UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo Monográfico para optar al título de Licenciados en Ciencias de la Educación y humanidades. Mención Matemática Educativa y Computación

Tema:

Estrategias Metodológicas para la enseñanza de las inecuaciones lineales y cuadráticas en undécimo grado del Instituto Nacional Alfonso Cortes del Municipio de Somotillo.

Autores

Br. Luis Antonio Ríos Dávila

Bra. Ivón María Osorio Canales

Br. Denis Donaldo Maradiaga López

Tutor

Msc. Rutilio Zelaya

León, diciembre 2014.

"A la Libertad por la Universidad"

Agradecimiento

A Dios todo poderoso, porque él nos ha guiado a lo largo de nuestra vida y nos ha llenado de salud para que estemos dispuesto a enfrentar los retos.

A Nuestros padres: porque ellos son la luz que nos iluminan en nuestro camino y son los que nos apoyan incondicionalmente a lo largo de nuestra vida.

A nuestros Maestros: por brindarnos el pan del saber y compartir con nosotros sus conocimientos y experiencias dentro y fuera del aula de clase.

A nuestro tutor y M.Sc. Rutilio Zelaya por la paciencia que nos tuvo a lo largo de nuestra carrera universitaria y el por su empeño y dedicación para que nosotros pudiéramos realizar nuestro trabajo Monográfico.

Los Autores.

Dedicatoria

Este trabajo fue realizado con mucho esfuerzo y amor, dirigido a todas aquellas personas que puedan hacer uso de él.

Dedicado especialmente a Dios:

Por darnos fuerza de seguir día a día trabajando, para llegar a este momento tan especial en nuestras vidas, por las bendiciones y los triunfos que hemos alcanzado al logar esta maravillosa meta.

A nuestra familia por su paciencia, comprensión, su apoyo y todo el cariño que nos han brindado a lo largo d este camino, haciendo lo posible para que hoy nosotros podamos lograr alcanzar nuestros sueños.

Índice

Introducción

Las Matemáticas, actualmente, se consideran un reto para quien quiere aprenderlas y aún más para los que quieren enseñarlas. Esta área del saber contribuye en el desarrollo de la humanidad por medio de sus incontables aplicaciones en otras áreas tales como: medicina, química, política, informática, topografía, biología, entre otras.

En un mundo donde los conocimientos matemáticos se desarrollan vertiginosamente y aumentan sus aplicaciones día a día, en el que calculadoras y ordenadores forman parte del quehacer cotidiano, hay consenso social a nivel mundial sobre la importancia de las matemáticas y la necesidad de su aprendizaje por todos las y los estudiantes, esto significa dotarlos de una cultura matemática que les proporcione recursos para toda su vida, lo que implica brindarles oportunidades de aprendizaje que estimulen el desarrollo de su pensamiento lógico – matemático, y particularmente del aprendizaje de "Las Inecuaciones", que se imparte en el décimo grado de educación secundaria.

Por tal razón, nos propusimos elaborar una unidad didáctica que trate sobre la "Enseñanza – Aprendizaje de las Inecuaciones en Décimo Grado de Educación Secundaria" bajo el enfoque pedagógico: "Enseñanza por Competencias"

Se trata de una guía para que la profesora y el profesor aproveche al máximo los encuentros con sus estudiantes y le garantice el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje. Esto proveerá a la profesora o al profesor de la suficiente capacidad de relacionarse con las y los estudiantes y la disponibilidad que este muestre para asumir dicha responsabilidad.

Este documento es un inicio para el fortalecimiento de la enseñanza de algunos temas contemplados en las matemáticas de la Educación Secundaria, sirva además de guía a las y los estudiantes en sus proyectos finales, convirtiendo estos en herramientas metodológicas interesantes para orientar la realización de proyectos sociales en otros escenarios de la vida social, bien sea institucional o informal.

Así desde este punto de vista, el proceso metodológico de este documento se apoya en el modelo pedagógico Enseñanza por Competencias, particularmente en lo relacionado con el proceso para desarrollar unidades didácticas en el aula, lo más importante y lo más definitivo en el acto educativo, tanto para la profesora o el profesor como para las y los estudiantes. Por eso, definir qué quiero que mis estudiantes comprendan, qué puedo hacer para que comprendan y cómo sé que han comprendido, es fundamental.

El presente trabajo pretende mejorar la calidad de la Enseñanza – Aprendizaje de los contenidos referentes a Inecuaciones, mediante la aplicación del enfoque pedagógico: Enseñanza por Competencias, lo que permitirá a las y los estudiantes tener una visión de futuro acerca del estudio de las matemáticas orientando los aprendizajes hacia la vida y el trabajo donde sea capaz de responder con agilidad y relevancia a las necesidades que demanda nuestro país.

En esta unidad didáctica abordamos los contenidos programáticos de inecuaciones mediante exposiciones orales de la profesora o el profesor, trabajo en conjunto, el empleo de recursos y/o materiales didácticos (DERIVE 6 y FW2.6). Todos los conocimientos adquiridos por las y los estudiantes serán reforzados con series de ejercicios y problemas que serán resueltos como práctica en el laboratorio de cómputo por los mismos estudiantes. El trabajo individual y por equipo de resolución de ejercicios y problemas por medio de programas en la computadora se consideran actividades indispensables para acceder al conocimiento y desarrollo de la destreza de los métodos expuestos.

Antecedentes

A lo largo del tiempo las o los profesores buscan maneras de ayudar a sus estudiantes a entender mejor. Tratan de explicar claramente. Buscan oportunidades para hacer aclaraciones. Con frecuencia ponen trabajos sin parámetros fijos tales como la planeación de un experimento o la crítica de comerciales en la televisión, tareas que requieren y que refuerzan la comprensión.

Aunque dichos factores son importantes, igualmente se encuentra una paradoja: a pesar de sus esfuerzos es que, las o los profesores aún se encuentran insatisfechos con la comprensión de sus estudiantes.

Es evidente que la comprensión merece una atención especial. En el transcurso del tiempo muchos profesores han creado sus planes de trabajo con la ayuda de un marco sencillo, desarrollado como parte de una colaboración que se encuentra en el curso o entre profesores del área.

Si bien los contenidos algebraicos han ocupado y ocupan un lugar central en las propuestas de enseñanza de la educación media, tanto la experiencia de las y los profesores como numerosos estudios de didáctica de las matemáticas dan cuenta de que las propuestas de enseñanza impartidas no siempre lograron que las y los estudiantes puedan darle significado a dichos contenidos ni trabajar adecuadamente con ellos.

Hay que hacer notar que si los problemas pueden resolverse aritméticamente, las y los estudiantes privilegiarán este tipo de resolución por su familiaridad con este dominio y entonces se pierde el valor útil del álgebra, que se impondrá como algo propuesto por la profesora o el profesor, pero no como una necesidad (Barallobres, 2000).

Las inecuaciones con una variable también serán presentadas como instrumento de modelización de problemas diversos y se apelará a la resolución basada en las propiedades que dejan invariante el conjunto solución articulando en todos los casos dicha solución con la solución gráfica.

Es por eso que pretendemos desarrollar el tema de Inecuaciones bajo el modelo pedagógico: “Enseñanza por Competencias”. Es así en cuanto a las estrategias, el enfoque trata de desarrollar un modelo de enseñanza que permita a las y los profesores responder: ***¿Cómo fomentar la comprensión de las y los estudiantes?***

Con la aplicación de este modelo pedagógico pretendemos que el aprendizaje de los conocimientos por parte de las y los estudiantes sea significativo, el cual le ayudará a lo largo de toda la vida, con el fin de ser un ciudadano participativo, activo y colaborativo para aprovechar mejor las oportunidades que le presenta la sociedad en sus diferentes momentos.

En la revisión bibliográfica llevada a cabo nos encontramos un trabajo monográfico concerniente a nuestro tema “Método de la Raíz” omitiendo otros métodos de resolución analítico y gráfico.

Justificación

Las matemáticas son una herramienta fundamental para el científico y para el ingeniero; es el lenguaje con el que describe y estudia la realidad, se representan y resuelven los problemas, y obtienen y organizan sus resultados. El Álgebra es el lenguaje básico de las matemáticas; es el conocimiento que permite el acceso a otros conocimientos matemáticos y de otras disciplinas.
Nuestro trabajo monográfico tiene como propósito proponer estrategias de enseñanza – aprendizaje de Las Inecuaciones bajo el modelo pedagógico “Enseñanza por Competencias”, que le sean útiles tanto para a la profesor o el profesor al momento de impartir su clase; haciéndola más activa – participativa, así como para las y los estudiantes, la cual le permita mejorar su auto – estudio, retención y comprensión de los contenidos de la misma.

Planteamiento del Problema

Existe una multiplicidad de razones por las cuales los aprendizajes pueden no ser los esperados. Algunas de ellas escapan al ámbito escolar estricto; si bien las profesoras y los profesores acompañan a sus estudiantes en un sentido amplio de compromiso con su formación y crecimiento personal, a veces sus intervenciones pueden ser insuficientes para resolver algunas cuestiones o resultar limitadas frente a la gravedad de los problemas que afrontan.

Considerando la influencia de las nuevas tecnologías en el mundo de hoy con el innegable valor de estos recursos en el proceso enseñanza – aprendizaje sin olvidar la propuesta de cambio e innovación que nos da la última Reforma Educativa implementada por el Ministerio de Educación, nos encontramos en la urgente necesidad de formar a las profesoras y los profesores de matemáticas en el uso de nuevas herramientas computacionales y en el uso de recursos didácticos y en la elaboración de materiales didácticos que conlleven a la mejora de la enseñanza y a lograr que el aprendizaje de las y los estudiantes tenga significado.

Esta situación la podemos ver desde:

- La necesidad de implementar el uso de recursos y/o materiales didácticos.
- La necesidad de formar profesores tanto en didáctica de las matemáticas y en el de nuevas herramientas computacionales útiles en la enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones.

Además, nos planteamos las siguientes interrogantes:

- ¿Cuál es la realidad de la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria y del uso de algún software educativo como recurso didáctico?
- ¿Son los software educativo herramientas que refuerzan la motivación, la creatividad y el aprendizaje de las matemáticas?
- ¿La elaboración de materiales didácticos y su aplicación en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas contribuye en la formación integral de las y los estudiantes?

Viabilidad

El presente trabajo es viable por las siguientes razones:

- Recursos Materiales:

  Se ha encontrado información relacionada al tema en libros especializados e investigaciones procedentes de características globales, más no enfocadas a una sola área, como es el caso de esta investigación, por lo cual hay un panorama abierto realizar este trabajo

- Recursos Humanos: los investigadores tenemos tiempo para realizar esta investigación además que constamos con bibliotecas que ofrece abundante información.

- La disponibilidad de los estudiantes en participar en las diferentes actividades para la realización de este estudio.

- El apoyo de nuestro tutor en los diferentes aspectos de la realización de nuestro estudio.

Objetivos

V.1. Objetivo general

Elaborar una propuesta metodológica que contribuya a la mejora de la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de Inecuaciones que se imparte en décimo grado de educación Secundaria, proponiendo nuevas alternativas didácticas bajo el enfoque pedagógico: “Enseñanza por Competencias”.

V.2. Objetivos específicos

- Dotar a las profesoras y los profesores de estrategias de enseñanza – aprendizaje que contribuya a que el aprendizaje de las y los estudiantes sea significativo.

- Desarrollar actitudes positivas hacia la enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones, su importancia y la adquisición por parte de las y los estudiantes de las competencias básicas y matemáticas específicas

- Implementar los programas DERIVE6 y FW26 en la resolución analítica y gráfica de inecuaciones.

- Implementar formas de evaluación en donde se integren competencias, contenidos, actitudes de las y los estudiantes en las actividades desarrolladas por laso los profesores.

Marco Teórico

Definición de competencias

Competencia

Es un conjunto de conocimientos, actitudes, disposiciones y habilidades (cognitivas, socioafectivas y comunicativas), relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Esta noción de competencia propone que lo importante no es sólo conocer, sino también saber hacer. Se trata, entonces, de que las personas puedan usar sus capacidades de manera flexible para enfrentar problemas nuevos de la vida cotidiana.

Una persona competente es aquel capaz de ejercer una actividad profesional concreta, aplicando sus conocimientos, sus habilidades y sus capacidades personales; es decir, debe:

1. Saber.
2. Saber Hacer.
3. Saber Ser.

Esto significa que las competencias están formadas por distintos tipos de saberes:

- *Actitudinal: un* SABER SER.
- *Procedimientos:* UN SABER HACER.
- *Conceptual:* UN CONOCER, SABER.

