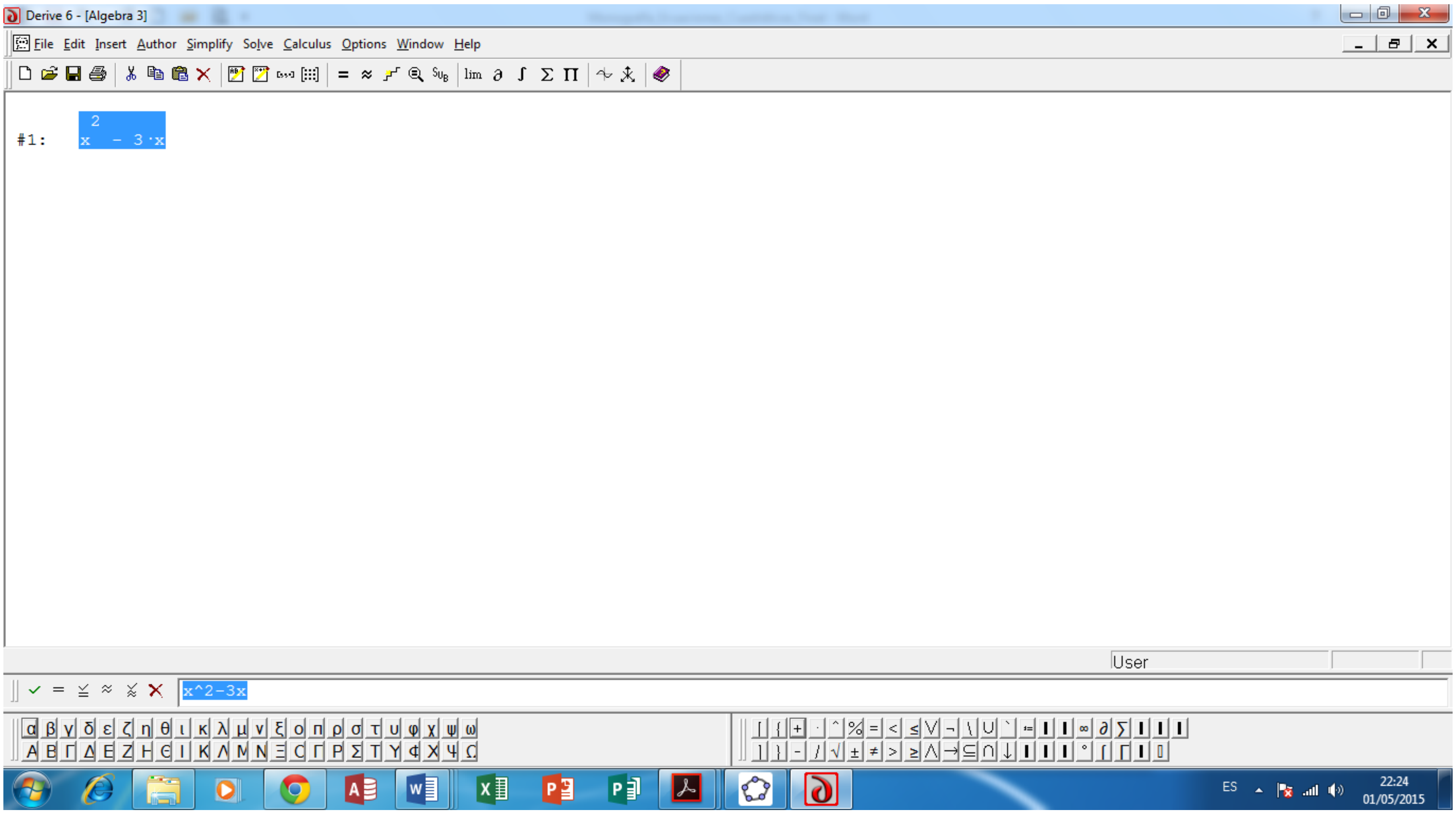


Ejemplo

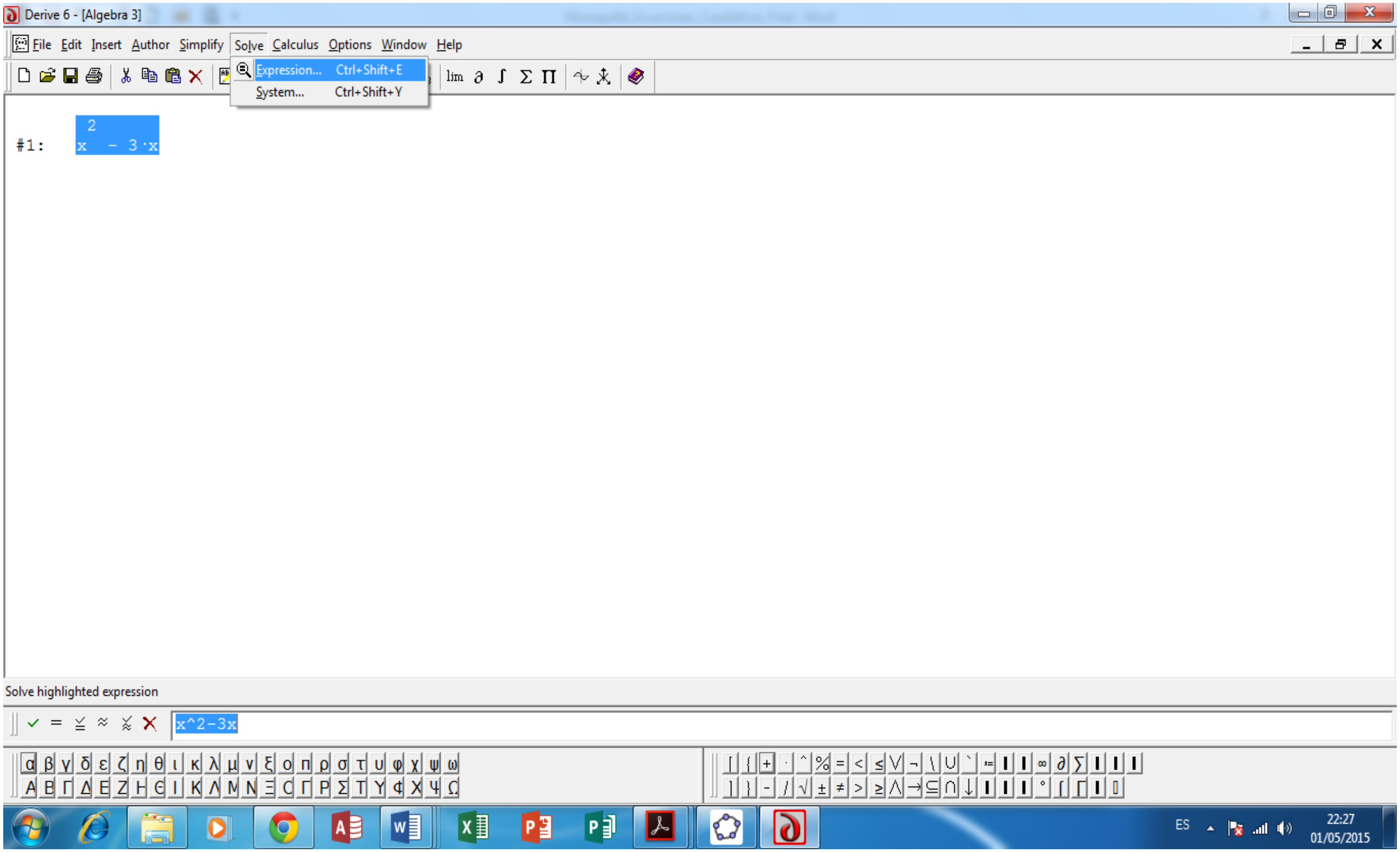
Resolver $x^2 - 3x = 0$

Solución

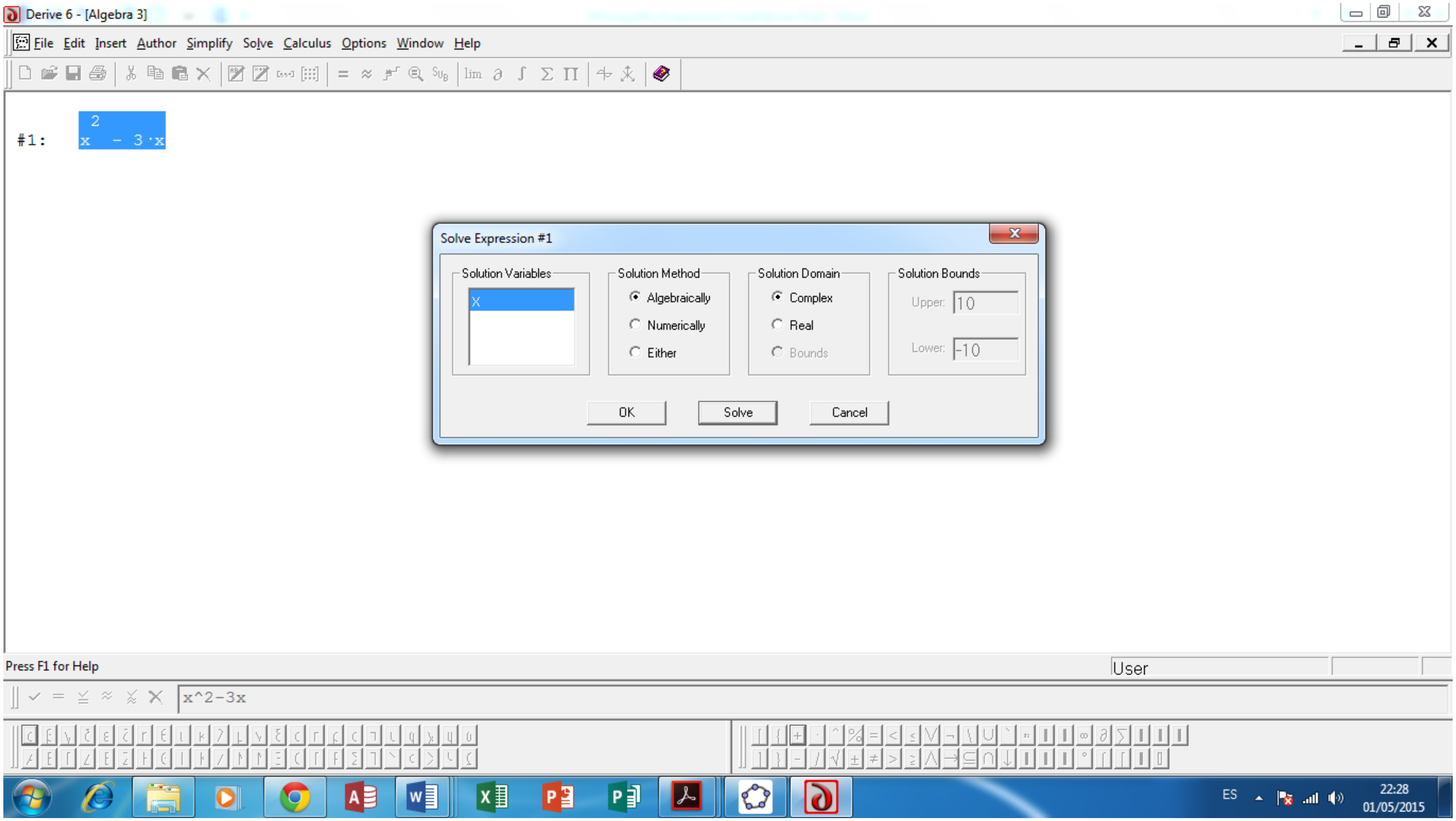
Introducimos la expresión algebraica en la línea de edición. Damos ENTER. Nos resulta la siguiente pantalla.



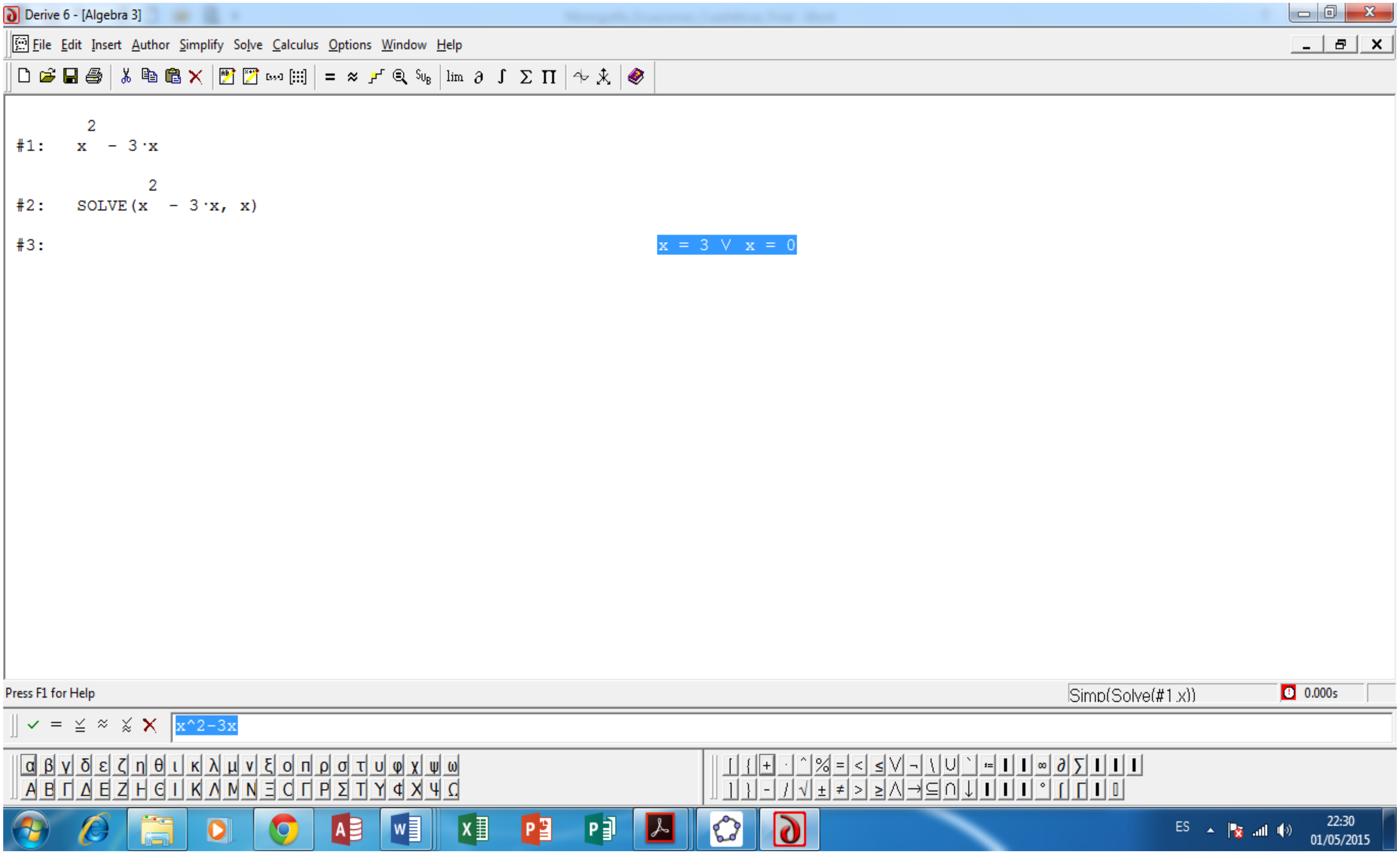
Ingresamos en Solve (Resolver) resultando la siguiente pantalla



Seleccionamos expression y damos clic con el botón izquierdo del mouse. Resultando



Seleccionamos Algebraically y damos clic con el botón izquierdo del mouse en solve resultando la siguiente pantalla.



V.13. Materiales manipulativos

En el diseño de la unidad didáctica se pretende implementar el uso de materiales didácticos con el objetivo de propiciar acercamientos, que podrían ser de mayor significación, a los conceptos algebraicos. Entre estos materiales se encuentran los materiales manipulativos, los cuales actúan como sistemas de representación de diferentes conceptos matemáticos, relacionados particularmente con el álgebra.

Como punto de partida es necesario hablar de los sistemas de representación semiótica, que desde la perspectiva de la teoría de Duval (1999), se entiende como el medio del cual dispone el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales y hacerlas visibles a otros. Un ejemplo de ello es el uso de diagramas, imágenes y figuras, los cuales desde los antiguos griegos son utilizados para representar, explicar y demostrar resultados matemáticos (Hernández et al, 2008).

En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma (Duval, 1999). Existen diferentes tipos de representaciones que favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos, sin embargo, se manifiesta la constante preocupación entre los matemáticos y lo profesores de matemáticas en que el estudiante confunda los objetos matemáticos con sus representaciones (Socas, 1998), lo que lleva a que se favorezcan los sistemas de representación formales, más que los sistemas de representación visuales o intuitivos.

De acuerdo con Duval (1999), un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- La presencia de una representación identificable (para este caso los materiales didácticos)
- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada (manipulación del material).

- La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (pasar de visualizaciones intuitivas del material a representaciones abstractas).

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa, y por tanto, la comprensión de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva.

La manipulación de representaciones matemáticas proporciona los medios para construir las imágenes mentales de un objeto matemático y su validez dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado (Socas & Camacho, 1998).

En este sentido es importante entender los materiales manipulativos como sistemas de representación semiótica, a partir de los cuales se representan, explican y demuestran los resultados y conocimientos matemáticos que se pretenden promover, en este caso el de las ecuaciones cuadráticas.

Según lo plantea Hernández et al. (2008), el uso coherente de estos sistemas de representación para el lenguaje algebraico debe estar organizado en torno a: usar registros de representación, usar sistemas de representación semióticos autosuficientes, usar diferentes fuentes de significado, articular situaciones de enseñanza, que partiendo de situaciones reales, permitan desarrollar procesos enlazados de matematización.

De acuerdo a lo anterior, se propone la vinculación de materiales (ver figura 8) que permitan dar cumplimiento a las características mencionadas, para ello se toma como referencia el uso de materiales manipulativos, condicionados en situaciones reales que puedan llamar la atención del estudiante y que provoquen la necesidad de resolver los problemas que se planteen. De esta manera promover el acercamiento a los conceptos algebraicos, tal como lo afirma Domínguez, citado por Hernández et al. (2008), "nuestros propios experimentos de enseñanza ponen de manifiesto que los materiales manipulativos utilizados como representaciones semióticas pueden ofrecer un papel importante en la introducción del álgebra, debido a que:

1. Facilitan la manipulación y conceptualización del símbolo y de la cantidad desconocida o general.
2. Proporciona una interpretación geométrica a símbolos y operaciones.
3. Mejora el discurso de la clase de álgebra.
4. Facilitan las conversiones entre el lenguaje algebraico y el natural.
5. La manipulación de varias representaciones por el estudiante le permite construir imágenes mentales adecuadas de un objeto matemático".

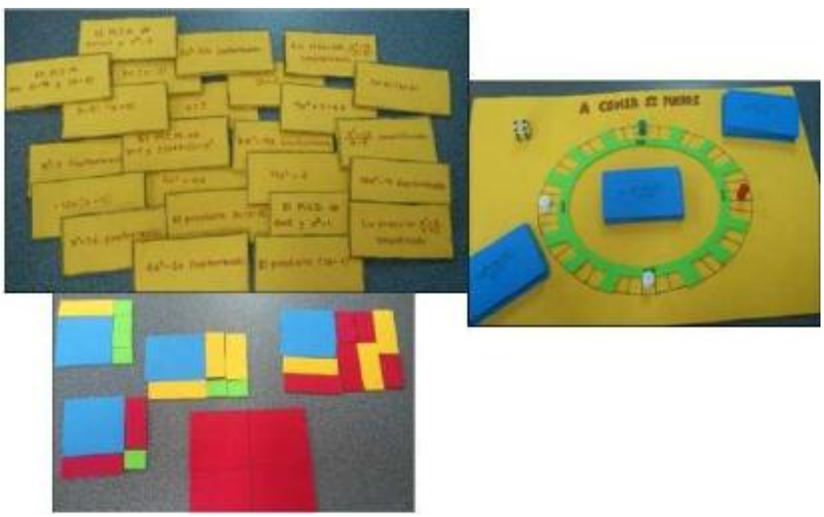


Figura 1

Los *materiales manipulativos* permiten ilustrar y modelar ideas y relaciones matemáticas y están diseñados para ser utilizados por los estudiantes en todos los grados escolares (Burns & Sibley, 2000, citado por Mink, 2010). Incluyen casi cualquier objeto físico usado para representar un concepto abstracto y se utilizan para ayudar a los estudiantes a manipular objetos matemáticos y representar algoritmos. En este sentido Arce (1999) afirma lo siguiente *"El uso del material manipulativo, juega un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas. Su correcta utilización constituye una importante base de adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos que posibilita un aprendizaje activo de acuerdo a la evolución intelectual del participante".*

V.14. Puzzle algebraico

El Puzzle Algebraico es un material que consta de 132 fichas distribuidos por diferentes colores, dimensiones, que se representan con expresiones algebraicas positivas y negativas 13, las cuales se representan en: cuadrados pequeños denominados unidad (color verde), fichas rectangulares denominados (color amarilla) y cuadrados grandes denominados (color azul). Además consta también de piezas con expresiones algebraicas negativas que se representan de la misma manera a las fichas positivas, anteriormente mencionadas, con la diferencia de que todas sus fichas son de color rojo. Como se muestra a continuación en la siguiente figura.

Figura 2

Para trabajar con este material es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Las unidades tienen que estar en un único bloque (cuadrada o rectangular).
2. Los cuadrados que representan el _ deben estar situados de forma diagonal con respecto al bloque de unidades. No pueden estar en la misma fila o columna.
3. Los rectángulos positivos y negativos no pueden estar combinados en un mismo bloque.

Cada una de las piezas del Puzzle Algebraico hace referencia a una expresión según sea su forma. Cuadrados de lado, rectángulos de base y una unidad de altura y cuadrados de lado igual a la unidad.

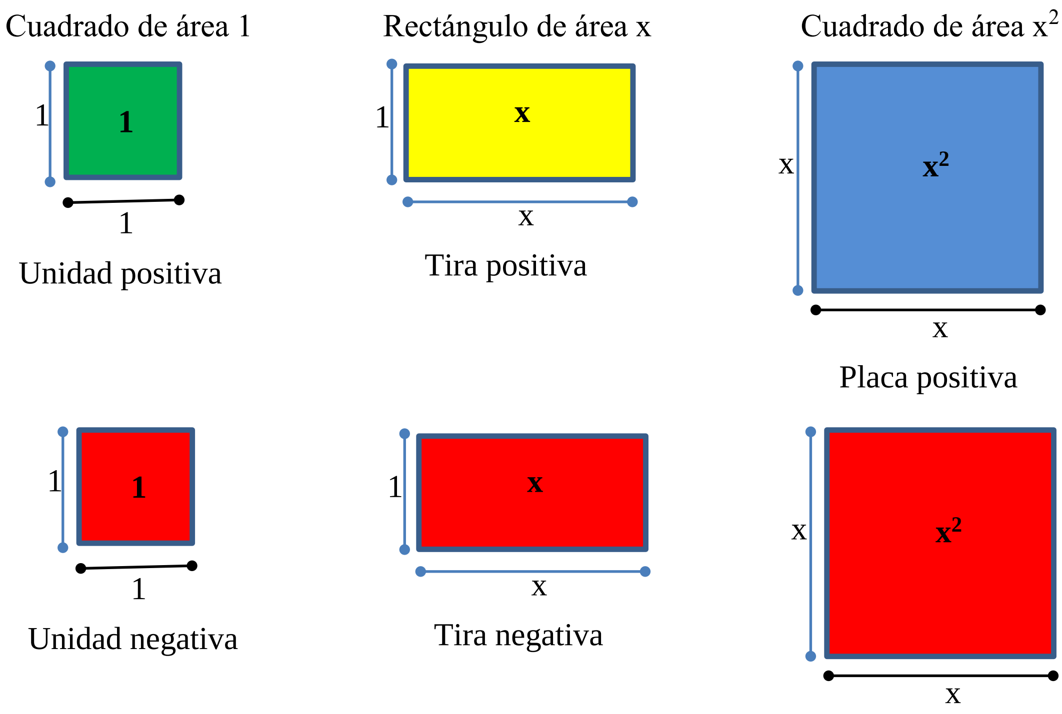


Figura 3

El Puzzle Algebraico permite trabajar la propiedad distributiva, operaciones con polinomios, factorización de polinomios y resolución de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas. Además permite la modelización de la multiplicación como área, pero solo manejando piezas con signo positivo. Para el desarrollo de este trabajo se presenta una situación que permita representar expresiones de segundo grado, con las piezas del material, a partir de la construcción de cuadrados y rectángulos, y que lleve a establecer la relación con el área de los mismos y las magnitudes de sus lados, es decir la equivalencia entre dos expresiones cuadráticas.

Reglas para trabajar con el Puzzle Algebraico

Para trabajar con este material es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Las unidades tienen que estar en un único bloque (cuadrada o rectangular).
2. Los cuadrados que representan el deben estar situados de forma diagonal con respecto al bloque de unidades. No pueden estar en la misma fila o columna.
3. Los rectángulos positivos y negativos no pueden estar combinados en un mismo bloque.

VI. UNIDAD DIDÁCTICA: Ecuaciones Cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas se utilizan para modelar fenómenos en las ciencias, siendo además un tema fundamental en matemáticas y su manejo es una competencia básica a desarrollar, que se ha convertido en un problema doble. Por una parte, para un gran número de estudiantes resolver este tipo de ecuaciones, se reduce a la aplicación de algoritmos de forma mecánica, que muchas veces no comprenden y se convierte en un ejercicio de memoria. Por otra parte, se observa el manejo de temas matemáticos de forma aislada y sin conexión con otros conceptos o aplicaciones dentro del plan de estudio, como el caso del triángulo de Pascal, la división de polinomios, el teorema de Pitágoras, etc., que pueden servir como herramientas para la compresión y solución de ecuaciones cuadráticas, manejados con mayor énfasis en noveno grado. Con nuestra unidad didáctica pretendemos dar solución al problema planteado, integrando los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales), competencias, actividades, formas de evaluación que permitan la comprensión de este tema por parte de las y los estudiantes y desarrollando en las y los estudiantes capacidades tales como: perceptuales (observación y relaciones espaciales), de comunicación (argumentación oral, escrita y gráfica) así como las de elaboración de conjeturas, la abstracción y la generalización.

A partir de estos argumentos se pretende implementar el diseño de una nueva propuesta que permita comprender, analizar e interpretar los fenómenos ligados al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra, particularmente de la ecuación cuadrática. Al mismo tiempo que sea una herramienta para el profesor que le contribuya a su labor docente. De esta forma el estudiante puede tener la oportunidad de interactuar con otro tipo de contextos, de situaciones donde se involucren elementos que le permitan tener un buen acercamiento a los objetos matemáticos, de tal manera que pueda tener una mejor comprensión de éstos.

VI.1. Propósitos

- Facilitar el proceso enseñanza - aprendizaje diseñando actividades significativas integradoras que permitan vincular los saberes previos de las y los estudiantes con los objetos de aprendizaje.
- Propiciar el desarrollo de un clima escolar favorable, afectivo, que favorezca la confianza, seguridad y autoestima de las y los estudiantes.
- Motivar el interés de las y los estudiantes a usar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como un instrumento real de comunicación.
- Despertar y mantener el interés y deseo de aprender al establecer relaciones y aplicaciones de las competencias en su vida cotidiana, así como su aplicación y utilidad.
- Ofrecer alternativas de consulta, investigación y trabajo utilizando de manera eficiente las tecnologías de información y comunicación
- Coordinar las actividades de las y los estudiantes ofreciendo una diversidad importante de interacciones entre ellos.
- Implementar el trabajo colaborativo de las y los estudiantes.
- Utilizar diversas actividades y dinámicas de trabajo que estimulen la participación activa de las y los estudiantes en clase.
- Guiar las situaciones de aprendizaje bajo un marco de respeto a la diferencia y de promoción de valores cívicos y éticos.
- Diseñar instrumentos de evaluación del aprendizaje considerando los niveles de desarrollo de cada uno de los grupos que atiende, fomentando la autoevaluación y coevaluación por parte de las y los estudiantes.