La educación en el Siglo XXI (Sociedad del Conocimiento) se debe apoyar en los Pilares del Conocimiento:

- Aprender a Conocer.
- Aprender a Hacer.
- Aprender a Ser.

Debe promover en los aprendices la adquisición de:

II. Habilidades: (capacidad de aprender por cuenta propia, capacidad de análisis, síntesis y evaluación, pensamiento crítico, creatividad, capacidad de identificar y resolver problemas, capacidad para tomar decisiones, trabajo en equipo, alta capacidad de trabajo, cultura de calidad, uso eficiente de la informática y las telecomunicaciones, manejo del idioma inglés, buena comunicación oral y escrita)

III. Actitudes: Valores (Los Valores se hacen realidad por medio de las actitudes: Reciprocidad, Profesionalismo, Responsabilidad, Orden, Respeto, Optimismo, Esfuerzo, Servicio, Solidaridad, Tenacidad, Tolerancia, Apertura al Cambio, Afectividad, Autenticidad, Autoestima, Comprensión, Confianza, Iniciativa, Liderazgo, Cooperación, Innovación, Moderación)

El aprendizaje basado en competencia modifica el trabajo del maestro porque:

- Pasaría de ser el protagonista del proceso enseñanza – aprendizaje siendo este papel desempeñado por el estudiante.
- El trabajo seria menos monótono.
- Estaría basado en la participación activa de las y los estudiantes.
- Despertaría el interés hacia la investigación
- Se daría un aprendizaje significativo.
- Sería menos de dirección y más de dar pautas a seguir para el desarrollo intelectual.

Importancia de la enseñanza por competencia

La sociedad requiere de una enseñanza que desarrolle capacidades de reflexión – acción. Los sujetos deben ser competentes. La escuela ha de aportar a cada estudiante un conjunto de facilidades para aprender a desenvolverse y tener éxito en la vida.

La educación tiene la responsabilidad de formar personas con capacidad para:

- Aprovechar sus potencialidades y las del medio social y natural.
- Estudiar y comprender la realidad.
- Enfrentar con éxitos las dificultades, los problemas y los desafíos.

La enseñanza basada en competencia constituye un intento serio y profesionalizante por cambiar los énfasis, por llevar la educación a ser significativa para las personas, a reducir sus costos, a encaminarla a que parta de las necesidades de la vida cotidiana, a liberarla de un conjunto de supuestas prácticas que limiten su desarrollo.

La enseñanza educativa se transforma simultáneamente para poder dar respuesta a las normas de competencias que van apareciendo. El modelo educativo predominante, basado en una enseñanza determinada por cursos organizados sobre la base de programas pre – establecidos, se está siendo inoperante ante la demanda que surge a partir de las nuevas competencias. Se tendrá que buscar como evolucionar hacia una aproximación menos academista y orientado más al análisis de las necesidades individuales y competencias interactivas: se refiere a la capacidad de los sujetos de participar como miembros de grupos de referencia próximos, tales como la familia y los grupos de iguales.

¿Qué son los indicadores de logros?

Son los indicios o señales que nos permiten observar de manera evidente y especifica los procesos y resultados del aprendizaje a través de conductas observables. Es un indicador que tiene como función hacer evidente qué es lo que aprende el alumno y cómo lo demuestra.

Los indicadores de logro proporcionan elementos de prueba verificables, para valorar los avances hacia el logro de las competencias, o de los objetivos de un proyecto educativo, o de una unidad, o de un tema o pregunta generadora, etc.

El enunciado de los indicadores de logro debe permitir percibir o demostrar los cambios suscitados en los/as estudiantes. Por esta razón, conviene tener en cuenta que un sólo indicador rara vez puede abarcar la totalidad de los cambios propuestos en el enunciado de una competencia o de los objetivos de un proyecto, unidad o tema generador.

Por ello, es recomendable precisar y formular varios indicadores de logro, para que el estudiante pueda alcanzar la competencia.

¿Qué es el planeamiento didáctico?

El planeamiento educativo es el proceso en el cual se analiza la situación, se prevén las necesidades en materia de educación, se formulan objetivos coherentes con la filosofía y la Política Educativa Nacional y se establecen los medios y secuencias de acciones indispensables para lograrlos.

El planeamiento es una actividad indispensable para el desarrollo de la enseñanza – aprendizaje, éste debe ser flexible y prever con anticipación el empleo de los recursos y/o materiales que permitirán lograr las competencias.

El planeamiento didáctico es necesario porque evita la rutina, posibilita la reflexión previa sobre las distintas alternativas para desarrollar la tarea docente, evita las improvisaciones y dudas que provoca el trabajo desordenando y poco eficaz; permite actuar con seguridad sobre la base prevista.

El planeamiento debe poseer las siguientes características:

- Flexible.
- Permanente.
- Preciso.
- Relevante
- Coherente.
- Pertinente.
- Prospectivo.
- Participativo.
- Funcional.

Es importante que las profesoras y los profesores, antes de que concreten su planeamiento, se planteen algunas interrogantes que le aclaren sobre la mejor manera en que pueden desarrollar su práctica pedagógica de forma efectiva, para ello es necesario reflexionar sobre:

- ¿Qué está pasando?
- ¿Qué se quiere hacer?
- ¿Cómo se va a hacer?
- ¿Con quiénes se va a hacer y a quiénes va dirigido?
- ¿Con qué se va a hacer?
- ¿Cuánto tiempo se requiere para hacerlo?
- ¿Dónde lo realizará?
- ¿Cómo se evaluará?

De igual forma, al momento de planificar, el docente debe tomar decisiones y organizar su práctica pedagógica en cuanto a:

- ¿Qué enseñar?
- ¿Cuándo enseñar?
- ¿Cómo enseñar?
- ¿Qué evaluar?
- ¿Cómo evaluar?

¿Qué entendemos por evaluación?

La evaluación de los aprendizajes es un componente del proceso educativo, a través del cual se observa, recoge y analiza información significativa, respecto de las posibilidades, necesidades y logros de los (as) estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor tomar decisiones pertinentes y oportunas para el mejoramiento de su aprendizaje.

¿Cuáles son las características de la evaluación?

- Integral.
- Continua.
- Sistemática.
- Participativa.
- Flexible.

¿Para qué se evalúa?

Según el momento en que tiene lugar la evaluación y la finalidad con que se realiza, da lugar a una toma de decisiones distinta.

La evaluación inicial o diagnóstica: puede dar lugar a decisiones relacionadas a la planificación de un proceso didáctico. La evaluación diagnóstica se puede realizar en cualquier momento del proceso didáctico y puede servir de base para la adopción de decisiones relativas a la realización de actividades de apoyo, específicamente orientadas a la superación de problemas que presenten los/as estudiantes, o bien en otros componentes de la enseñanza.

La evaluación formativa o interactiva: con naturaleza de seguimiento constante y personalizado, será un punto de partida para retomar algunas técnicas que propicien la motivación para la atención individualizada, establecer actividades que se desarrollen a través del trabajo colectivo y la modificación de estrategias didácticas.

La evaluación sumativa: la cual se realiza al final de cada corte o período educativo, da lugar a tomar decisiones para la promoción y certificación, o en caso contrario a la repetición; esta forma de evaluación contrasta fuertemente con la evaluación diagnóstica y la formativa, ya que mientras en éstas se toma en cuenta el proceso de enseñanza – aprendizaje, el ritmo de aprendizaje de los/as estudiantes con la finalidad de evitar errores y fracasos en un momento, en que todavía se pueden realizar actividades alternativas de recuperación y que hacen que la evaluación sea auténtica, la evaluación sumativa en un momento determinado certifica un nivel y puede prescribir una repetición.

VI.7. Aproximación de las nuevas tecnologías en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas

Hay una larga tradición de matemáticos que hacen uso de herramientas tecnológicas y recíprocamente, el uso de estas herramientas ha hecho surgir nuevos retos en problemas matemáticos (por ejemplo, la regla y el compás para las construcciones geométricas, los logaritmos y los instrumentos mecánicos para los cómputos numéricos). En años recientes la nueva tecnología, y en particular las computadoras han afectado dramáticamente todos los aspectos de nuestra sociedad. Muchas actividades tradicionales se han vuelto obsoletas mientras que nuevas profesiones y nuevos retos emergen.

Las computadoras también han hecho posible la construcción de "realidades virtuales" y la generación de animaciones interactivas o cuadros maravillosos (por ejemplo, imágenes fractales). Más aún, los accesorios electrónicos pueden ser usados para lograr experiencias que en la vida cotidiana son inaccesibles, o accesibles solamente a través de trabajo sumamente tedioso y que generalmente consume muchísimo tiempo.

Herramientas TICs

En los últimos años la Tecnología de la Información y Comunicación (TIC)
Han tenido una gran influencia en nuestras aulas de matemáticas, nos hemos apoyado en sus herramientas para poder desarrollar nuestras clases de manera dinámica e interactiva. Y aunque en las TIC no está la solución de las dificultades que presenta el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas estamos de acuerdo en que producen un cambio en la manera que la enseñamos.

Las TIC nos proporcionan múltiples formas de representar situaciones problemáticas que les permite a los estudiantes desarrollar estrategias de resolución de problemas y mejor comprensión de los conceptos matemáticos

El concepto de herramienta computacional hace referencia al conjunto integrado por: computadores, calculadoras científicas y programas dinámicos dotados de una determinada intencionalidad. La intencionalidad está dada por ser un programa que permite: El trabajo con el cálculo simbólico. Realizar construcciones de figuras geométricas dinámicas. Graficar funciones y relaciones. Reforzar la comprensión de determinados temas y permitir la simulación.

"Todo acto cognitivo está mediado por instrumento físico o simbólico y esta mediación impone al sujeto una cierta forma de relación cognitiva con el objeto de conocimiento". Dice (Moreno, Waldegg, 2001), que "La teoría cognitiva reconoce la mediación instrumental simbólica o física en el aprendizaje".

Las herramientas computacionales permiten:

-La construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla, que conducen en un nivel bajo, a la elaboración de conjeturas, en un nivel medio, a la argumentación y un nivel superior, a la realización de demostraciones.

-Las representaciones cuantitativas geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas, en forma dinámica, es decir, que al variar un elemento o argumento en la expresión original, se produce una variación de dependencia entre las variables, posibilitando así el análisis y la generalización de conceptos.

-La representación gráfica en dos y tres dimensiones, dando la posibilidad de realizar transformaciones y de asociar figuras con objetos físicos, para pasar a un nivel de conceptualización, más elevado.

-"Problematizar lo visual, de tal forma que surja la necesidad de examinar, conjeturar, predecir y verificar"; es decir, da al estudiante la posibilidad de pensar y de preguntar sobre el porqué de determinados hechos, llevándolo a la exploración de otras situaciones.

-La correlación de lo geométrico con lo algebraico.

-La ampliación del rango de formulación y resolución de problemas.

-La simulación de micro entornos de trabajo, en los que se puede diseñar actividades significativas contextualizando un problema. El aprendizaje significativo se logra a través de la solución de situaciones problema, en las que el estudiante aprende cuando domina diferentes sistemas de representación y los usa para el desarrollo de diferentes actividades.

Unidad didáctica. Enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones en décimo grado de educación secundaria

Para estructurar y organizar nuestra unidad didáctica la hacemos en base a la estructura conceptual, la representación gráfica y la fenomenología en la que están implicadas las inecuaciones. Además, analizamos las expectativas que esperamos desarrollen las y los estudiantes y las competencias que pretendemos que alcancen.Se tiene hincapié en los errores y dificultades que puede tener las y los estudiantes al realizar las distintas tareas que se proponen. Se tiene en cuenta, las secuencias y sesiones en las que se van a organizar las clases y la manera en la que se van a exponer los contenidos y tareas del tema.

Por otra parte, se estudian los criterios e instrumentos de evaluación que se van a seguir para la superación de la unidad por parte delas y los estudiantes.

El diseño de esta unidad didáctica tiene la siguiente estructura: propósitos, ideas previas y contenidos previos, competencias, contenidos (conceptuales, procedimentales y *actitudinales), estrategias metodológicas, dificultades y errores al desarrollar la propuesta, evaluación. Cada uno de estos puntos se desarrolla en un apartado.*

Propósitos de la propuesta metodológica

Las inecuaciones se han constituido como elementos importantes en la obtención de valiosos resultados en distintas disciplinas y en la resolución de problemas. Dentro de la vida cotidiana, las inecuaciones se utilizan para determinar, según el capital, como el mejor uso de este y así organizarlo y emplearlo de una forma correcta.

En esta propuesta metodológica pretendemos afianzar aquellos conocimientos matemáticos que las y los estudiantes ya poseen y; a partir de ellos, facilitar la construcción de los nuevos contenidos.

Esta propuesta metodológica ha sido diseñada para facilitar el aprendizaje delas y los estudiantes y para que ellas y ellos, a la vez, profundicen en los distintos temas que en ella se desarrollan. De esta forma, se convierte en un material de consulta y guía tanto para el profesor como para el estudiante.

En esta propuesta metodológica hacemos un estudio de: los conceptos fundamentales de los intervalos **R**, de los conceptos fundamentales de inecuaciones, inecuaciones lineales, inecuaciones cuadráticas, inecuaciones racionales e inecuaciones con valor absoluto.

Los temas que trataremos en esta propuesta lo abordamos desde un enfoque algorítmico, el cual contempla la resolución de problemas que requieren la aplicación de los procedimientos y la interiorización de los conceptos estudiados.

Esta propuesta metodológica puede ser utilizada como material complementario y como una guía que facilite el aprendizaje y a una mejora integral del proceso enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones, lo que contribuirá a la formación matemática de las y los estudiantes.

Ideas Previas. Contenido Previos

La realización de hechos cotidianos, como la compra de ciertos artículos teniendo una cantidad de dinero predeterminada, les permite a las y los estudiantes familiarizarse con las inecuaciones, aunque hasta este punto de su formación académica no sepan reconocerlas como tales. Se trata, por ahora, de que las y los estudiantes sean capaces de expresar estos hechos en lenguaje hebraico y resolverlo mediante el manejo de operaciones y propiedades que hasta ahora lo han hecho mentalmente.

Esta Propuesta pretende que las y los estudiantes sean capaces de dominar las desigualdades entre números y sus propiedades, para después utilizar estos conocimientos y trasladarlos a las desigualdades conincógnitas, esto es, las inecuaciones. Por tanto, en la prueba inicial para el sondeo de ideas previas deberán aparecer preguntas en las que las y los estudiantes sepan distinguir el orden entre dos números, viendo así en qué tipo de números aparecen problemas.

así como el entendimiento que el estudiante tiene de los símbolos > y <. También podemos conseguir nuestros propósitos con preguntas en las que las y los estudiantes deban ordenar un conjunto de números de mayor a menor o viceversa.

Antes de abordar el tema de inecuaciones las y los estudiantes han estudiado polinomios, ecuaciones de primer y segundo grado, fracciones algebraicas, así como sistemas de ecuaciones de primer grado. Las y los estudiantes tienen estos conocimientos adquiridos y además muy recientes, con lo cual al tratar las inecuaciones estos se van a afianzar; además, nos vamos a servir de ellos para la resolución de inecuaciones haciendo mucho hincapié por supuesto en las diferencias.

Debemos de tener en cuenta que la resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita está intrínsecamente unida al conocimiento de los intervalos y su representación en la recta real, pues esta es la manera de indicar sus soluciones. Para representar las soluciones de las inecuaciones de segundo grado con una incógnita es muy importante saber la regla de multiplicación de los signos.

En la resolución de problemas debemos recurrir a los conocimientos que poseen las y los estudiantes del lenguaje algebraico, y que le haga caer en la cuenta de la existencia de infinitos números en la recta real.

La propiedad más a tener en cuenta en las inecuaciones es la de que al multiplicar ésta por un número negativo el símbolo de desigualdad cambia. Podemos hacerles caer en la cuenta de este hecho pidiéndole que lo hagan con números y los representen en la recta; con lo cual a su vez sondeamos su conocimiento del orden entre números y la representación en la recta.

Extraer de manera intuitiva el concepto que las y los estudiantes poseen acerca de las inecuaciones planteándole un problema cotidiano. También podemos plantear un problema de propiedades conocidas de las figuras geométricas para conseguir el mismo objetivo.

Competencias

Las competencias expresan un nivel de expectativa de aprendizaje a largo plazo, pero a cuyo desarrollo contribuye el trabajo de las y los estudiantes en los diferentes temas de las matemáticas de educación secundaria. Por tanto, es importante observar si cada uno de las competencias que nos proponemos desarrollar se puede conseguir.

Existen ocho competencias matemáticas PISA, las cuales pretendemos que las y los estudiantes las alcancen, ellas son:

a. Pensar y Razonar.
b. Argumentar y Justificar.
c. Comunicar.
d. Modelizar.
e. Plantear y Resolver Problemas.
f. Representar.

g. Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones.
h. Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas.

Todas ellas estarán encaminadas a reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de inecuaciones. Con esto proponemos que las y los estudiantes aprendan a argumentar y justificar, que sean capaces de comunicarles tanto en forma oral como escrita lo que se pretende hacer con un determinado problema o que interprete bien una solución, que sepa pasar de una situación real a un enunciado matemático (modelizar) y también que sepa resolver problemas. Esto no quiere decir que no se vaya a utilizar el lenguaje simbólico, que no se pueda representar el problema o la solución o que las herramientas tecnológicas las dejemos de lado, nada más lejos de la realidad, lo que ocurre es que no se le va a dar la misma importancia a una cosa que a otra y por tanto, el énfasis que se va a dar va a ser distinto.

Además, promovemos a que las y los estudiantes:

i. Promuevan el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, su autonomía y el rol dela profesora o el profesor como orientador y facilitador del trabajo.
j. Inciten la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Contenidos

En nuestra propuesta abordamos los contenidos de tipo conceptual y procedimental, que son los que se contemplan tradicionalmente en la enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, sino también los relativos a la adquisición de actitudes y valores. A continuación se relacionan los contenidos más específicos que abordamos en nuestra propuesta metodológica:

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
▪ Significado y uso de los símbolos de desigualdad. ▪ Significado y uso de las propiedades de las desigualdades. ▪ Intervalos. Definición. Gráfica. ▪ Inecuaciones. Concepto. ▪ Inecuación Lineal: Definición, Conjunto solución y Gráfica. ▪ Inecuación Cuadrática: Definición, Conjunto solución y Gráfica. ▪ Inecuación Racional: Definición, Conjunto solución y su Gráfica. ▪ Inecuación con valor absoluto: Definición, Conjunto solución y su Gráfica.	1. Reconocimiento de las propiedades de una desigualdad entre números. 2. Interpretación y representación gráfica de los intervalos en la recta real. 3. Resolución de inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto. 4. Representación del conjunto solución de una inecuación mediante intervalos y mediante su representación gráfica en la recta real. 5. Interpretación y reconocimiento de las inecuaciones, descripción en lenguaje algebraico; así como su resolución.	1. Valoración de la utilidad de las inecuaciones en la vida cotidiana. 2. Análisis cuidadoso y prudente de las situaciones numéricas antes de tomar decisiones. 3. Orden y sistematicidad en la resolución de ejercicios y problemas. 4. Utilización de un lenguaje preciso para expresar los conocimientos matemáticos. 5. Valoración del trabajo cooperativo en equipo. 6. Valoración del saber hacer las cosas para afrontar sin miedo las tareas a realizar.

Estrategias Metodológicas

De forma general, cada sesión se organizará con el siguiente esquema metodológico:

1. Corrección de uno de los ejercicios propuestos en la sesión anterior por parte de alguno de las y los estudiantes. Este ejercicio, además de refuerzo para los demás estudiantes, nos sirve para recapitular lo visto en la sesión anterior.
2. Presentación de un ejemplo por parte del profesor a modo introductorio de los contenidos programados para esa sesión. Este ejercicio nos sirve de motivación para la asimilación de las explicaciones posteriores.
3. Explicación de los contenidos a desarrollar en cada sesión por parte de la profesora o el profesor.

4. Resolución de algún ejemplo para consolidar los nuevos conocimientos. El primer ejemplo será resuelto por el profesor y los restantes se les solicitará a las y los estudiantes que lo resuelvan.
5. Se les recomendará un conjunto de tareas a las y los estudiantes, algunas serán obligatorias y otras serán voluntarias. Las tareas obligatorias las tendrán que entregar a modo de evaluación y las voluntarias pueden ser entregadas por el estudiantado como refuerzo de la nota.
6. Se les orientará realizar trabajo diario extra clase para ir evaluando continuamente el proceso, obligando así a que las y los estudiantes estudien todos los días los temas tratados, de forma que no lo dejen para el día anterior a la prueba final. De esta manera podemos percatarnos del progreso de las y los estudiantes e ir observando las dificultades que van presentando para así ir modificando la manera de de explicarles los contenidos.
7. Al finalizar cada sesión de clase comprobar lo aprendido haciendo preguntas a las y los estudiantes.
8. En la resolución de los ejercicios y problemas proponemos:
    - Comparación y ordenación de números.
    - Análisis y comprobación de las propiedades de las desigualdades.
    - Expresión de los intervalos mediante lenguaje algebraico y representación de éstos en la recta real, así como el recíproco.
    - Aplicar la estrategia de traspasar las propiedades de las desigualdades entre números a las inecuaciones, con lo cual las y los estudiantes irán aprendiendo a resolver inecuaciones. Representar el conjunto solución mediante intervalos y en la recta real.

(a) Se realizarán sesiones extra clase consistente en la aplicación del DERIVE y FW26 para comprobar los ejercicios que se plantean en clase y en casa.

Temporización

En cuanto a la temporización, la propuesta metodológica está prevista para ser desarrollada en 12 bloque de 2 horas clases.

La siguiente tabla muestra el tiempo que proponemos para el desarrollo de cada tema.

No.	Tema	Tiempo probable (Bloque de 90 minutos)
1	Prueba Inicial. Presentación de la unidad	1
2	Desigualdad. Concepto. Propiedades.	1
3	Intervalos. Definiciones. Gráfica.	1
4	Inecuación Lineal. Definición. Notación. Conjunto Solución. Gráfica.	1
5	Inecuación Cuadrática. Definición. Notación. Conjunto Solución. Gráfica.	2
6	Inecuación Racional. Definición. Notación. Conjunto Solución. Gráfica.	3
7	Inecuación con Valor Absoluto. Concepto. Notación. Conjunto Solución. Gráfica.	2
8	Prueba Final	1
Total		12

Recursos y/o materiales didácticos

El profesor de matemáticas, con objeto de incitar el aprendizaje de las o los estudiantes durante el proceso enseñanza – aprendizaje de los números decimales, pretendemos promover el uso de:

- Papelógrafo.
- Cartulina.
- Marcadores.
- Calculadora.
- Computadora.

- Materiales concretos.
- Internet.
- Cuaderno personal.
- Software matemático DERIVE.
- Graficador de funciones: WINFUN 26.
- Se realizará el juego didáctico Dominó de Inecuaciones, para comprobar la adquisición de conocimientos de las y los estudiantes. Esto se hará en actividades extracurriculares.
- Se visitarán las siguientes páginas WEB con el propósito de concatenar las competencias especificadas y su funcionalidad en ejercitar y practicar. visita se hará ya sea en clase o extra clase:
  - http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm.
  - http://www.educatina.com/algebra/inecuaciones-1?gclid=CMmxspe4vrUCFdHLzAodoiEAGA
  - http://www.educatina.com/algebra/inecuaciones-1?gclid=CMmxspe4vrUCFdHLzAodoiEAGA
  - http://www.educatina.com/algebra/inecuaciones-1?gclid=CMmxspe4vrUCFdHLzAodoiEAGA

Posibles errores y dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de la Propuesta Metodológica.

Una vez que sabemos cuáles son las competencias que deseamos que las y los estudiantes alcancen, nos preguntamos cuáles son las posibles limitaciones de aprendizajes que pueden surgir en el proceso enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones.

Para detectar cuáles son los posibles errores utilizamos el artículo de la revista SUMA (2004) “Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones” en el que se encuentra en qué consisten algunos de estos errores.

Además, si observamos las competencias descritas, podemos hacer notar la relación que existe entre éstos y los errores.

Se pueden hacer diferentes clasificaciones de los errores, aquí se va a utilizar la que hace Radatz (1979), desde la revisión de investigaciones, en la que estable cinco categorías según a qué sean debidos los errores:

- **Dificultades de Lenguaje**
    - No distinguen los distintos signos de desigualdad (≤, ≥, <, >).
    - Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural.
    - No entienden ni saben leer el lenguaje matemático que se usa en la expresión conjuntista.
    - No reconocer inecuaciones si la variable no es “x”.