VI.2. Competencias

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
3. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

4. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
5. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
7. Mejora la capacidad de pensamiento reflexivo e incorpora al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático.
8. Manifiesta una actitud positiva ante la resolución de problemas y muestra confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
9. Valora las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual.
10. Aplica las competencias matemáticas adquiridas para analizar y comprender la realidad circundante y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.
11. Muestra interés por las actividades relacionadas con la matemática recreativa. Aprender a aprender.

VI.3. Conocimientos previos

Conscientes de la importancia vital que desde el aula se debe conceder a la exploración de los conocimientos previos de las y los estudiantes, y el tiempo que se dedica a su recuerdo, tratamos de desarrollar al comienzo de la unidad, todos aquellos conceptos, procedimientos, etc., que se necesitan para la correcta comprensión de los contenidos posteriores. Este repaso de los conocimientos previos se plantea como resumen de lo estudiado en cursos o temas anteriores.

Entre los conocimientos previos que deben tener las y los estudiantes para lograr que el aprendizaje sea significativo son:

1. Raíz cuadrada. Propiedades.
2. Propiedad del cero.
3. Propiedad distributiva.
4. Propiedad uniforme.
5. Productos notables.
6. Factorización.
7. Funciones lineales.
8. Funciones cuadráticas.
9. Áreas de figuras geométricas.

VI.4. Contenidos

VI.4.1. Contenidos conceptuales

1. Definición.
2. Raíces.
3. Conjunto solución.

VI.4.2. Contenidos procedimentales

1. Métodos de solución.
   1.1. Por factorización.
   1.2. Por completación de cuadrado.
   1.3. Fórmula general.
   1.4. Gráfico.
2. Resolución de problemas.

VI.4.3. Contenidos actitudinales

1. Piensa crítica y reflexivamente.
2. Valoración de la utilidad de las ecuaciones cuadráticas.
3. Realización ordenada y sistemática de los problemas.
4. Valoración del trabajo cooperativo en equipo.

VI.5. Estrategias metodológicas

- Iniciaremos cada clase indagando sobre los saberes previos que tienen las y los estudiantes sobre el contenido a tratar y mediante ejemplos y ejercicios sencillos, haremos que el estudiante recuerde lo ya aprendido y pueda así aprender significativamente los nuevos conocimientos.
- Utilizar conocimientos y experiencias previas para relacionarlos con los nuevos conocimientos, a través de preguntas orales, lluvia de ideas, discusión grupal, etc.
- Potenciaremos el uso por parte de las y los estudiantes de expresiones matemáticas, tanto verbal, gráfica o simbólicamente, para explicar los conceptos y los problemas que se les plantee, así como las relaciones que existen entre unas expresiones y otras.
- Utilizaremos siempre que sea posible las ventajas que nos traen las nuevas tecnologías y que ayudan a un aprendizaje más significativo por parte de las y los estudiantes.
- Motivar a las y los estudiantes explicitando la utilidad de los conocimientos, habilidades, destrezas, etc., que se adquieran y enfocarla hacia el desarrollo de su autonomía y a la consideración positiva hacia el trabajo y esfuerzo personal mediante actividades realizables.
- Atender la diversidad de las y los estudiantes utilizando todas las medidas metodológicas que sean necesarias (desdobles, agrupaciones flexibles, trabajo cooperativo, actividades secuenciadas según el grado de complejidad, actividades de evaluación, actividades individuales y colectivas, uso de las tecnologías de la información y de la comunicación, etc.) que favorezcan el aprendizaje de las y los estudiantes.
- Diseñar situaciones de aprendizaje y solución de actividades alternativas para el aula en la enseñanza - aprendizaje de las “ecuaciones cuadráticas” de modo tal que despierten la curiosidad y el interés de las y los estudiantes en el estudio del tema en mención.
- Asegurar los mecanismos básicos para la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la práctica reiterada tras las explicaciones tanto de la profesora o del

profesor como de aquellos métodos que las y los estudiantes hayan descubierto en la red, fundamentalmente a través de vídeo y presentaciones.

VI.6. Temporización

Los contenidos de las Ecuaciones Cuadráticas lo desarrollaremos en siete bloques de 90 minutos de duración. Debemos de tener presente que de acuerdo a las características de las y los estudiantes y a la habilidad que tiene la profesora o el profesor de enseñar, este tiempo es flexible y se podría emplear más de lo planificado.

La siguiente tabla muestra el tiempo que proponemos para el desarrollo de cada tema, sabiendo que el tiempo destinado es flexible.

No.	Tema	Temporización
1	Definición. Raíces. Conjunto solución.	2 horas clases
2	Métodos de solución: factorización, completación de cuadrados, fórmula general. Propiedades de las raíces.	6 horas clases
3	Método gráfico	2 horas clases
4	Aplicaciones.	4 horas clases
Total		14 horas clases

VI.7. Recursos y/o materiales didácticos

La función de los materiales no es la de dar al profesorado las intenciones educativas, sino ayudarle a llevarlas a la práctica, así la selección de los materiales y recursos para nuestra unidad didáctica debe responder a criterios que tengan en cuenta el contexto educativo, las características de las y los estudiantes y; sobre todo, que estén al servicio de esas intenciones educativas que se persiguen.

1. Papelógrafo.
2. Cartulina.
3. Marcadores.

4. Calculadora.
5. Tijeras.
6. Computadora.
7. Libros.
8. Software Educativo: DERIVE y GEOGEBRA.
9. Internet.
10. Actividades resueltas y pruebas escritas y con las correspondientes explicaciones.
11. Puzzle algebraico.
12. Cuaderno personal y exclusivo de la asignatura.

VI.8. Evaluación

Entendemos la evaluación como un proceso integral, en el que se contemplan diversas dimensiones o vertientes: análisis del proceso de aprendizaje de las y los estudiantes, análisis del proceso de enseñanza y de la práctica docente, y análisis del propio currículo.

La evaluación es un componente primordial en todo proceso de enseñanza – aprendizaje porque a través de ella podemos conocer:

- El nivel de progreso de las y los estudiantes, con relación a las competencias propuestas.
- La adecuación del proceso de enseñanza – aprendizaje así como la de los recursos y/o materiales didácticos utilizados.
- La necesidad de modificar nuestra enseñanza – aprendizaje cuando comprobemos que su efectividad no es la esperada.

La evaluación no debe estar sujeta únicamente a la comprobación del grado de adquisición de los conceptos por parte de las y los estudiantes sino que debe abarcar los tres aspectos inseparables de este proceso educativo, como son conceptos, procedimientos y actitudes.

Cada uno de estos apartados se evaluará a través de la recogida de información diaria y continua sobre el trabajo, la motivación y el esfuerzo personal de las y los estudiantes.

VI.8.1. Aspectos a evaluar

- El progreso del estudiante.
- La adecuación del proceso educativo.
- La eficacia de los recursos y/o materiales didácticos.
- La necesidad de modificación del proceso enseñanza – aprendizaje.
- Contenidos conceptuales.
- Contenidos procedimentales.
- Contenidos actitudinales.

VI.8.2. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación son el referente fundamental para valorar tanto el grado de adquisición de las competencias. Nos hemos formulado los siguientes criterios:

1. Identificar una ecuación cuadrática.
2. Reconocer si un valor determinado es o no solución de una ecuación.
3. Obtiene ecuaciones de segundo grado equivalentes en forma factorizada y/o en forma de binomio al cuadrado de una ecuación dada.
4. Escribir una ecuación que tenga por solución un valor dado.
5. Conocer y utilizar los algoritmos de resolución de ecuaciones cuadráticas.
6. Conocer, según su discriminante, las posibles raíces de una ecuación cuadrática.
7. Conocer la relación existente entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática.
8. Escribir una ecuación cuadrática conociendo sus raíces o soluciones.
9. Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo y comprobar la solución obtenida.
10. Modela y resuelve problemas de aplicación.

VI.8.3. Procedimientos e instrumentos de evaluación

Para llevar a cabo la evaluación es necesario poner atención a la forma de obtener y seleccionar la información relevante, por lo que debemos tener presentes los procedimientos e instrumentos de evaluación que vamos a utilizar, así como unos criterios establecidos que nos regule este proceso.

Los procedimientos de evaluación que utilizaremos en nuestra unidad didáctica son:

1. Observación directa y sistemática.
2. Análisis de tareas.
3. Autoevaluación.
4. Coevaluación.
5. Intercambios orales y pruebas específicas.

En cuanto a los contenidos actitudinales, más difíciles de evaluar, se hará a través de la observación a las y los estudiantes. Se tendrá en cuenta la participación positiva o negativa, su pasividad, la asistencia a clase, el mantenimiento de actitudes de respeto a la asignatura, hacia sus compañeros y compañeras y hacia el profesorado.

Los instrumentos mediante los que se va a obtener la información serán:

- Se realizarán preguntas orales a lo largo del desarrollo de las clases.
- Se propondrán ejercicios, problemas u otro tipo de cuestiones, para realizar en clase o en casa, unos obligatorios y otros voluntarios, que serán corregidos por la profesora o el profesor para detectar posibles errores.
- Algunos contenidos serán tratados a través de distintas herramientas informáticas que también permitirán recoger información relevante.
- Una guía de observación (Véase Anexo No. 1) que nos permitirá evaluar las competencias implicada en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.
- Medición por parte de la profesora o el profesor, tanto a nivel grupal como individual, con las herramientas de que disponemos, del grado de consecución de las competencias indicados en el apartado pertinente de esta unidad didáctica.

VI.9. Planes de clases

Plan de Clase

Fecha: _______________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Identifica ecuaciones cuadráticas.
2. Reconoce cuando un valor es raíz o solución de una ecuación cuadrática.

Tema

Ecuaciones cuadráticas

Contenidos

1. Definición.
2. Raíces o solución.

Introducción

En esta clase introduciremos el concepto de ecuación cuadrática a través de la resolución de problemas.

Plantearemos una serie de actividades que nos permita lograr que las y los estudiantes sean capaces de identificar cantidades conocidas y desconocidas, establecer relaciones entre cantidades a partir de una situación problema e identificar y definir una ecuación cuadrática.

Estas actividades serán realizadas en grupo de cinco estudiantes guiada y supervisada por la profesora o el profesor.

Actividades de Iniciación

Rememorar:

- Ecuación.
- Ecuación lineal.
- Raíz o solución de una ecuación lineal.
- Conjunto solución de una ecuación lineal.
- Propiedad distributiva.
- Propiedad uniforme.
- Área.

Actividades de Desarrollo

Lea atentamente el siguiente problema y realice las actividades propuestas.

> *Un apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho. ¿Cuáles son las medidas de las dimensiones del apartamento si su área es 105* m^2*?*

Actividad 1. Responda las siguientes interrogantes.

1. Haga una figura que ilustre la situación descrita en el problema.
2. Escriba las cantidades o datos conocidos y los desconocidos del problema.
3. Indique cuántos metros más tiene la medida del largo del apartamento en relación con la medida del ancho.
3. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 5 m. Encuentra la medida del largo.
4. Si la medida del ancho del apartamento corresponde a 6 m. Encuentra la medida de su largo.
5. Indique si las dimensiones del apartamento encontradas en los puntos 3 y 4, corresponden a las condiciones del problema (área del apartamento dada). Explique su respuesta.

6. Complete la siguiente tabla de acuerdo a las condiciones del problema:

Medida del ancho del apartamento	4	5	6	7	8	9
Medida del largo del apartamento	12			15		
Área del apartamento		65	84			

7. De acuerdo a la tabla, ¿cuáles son las dimensiones del apartamento que cumplen “todas” las condiciones del problema?
8. Si x es la longitud del ancho del apartamento, escriba una expresión que permita calcular la medida del largo del apartamento en función de x.

Actividad 2. Modelo el problema

1. Teniendo en cuenta lo realizado hasta el momento, complete la siguiente tabla:

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
Medida del ancho del apartamento	x
Medida del largo del apartamento	
Área del apartamento	
Valor del área del apartamento	

2. De la tabla deduzca cuál es la expresión que nos permite calcular la longitud del ancho del apartamento.
3. Encuentre una ecuación equivalente de la ecuación obtenida en 2, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Las expresiones obtenidas en 2 y 3:

$$x^2 + 8x = 105 \quad \text{y} \quad x^2 + 8x - 105 = 0$$

se conocen con el nombre de ecuación cuadrática o de segundo grado.

En términos generales, una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquella que puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son los coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los números reales y $a \neq 0$.

4. De acuerdo a lo anterior señale cuales son los coeficientes a, b y c de la ecuación obtenida en el punto 3.

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas o incompletas dependiendo de que falte o no algún término. Lógicamente, el término ax^2 no puede faltar pues entonces no sería una ecuación de segundo grado, aunque el término bx o el término c sí que pueden faltar en una ecuación concreta.

$$\text{Ecuación cuadrática}\begin{cases}\text{Completa} \longrightarrow ax^2 + bx + c = 0\\[2ex] \text{Incompleta}\begin{cases}ax^2 = 0\\ ax^2 + bx = 0\\ ax^2 + c = 0\end{cases}\end{cases}$$

5. De tres ejemplos de ecuaciones cuadráticas completas.
6. De dos ejemplos de ecuaciones cuadráticas incompletas en cada caso.

Las siguientes actividades permitirán a las y los estudiantes establecer la relación entre figuras geométricas y expresiones algebraicas e identificar expresiones algebraicas equivalentes, además establecerán la relación entre las expresiones del área y las dimensiones de una figura geométrica.

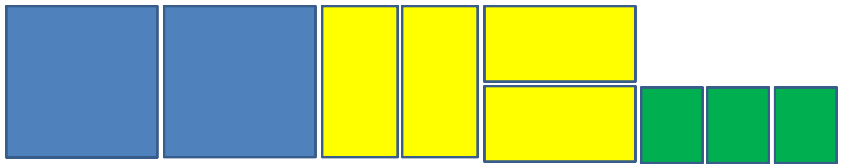
Se pretende que las y los estudiantes logren identificar otros sistemas de representación asociados a las expresiones y ecuaciones cuadráticas, como son los geométricos, a partir de la manipulación de las fichas del Puzzle Algebraico, y utilizarlo para resolver problemas.