- **Aprendizaje Deficiente de Conceptos y Procedimientos Previos**
    (a) No cambiar el símbolo de la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo.
    (b) No entender las soluciones numéricas de las inecuaciones como intervalos o como un conjunto de puntos de la recta.
    (c) No entienden como solución un conjunto.

(d) Tienen problemas al manejar expresiones infinitas (en intervalos y representación gráfica).

- **Asociaciones Incorrectas o Rigidez de Pensamiento**
    - No distinguen las regiones solución en una inecuación.

Evaluación

Esta evaluación o valoración se lleva a cabo a lo largo de todo el proceso de aprendizaje, aunque se distingue a veces, por su distinto objetivo, entre evaluación inicial, evaluación formativa del proceso y evaluación sumativa. En nuestra propuesta está encaminada a:

(a) Conocer el nivel de progreso delas y los estudiantes, con relación a las competencias propuestas.

(b) La adecuación del proceso de enseñanza – aprendizaje así como la de los recursos y/o materiales didácticos empleados.

(c) La necesidad de modificación de las estrategias planteadas cuando se compruebe que el aprendizaje de las y los estudiantes no es óptimo.

Etapas de la evaluación

(a) Evaluación inicial

Tiene como finalidad el diagnóstico de tipos y grados de conocimiento sobre cuestiones consideradas fundamentales para empezar a desarrollar el tema a tratar, y que han de ampliarse y profundizarse.

En este sentido, y a lo largo de la prueba inicial para el sondeo de ideas previas y posibles errores conceptuales, la profesora o el profesor ha de observar:

- La habilidad en la ordenación de números.
- La habilidad de representar números en la recta real.
- Reconocimiento de los intervalos.
- Conocimiento de la regla de multiplicación de signos.
- Las estrategias utilizadas para resolver problemas en los que aparecen las inecuaciones.
- Las actitudes frente a la resolución de problemas.

Una cuestión especialmente importante es conocer las estrategias de cálculo de las y los estudiantes en casos sencillos.

En la primera sesión de clase las y los estudiantes realizarán una prueba inicial para detectar los posibles errores conceptuales y sondeo de ideas previas, contenidos y conocimientos previos del tema a tratar.

(b) Evaluación formativa o del proceso de aprendizaje.

A lo largo del proceso de aprendizaje se ha de evaluar una diversidad de aspectos:

(a) Hábitos de trabajo y actitud positiva hacia las matemáticas.

(b) Estrategias matemáticas que se ponen en juego (que en nuestro caso serían: la estrategia de traspasar las propiedades de las desigualdades a las inecuaciones, así como enlazar con la resolución de inecuaciones; representación de intervalos.

(c) Construcción de conceptos y estructuras conceptuales (las actividades se prestan a ello pues permiten que las y los estudiantes vayan construyendo ya simulando los conceptos.), avances, dificultades y errores que se dan en el proceso de aprendizaje.

La evaluación formativa cumple una función fundamental que es la de adecuar el tipo de ayuda dela profesora o el profesor a las necesidades de cada estudiante. Para ello es necesario ir recogiendo diariamente en un diario o cuaderno de clase la información relativa a las cuestiones señaladas, y a todas aquellas otras situaciones no previstas que se dan en el aula, y que sean especialmente relevantes para mejorar la comprensión de los procesos de enseñanza – aprendizaje. El cuaderno del estudiante es otra fuente importante de información para la profesora el profesor, ya que se valora la cantidad de ejercicios realizados, su corrección y la forma de resolverlos, además de la limpieza y el orden del cuaderno. No obstante que daría incompleta esta tarea si no está prevista una entrevista con cada estudiante (informal y breve si se quiere) de la que se puede derivar una ayuda realmente ajustada a las necesidades de cada uno.

Guión para la entrevista

La entrevista debe ser relajada, de manera que se establezca una relación de confianza entre estudiante y profesor. También se podría optar por entrevistar a varios estudiantes a la vez. La entrevista pretende que la profesora o el profesor tengan conciencia de la actitud del estudiante ante los conocimientos que está adquiriendo, si se están alcanzando las competencias propuestas. Por ello algunas preguntas que se podrían hacer a las y los estudiantes, son:

- ¿Recordabas lo que es un intervalo?¿Te ha resultado difícil?
- ¿Has encontrado ayuda en tus compañeros(as)?
- ¿Qué tipo de actividades te han gustado más?
- ¿Has reconocido las inecuaciones en hechos de la vida cotidiana?
- ¿Has tenido tiempo suficiente para realizar las actividades?
- ¿Te han sido útiles los recursos y/o materiales didácticos?
- ¿Te ha extrañado el hecho de que las inecuaciones puedan tener infinitas soluciones?¿Y que puedan no tener solución?
- ¿Qué parte del tema te ha gustado más?
- ¿Cuál has comprendido mejor?
- Etc.

Así podemos ver la utilidad de nuestros procedimientos, el aprovechamiento de los recursos, la integración del estudiante en el grupo y en el aula.

(c) La evaluación sumativa

Se realizará el final del desarrollo de la Propuesta Metodológica y debe mostrar el grado de consecución, por parte de cada estudiante, de las competencias y contenidos propuestos.

Requiere una toma de información amplia y por ello se sugiere utilizar, además de las actividades que se propondrán para conformar una prueba final, el siguiente guión de observación de las y los estudiantes:

Guion para la observación

El guion que se propone es el siguiente:

a. Atiende y muestra interés por el trabajo en clase.
b. No se perciben bloqueos por excesiva motivación, ansiedad o sentido del fracaso o del ridículo.
c. Tiene ilusión por aprender y se divierte con la tarea.
d. Contrasta sus opiniones con las de los demás.
e. Lleva el trabajo al día.
f. Le gusta tener las cosas ordenadas y limpias.
g. Valora el trabajo bien hecho.
h. Trabaja autónomamente: formula, desarrolla y comprueba sus propias ideas.
i. Sabe trabajar en equipo.
j. Valora la utilidad de lo aprendido.
k. Escapas de representar un intervalo algebraica y gráficamente.
l. Es capaz de resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita y expresar su solución gráficamente mediante un intervalo.
m. Identifica y expresa algebraicamente las inecuaciones.
n. Puede resolver inecuaciones de cuadráticas y expresar su solución gráficamente en la recta real.
o. Aplica los conocimientos que va adquiriendo al realizar las actividades en el orden propuesto.

Otro elemento importante en la evaluación es la autoevaluación, con ella recogemos información fundamental y valiosa para la profesora o el profesor, que le permitirá ir mejorando el proceso enseñanza – aprendizaje de las inecuaciones.

Autoevaluación de las y los estudiantes

Se les orientará a las y los estudiantes que realizar una autoevaluación tanto de manera individual como grupal.

Las y los estudiantes se les orientarán llevar a cabo un proceso de auto evaluación periódica. El hecho de que reflexionen acerca de lo que han aprendido, de sus hábitos de trabajo, es importante y positivo no sólo para ellos sino como fuente de información para el profesor. La autoevaluación consistirá en un pequeño informe en torno a los siguientes aspectos:

1. Sobre el cuaderno de clase: conserva ordenadamente todos los materiales; corrige, revisa y completa las tareas: cuida la presentación de lo que hace(gráficos, letra legible, etc.,)
2. Opinión sobre el trabajo realizado durante este periodo: si ha aprendido ono, si la materia le ha gustado, si le ha parecido útil, si el método seguido le parece bueno.
3. Grado de consecución de los objetivos previstos (adecuado, escaso, muy bueno...) analizando los motivos (ha trabajado poco, le ha parecido muy difícil, etc.).
4. Está o no de acuerdo con la valoración que el profesor hace de su trabajo al final de la Propuesta Metodológica, y por qué.

Criterios de Evaluación

- Conocer los principios sobre intervalos y desigualdades.
- Diferenciar desigualdad e inecuación.
- Reconocer una inecuación lineal, sus características y las distintas formas de resolución.
- Identificar inecuaciones cuadráticas.
- Resolver inecuaciones cuadráticas de manera analítica y gráficamente.
- Representar en conjunto solución de una inecuación cuadrática en forma de conjunto, en forma de intervalo y gráficamente.
- Identificar inecuaciones racionales y con valor absoluto.
- Aplicar los distintos métodos para resolver inecuaciones racionales y con valor absoluto.
- Plantear y resolver problemas que involucren inecuaciones.
- Aplicar el software FW26 como método auxiliar para resolver gráficamente inecuaciones cuadráticas y racionales.

- Aplicar el software DERIVE 6 para resolver analítica y gráficamente inecuaciones

Plan de Clase No. 1

Fecha:

Colegio o Instituto:

Grado: **Sección:**

Profesora o Profesor:

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:** Inecuaciones

Indicadores de logro

1. Conoce cómo está organizada la unidad de Inecuaciones.
2. Comprueba las ideas previas, contenidos y conocimientos previos que tienen las y los estudiantes.

Contenidos

1. Presentación de la unidad.
2. Prueba Inicial.

Estrategias Metodológicas

1. **Presentación de la unidad.**

El profesor hará una breve exposición acerca de cómo está estructurada la unidad de Inecuaciones, en cuanto a propósitos, competencias, contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales), importancia de las inecuaciones, formas de enseñanza, recursos y/o materiales a utilizar, evaluación.

2. **Prueba Inicial**

i. **Generalidades**

Fecha: ________________________

Nombres y apellidos ____

Grado: _____ Sesión: ______ Número: ______

ii. **Desarrollo**

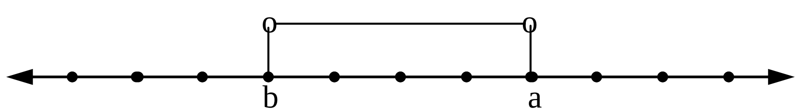
1. Compara los siguientes pares de números poniendo en el recuadro el símbolo (<, > ò =) según convenga:

   $2 \; \square \; 5$ $\qquad$ $\frac{3}{5} \; \frac{5}{7} \; \square$ $\qquad$ $-7 \quad -15 \; \square$ $\qquad$ $0.38 \quad 0.33 \; \square$

2. Completa el cuadro siguiente:

×	+	–
–		
+		

3. Sabiendo que (a, b) se representa en la recta numérica como:



   Represente en la recta numérica los siguientes conjuntos:

   1. [a, b] (b) [a, b) (c) (–∞, b] (d) (a, ∞)

4. ¿Cuántos números hay mayores que 5? ¿Cómo expresas cualquier número mayor que 5? ¿Cómo indicas en la recta numérica los números mayores que 5?

5. ¿Cuántos números hay cuya mitad es menor que 4? ¿Cómo expresas cualquier número cuya mitad es menor que 4? Represéntalos en la recta numérica.

6. Representa en la recta –3 y 4. ¿Cuál es el mayor? ¿Qué ocurre cuando le cambiamos el signo a ambos números? Represéntalos.

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

   1. $\frac{2}{3}(x - 1) + \frac{3}{5}(3 - 2x) = 1$
   2. $x^2 - 3x - 28 = 0$

3. $\frac{3}{2x-1} = \frac{2x}{x+2}$
4. $|x - 3| = x + 1$

8. Tengo 175 córdobas y quiero comprar cuadernos a 52 córdobas. ¿Cuántos puedo comprar? ¿Y si tuviera 278 córdobas?

ii. Si sabemos que el lado de un cuadrado es mayor o igual que ocho, ¿qué podemos decir de su perímetro?

Orientación de la próxima sesión de clase

(a) Busca en el diccionario el significado de la palabra desigualdad.
(b) Busca en internet el significado de la palabra desigualdad aritmética.
(c) Encuentra cinco situaciones del entorno en que se emplee la palabra desigualdad en matemática.

Plan de Clase No. 2

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:**Inecuaciones

Indicadores de logro:

1. Relaciona distintas situaciones de la vida diaria con las inecuaciones..
2. Reconoce e interpreta el significado de los símbolos >, <y ≠.
3. Reconoce las propiedades de las desigualdades.
4. Interpreta las propiedades de las desigualdades.

Tema

Desigualdades.

Materiales:

- Papelógrafo.

- Marcadores.
- Cinta métrica.
- Hoja de ejercicios.

Actividades Iniciales

Les preguntaremos a las y los estudiantes qué situaciones del entorno están presentes las desigualdades. Comentaremos dichas situaciones haciéndoles ver cuáles de las quehan dicho pueden ser representadas por una desigualdad y cuáles no.

Si las y los estudiantes no proporcionan ningún ejemplo, tendremos una serie de situaciones, como, dos monedas que tengan igual denominación y distinta denominación, seleccionaremos parejas de estudiantes que tengan aproximadamente igual estatura y que uno de ellos sea más alto que el otro, la comparación del consumo (kw) mensual en electricidad de los meses de febrero y diciembre del 2011 de la casa de la profesora o del profesor, entre otras.

Solicitarles a dos estudiantes seleccionados que en base a las actividades realizadas y con la ayuda de la profesora y el profesor formular el concepto de desigualdad.

Actividades de Desarrollo

1. Concepto de Desigualdad

Antes de dar inicio a este acápite preguntarle a las y los estudiantes, lo siguiente:

1. Si a es positivo, ¿–a es negativo o positivo?
2. Si a es negativo, ¿–a es negativo o positivo?
3. ¿Qué sucede al comparar dos cantidades?
4. ¿Qué es una igualdad?

Para hablar de la “no igualdad” podemos utilizar varios términos o palabras. Como son: distinto y desigualdad.

Por lo tanto, una “desigualdad” expresa que dos valores no son iguales. Si a y b son dos valores cualesquiera, la notación $a \neq b$ expresa que a es distinto de b.

Ejemplos

$4 \neq 5$, que se lee 4 distinto de 5 (o 5 distinto de 4)

El término “distinto” (signo ≠), no tiene apenas importancia en matemáticas y en la vida real.

El término “desigualdad” si tienen interés en la vida real y; por tanto, en matemáticas; y se forma con cualquiera de esos cuatro símbolos que nos mostrarán en qué sentido las cosas no son iguales:

1. “>”; se lee: “mayor que”
2. “<”; se lee: “menor que”

Las desigualdades que se forman con los signos “>” o “<” se les conoce con el nombre de desigualdades estrictas.

De

$(a < b)$ $(a = b)$ $(a > b)$

si unimos si unimos

$a \leq b$ $a \geq b$

3. “≤”; que se lee: “mayor o igual que”
4. “≥”; que se lee: “menor o igual que”

Si a y b son valores cualesquiera, entonces:

1. “$a < b$” significa que “a es menor que b”;
2. “$a > b$” significa que “a es mayor que b”;
3. “$a \leq b$” significa que “a es menor o igual que b”;
4. “$a \geq b$” significa que “a es mayor o igual que b”

A 1. y 2. se les llaman desigualdades estrictas.

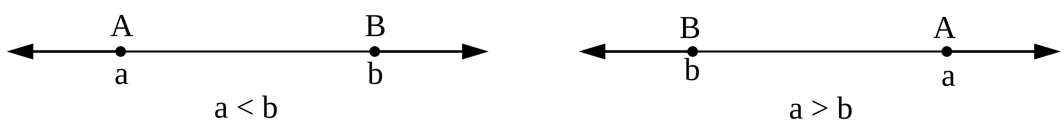
A continuación definiremos formalmente las desigualdades “a > b” y “a < b”.

Definición

Sean a y b números reales cualesquiera. Entonces,

1. a > b si y sólo si a – b es positivo.
2. a < b si y sólo si a – b es negativo.

Representemos en la recta real las desigualdades a < b y a > b. Consideremos a los números a y b coordenadas de los puntos A y B, respectivamente. Entonces, a < b equivale al enunciado “A está a la izquierda de B”, mientras que a > b equivale al enunciado “A está a la derecha de B”.



Ejemplos

(i) 7>5, porque 7 – 5 = 2, que es positivo.

(ii) –9 < –5, porque –9 – (–5) = –9 + 5 = –4, que es negativo.

(iii) $\frac{5}{9}$> 0.5, porque $\frac{5}{9} - \frac{5}{10} = \frac{50-45}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, que es positivo.

(iv) 3> 0, porque 3 – 0 = 3, que es positivo.

(v) –7< 0, porque –7 – 0 = –7, que es negativo.

Nota

Las desigualdades tienen un inconveniente al leerse y es que se leen diferente de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Practiquen con los ejemplos anteriores.

Para comparar u ordenar números cualesquiera, hacemos uso de lo siguiente, llamada ley de tricotomía: Dados dos números cualesquiera a y b, siempre es válida una y solamente una de las siguientes relaciones:

“a es menor que b”; “a es igual a b” o bien “a es mayor que b”

($a < b$) ($a = b$) ($a > b$)

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor, forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de la derecha, forman el segundo miembro.

$$\text{Primer miembro} \longleftarrow a < b \longrightarrow \text{Segundo miembro}$$

De la definición de desigualdad, se deduce que:

(a) Todo número positivo es mayor que cero
(b) Todo número negativo es menor que cero
(c) Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto
(d) Si $a > b$ entonces $b < a$.

Los signos > o < determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.

La notación $a \geq b$ (a es mayor o igual que b), quiere decir que $a > b$, o bien, $a = b$, pero no ambas cosas a la vez. El símbolo $a \leq b$ (a es menor o igual que b), quiere decir que $a < b$, o bien, $a = b$, pero no ambas cosas a la vez. La expresión, $a < b < c$ significa que $a < b$ y que $b < c$, al mismo tiempo, y decimos entonces que b está entre a y c. Igualmente, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y $b > a$, al mismo tiempo.

Hay otros tipos de desigualdades. Por ejemplo, $a < b \leq c$ quiere decir que $a < b$ y $b \leq c$, al mismo tiempo. Igualmente, $a \leq b < c$ quiere decir que $a \leq b$ y $b < c$. Finalmente, $a \leq b \leq c$ significa que $a \leq b$ y $b \leq c$.

Aplicación de los símbolos de desigualdad

Ocurre que muchas veces no sabemos algo exactamente, pero tenemos algo de información.

Ejemplo 1

Martha tiene \$10 y va a ir de compras. ¿Cuánto se va a gastar (sin pedir prestado)?

Respuesta

Algo mayor o igual que \$0 y menor o quizás igual a \$10.

Rebeca gasta ≥ \$0.

Rebeca gasta ≤ \$10.

Esto lo podemos escribir en una línea

\$0 ≤ Rebeca gasta ≤ \$10

(fíjate en que el "≥" lo ponemos al revés y queda "≤" cuando lo ponemos *antes* de lo que Rebeca se va a gastar - asegúrate siempre de que la esquina del símbolo apunta al valor más pequeño).

Ejemplo 2

Martha vuelve de la compra con algo que se ha comprado y dice "me han devuelto el cambio". Cuánto se ha gastado?

Respuesta

Algo más grande que \$0 y menor que \$10 (pero NI \$0 NI \$10):

\$0 < Rebeca gasta < \$10

2. Propiedades de las desigualdades

Las actividades que proponemos en este acápite están orientadas a que las y los estudiantes exploren, deduzcan e interpreten las propiedades de las desigualdades. Se realizarán en grupo de cuatro estudiantes, esto con el propósito de incentivar la discusión y la diversidad de opiniones para indagar acerca de los conocimientos que tienen las y los estudiantes sobre el tema. Las actividades son de comprensión y memoria.

Resuelvan:

- Escribe cinco desigualdades tomando cantidades considerando ambos miembros positivos, negativos o positivas y negativas.
- Súmale 2 a cada miembro de las desigualdades propuesta en el inciso A. ¿Cambia el sentido de la desigualdad? Y si le sumases otra cantidad?
- Formula en lenguaje coloquial y algebraico lo realizado en B.
- Multiplica las desigualdades anteriores por 2. ¿Cambian las desigualdades? ¿Y si la multiplicas por otro número positivo?
- Formula en lenguaje coloquial y algebraico lo realizado en D.
- Multiplica las desigualdades anteriores por –3. ¿Qué ocurre con ellas? ¿Y si las multiplicas por –5? ¿Y por $-\frac{1}{3}$?
- Formula en lenguaje coloquial y algebraico lo realizado en F.

La profesora o el profesor hará una síntesis de las propiedades de las desigualdades, aclarándoles a las y los estudiantes que únicamente se simbolizan las propiedades con el símbolo <.

Propiedades de las desigualdades:

- Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma una misma cantidad (positiva o negativa), entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

En forma simbólica:

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Nota

El símbolo < puede ser sustituido por >, ≤ y ≥

Ejemplos

1. De $5 < 11$ resulta $5 + 6 < 11 + 6$.

2. De $-1 < 3$ resulta $-1 + (-2) < 3 + (-2)$.

3. De $-7 > -10$ resulta $-7 + 5 > -10 + 5$.

4. De $12 > -5$ resulta $12 + (-7) > -5 + (-7)$.

Compruebe los resultados.

- Si ambos miembros de una desigualdad son multiplicados por la misma cantidad positiva, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

En forma simbólica:

$$\text{De } a < b \text{ y } c > 0 \text{ resulta } a\cdot c < b\cdot c$$

Nota

El símbolo $<$ puede ser sustituido por $>$, $\leq$ y $\geq$.

Ejemplos

(a) Si $3 < 7$ entonces $3\cdot 2 < 7\cdot 2$.

(b) Si $-5 > -10$ entonces $(-5)\cdot\frac{1}{5} > -10\cdot\frac{1}{5}$.

(c) Si $9 > -4$ entonces $9\cdot 3 > (-4)\cdot 3$.

(d) Si $-16 < 8$ entonces $(-16)\cdot\frac{1}{4} < 8\cdot\frac{1}{4}$

Compruebe los resultados.

- Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por la misma cantidad negativa, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido contrario de la original.

En forma simbólica:

$$\text{De } a < b \text{ y } c < 0 \text{ resulta } a\cdot c > b\cdot c$$

Ejemplos

(a) Si $5 < 8$ entonces $5\cdot(\mathbf{-2}) > 8\cdot(\mathbf{-2})$.

(b) Si $-25 > -100$ entonces $(-25)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) < (-100)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$.

(c) Si $3 > -1$ entonces $3\cdot(\mathbf{-2}) < (-1)\cdot(\mathbf{-2})$.

(d) Si $-24<12$ entonces $(-24)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) > 8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$

Compruebe los resultados.

- Si a ambos miembros de una desigualdad se le sustituye por sus recíprocos, entonces la desigualdad resultante tendrá sentido contrario de la original.

En forma simbólica:

$$\text{De } a < b \text{ resulta } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Ejemplos

(a) De $5 > 3$ resulta $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$.

(b) De $-2 < 4$ resulta $\frac{1}{-2} > \frac{1}{4}$.

(c) De $7 > -6$ resulta $\frac{1}{7} < \frac{1}{-6}$.

(d) De $-4 < -2$ resulta $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$.

Compruebe los resultados.

Actividades de aprendizaje

(a) Coloca en el recuadro el símbolo “>”, “<” o bien “=” según corresponda:

(a) $15 \ \square \ 12$ (b) $1.4 \ \square \ 1.5$ (c) $-13 \ \square \ -17$

(d) $(-3)^3 \ \square \ -27$ (e) $(-5)^2 \ \square \ -9$ (f) $\frac{2}{3} \ \frac{3}{5}$ $\square$

. (g) $-7 \ \square \ -4$ (h) $\sqrt{225} \ \square \ 15$ (i) $\frac{5}{6} 0.833$ $\square$

(b) Evaluamos una desigualdad, cuando podemos decir si es verdadera o falsas. Completa en el espacio en blanco con V(verdadero) o F(falso) según corresponda.

(a) $7 < 4$ _____ (b) $-5 > -6$ _____ (c) $0.25 < 0.205$ _____

(d) $\frac{2}{7} \leq 1$ _____ (e) $\frac{2}{-5} \geq \frac{-3}{5}$ _____ (f) $-11 > 0$ _____

(c) Escribir la desigualdad correspondiente entre:

1. Tu edad y la de tu madre.
2. Tu edad y la de tu compañero que se sienta al lado derecho.

(d) ¿Qué símbolo de desigualdad pondría entre el área del recinto del parque y el de tu colegio anterior.

(e) Exprese el enunciado en forma de desigualdad.

1. x es negativo.
2. y es no negativo.
3. q es menor o igual a π.
4. d está entre 4 y 2.
5. t no es menor que 5.
6. El negativo de z no es mayor que 3.
7. El cociente de p y q es, cuando mucho, 7.
8. El recíproco de w es, cuando menos, 9.
9. El valor absoluto de x es mayor que 7.
10. b es positivo.
11. s es no positivo.
12. w es mayor que o igual a –4.
13. c está entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$.

Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

Plan de Clase No. 3

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Nombre Unidad:** Inecuaciones

Indicadores de logro:

1. Expresa en notación conjuntista cada tipo de intervalos y viceversa.
2. Representa gráficamente en la recta real intervalos.
3. Expresa en lenguaje algebraico enunciados que estén dados en lenguaje coloquial.

Tema

Intervalos.

Contenidos

(a) Definiciones.

(b) Notación.