Teniendo en cuenta la descripción del Puzzle Algebraico presentada anteriormente realice las siguientes actividades:

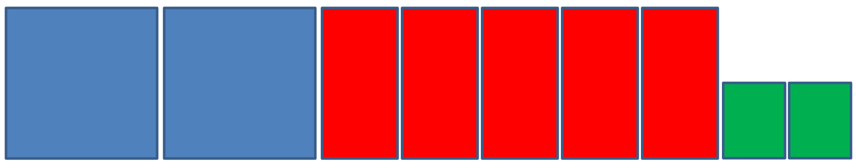
Actividad 3.

1. Escriba la expresión algebraica que permita calcular el área total representada en cada conjunto de fichas.

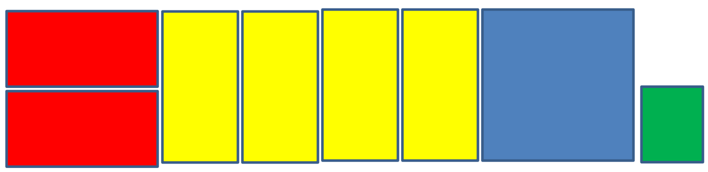
   (a)



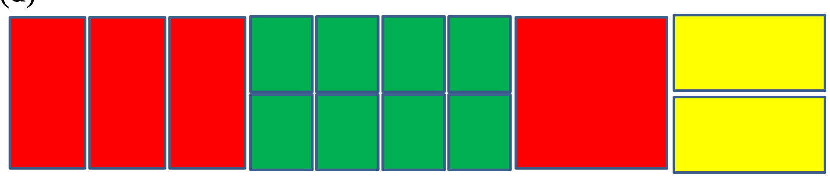
   (b)



   (c)



   (d)



2. Compare estas expresiones con la definición de ecuación cuadrática.
3. Utilizando las fichas del Puzzle Algebraico:

   (a) Represente la expresión obtenida en el punto 3 de la actividad 2.

   (b) Representen dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos lineales.

   (c) Representen dos combinaciones de fichas x^2 y con fichas de términos constantes.

Todas las expresiones obtenidas en el punto 3 de la actividad 4 son expresiones cuadráticas de la forma

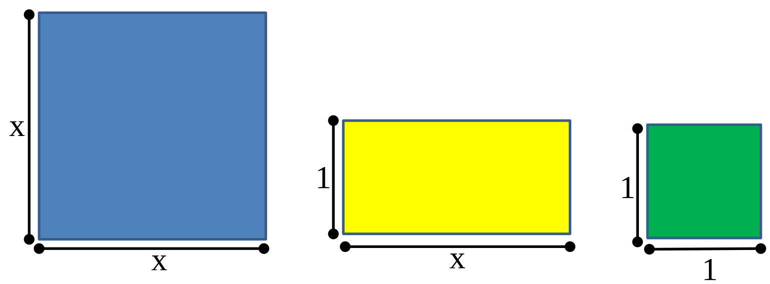
$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son coeficientes numéricos pertenecientes al conjunto de los números reales con $a \neq 0$.

Actividad 4.

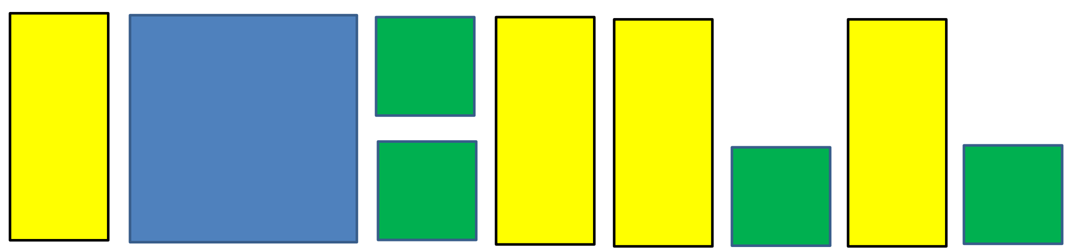
Lea atentamente el siguiente problema y realice las actividades propuestas.

> *Elena quiere arreglar su apartamento y decide empezar embaldosando el baño, para ello contrata un albañil que le haga el trabajo. Para este arreglo Elena compra baldosas con las siguientes características.*



Baldosa tipo a | Baldosa tipo b | Baldosa tipo c

1. Utilizando el Puzzle Algebraico ayuda al albañil a hacer una organización que permita utilizar todas las baldosas siguientes para enchapar una de las paredes del baño de forma cuadrada (tenga en cuenta las reglas del Puzzle Algebraico).



   (a) Dibuja por lo menos dos representaciones diferentes.
   (b) Escribe una expresión algebraica para cada representación.
   (c) Escriba la expresión que representa las dimensiones de cada cuadrado.

2. Indique la relación que existe entre las expresiones del área de cada cuadrado, representado en el punto anterior y las expresiones de las dimensiones de los cuadrados. Escriba esta relación simbólicamente y explique.

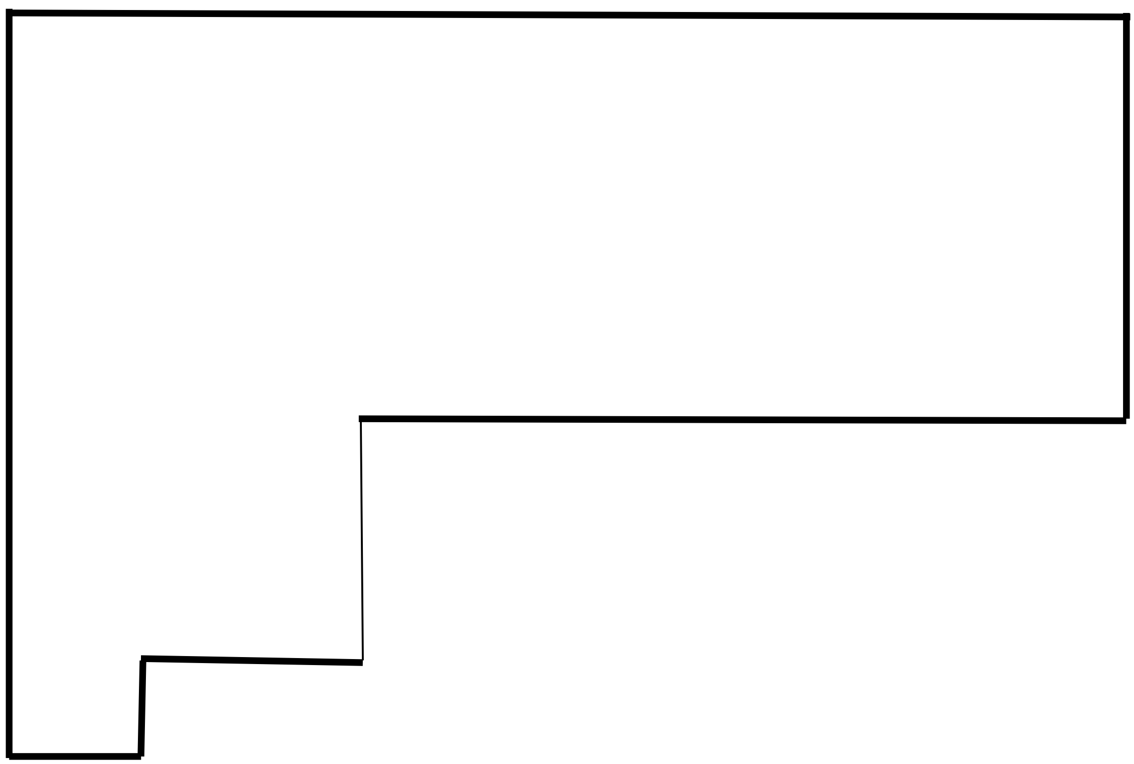
3. El albañil se da cuenta que el área de la pared es de 25 dm^2. Encuentra en la expresión que halló en el literal c del punto, el valor de las dimensiones de todas las baldosas.

4. Si Elena tiene la expresión que permite calcular las dimensiones de las baldosas cuando el área de la pared mide 16 dm^2.
   (a) Utiliza el Puzzle Algebraico para ayudar a Elena a calcular esos valores.
   (b) Explica como calcularon los valores de las dimensiones de las baldosas.

Actividades de Culminación

Resuelve el siguiente problema:

El albañil debe enchapar la siguiente superficie de pared, cuya área es de 367 cm^2, con las baldosas (representadas con las fichas del Puzzle Algebraico), sin necesidad de cortar ninguna.



1. Indique cuántas baldosas tipo a, tipo b y tipo c, se necesita para enchapar la pared y cómo se acomodarían.
2. Escribe cuál es la ecuación que corresponde al área de la pared enchapada con las baldosas.
3. Determine las dimensiones de cada una de las baldosas de acuerdo con la ecuación del punto 2.
4. Determine cuál es la medida del perímetro de la pared.

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase

Fecha: _______________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Obtiene ecuaciones cuadráticas equivalentes en forma factorizada mediante el empleo del Puzzle Algebraico.
2. Resuelve ecuaciones cuadráticas por factorización.
3. Obtiene expresiones algebraicas más simpes mediante la construcción de rectángulos y cuadrados con el Puzzle Algebraico.
4. Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de métodos y procedimientos algebraicos.

Tema

Ecuaciones cuadráticas.

Contenidos

1. Métodos de solución: Por factorización.

Actividades de Iniciación

Se les plantearán las siguientes preguntas a las y los estudiantes para que la discutan y analicen en grupo.

1. ¿A qué se le llama raíz o solución de una ecuación cuadrática?
2. ¿Qué significa resolver una ecuación cuadrática?
3. ¿Qué es factorizar?

Actividades de Desarrollo

1. Método de solución: Por factorización.

A partir del conjunto de piezas del puzzle que representa una expresión de 2º grado podemos construir rectángulos y/o cuadrados. El cálculo del área de estas figuras nos permitirá obtener expresiones más sencillas (en forma factorizada o en forma de binomio al cuadrado) equivalentes (idénticas) a la expresión general de segundo grado inicial representada.

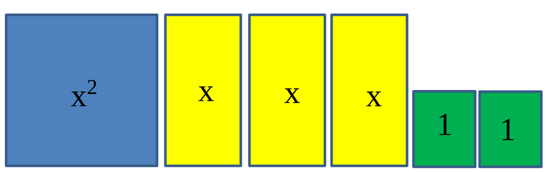
Para fundamentar y describir este proceso de obtención de expresiones equivalentes desarrollaremos dos ejemplos.

Ejemplo 1

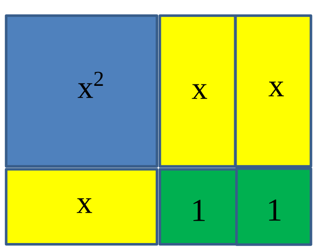
Proceso de obtención de una expresión de segundo grado equivalente a $x^2 + 3x + 2$ en forma factorizada a partir de la construcción de un rectángulo, con el conjunto de piezas del puzzle que la representa.

Solución

(a) Seleccionamos las piezas que representan la expresión $x^2 + 3x + 2$.



(b) Construimos un rectángulo, eligiendo entre varias combinaciones posibles el siguiente:

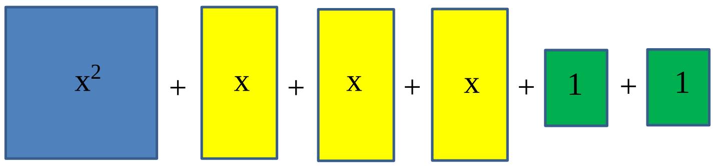


(c) Calculamos el área del rectángulo construido mediante dos procedimientos diferentes:

c.1. Cálculo del área a partir de sus componentes:

El área del rectángulo es igual a la suma de las áreas de las piezas que lo forman:

$$\boxed{\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{Suma área de las piezas}}$$



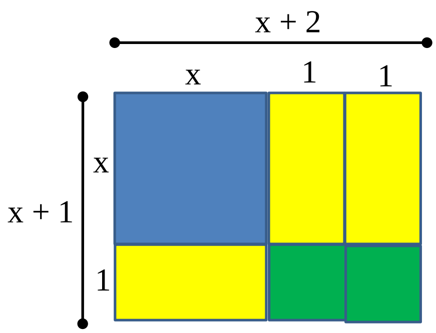
$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = x^2 + x + x + x + 1 + 1$

Reduciendo términos, obtenemos: $x^2 + 3x + 2$

c.2. Cálculo del área a partir de sus dimensiones:

El área del rectángulo es el producto de las dimensiones de su base por su altura:

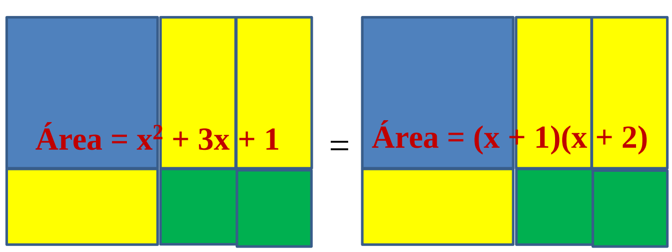
$$\boxed{\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{Largo} \times \text{Ancho}}$$



$$\boxed{\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{Suma área de las piezas}}$$

Conclusión

Cómo el rectángulo es el mismo y su área única, las dos expresiones del área son iguales.



$$\boxed{x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x + 2)}$$

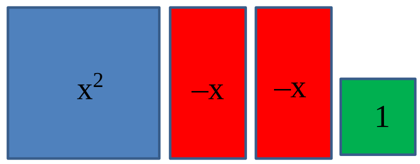
A partir de una expresión de segundo grado en forma general hemos obtenido una expresión equivalente más sencilla, en forma factorizada, mediante la construcción de un rectángulo.