(c) Representación gráfica.

Materiales:

1. Papelógrafo.
2. Marcadores.
3. Regla.

Actividades iniciales

Plantearle a las y los estudiantes las siguientes interrogantes, para que sean analizadas y respondidas.

1. Al comparar dos cantidades a y b, ¿qué resulta?
    1. $a = b$
    2. $a < b$
    3. $a > b$

2. Carmen tiene más edad que Julio. Manuel es menor que Javier y Julio es mayor que Javier. ¿Indiquen con una cruz cuál es el menor de todos?

    (i) Javier (b) Carmen (c) Manuel

(d) Julio (e) No se puede determinar

3. En una familia de tres hijos, el padre da dinero a los hijos según su edad. Al mayor le da 2000 pts. y al menor 500. Si Pablo es el mediano, ¿qué puedes decir del dinero que recibe?

A partir de esta sesión de clase iniciaremos el estudio de las inecuaciones que son la base para abordar temáticas más avanzadas como la programación lineal y la investigación de operaciones en general, área de las matemáticas muy importante para la optimización en problemas de ingeniería, administración, economía y otras. Para desarrollar la temática de inecuaciones, es importante tener en cuenta el concepto de comparación entre dos expresiones algebraicas..

Actividades de Desarrollo

Planteamos una serie de ejercicios para que sean discutidos, analizados y resueltos en grupo de cinco estudiantes, y tienen por objetivo lograr que las y los estudiantes interioricen el concepto de intervalos, su expresión algebraica y su representación en la recta real.

(a) ¿Cuántos números hay mayores que 5? ¿Cómo expresarías cualquier número mayor que 5? ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números mayores que 5?
(b) ¿Cuántos números hay menores que 8? ¿Cómo expresarías cualquier número menor que 8? ¿Cómo indicarías en la recta numérica los números menores que 8?
(c) Si sabes el signo del zodíaco de tu compañero que se sientas a tu lado derecho, ¿qué puedes decir de la fecha de su cumpleaños?

Intervalos

La relación de orden $\leq$ en **R** determina una colección natural de subconjuntos conocidos como intervalos. La notación y terminología de estos conjuntos especiales son las siguientes:

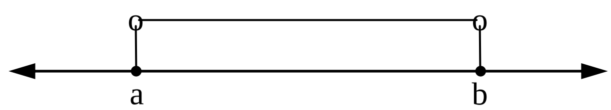
Sean a, b $\in$**R**, y $a \leq b$: Entonces, se obtienen los siguientes subconjuntos de números reales llamados intervalos, lo que a continuación detallamos:

1. *Intervalo abierto* determinado por a y b, el cual se denota por (a, b) es el conjunto de números reales comprendido entre a y b pero sin estar incluidos. A los puntos a y b se denominan puntos terminales.

En notación conjuntista:

$$(a, b) = \{ x \in \mathbf{R} / a < x < b \}$$

Su representación gráfica en la recta real:

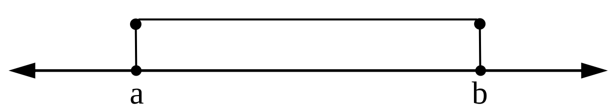


2. *Intervalo cerrado* determinado por a y b, el cual se denota por [a, b] es el conjunto de números reales comprendido entre a y b, inclusive.

En notación conjuntista:

$$[a, b] = \{ x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b \}$$

Su representación gráfica en la recta real:



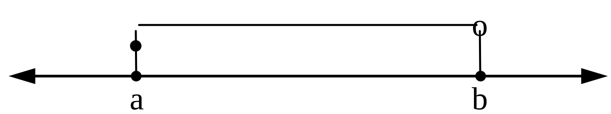
3. *Intervalos semiabiertos (o semicerrados) determinados por* a *y* b.

- *Abierto por la derecha*. Es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyendo a pero no b. Se denota por [a, b).

En notación conjuntista:

$$[a, b) = \{ x \in \mathbf{R} / a \leq x < b \}$$

Su representación gráfica en la recta real:

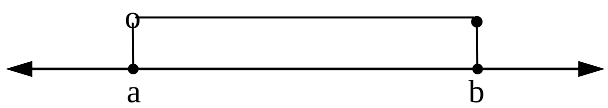


- *Abierto por la izquierda*. Es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluyendo b pero no a. Se denota por (a, b].

En notación conjuntita:

$$(a, b] = \{\ x \in \mathbf{R} / \ a < x \leq b\ \}$$

Su representación gráfica en la recta real:



Cada uno de los intervalos anteriores tienen longitud definida por b – a.

Si en el intervalo abierto (a, b) se da que a = b, ¿a qué es igual (a, a)? ¿y [a, b]?

mientras que el intervalo cerrado correspondiente es el conjunto unimembre [a, a] = { a }.

(iv) *Rayos abiertos (o intervalos abiertos infinitos).*

Si a $\in \mathbf{R}$, entonces los conjuntos definidos por

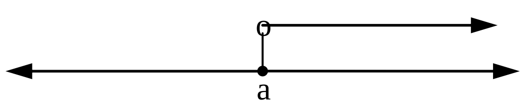
$$(a, \infty) = \{\ x \in \mathbf{R} / \ x > a\ \}$$

y

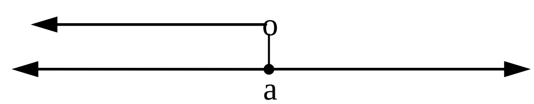
$$(-\infty, a) = \{\ x \in \mathbf{R} / \ x < a\ \}$$

se denominan rayos abiertos (o intervalos abiertos infinitos).

Su representación gráfica:



(a, ∞)



(–∞, a)

4. *Rayos cerrados (o intervalos cerrados infinitos)*

Si a $\in \mathbf{R}$, entonces los conjuntos definidos por

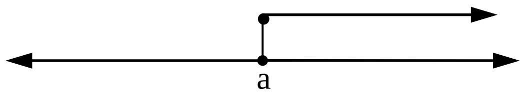
$$[a, \infty) = \{\ x \in \mathbf{R} / \ x \geq a\ \}$$

y

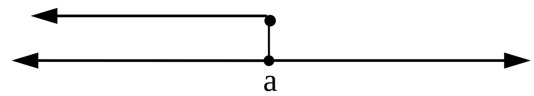
$$(-\infty, a] = \{\ x \in \mathbf{R} / \ x \leq a\ \}$$

se denominan rayos cerrados (o intervalos cerrados infinitos).

Su representación gráfica:



[a, ∞)



(–∞, a]

Con frecuencia conviene pensar en la totalidad del conjunto **R** como un intervalo infinito. En este caso se escribe

$$\mathbf{R} = (-\infty,\ \infty)$$

Ejemplos

Marcar sobre la recta numérica real cada uno de los siguientes intervalos, y mediante notación de conjuntos y símbolos de desigualdad, denotar los intervalos:

(a) (–2, 4) (b) [3, 7] (c) [1, 6) (d) (–4, 0] (e) [0, +∞) (f) (–∞, –5).

Solución

(i) En notación de conjuntos.

(a) $(-2, 4) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, -2 < x < 4 \}$

(b) $[3, 7] = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, 3 \leq x \leq 7 \}$

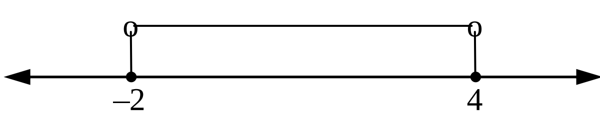
(c) $[1, 6) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, 1 \leq x < 6 \}$

(d) $(-4, 0] = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, -4 < x \leq 0 \}$

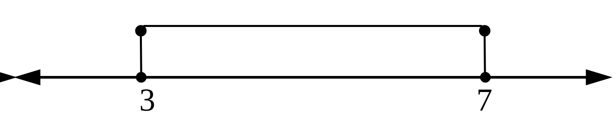
(e) $[0, +\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x > 0 \}$

(f) $(-\infty, -5) = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x < -5 \}$

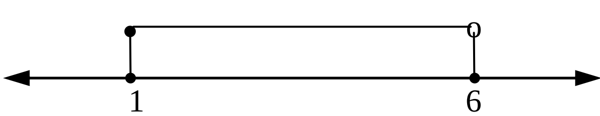
(ii) Representación en la recta real.



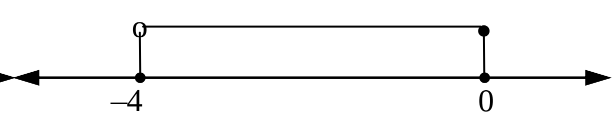
(–2, 4)



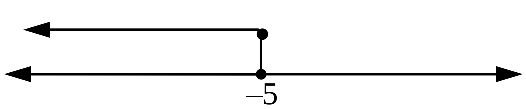
[3, 7]



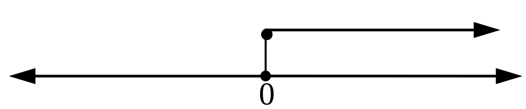
[1, 6)



(–4, 0]



(– ∞, –5)



[0, ∞)

Actividades de Aprendizaje

(i) Representa en la recta real.

1. $[1, 3)$ (b) $(-\infty, 2)$ (c) $[-1, \infty)$

(ii) Expresa una relación con la edad que verifiquen todos las y los estudiantes de tu mismo curso.

(iii) Había tres tarifas en la temporada de béisbol profesional. Los menores de 7 años entran gratis; los menores de 14 años, inclusive, y los mayores de 60 pagan 50 córdobas, y el resto 100 córdobas. Expresa algebraicamente los conjuntos de personas que tienen cada tarifa.

(iv) Expresar algebraicamente todos los números mayores que 5. Representarlos en la recta real.

(v) Expresar los números mayores que 5 pero que no sobrepasen a 7. Representarlos en la recta real.

(vi) Utilice la notación de conjunto y uno o más de los símbolos $<, >\leq$ y $\geq$ para denotar el conjunto dado.

(a) El conjunto de todas las x tal que $2x + 4$ sea no negativo.

(b) El conjunto de todas las r tal que r sea mayor o igual a 2 y menor que 8.

(c) El conjunto de todas las a tal que $a - 2$ sea mayor o igual a -5 y menor que o igual a 7.

7. En los siguientes ejercicios, muestre sobre la recta real el conjunto dado y represente el conjunto por notación para intervalos.

(a) $\{ x : -2 \leq x \leq 1 \}$ (b) $\{ x : x \leq 4$, o bien, $x > 4 \}$

(c) $\{ x : x > 2$ y $x < 12 \}$ (d) $\{ x : x < 3$ o bien $x > 6 \}$

(e) $\{ x : x > -4 \} \cap \{ x : x \leq 0 \}$ (f) $\{ x : x < 3 \} \cup \{ x : x > 6 \}$

(g) $\{ x : x \geq -5 \} \cap \{ x : x < 3 \}$ (h) $\{ x : x > 2 \} \cup \{ x : x > 10 \}$

8. ¿Cuántos números hay cuyo doble es mayor que 10? ¿Cómo expresarías cualquier número cuyo doble es mayor que 10? Represéntalos todos en la recta numérica.

- ¿Cuántos números hay cuyo doble es menor que 16? ¿Cómo expresarías cualquier número cuyo doble es menor que 16? Represéntalos todos en la recta numérica.

Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

(d) Los siguientes ejercicios se proponen para que sean realizados en casa. Se entregarán en la próxima sesión de clases y expondrán su resolución.

i. ¿Cuáles son los números que al sumarles 3 dan como resultado un número mayor que 8? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Represéntalos todos en la recta numérica.

ii. ¿Cuáles son los números que al sumarles 5 dan como resultado un número menor que 13? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números? Represéntalos todos en la recta numérica.

Plan de Clase No. 4

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:** Inecuaciones

Indicadores de logro:

1. Resuelve analítica inecuaciones lineales.

2. Interpreta y reconoce el conjunto solución de inecuaciones lineales.
3. Aplica las inecuaciones lineales a la solución de problemas reales.

Tema

Inecuación lineal.

Contenidos

1. Definición. Notación.
2. Conjunto solución.
3. Gráfica.

Materiales:

1. Papelógrafo.
2. Marcadores.
3. Regla.

Actividades iniciales

Muchas aplicaciones a situaciones prácticas de las matemáticas de hecho, en este siglo las inecuaciones han adquirido una gran importancia debido a su utilidad al aplicarse a la programación lineal en los negocios y en otras áreas. En esta sesión de clase daremos inicio al estudio de las inecuaciones empezando con las inecuaciones lineales.

Realizar las siguientes preguntas a las y los estudiantes:

1. ¿Qué es una igualdad?
2. ¿Qué es una ecuación?
3. ¿A qué le llamamos fórmula?
4. ¿A qué le llamamos identidad?

En base a la discusión de las respuestas de las y los estudiantes presenta en un paleógrafo la siguiente síntesis:

$$\text{Igualdades}\begin{cases}\text{Ecuaciones}\\ \text{Fórmulas}\\ \text{Identidades}\\ \text{Equivalencia}\end{cases}$$

Actividades de Desarrollo

Iniciamos planteándoles a las y los estudiantes una serie de ejercicios sencillos para que aprendan y comprendan el concepto de inecuación lineal. Además, les va a permitir resolver y representar en la recta real el conjunto solución de una inecuación lineal, así como problemas donde intervengan ellas. Estos ejercicios serán realizados por grupo de cinco estudiantes.

1. ¿Cuáles son los números que al restarles 2 dan como resultado un número mayor que 3? ¿Cuántos hay? ¿Cómo lo expresarías cualquiera de estos números en lenguaje algebraico? Represéntalos todos en la recta numérica.
2. ¿Cuáles son los números que al sumarles 4 dan como resultado un número mayor que 7? ¿Cuántos hay? ¿Cómo expresarías cualquiera de estos números en lenguaje algebraico? Represéntalos todos en la recta numérica.
3. ¿Cuántos números hay cuya mitad es menor que 4? ¿Cómo expresarías cualquier número cuya mitad es menor que 4 en lenguaje algebraico? Represéntalos todos en la recta numérica.
4. ¿Cuántos números hay cuyo doble es mayor que 10? ¿Cómo expresarías cualquier número cuyo doble es mayor que 10 en lenguaje algebraico? Represéntalos todos en la recta numérica.

En base a los resultados obtenidos, orientar a cada grupo a que respondan lo siguiente:

1. ¿Qué nombre reciben las expresiones algebraicas que obtuvieron? ¿Cómo se define?
2. ¿Cómo se llama el conjunto de números que satisface cada enunciado.
3. ¿Cuál es la diferencia de inecuación y desigualdad?
4. ¿Cómo definiría inecuación?
5. ¿Explique cómo encontró el conjunto solución en cada caso?

1. Inecuación lineal

Antes de dar inicio a nuestro estudio sobre inecuaciones lineal es necesario señalar algunas generalidades relativas a lo que es una inecuación, su calificación y su conjunto solución.

Definición

Una inecuación es una desigualdad en la que aparece alguna incógnita en uno o en los dos miembros de una desigualdad.

Ejemplo

Son inecuaciones:

- $2 + 3x < 5$
- $x^2 - 5x + 3 \geq 0$
- $3x - y > 5y + 4x - 14$
- $|z - 1| > 1$
- $\frac{x}{x-1} > \frac{-2}{3+x}$

Las inecuaciones se clasifican por el grado y las incógnitas que tiene. En esta sesión de clase estudiaremos las inecuaciones de primer grado también llamada lineal.

Las soluciones de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

Veamos el siguiente:

Ejemplo

Encuentra los números que verifican: que el doble menos uno sea mayor que si al número le sumamos 4.

Solución

Determinemos primeramente la expresión algebraica correspondiente al enunciado del ejemplo.

Sea x el número.

El doble de ese número: $2x$

El doble del número disminuido una unidad: $2x - 1$

Al número le sumamos 4: $x + 4$

El doble del número menos uno sea mayor que al número sumado 4, es:

$$2x - 1 > x + 4$$

Número	Doble menos 1	Número más 4	Doble menos 1 mayor que el número más 4
9	18 – 1 = 17	13	SÍ
11	22 – 1 = 21	15	SÍ
90	180 – 1 = 179	94	SÍ
6	12 – 1 = 11	10	SÍ
3	6 – 5	7	NO
–4	–8 – 1 = –9	0	NO

Los números 9, 11, 90 y 6 vemos que la hacen cierta así como otros muchos números. Sin embargo, los números 3, –4 no la hacen cierta, estos números no cumplen la condición, también hay otros. Luego nos damos cuenta que la respuesta a una inecuación no es única, existen varias soluciones.

¿De qué otra forma resolvería la inecuación?

Ejemplos

A. $2x - 1 > 0$ es válida para algunos valores. A este tipo de inecuación se le llama inecuación incondicional.

B. $x - 1 < x$ es válida para todos los valores. A este tipo de inecuación se le llama inecuación incondicional.

Resolver una inecuación es encontrar todos los números reales que la hacen verdadera. A estos números los llamamos soluciones de la inecuación.

A diferencia de las ecuaciones, es frecuente que una inecuación tenga infinitas soluciones, por lo que para representar el conjunto de estas soluciones haremos uso de la notación de intervalos

El proceso de resolución de inecuaciones que veremos después se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla.

Se dice que dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

A continuación iniciamos nuestro estudio sobre inecuaciones lineales.

Definición (Inecuación lineal)

Si a, b son dos números reales con $a \neq 0$, cualquiera de las cuatro expresiones siguientes se llama inecuación lineal de una variable. La letra x se llama variable (o incógnita).

$ax > b$; $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$

Resolver la inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen que sea cierta. A estos valores los llamaremos soluciones de la inecuación. La inecuación posee infinitas soluciones que se pueden representar geométricamente por medio de los puntos de una semirrecta. En algunos casos nos encontraremos que una inecuación no posee solución y el conjunto solución es el conjunto vacío.

Para resolver la inecuación lineal, se trata de reescribirla en pasos sucesivos, hasta que la variable x quede sola de un lado de la desigualdad. Para ello debe tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades; en lo demás se procede como se hace para resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

Entre la resolución de ecuaciones y de inecuaciones se presentan algunas diferencias, como el hecho de que las soluciones de las ecuaciones son valores determinados de la(s) variable(s), mientras que las soluciones de las inecuaciones son intervalos de valores. Algunas de estas diferencias aparecerán conformes nos adentremos en el estudio de las inecuaciones.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$5x - 3 < 7 + 3x$$

Solución

Para anular el término –3 del lado izquierdo, sumamos **+3** en ambos lados:

$$5x - 3 + 3 < 7 + 3x + 3$$

$$5x < 10 + 3x$$

Para anular el término 3x del lado derecho, se suma **–3x** en ambos lados:

$$5x + (-3x) < 10 + 3x + (-3x)$$

Reduciendo:

$$2x < 10$$

Para eliminar el coeficiente 2 del término 2x, dividimos ambos miembros entre **2**. Como se trata de una cantidad positiva, el signo de la desigualdad no cambia.

$$\frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$

Simplificando:

$$x < 5$$

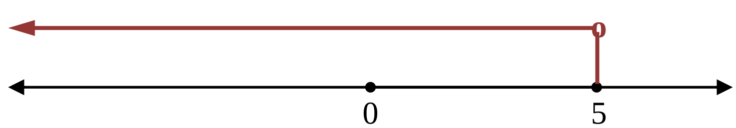
El conjunto solución lo podemos escribir de las siguientes formas:

$$S = \{ x \in \mathbf{R} \; / \; x < 5 \}$$

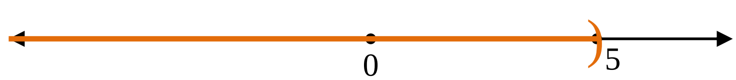
O bien

$$(-\infty, 5)$$

O también gráficamente



Otra forma de representarlo



Ejemplo

Resolver la inecuación

$$-2x + 6 \leq 18 + 4x$$

Solución

Para anular el término 6 del lado izquierdo, sumamos **–6** en ambos miembros:

$$-2x + 6 + (-6) \leq 18 + 4x + (-6)$$

Reduciendo:

$$-2x \leq 12 + 4x$$

Para anular el término 4x del lado derecho, le sumamos **–4x** en ambos lados:

$$-2x + (-4x) \leq 12 + 4x + (-4x)$$

Reduciendo:

$$-6x \leq 12$$

Para eliminar el coeficiente –6 del término –6x, dividimos ambos miembros entre –6. Como se está dividiendo por una cantidad negativa, el signo de la desigualdad se invierte.

$$\frac{-6x}{-6} \geq \frac{12}{-6}$$

Simplificando:

$$x \geq -2$$

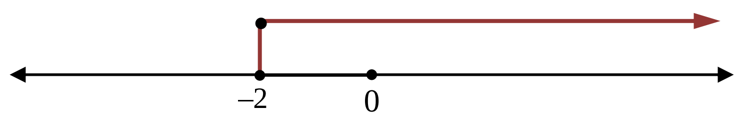
El conjunto solución lo podemos escribir de las siguientes formas:

$$S = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x \geq -2 \}$$

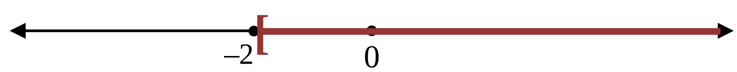
O bien

$$[-2, \infty)$$

O también gráficamente



Otra forma de representarlo



Ejemplo

Resolver la inecuación

$$\frac{5}{4} + \frac{2}{3}x \geq \frac{1}{6}x - \frac{7}{2} - 3x$$

Solución

Para resolver esta inecuación lineal con coeficientes fraccionarios, multiplicamos ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores con el objeto de eliminarlos y se reduce para convertirla en una inecuación lineal con coeficientes enteros.

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 12:

$$12 \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}x\right) \geq 12\left(\frac{1}{6}x - \frac{3}{4} - 3x\right)$$

Se efectúan las operaciones para cada miembro:

$$9 + 8x \geq 2x - 9 - 36x$$

Trasponemos términos aislando en el miembro izquierdo los términos en x, y en el miembro derecho los términos constantes, teniendo en cuenta que al transponerlo lo que suma pasa a restar y lo que resta pasa a sumar:

$$8x - 2x + 36x \geq -9 - 9$$

Reduciendo:

$$42x \geq -18$$

Dividiendo por 42:

$$\frac{42x}{42} \geq \frac{-18}{42}$$

Reduciendo:

$$x \geq -\frac{3}{7}$$

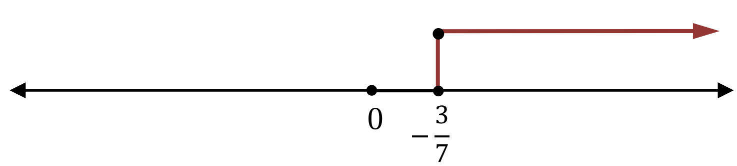
El conjunto solución lo podemos escribir de las siguientes formas:

$$S = \{\, x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq -\frac{3}{7} \,\}$$

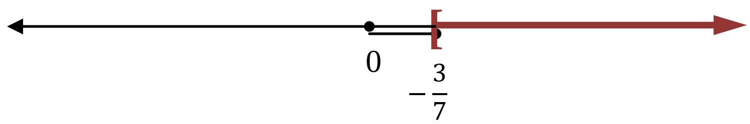
O bien

$$[-\frac{3}{7}, \infty)$$

O también gráficamente



Otra forma de representarlo



Algunas veces nos encontramos con inecuaciones que se reducen a desigualdades numéricas; es decir, son inecuaciones equivalentes a otras en que la variable no a aparecer. El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales, o bien, el conjunto vacío (ϕ).

Ejemplo

Resolver la inecuación

$$6x > 2(4 + 3x)$$

Solución

Efectuamos la operación indicada que aparece en el miembro derecho, seguidamente transponen los términos (pasar los términos de un miembro a otro cambiando el signo equivale a aplicar la propiedad I) para que aquellos que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los términos independientes en el otro. Entonces,

$6x > 2(4 + 3x) \Rightarrow 6x > 8 + 6x$

$\Rightarrow 6x - 6x > 8$

$\Rightarrow 0 > 8$ (Desigualdad falsa)

Por consiguiente, no existen valores de x que me satisfaga la inecuación dada. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto vacío (ϕ).

Ejemplo

Resolver la inecuación

$$\frac{1}{3}(9x - 1) \leq 4 + 3x$$

Solución

Multiplicando por 3 a ambos miembros de la inecuación obtenemos:

$$3 \cdot \frac{1}{3}(9x - 1) \leq 3 \cdot (4 + 3x)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$9x - 1 \leq 12 + 9x$$

Transponiendo términos:

$$9x - 9x \leq 12 + 1$$

Reduciendo:

$$0 \leq 13$$

Esta desigualdad es verdadera y como es equivalente a la dada, se tiene que cualesquiera que sea el valor de x satisface a la inecuación. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto **R** de los números reales.

Ejemplo

Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?.