Ejemplo 2

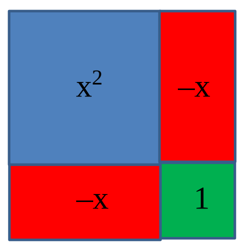
Proceso de obtención de una expresión 2º grado equivalente a $x^2 - 2x + 1$ en forma de binomio al cuadrado a partir de la construcción de un cuadrado, con el conjunto de piezas del puzzle que la representa.

Solución

(a) Seleccionamos las piezas que representan la expresión $x^2 - 2x + 1$.



(b) Construimos un cuadrado, eligiendo entre varias combinaciones posibles el siguiente:

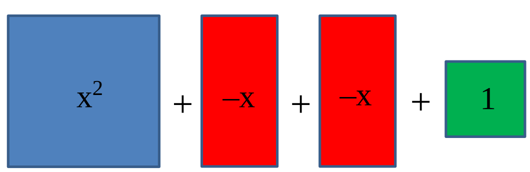


(c) Calculamos el área del rectángulo construido mediante dos procedimientos diferentes:

c.1. Cálculo del área a partir de sus componentes:

El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de las piezas que lo forman:

$$\boxed{\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{Suma área de las piezas}}$$



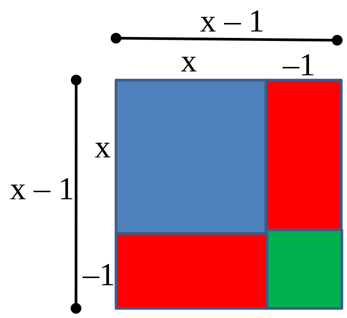
$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = x^2 - x - x + 1$

Reduciendo términos, obtenemos: $x^2 - 2x + 1$

c.2. Cálculo del área a partir de sus dimensiones:

El área del cuadrado es el cuadrado de la longitud de sus lados:

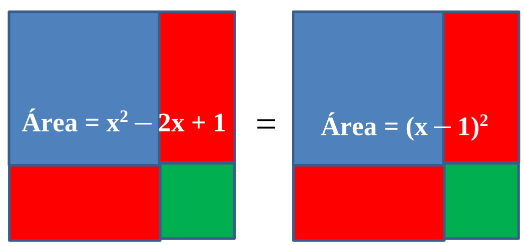
$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = (\text{Lado})^2$$



$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

Conclusión

Cómo el cuadrado es el mismo y su área única, las dos expresiones del área son iguales.



$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

A partir de una expresión de segundo grado en forma general hemos obtenido una expresión equivalente en forma de binomio al cuadrado (sin término independiente), mediante la construcción de un cuadrado.

El método de resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico está basado en la trasformación algebraica de la expresión general de la ecuación que se quiere resolver, en una ecuación equivalente más sencilla con expresión factorizada o en forma de binomio al cuadrado, con o sin término independiente, obtenida de la medida de las dimensiones de un rectángulo o un cuadrado, construido a partir de la colección de piezas del puzzle algebraico que representa la expresión algebraica de la ecuación de segundo grado inicial. Las soluciones de la ecuación, si las hubiese, se obtienen aplicando a la ecuación equivalente procedimientos algebraicos "directos" de resolución (como el del producto de dos factores cuyo resultado es cero o el criterio de la raíz).

Actividad 3. Resolviendo el problema.

En relación al problema planteado en la primera clase.

> *Un apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho. ¿Cuáles son las medidas de las dimensiones del apartamento si su área es 105 m^2?*

La profesora o el profesor resolverán el problema del apartamento, encontrando la solución de éste hallando el valor que corresponde a la medida del ancho del apartamento, así:

$x^2 + 8x - 105 = 0$	
$(x + 15)(x - 7) = 0$	Paso 1
$x + 15 = 0$, o bien, $x - 7 = 0$	Paso 2
$x = -15$, o bien, $x = 7$	Paso 3

1. ¿Cuál de los valores de x obtenido en el paso 3 corresponden a la medida del ancho del apartamento y explique su respuesta.
2. Qué operación se realizó en el paso 1 del problema y por qué se puede hacer.
3. Qué propiedad utilizó en el paso 2.
4. Qué propiedad se aplicó en el paso 3.

Actividades de culminación

1. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:
   (a) $x^2 - 6x + 8 = 0$
   (b) $x^2 - 5x = 0$
   (c) $6x^2 - x - 15 = 0$
   (d) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
2. Represente cada expresión cuadrática con las piezas del Puzzle Algebraico.

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase

Fecha: _______________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Resuelve ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados.

Tema

Ecuaciones cuadráticas.

Contenidos

1. Métodos de solución.
   1.1. Por completación de cuadrados.
   1.2. Fórmula general.
2. Propiedades de las raíces.

Actividades de Iniciación

Seleccione estudiantes al azar para que respondan las siguientes preguntas:

1. Dadas las siguientes ecuaciones:

   (a) $3x - 7 = 5x^2$

   (b) $\sqrt{5}x - 2x^2 = 0$

   (c) $\frac{2}{x^2} - 2x + 1 = 0$

   Diga cuáles son ecuaciones cuadráticas y cuáles no. Explique su respuesta.
2. ¿Qué significa resolver una ecuación?
3. Es 3 raíz o solución de $x^2 - 5x + 3 = 0$. Justifique su respuesta.
4. Resuelva $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

Actividades de Desarrollo

1. Métodos de solución.

1.1. Por completación de cuadrados.

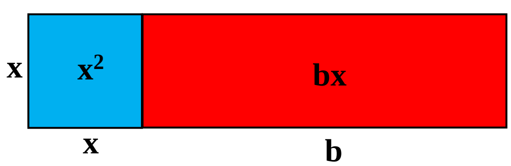
Hay veces que una ecuación cuadrática es imposible de factorizar. Para resolver ese tipo de ecuaciones cuadráticas, son necesarias otras estrategias "Completar el cuadrado" es una de ellas. Convierte un polinomio en un trinomio cuadrado perfecto, el cual es más fácil de graficar y resolver.

Las siguientes actividades serán realizadas por las y los estudiantes guiadas y orientadas por la profesora o el profesor.

1. Qué significa "Completar el Cuadrado"

"Completar el Cuadrado" consiste en convertir una expresión que no es un cuadrado y convertirlo en uno.

2. Utilice las piezas del Puzzle Algebraico para represente geométricamente el binomio $x^2 + bx$.

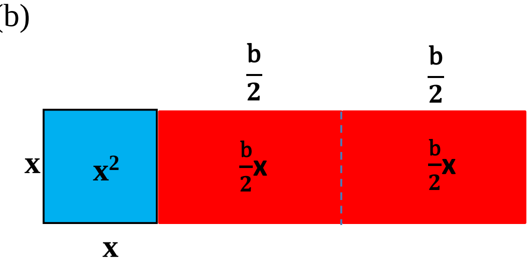


$x(x + b) = x^2 + bx$

3. Cómo convertiría el rectángulo de 2 en un cuadrado.

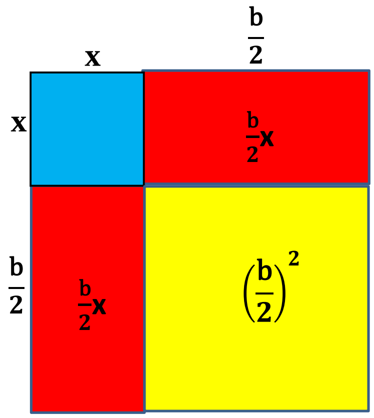
(a) Dividir el rectángulo rojo con área bx en dos rectángulos iguales con área $\frac{b}{2}x$.

(b)



(c) ¿Cambió el área roja?

(d) Rote y cambie la posición de uno de ellos. ¿Cambió el tamaño del área roja?

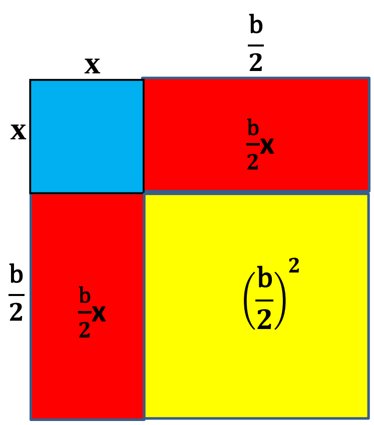


(e) Obtenga la expresión correspondiente al área del cuadrado.

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Los rectángulos rojos ahora forman dos lados de un cuadrado, mostrado en amarillo. El área de ese cuadrado es la longitud de los rectángulos rojos elevada al cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

(f) Si sumo la región amarilla a las regiones azul y roja, qué figura se obtiene?



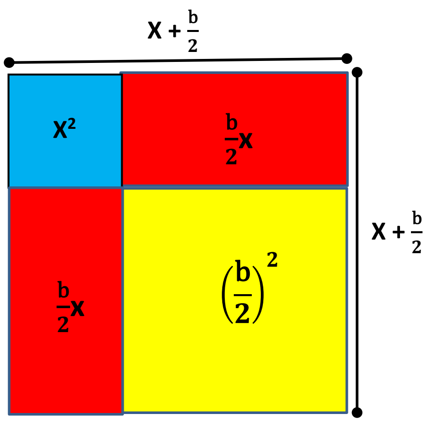
(g) ¿Cuál es la longitud de los lados del nuevo cuadrado?

(h) ¿Cuál es el área del nuevo cuadrado?

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Lo que se ha hecho es completar un cuadrado al sumarle al binomio $x^2 + bx$ la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ hemos formado un cuadrado de lado $x + \frac{b}{2}$.

O sea,



Note que el área del cuadrado puede ser escrita de dos maneras: $\left(\boldsymbol{x} + \frac{b}{2}\right)^2$ **y** $x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Para completar el cuadrado en una expresión de la forma $x^2 + bx$, sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ y la expresión se convierte en $x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\boldsymbol{x} + \frac{b}{2}\right)^2$.

En conclusión, el método consiste en transformar la ecuación cuadrática estándar $ax^2 + bx + c = 0$ en la forma $(x + A)^2 = B$, donde A y B son constantes.

Pasos para realizar la completación de cuadrados.

- Dejar los términos que contienen la variable en el lado izquierdo de la ecuación y llevar el término constante al lado derecho de la ecuación.
- Si el coeficiente de x^2 es diferente de 1, dividir cada término de la ecuación por dicho coeficiente.
- Completar al cuadrado, teniendo en cuenta que se debe sumar la misma cantidad a ambos lados de la ecuación. La cantidad a suma es $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.
- Resolver la ecuación.
- Verificar la ecuación.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación cuadrática $x^2 + 12x - 3 = 0$.

Solución

Reescribimos la ecuación dada: $x^2 + 12x = 3$.

En este caso, $b = 12$. Luego, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2 = 36$.

Sumamos 36 a ambos miembros, y se tiene,

$x^2 + 12x + 36 = 3 + 36 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 39$

$\Rightarrow (x + 6)^2 = 39$ ¿Por qué?

$\Rightarrow x + 6 = \pm\sqrt{39}$ ¿Por qué?

$\Rightarrow x = -6 \pm\sqrt{39}$ ¿Por qué?

Por lo tanto, las raíces o soluciones son: $x_1 = -6 + \sqrt{39}$ y $x_2 = -6 - \sqrt{39}$.

1.2. Fórmula general

Hasta el momento hemos deducido dos métodos para resolver una ecuación cuadrática. El siguiente método es el de la fórmula general o fórmula cuadrática. Esta fórmula es muy útil para resolver ecuaciones cuadráticas que son difíciles o imposibles de factorizar, y usarla puede ser más rápido que completar el cuadrado. La fórmula cuadrática puede ser usada para resolver cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Deducción de la fórmula cuadrática

Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Reescribir la ecuación dada a la forma

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividir cada término de la ecuación anterior entre a (¿Por qué?)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros de la igualdad anterior

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Factorizando y realizando la operación indicada, se tiene

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{4c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

Por suma de fracciones

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Seguidamente

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Luego

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(Por qué)}$$

Despejando x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Simplificando

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

que es la fórmula general o cuadrática.

En la fórmula general o cuadrática aparece la expresión $\sqrt{b^2-4ac}$. Esa raíz cuadrada sólo existirá cuando el radicando b^2-4ac sea positivo o cero. El radicando b^2-4ac se denomina discriminante y se simboliza por Δ. El número de soluciones (raíces) depende del signo de Δ y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

Entonces, estudiando el signo del discriminante (una vez resuelto), podemos saber el número de soluciones que posee:

Si Δ es positivo ($\Delta > 0$), la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

Si Δ es negativo ($\Delta < 0$), la ecuación no tiene solución real.

Si Δ es cero, la ecuación tiene una solución real doble, o también una raíz de multiplicidad 2.

Pasos a seguir para resolver una ecuación cuadrática usando la fórmula general:

1. Transforma la ecuación a la forma estándar ($ax^2 + bx + c = 0$)
2. Identificar los coeficientes numéricos a, b y c.
3. Sustituir los valores de los coeficientes en la fórmula cuadrática.
4. Simplifica lo más posible.
5. Usar el signo ± que le antecede al radical para separar la solución en dos valores, uno en el que la raíz cuadrada se suma, y el otro donde la raíz cuadrada se resta.
6. Simplificar ambos valores para obtener las posibles soluciones.

Ejemplo

Resolver la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$ usando la fórmula general.

Solución

La ecuación está dada en la forma estándar. Identificamos los coeficientes a, b y c.

$$a = 2, \quad b = 5, \quad c = 3$$

Sustituimos dichos valores en

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y obtenemos

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

Efectuando operaciones

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5+1}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ y } x_2 = \frac{-5-1}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

2. Propiedades de las raíces

La fórmula general o cuadrática nos permite obtener las raíces o soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, en el caso de que existan. Ellas son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Obtenga:

(a) $S = x_1 + x_2$, y

(b) $P = x_1 \cdot x_2$

A las relaciones S y P se les llama relaciones de Cardano – Vieta.

(c) Relacione S y P con los términos de la ecuación que se obtiene de la forma estándar de la ecuación cuadrática al dividir sus términos por a.

(d) A qué conclusión se llega.

La relación de Cardano – Vieta permite encontrar la ecuación de segundo grado conocidas sus raíces x_1 y x_2.

Dada $ax^2 + bx + c = 0$ y dividiendo cada término de ella por a, obtenemos $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, o lo que es lo mismo, $x^2 + S\,x + P = 0$. Por lo tanto, toda ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede factorizar de la forma $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática dada.

Ejercicio

Factorice la ecuación cuadrática $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Utilice la relación Cardano – Vieta.

Solución

Encuentre las soluciones de la ecuación. Utilice la fórmula general. Las raíces que vas a obtener son $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. Luego, la factorización de ella es: $2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$. Compruebe.

Actividades de Culminación

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrado.

(a) $x^2 + 8x - 48 = 0$

(b) $5x^2 + 4 = -12x$

2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por la fórmula general.

(a) $2x^2 + 12x - 16 = 0$

(b) $-5x^2 - 11 = 3x$

3. Factorice las siguientes ecuaciones cuadráticas.

(a) $9x^2 + 6x + 10 = 0$

(b) $2x^2 + 3x – 5 = 0$

Compruebe en ambos casos.

4. Utilice DERIVE para comprobar lo realizado.

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase

Fecha: ________________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Identificar el número de soluciones de ecuaciones cuadráticas.
2. Resuelve ecuaciones cuadráticas aplicando el método gráfico.
3. Aplica el software GEOGEBRA como recurso para resolver ecuaciones cuadráticas.

Tema

Ecuaciones cuadráticas.

Contenido

Método gráfico.

Actividades de Iniciación

La profesora o el profesor seleccionarán tres estudiantes al azar para que respondan las siguientes preguntas:

1. Expliquen en qué consiste cada uno de los métodos estudiados para resolver ecuaciones cuadráticas.
2. Expliquen las relaciones de Cardano - Viena.
3. Cómo se factoriza una ecuación cuadrática.
4. ¿Cuál es la ecuación funcional de una función cuadrática?
5. Geométricamente, ¿qué significan los ceros de una función cuadrática?
6. ¿Cuál es el gráfico de una función cuadrática?
7. ¿Cómo se obtiene el vértice de una función cuadrática?

Actividades de Desarrollo

Anteriormente aprendimos a graficar funciones cuadráticas. Observamos que al encontrar los interceptos en el eje x de una parábola es importante porque estos nos dicen dónde la gráfica intercepta el eje de las x, y esto nos permite encontrar el vértice de la parábola. Cuando se nos pide encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, básicamente se nos pide encontrar los interceptos con el eje x de la función cuadrática.

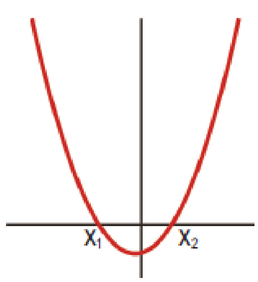
Encontrar los interceptos en x de una parábola también significa encontrar las raíces o ceros de la función.

A partir de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, creamos la función: $y = ax^2 + bx + c$. Vamos a graficar esta función y después vamos a encontrar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x, porque precisamente en el eje x, $y = 0$, y se obtiene la ecuación cuadrática.

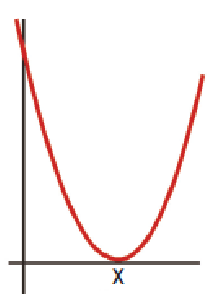
Complete:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \text{Tiene dos soluciones reales distintas, si } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \text{Tiene una solución real doble, si } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \text{No tiene una solución real, si } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

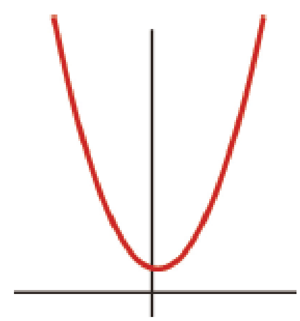
Gráficamente, ¿cómo representan que una ecuación cuadrática tenga dos soluciones distintas, una solución doble y no tenga solución real?



Dos soluciones distintas



Una solución doble


No tiene solución

¿Qué otra situación gráfica puede presentarse?

Todas las ecuaciones cuadráticas generan curvas, éstas pueden ser como la forma de un cable entre poste y poste (llamada catenaria), la trayectoria parabólica que sigue la bala de un cañón después de ser disparado, y otras muchas. Es importante que nuestras y nuestros estudiantes tengan una idea general de lo que representan las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado; por ello es muy conveniente tabularlas y graficarlas.

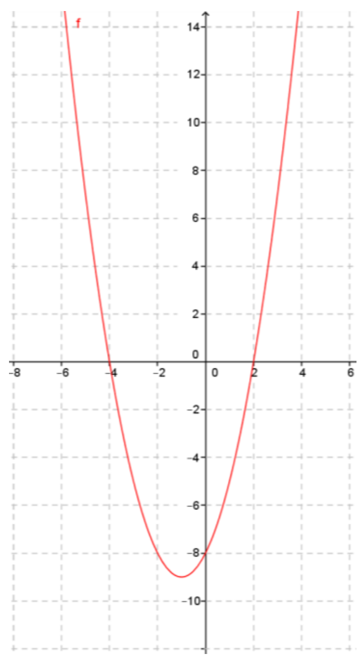
Ilustraremos el método gráfico con la realización de tres ejemplos.

Ejemplo

Resolver gráficamente la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Solución

- ¿Por qué resolver la ecuación cuadrática dada significa encontrar los ceros o raíz de la función cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$?
- ¿Hacia dónde se abre la parábola? ¿por qué?
- ¿Cómo podemos determinar que la parábola corta al eje x?
- ¿Cuál es el vértice de la parábola?
- Trace su gráfico.

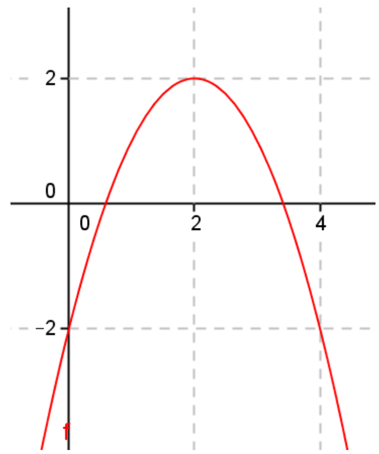


Ejemplo

Resolver gráficamente la ecuación $-x^2 + 4x - 2 = 0$.

Solución

Para resolver gráficamente la ecuación cuadrática dada, debemos auxiliarnos del gráfico de la función $y = -x^2 + 4x - 2$, si el gráfico corta al eje x, quiere decir que ella posee ceros y son las soluciones de la ecuación cuadrática.



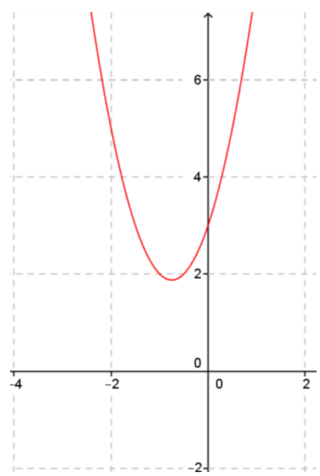
En este caso, el gráfico corta al eje x en dos puntos, la coordenada de esos puntos son las soluciones de la ecuación cuadrática dada. ¿Encuentren las raíces?

Ejemplo

Resolver gráficamente la ecuación $2x^2 + 3x + 3 = 0$.

Solución

Trace el gráfico de la función $y = 2x^2 + 3x + 3$ con el GEOGEBRA. Su gráfico es,



¿Tiene solución o no la ecuación cuadrática? Explique su respuesta.

Actividades de Culminación

Con el auxilio del software GEOGEBRA determine si las siguientes ecuaciones cuadráticas son solubles. Explique su respuesta. Utilice el discriminante para comprobar los resultados.

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

(c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(d) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase

Fecha: _______________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Utilizar las ecuaciones de segundo grado como herramienta para resolver problemas.
2. Entiende y aplica el lenguaje algebraico como un recurso expresivo, con sus elementos y sus normas.
3. Expresa ideas y conclusiones con claridad.

Tema

Ecuaciones cuadráticas.

Contenido

Aplicaciones.

Actividades de Iniciación

1. Cuáles son los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.
2. Explica brevemente cada uno de los métodos de solución.
3. Exprese en palabras el teorema de Pitágoras.

Actividades de Desarrollo

Las ecuaciones cuadráticas tienen una variedad de aplicaciones en la física, la ingeniería, la economía, el diseño, entre otras. Dos características de la ecuación cuadrática que la hacen adecuada para aplicarse en el mundo real son que su gráfica tiene una forma parabólica, que es el camino recorrido por un proyectil en vuelo, y que su potencia más alta sea 2, lo que la hace muy ventajosa para calcular áreas bidimensionales.

La profesora o el profesor explicarán el siguiente esquema conceptual: Resolución de problemas. Pasos a seguir.

Resolución de problemas

pasos a seguir

Comprendo el problema

- Lea atentamente el enunciado
- Representa los datos esquemáticamente
- Si el problema es geométrico es recomendable hacer un dibujo

Traza un plan para su resolución

Realiza un esquema donde se vea cuáles son los datos conocidos y cuáles las incógnitas

Analiza cuáles son las relaciones que, en el enunciado, se establecen entre datos e incógnitas

Exprese algebraicamente las relaciones entre datos e incógnitas

Resuelve las ecuaciones

Resuelve las ecuaciones

- La solución que obtuviste, ¿es lógicamente posible?
- La solución que obtuviste, ¿es lógicamente posible?
- Analiza si puedes realizar alguna comprobación numérica

Ejemplo 1

Mensualmente una compañía puede vender x unidades de cierto artículo a p córdobas cada uno, en donde la relación entre p y x (precio y número de artículos vendidos) está dada por la siguiente ecuación de demanda: $p = 1{,}400 - 40x$. ¿Cuántos artículos debe vender para obtener unos ingresos de 12,000 córdobas?

Solución

Partimos de la siguiente ecuación de economía.

$$\text{Ingreso} = \text{Precio de venta} \times \text{Número de artículos vendidos}$$

Datos conocidos:

Ingreso: $I = 12{,}000$ córdobas

Precio de venta: $p = 1{,}400 - 40x$

Dato desconocido (incógnita):

Número de artículos vendidos: x

Sustituimos estos datos en la ecuación de economía, y nos resulta

$$12{,}000 = (1{,}400 - 40x)x$$

Efectuando el producto indicado que está al lado derecho de la ecuación anterior:

$$12{,}000 = 1{,}400x - 40x^2$$

Escribimos la ecuación en la forma estándar por lo que hacemos uso de la trasposición y nos queda

$$40x^2 - 1{,}400x + 12{,}000 = 0$$

Dividimos cada término de la ecuación por 40:

$$x^2 - 35x + 300 = 0$$

Usamos el método por factorización para resolver la ecuación

$$(x - 20)(x - 15) = 0$$

Igualado a cero (0) cada factor, tenemos

$$x - 20 = 0 \;\text{ y }\; x - 15 = 0$$

Lo que resulta

$$x = 20 \;\text{ y }\; x = 15$$

que son las soluciones del problema. Compruebe los resultados obtenidos.

Ejemplo 2

Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área aumenta en 104 cm^2. Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

Solución

1. Sea x el lado del cuadrado. El área es $S = x^2$.
2. Si se aumenta en 4 cm el lado de cuadrado, $x + 4$, su área es $(x + 4)$.
3. Al hacer la transformación, el área aumente en 104 cm^2; es decir, $x^2 + 104 = (x + 4)^2$
4. Resolviendo la ecuación de 3.
5. $x^2 + 104 = (x + 4)^2 \Rightarrow x^2 + 104 = x^2 + 8x + 16$

$$\Rightarrow 104 = 8x + 16$$
$$\Rightarrow 8x = 88$$
$$\Rightarrow x = 11$$

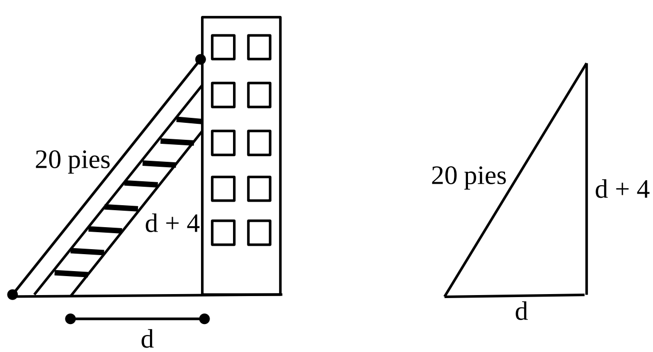
6. El perímetro del cuadrado inicial: $P = 4x = 3(11) = 44$ cm
7. El área del cuadrado inicial: $S = x^2 = (11)^2 = 121$ cm^2

Ejemplo 3

Una escalera se reclina contra un edificio. La escalera tiene 20 pies de largo. La distancia al tope de la escalera es 4 pies más grande que la distancia de la base de la escalera al edificio. Encuentre la distancia de la base de la escalera al edifico y la distancia de la base del edificio al tope de la escalera.

Solución

Hacemos un dibujo que nos ilustre la situación planteada en el problema. Llamamos d a la distancia de la base de la escalera al edificio y d + 4 de la base del edificio al tope de la escalera.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 + (d + 4)^2 = (20)^2$$

Desarrollando los cuadrados:

$$d^2 + d^2 + 8d + 16 = 400$$

Obteniendo la forma estándar:

$$2d^2 + 8d – 384 = 0$$

Dividiendo cada término de la ecuación por 2:

$$d^2 + 4d – 192 = 0$$

Factorizando:

$$(d + 16)(d – 12) = 0$$

Igualando a cero cada factor:

$$d + 16 = 0, \text{ o bien } \; d – 12 = 0$$

Trasponiendo término:

$$d = –16, \text{ o bien } \; d = 12$$

Tomamos $d = 12$ y rechazamos $d = –16$ (Por qué).

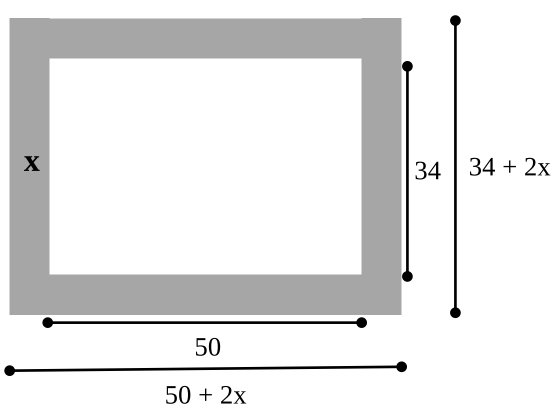
Entonces, la distancia de la base de la escalera al edificio es 12 pies, y la distancia de la base del edificio al tope de la escalera es $12 + 4 = 16$ pies.

Ejemplo 4

Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de acho está rodeado por un camino de arena uniforme. Hallar la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

Solución

Hacemos un dibujo de la situación descrita en el enunciado del problema.



Sean:

x el ancho del camino de arena.

El área del camino es: 540 m^2

Para el rectángulo mayor:

Largo: $50 + 2x$;

Ancho: $34 + 2x$

Área: $(50 + 2x)(34 + 2x)$

Para el rectángulo menor:

Largo: 50

Ancho: 34

Área: 50×34

Área del camino = Área del rectángulo mayor × Área del rectángulo menor

Entonces, haciendo las sustituciones correspondientes, tenemos:

$$(50 + 2x)(34 + 2x) - 50 \times 34 = 540$$

Realizando las operaciones indicadas, tenemos:

$(50 + 2x)(34 + 2x) - 50 \times 34 = 540 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1700 + 100x + 68x + 4x^2 - 1700 = 540$

$\Rightarrow 1700 + 100x + 68x + 4x^2 - 1700 = 540$

$\Rightarrow 4x^2 + 168x = 540$

$\Rightarrow 4x^2 + 168x - 540 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 42x - 135 = 0$

Factorizando:

$$(x + 45)(x - 3) = 0$$

Igualando a cero cada factor y despejando, se tiene:

$$x = -45, \text{ o bien } x = 3$$

Por lo tanto la anchura del camino es 3 metros.

Ejemplo 5

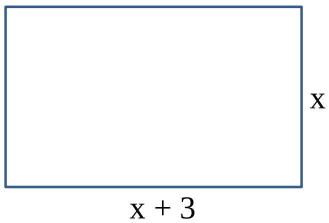
El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala.

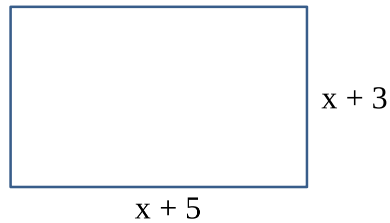
Solución

El largo y el ancho son diferentes.

Ancho: x | Ancho: x + 3

Largo: x + 3 | Largo: x + 3 + 2 = x + 5





Área original de la sala: $A_O = x(x + 3)$

Área de la nueva sala: $A_N = (x + 5)(x + 3)$

Área de la nueva sala es el doble del Área original de la sala: $A_N = 2A_O$

Entonces, sustituyendo los valores correspondientes, se tiene:

$$(x + 5)(x + 3) = 2x(x + 3)$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando, se tiene:

$$(x + 5)(x + 3) = 2x(x + 3) \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = 2x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

Factorizando

$$(x - 5)(x + 3) = 0$$

Por la propiedad uniforme

$$x - 5 = 0, \text{ o bien, } x + 3 = 0$$

Despejando

$$x = 5, \text{ o bien, } x = -3$$

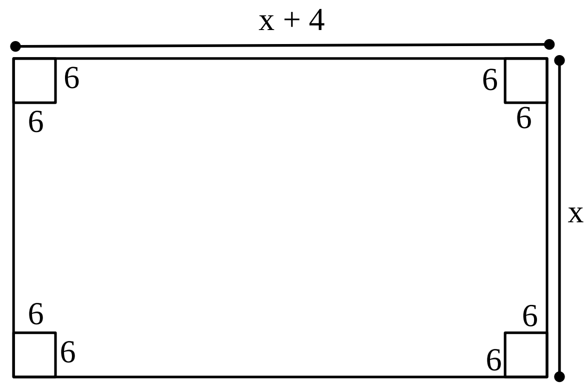
La solución $x = -3$ se descarta, ya que x es el ancho de la sala y no puede ser negativo. Se toma como única respuesta que el ancho original (x) es 5 metros. El largo inicial es $x + 3 = 5 + 3 = 8$ metros, y el área original de la sala es $8 \times 5 = 40$ m^2.

Ejemplo 6

Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

Solución

Un croquis que ilustra la situación que aparece en el enunciado es la siguiente:



Largo: $x + 4 - 12 = x - 8$.

Ancho: $x - 12$.

Altura: 6

El volumen está dado por:

$$V(\text{Volumen}) = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura})$$

Sustituyendo los valores correspondientes tenemos:

$$6(x - 8)(x - 12) = 840$$

Efectuando las operaciones, simplificando y escribiendo la ecuación en la forma estándar, se tiene:

$$6(x - 8)(x - 12) = 840 \Rightarrow (x - 8)(x - 12) = 140$$
$$\Rightarrow x^2 - 20x + 96 = 140$$
$$\Rightarrow x^2 - 20x - 44 = 0$$

Factorizando

$$(x - 22)(x + 2) = 0$$

Por la propiedad uniforme

$$x = 22, \text{ o bien, } x = -2$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja son:

Largo: $x - 8 = 22 - 8 = 14$ cm

Ancho: $x - 12 = 22 - 12 = 10$ cm

Altura: 6 cm

Actividades de Culminación

Resolver en grupo:

1. En un rectángulo el largo mide el triple que el ancho. Si disminuimos en 1 cm cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm^2. Calcula las dimensiones y el área del rectángulo inicial. Solución: Largo: 12 cm; Ancho: 4 cm.
2. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno? Solución. 6 y 36 años.
3. Los lados de un triángulo miden 10 m, 17 m y 18 m, respectivamente. ¿Qué cantidad fija hay que restar a cada lado para obtener un triángulo rectángulo? Solución. 5 m.
4. Un rectángulo tiene un lado doble que el otro. Si al mayor se le aumenta en dos unidades y el menor se disminuye en 2 unidades el rectángulo así obtenido tiene 4 m^2 de área más que la mitad del primer rectángulo. Calcular las dimensiones. Solución. 4 m × 8 m.

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para interpretar y resolver problemas de aplicación de las ecuaciones cuadráticas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase

Fecha: _______________

Nombre del Centro:

Nombre del profesor o la profesora:

Disciplina: Matemáticas

Grado: Noveno

Nombre de la unidad: Funciones y ecuaciones

Número de la unidad: VII

Indicadores de logros

1. Utilizar las ecuaciones de segundo grado como herramienta para resolver problemas.
2. Entiende y aplica el lenguaje algebraico como un recurso expresivo, con sus elementos y sus normas.
3. Expresa ideas y conclusiones con claridad.

Tema

Ecuaciones cuadráticas.

Contenido

Aplicaciones.

Actividades de Iniciación

1. Cuáles son los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.
2. Explica brevemente cada uno de los métodos de solución.
3. Exprese en palabras el teorema de Pitágoras.
4. Explique el procedimiento para resolver problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas.

Actividades de Desarrollo

Para resolver un problema debes de seguir los pasos siguientes:

- Comprender bien el enunciado.
- Concebir un plan de resolución.
- Ejecutar el plan.
- Analizar la solución o soluciones.

Los ejemplos se harán en conjunto profesor – estudiantes. En la resolución de cada ejercicios se les preguntará a las y los estudiantes para que justifiquen el paso realizado.

1. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

Solución

El primer número: x

El segundo número: $x + 2$

La relación entre ellos: $x^2 + (x + 2)^2 = 580$

Efectuando operaciones, simplificando y expresando el resultado en la forma estándar tenemos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (x + 2)^2 = 580 &\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580 \\
&\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 580 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 + 4x - 576 = 0 \\
&\Rightarrow x^2 + 2x - 288 = 0 \\
&\Rightarrow (x + 18)(x - 16) = 0
\end{aligned}
$$

Igualando a cero cada factor y despejando x se tiene:

$$x = -18, \text{ o bien, } x = 16$$

Descartamos –18 porque no es número natural. Tomamos el valor de 16. Entonces, los números son: 16 y 16 + 2 = 18.

2. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

Solución

Edad actual de Pedro: x

Edad hace 13 años: x – 13

Edad dentro de 11 años: x + 11

La relación que establece el problema es: $\frac{1}{2}(x-13)^2 = x + 11$

Efectuando operaciones, simplificando y expresando el resultado en la forma estándar tenemos:

$$\frac{1}{2}(x-13)^2 = x + 11 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(x^2 - 26x + 169) = x + 11$$

$$\Rightarrow\; x^2 - 26x + 169 = 2(x + 11)$$

$$\Rightarrow\; x^2 - 26x + 169 = 2x + 22$$

$$\Rightarrow\; x^2 - 26x - 2x + 169 - 22 = 0$$

$$\Rightarrow\; x^2 - 28x + 147 = 0$$

Factorizando

$$(x - 21)(x - 7) = 0$$

Igualando cada factor a 0 y despejando x se tiene

$$x = 21, \text{ o bien, } x = 7$$

Descartamos 7 ya que hace 13 años resultaría –6 lo cual es falso. Escogemos 21 ya que hace 13 años resulta 8 años que al elevarlo al cuadrado y tomar la mitad nos resulta 32 años que es la edad que tendrá dentro de 11 años.

3. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución

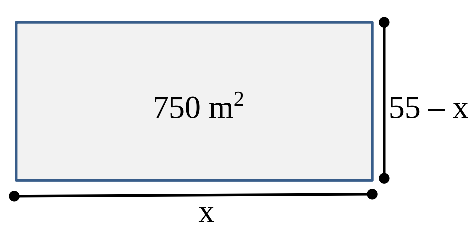
Perímetro de la finca: 110 m

Semiperímetro de la finca: 55 m

Largo: x

Ancho: 55 – x (¿Por qué?)

Área del rectángulo: largo × ancho



Haciendo las sustituciones en la relación del área del rectángulo se tiene:

$$x(55 - x) = 750$$

Efectuando operaciones, simplificando y expresando el resultado en la forma estándar tenemos:

$x(55 - x) = 750 \;\Rightarrow\; 55x - x^2 = 750$

$\Rightarrow\; x^2 - 55x + 750 = 0$

$\Rightarrow\; (x - 25)(x - 30) = 0$

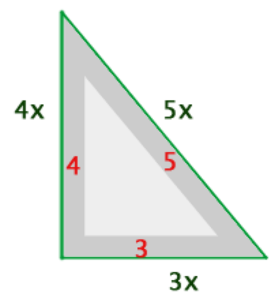
Igualando cada factor a 0 y despejando x, se tiene

$$x = 25, \text{ o bien, } x = 30$$

Las dimensiones de la finca son 30 m y 25 m.

4. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.

Solución



Un cateto (Base): 3x

Un cateto (Altura): 4x

Hipotenusa: 5x

Área del triángulo rectángulo = semiproducto de los catetos. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}(3x)(4x) = 24$$

Efectuando operaciones y simplificando tenemos

$\tfrac{1}{2}(3x)(4x) = 24 \;\Rightarrow\; 12x^2 = 48$

$\Rightarrow\; x^2 = 4$

$\Rightarrow\; x = \pm 2 \qquad \left(x^2 = q,\ q > 0;\ x = \pm\sqrt{q}\right)$

De los dos valores tomamos el positivo, luego

Un cateto (Base): $3x = 3(2) = 6$ m

Otro cateto (Altura): $4x = 4(2) = 8$ m

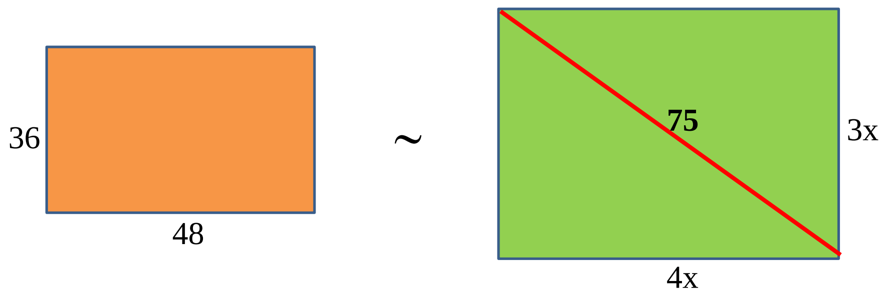
Hipotenusa: $5x = 5(2) = 10$ m

5. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

Solución

Largo: $48x : 12 = 4x$ (¿Por qué?)

Ancho: $36x : 12 = 3x$ (¿Por qué?)



Para calcular las dimensiones del rectángulo verde aplicamos el teorema de Pitágoras ya que la diagonal divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos cuyos catetos son 3x y 4x, respectivamente. Entonces,

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 75^2 \Rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 5625$$
$$\Rightarrow 25x^2 = 5625$$
$$\Rightarrow x^2 = 225$$
$$\Rightarrow x = \pm 15 \qquad \left(x^2 = q,\ q > 0;\ x = \pm\sqrt{q}\right)$$

Tomamos x = 15, y se tiene que las dimensiones son: largo: 4x = 4(15) = 60 m. y ancho: 3x = 3(15) = 45 m.

Actividades de Culminación

Resolver en grupo:

1. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le falta 100 unidades para completar el cuadrado de ella?
2. La base de un triángulo isósceles mide 19 cm y cada lado tiene 8 cm más que la altura trazada a la base. ¿Cuánto mide la base?
3. Si al triplo de un número se suma su cuadrado se obtiene 88. Calcularlo.
4. Elena quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm^2, ¿de qué longitud han de ser los trozos que ha de cortar?

5. De un tablero de 2400 cm^2 se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 5 cm más de lado que la otra. Si las tiras de madera que sobran miden 1283 cm^2, ¿cuánto miden los lados de las piezas cuadradas cortadas?

Evaluación

1. Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para interpretar y resolver problemas de aplicación de las ecuaciones cuadráticas.
2. Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.
3. Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

VII. REFLEXIONES FINALES

Este trabajo se constituye un aporte a las y los profesores que imparten matemáticas en noveno grado y que se interesan por integrar en el aula conceptos matemáticos en los grados superiores, mostrando la posibilidad de implementar recursos y/o materiales en estos niveles de la escuela, dejando de lado los estigmas que hacen referencia a que este tipo de materiales solo movilizan conocimientos en los primeros niveles de educación y que pierden valor en los grados superiores. De esta manera se puede enriquecer las prácticas educativas que se llevan a cabo en el aula de clase a la vez que los estudiantes reciben la atención apropiada para alcanzar su aprendizaje.

Resaltar el papel de la profesora o el profesor en la implementación de la unidad didáctica, al realizar en conjunto las actividades mismas a través de preguntas orientadas a las y los estudiantes, proponiendo la reflexión sobre posibles conflictos cognitivos, en la resolución de problemas.

Es importante crear un ambiente dinamizador entre las y los estudiantes y las actividades propuestas, donde cree la necesidad de resolver las situaciones problema que se plantean a través de instrucciones que vinculan contextos conocidos por las y los estudiantes.

Nuestra unidad didáctica está encaminada a desarrollar el tema de las "Ecuaciones Cuadráticas en Noveno Grado de Educación Secundaria" mediante situaciones problemas, proceso que nos permitirá motivar a las y los estudiantes, para que logren sentirse como parte activa del proceso enseñanza – aprendizaje, por lo cual estructuramos cada actividad en función de que las y los estudiantes construyan significativamente el conocimiento, de fomentarle el hábito de la lectura analítica, el desarrollo de actividades que los induzcan a ser competitivo y no un ente pasivo en la formación conceptual.

Las actividades propuesta en nuestra unidad didáctica llevan una secuencia adecuada para desarrollar las ecuaciones cuadráticas con el fin de que las y los estudiantes dejen la apatía que tienen hacia las matemáticas y que logren ser parte activa del proceso enseñanza – aprendizaje.

La Resolución de Problemas en matemática es esencial para el dominio de las competencias matemáticas.

Las actividades que hemos sugerido en ésta propuesta metodológica, las trabajamos integrando los aspectos relacionados con la familia, la escuela y el entorno, de modo que las y los estudiantes aprendan cada uno de los contenidos de las ecuaciones cuadráticas interactuando con los aspectos antes mencionados.

VIII. RECOMENDACIONES

A continuación le presentamos algunas recomendaciones que pueden ser tomadas en cuenta por las profesoras y los profesores de matemáticas de noveno grado de educación primaria.

1. Involucrar actividades que permitan establecer la relación entre el concepto de ecuación cuadrática y el de función cuadrática y de esta manera realizar el salto a otro tipo de representación gráfica a través de la curva geométrica. Esto puede lograrse vinculando situaciones de variación que puedan representarse a través de programas tecnológicos como Geogebra y Derive, entre otros.
2. La profesora o el profesor antes de poner en práctica esta unidad didáctica debe de indagar acerca de los conocimientos y experiencias previas de las y los estudiantes, pues constituyen un saber para darle significado a las actividades que se propongan desarrollar, y que contribuyan a la reflexión, permitiendo que el diseño e implementación de la unidad didáctica se desarrolle con naturalidad y las y los estudiantes se apropien de las situaciones que se planteen.
3. Se debe tener en cuenta el tiempo por ser un factor importante en la implementación de situaciones problema que integran recursos y/o materiales didácticos o nuevas formas de enseñar y aprender, debido a que las y los estudiantes deben realizar mayores reflexiones para responder a la totalidad de preguntas que aparecen en cada actividad.
4. La profesora o el profesor que implemente esta unidad didáctica, tener presente que las situaciones que se plantean en cada plan de clase no son las únicas que se pueden realizar, por eso les incitamos a que sean críticos y creativos, y a la vez adecúen los contenidos a las circunstancias, al medio natural y sociocultural de cada estudiante.
5. Impulsar el trabajo en equipo, el respeto a la opinión de los otros, la apertura al otro, la crítica la autocrítica, la autodeterminación y el crecimiento personal de las y los estudiantes.

IX. BIBLIOGRAFÍA

- Allen, R. Angel. (2004). **Álgebra Intermedia**. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Álvarez, L., Soler, E. (2001). **Enseñar para Aprender. Procesos estratégicos,** 2ª ed. Madrid: Ed. CCS.
- Arriaga, Alfonso (2009). **Matemáticas I**. México: Progreso Editorial.
- Cáceres Vílchez, Ana Patricia et al. (2006). **Propuesta Metodológica para la Enseñanza Aprendizaje de Área y Perímetro en Segundo Año de Educación Secundaria**. Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades. UNAN – León.
- Carpinteiro, Eduardo/Sánchez, Rubén B. (2004). **Álgebra**. México: Publicaciones Cultural.
- Corea, María Auxiliadora et al. (2009). **Unidad Didáctica: Sucesiones. Series.** Facultad de Ciencias de la Educación y Humanidades. UNAN – León.
- Cuellar, José A. (2005). **Matemáticas I para bachillerato**. México: McGraw Hill.
- Dewar Jacqueline M. y Zill Dennis G. (2000). **Algebra y trigonometría**. Segunda Edición, MC Graw Hill
- Dolciani y Col. (1989). ***Álgebra Moderna Libro 1.*** México: Publicaciones Cultural.
- Ensensberger, Hans Magnus. (1977). El diablo de los números. España: Siruela.
- Fernández, J. (2003). **Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos.**
- Fuenlabrada, Samuel. (2001). **Aritmética y Álgebra**. México: McGraw Hill.
- García, M. A. (1995). ***Matemáticas 1 para preuniversitarios***. México: Esfinge
- García, Marco A. (2009). **Matemáticas I**. México: Santillana.
- Ibáñez, Patricia C. (2006). **Matemáticas I**. México: Thomson.
- J.J. y Soler, E. (2001). **Evaluación en el Aula,** *2ª ed*. Oviedo: Ed. Nobel. Madrid.
- Larson. Hostetler. Neptune. (2000). **Algebra Intermedia**, segunda edición, MC Graw Hill
- Leilthold, L. (1994). ***Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica.*** México: Harla.

- Malba, Tahan. (2003). El hombre que calculaba. México: Noriega Editores.
- Méndez, Arturo/Osorio, Juan. (2010). **Matemáticas I**. México: Santillana.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2004). **Estrategias metodológicas del aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.** Managua, Nicaragua.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte (MECD). (2005). **Compendio de los documentos curriculares con enfoque de competencias**. Educación Secundaria. Área: Matemáticas. Managua, Nicaragua.
- Moll, Luis C. (1993). **"Vygosky y la educación";** Grupo editor Aique; Argentina.
- Olmos, Raúl A/Méndez, Ismael R. (2006). **Matemáticas I**. México: McGraw Hill.
- Osorio, Juan M. (2006). **Matemáticas I**. México: Santillana.
- Parra, C. y Saiz, I. (2008). **Didáctica de las matemáticas Aportes y reflexiones.** Argentina:
- Santana Julián, Herrera Roberto y Gutiérrez Alejandro, (2013). **Matemática Básica Universitaria**.
- Smith, S. y Col. (2001). ***Álgebra***. E.U.A.: Addison Wesley Iberoamericana
- Taban, M. (1992). ***El hombre que calculaba.*** México: Noriega Editores.

SITIOS DE INTERNET

http://www.nlvm.usu.edu/es

http://descartes.cnice.mec.es/

www.educacion.org.mx

www.aprendematematicas.org.mx

http://www.gapsystem.org/~history/Biographies/Hudde.html

http://www.gapsystem.org/~history/Mathematicians/Schooten.html

Software Matemático

DERIVE

GEOGEBRA

X. ANEXOS

Anexo No. 1

CUADRO DE DISTRIBUCIÓN DE LAS UNIDADES EN EL TIEMPO.

NOVENO GRADO

SEMESTRE	No. y NOMBRE DE LA UNIDAD	TIEMPO (HORAS CLASES)
I	I. Estadística.	18
	II. El conjunto de los números reales.	18
	III. Factorización.	18
	IV. Operaciones con radicales	16
II	IV. Operaciones con radicales.	8
	V. Sistemas de ecuaciones lineales.	18
	VI. Congruencia y semejanza.	18
	VII. Funciones y ecuaciones.	26

Anexo No. 2

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
NOVENO GRADO

NOMBRE DE LA UNIDAD: FUNCIONES Y ECUACIONES

NÚMERO DE LA UNIDAD: VII

TIEMPO SUGERIDO: 26 HORAS / CLASES

Competencia de Grado

1. Analiza las características y propiedades de los tipos de funciones algebraicas, ecuaciones lineales y cuadráticas al formular y resolver problemas de su realidad.

Competencia de Ejes Transversales

1. Muestra conductas positivas de: liderazgo, comunicación efectiva, manejo de emociones y conflictos, pensamiento crítico y creativo para enfrentar las situaciones de la vida cotidiana.
2. Demuestra habilidad para establecer y mantener relaciones interpersonales significativas y respetuosas en su entorno.

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación

3	Plantea y resuelve problemas de su práctica cotidiana utilizando ecuaciones cuadráticas.	Ecuación cuadrática:
		• Definición.
		• Conjunto solución.
		• Métodos de solución.
		  • Por factorización.
		  • Por completación
			• Con ayuda de la o el docente reconoce las características de la ecuación cuadrática.	

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
		• Métodos de solución. • Fórmula general.	• Comenta en trabajo de equipo acerca de las formas que tiene la ecuación cuadrática y sus formas de solución practicando la democracia, relaciones de igualdad y fraternidad para mantener una convivencia pacífica. Ecuaciones del tipo: $ax^2 + c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ • Aplica factorización al resolver las ecuaciones cuadráticas: $x^2 – 9 = 0$ $2x^2 – 1 = 0$ $(x – 3)^2 = -8$	• Verificar el grado de asimilación de las y los estudiantes en la solución de ecuaciones cuadráticas por los diferentes métodos de solución; así como el establecimiento de relaciones democráticas, igualdad y fraternidad. • Constatar el grado de asimilación de las y los estudiantes en la solución de ecuaciones cuadráticas y su aplicación en la solución de problemas de la vida cotidiana. • Valora la importancia del lenguaje gráfico para interpretar y resolver problemas prácticos de la vida cotidiana y en la toma de decisiones.

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
			• Resuelva las siguientes ecuaciones por el método de completar el cuadrado: $x^2 + 6x + 7 = 0$ $x^2 – 10x – 5 = 0$ $2x^2 – 3x – 4 = 0$ • Con ayuda de la o el docente y utilizando el método de completación de cuadrados deduce la Fórmula Cuadrática, para resolver ecuaciones cuadráticas. • Concluya que la ecuación tiene dos soluciones si el discriminante es mayor que cero, que tiene una solución si el discriminante es cero y no tiene ninguna solución si es negativa.	• Valorar actitudes de iniciativa, preocupación y disposición a compartir experiencias acerca de la realización de ejercicios y/o problemas. • Observar constancia y perseverancia en la búsqueda de solución a problemas de su realidad. • Valorar al final de esta unidad que los y las estudiantes demuestran: constancia, desempeño en el trabajo individual y grupal, participación, compañerismo, perseverancia, responsabilidad en la realización de tareas asignadas.

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
			• Resuelva los siguientes problemas: ➢ El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala. ➢ Supóngase que C$ 5 000 se han invertido a una tasa x de interés compuesto anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado en los dos años es C$ 5950,4, Encuentre x. ➢ La suma de los cuadrados de tres enteros consecutivos es 77. ¿Cuáles son esos enteros? ➢ El producto de dos enteros pares consecutivos es 288, ¿Cuáles son esos enteros?	

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
			➢ Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números consecutivos. ➢ La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?. ➢ Una caja mide 5 cm de altura y de ancho, cinco cm. más que de largo. Su volumen es 1500cm3. Calcular la longitud y la anchura. ➢ Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.	

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
			• Resuelva los siguientes problemas: ➢ El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala. ➢ Supóngase que C$ 5 000 se han invertido a una tasa x de interés compuesto anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado en los dos años es C$ 5950,4, Encuentre x. ➢ La suma de los cuadrados de tres enteros consecutivos es 77. ¿Cuáles son esos enteros? ➢ El producto de dos enteros pares consecutivos es 288, ¿Cuáles son esos enteros?	

No.	Indicadores de logros	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizaje sugeridas	Procedimientos de evaluación
			➢ Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2. ➢ Resuelva ejercicios de la vida real aplicando la fórmula cuadrática.	

Anexo No. 3

Guía de observación

Nombre del estudiante:____

Tema:____________________ **Fecha:________________** **Actividad No.______**

1: Siempre **2:** Casi siempre **3:** Algunas veces **4:** Pocas veces **5**: Nunca					
Competencias	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Identifica, nombra y clasifica las formas más frecuentes de una ecuación de segundo grado a partir de su expresión algebraica.					
Reducir una ecuación de segundo grado a su forma estándar.					
Determina si un valor dado es solución o no de una ecuación cuadrática.					
Resuelve mediante procedimientos directos de resolución ecuaciones cuadráticas.					
Reconoce la pregunta de una situación real					
Determina el tipo de solución de una ecuación cuadrática.					
Construye ecuaciones cuadráticas a partir de sus soluciones.					
Aplica la regla de Cardano para el cálculo de soluciones de una ecuación cuadrática a partir de los coeficientes de su expresión general					
Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de métodos y procedimientos algebraicos.					
Muestra confianza en sí mismo para enfrentarse a problemas o situaciones nuevas					
Participa activamente en clase.					

Valora positivamente la precisión y utilidad de los lenguajes geométrico y algebraico como medios para conocer, representar y comunicar.					
Muestra flexibilidad en la búsqueda de soluciones, considerando distintas vías y mostrando una actitud abierta en la utilización de otras estrategias.					
Es disciplinado y puntual					
Entrega en tiempo y forma los trabajos asignados					

Anexo No. 4

AUTOEVALUACIÓN

Marca con una X según consideres tu trabajo durante la unidad, recuerda ser honesto, ya que tus resultados te servirán para crecer como estudiante y como persona.

Variable a medir	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Malo**
Asistencia				
Participación				
Trabajo en el aula				
Autoestudio				
Tareas				
Disposición al trabajo en equipo				
Tolerancia ante comentarios de compañeros				
Examen				

Firma de enterado

Docente