Solución

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

$$\underbrace{\text{Peso de la furgoneta}}_{875} \quad - \quad \underbrace{\text{peso de 4 cajones}}_{4x} \quad \underbrace{\text{no es menor que 415 kg}}_{\geq\ 415}$$

Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:

(a) Restamos 875 a ambos miembros de la inecuación:

$$875 - 875 - 4x \geq 875 - 415$$

(b) Reduciendo términos:

$$-4x \geq 460$$

(c) Para despejar x, multiplicamos ambos miembros por $-\frac{1}{4}$. Como estamos multiplicando por una cantidad el signo de la desigualdad se invierte.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)(-4x) \leq \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 460$$

(d) Reduciendo:

$$x \leq -115$$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$.

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo (0, 115]. Graficamos la solución en la recta real:

Ejemplo

Una compañía debe ensamblar 1 000 artefactos electrónicos en una semana gastando no más de C$6 000 por concepto de mano de obra. Si el costo de mano de obra por ensamblar una unidad durante las horas diurnas es C$5 y C$7 el de las nocturnas. ¿Cuál es el mínimo número de artefactos que deben ser ensamblados en las horas diurnas?

Solución

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al número de artefactos ensamblados.

Planteamos la inecuación:

$$\underbrace{\text{Costo total por las fabricadas en el día}}_{5x} + \underbrace{\text{Costo total por las fabricadas en la noche}}_{7(1\,000 - x)} \leq 6\,000$$

Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:

(e) Efectuamos las operaciones que se indican:

$$5x + 7000 - 7x \leq 6000$$

(f) Reducimos términos semejantes:

$$-2x + 7000 \leq 6000$$

(g) Transponemos términos (aislamos el término en x):

$$-2x \leq 6000 - 7000$$

(h) Reducimos:

$$-2x \leq -1000$$

(i) Dividimos ambos miembros entre –2. Como estamos dividiendo por una cantidad el signo de la desigualdad se invierte:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2x) \geq \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1000)$$

(j) Reduciendo:

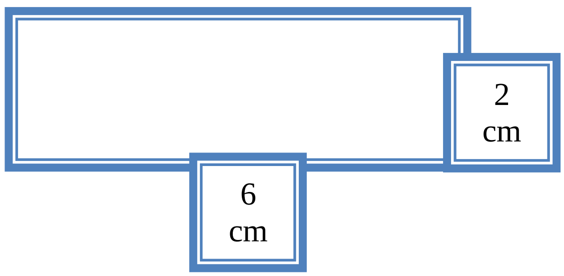
$$x \geq 500$$

(k) Esto significa que debe ensamblar al menos 500 artefactos en las horas diurnas.

Actividades de Aprendizaje

- Resolver las siguientes inecuaciones:
  1. $3x - 5 \geq 2x + 11$
  2. $4x - (5 + 7x) < 2(x + 1)$
  3. $\frac{1}{3}(x - 4) - 1 < 1 + 2$
  4. $4(3 + 5x) - \frac{1}{3}(4x - 1) \leq x + 2$
  5. $2(x + 6) + \frac{1}{2}x < -5x + \frac{5}{3}$
  6. $\frac{3}{5}(4x + 3) - \frac{1}{2}(4x - 7) \geq 6 - (8x + 11)$
- Resolver las siguientes inecuaciones:
  (a) $4x - 1 \geq 2(2x - 4)$
  (b) $3(2 - 4x) \geq 4(4 - 3x)$
  (c) $\frac{1}{2}x < 4 + \frac{1}{2}(x - 3)$
  (d) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x \leq \frac{4}{3}x$
- ¿Cuáles son los números cuyo triplo excede a su duplo en más de 20?
- ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de 4, que satisface la siguiente inecuación: $x + 2 < 3x + 1$?
- Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7. ¿Qué se puede decir de su perímetro p?

- Un padre y su hijo se llevan 22 años. Determinar en qué período de sus vidas, la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo.
- Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 100 Km/h y 150 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 3 horas?
- Una fábrica paga a sus viajantes $10 por artículo vendido más una cantidad fija de $500.Otra fábrica de la competencia paga $15 por artículo y $300 fijas. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?
- El perímetro de un cuadrado no supera el perímetro del rectángulo de la figura. ¿Qué se puede asegurar acerca de la superficie *S* del cuadrado?



Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

(d) Los siguientes ejercicios se proponen para que sean realizados en casa. Se entregarán en la próxima sesión de clases y expondrán su resolución.

1. Dentro de cinco años Jimena tendrá no menos de 18 años. ¿Qué edad tiene actualmente Jimena?
2. Ezequiel y sus amigos organizaron un equipo de futbol. Tienen que comprar su indumentaria para competir. Recorriendo tiendas encontraron que cada remera

les puede costar entre $ 28 y $ 32; cada pantalón, entre $ 20 y $ 25. Ellos están dispuestos a gastar, por la compra de los 18 conjuntos, no más de $ 2000.

(a) Escriban la inecuación que expresa el gasto que deberán realizar, en función de la compra de las remeras y los pantalones.

(b) Escriban, por lo menos, tres soluciones posibles para la adquisición de la indumentaria.

3. Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a $4 el litro y otro a $7 el litro. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros de capacidad y quiere que la mezcla no cueste más de $6 ni menos de $5 el litro. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final esté en el intervalo deseado.

Plan de Clase No. 5

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:** Inecuaciones

Indicadores de logro:

- Resuelve analítica y gráficamente inecuaciones cuadráticas.
- Desarrolla estrategias para solucionar y representar gráficamente el conjunto solución de una desigualdad cuadrática.
- Aplica las inecuaciones cuadráticas a la solución de problemas reales.

Tema

Inecuación Cuadrática.

Contenidos

1. Definición. Notación.
2. Conjunto solución.
3. Gráfica.

Materiales:

1. Papelógrafo.

2. Marcadores.
3. Regla.

Actividades Iniciales

Resuelva en grupos lo siguiente:

1. Factorice:
   1. $x^2 – 5x – 14$
   2. $6x^2 + 5x – 4$
2. Dada $f(x) = x^2 – 3x – 10$. Determine:
   (a) Vértice.
   (b) Raíces.
   (c) Gráfico.
3. ¿Cuáles son las distintas formas de resolver una ecuación cuadrática?

Actividades de Desarrollo

Las actividades que proponemos en esta sesión de clase tienen por fin de involucrar a las y los estudiantes con inecuaciones cuadráticas con una incógnita. Aprenderá a resolverla usando los conocimientos algebraicos adquiridos a lo largo de sus estudios secundarios. Las actividades que proponemos son de comprensión, memoria y algorítmica.

Los métodos que presentaremos difieren de los desarrollados para resolver inecuaciones lineales y desigualdades con valor absoluto.

El desarrollo de esta parte estará a cargo de la profesora o el profesor.

Definición

Una inecuación de segundo grado es toda inecuación equivalente a una de las siguientes:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq0$, siendo a, b y c números reales con $a \neq 0$.

Ejemplos

Son inecuaciones cuadráticas:

(a) $x^2 - 3 + 2 > 0$;

(b) $3x^2 - x + 8 \leq x - 2$;

(c) $4x^2 + 7x - 1 \geq x^2 - 6$

Es fácil verificar que la inecuación (a) tendrá como solución todos los números reales x que pertenecen a la parábola que representa el miembro cuadrático de la inecuación que se encuentren por encima del eje de las abscisas; es decir, que son mayores que cero.

El conjunto solución de una inecuación cuadrática representa un intervalo o la unión de dos intervalos de números reales.

Resolución de inecuaciones cuadráticas

Si el polinomio que caracteriza la inecuación tiene raíces reales, se puede usar su descomposición en factores para resolverla como un sistema de ecuaciones de primer grado. Se pueden dar los siguientes casos.

Una inecuación cuadrática la podemos resolver analíticamente y gráficamente. Primeramente veremos la resolución analítica mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

Solución

La solución de esta inecuación se obtiene mediante los siguientes pasos:

(a) Descomponemos en factores el miembro cuadrático de la inecuación utilizando alguno de los métodos ya estudiados en años anteriores.

$$(x - 5)(x + 2) < 0$$

Antes de dar inicio al paso 2, debemos tener en cuenta que decir "menor que cero" y decir "negativo" es lo mismo.

(b) Establecemos las condiciones bajo las cuales se cumple la inecuación aplicando para este caso la regla de los signos. Este segundo paso es necesario hacerlo ya que, como nuestro miembro cuadrático determina dos factores y el producto de ellos debe ser, en este caso, negativo, entonces la inecuación se cumplirá cuando ambos factores tenga signos contrarios. En forma matemática, se presentan las siguientes condiciones:

1. $x - 5 > 0$ y $x + 2 < 0$, o bien,
2. $x - 5 < 0$ y $x + 2 > 0$

(c) Resolvemos ambas condiciones que hacen que se cumpla la inecuación dada, teniendo en cuenta que el enlace "y" nos indica intersección o simultaneidad en la satisfacción de las condiciones. Es decir, el conjunto solución de la primera condición debe satisfacer simultáneamente que $x - 5$ sea positivo y $x + 2$ sea negativo; y, el conjunto solución de la segunda condición debe cumplir simultáneamente que $x - 5$ sea negativo y $x + 2$ sea positivo.

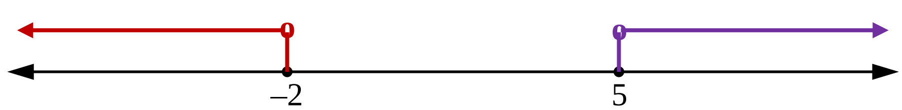
a. Resolvamos la primera condición.

$x - 5 > 0$ y $x + 2 < 0$ es equivalente a $x > 5$ y $x < -2$

En este caso, se observa que no existen números reales x que sean a la vez mayores que 5 y menores que –2. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto vacío (ϕ).

$$S_1 = \phi$$

Esta situación la podemos ver gráficamente:



Del gráfico observamos que las semirrectas no se interceptan por lo que concluimos que no tienen coordenadas en común; en consecuencia, no existen números reales x que cumplan simultáneamente a ambas inecuaciones lineales. Entonces, el conjunto solución es el conjunto vacío.

b. Resolvamos la segunda condición.

$x - 5 < 0$ y $x + 2 > 0$ es equivalente a $x < 5$ y $x > -2$

A simple vista se observa que la segunda condición se satisface para aquellos números reales x que son mayores que –2 y menores que 5. Por lo tanto, el conjunto solución, es:

En notación de conjuntos

$$S_2 = \{ x \in \mathbf{R} / -2 < x < 5 \}$$

En forma de intervalo

$$S_2 = (-2, 5)$$

En forma gráfica

De la figura observamos que la intersección de ambas inecuaciones lineales corresponde a la parte verde. Colocamos paréntesis en cada punto por no incluirse.

(d) El conjunto solución de la inecuación original será la unión de ambas soluciones.

$S_f = S_1 \cup S_2$

$= \phi \cup (-2, 5)$

$= (-2, 5)$

O sea,

$$S_f = (-2, 5)$$

Ejemplo

Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Solución

La solución de esta inecuación se obtiene mediante los siguientes pasos:

1. Descomponemos en factores el miembro cuadrático de la inecuación utilizando alguno de los métodos ya estudiados en años anteriores.

$$(x - 3)(x - 2) > 0$$

Antes de dar inicio al paso 2, debemos tener en cuenta que decir “mayor que cero” y decir “positivo” es lo mismo.

2. Establecemos las condiciones bajo las cuales se cumple la inecuación aplicando para este caso la regla de los signos. Este segundo paso es necesario hacerlo ya que, como nuestro miembro cuadrático determina dos factores y el producto de ellos debe ser, en este caso, positivo, entonces la inecuación se cumplirá cuando ambos factores tenga signos iguales; es decir, si ambos son positivos o ambos son negativos. En forma matemática, se presentan las siguientes condiciones:
    3. $x - 3 > 0$ y $x - 2 > 0$, o bien,
    4. $x - 3 < 0$ y $x - 2 < 0$

1. Resolvemos ambas condiciones que hacen que se cumpla la inecuación dada, teniendo en cuenta que el enlace “y” nos indica intersección o simultaneidad en la satisfacción de las condiciones. Es decir, el conjunto solución de la primera condición debe satisfacer simultáneamente que $x - 3$ y $x - 2$ sean positivos; y, el conjunto solución de la segunda condición debe cumplir simultáneamente que $x - 3$ y $x - 2$ sean negativos.

a. Resolvamos la primera condición.

$x - 3 > 0$ y $x - 2 > 0$ es equivalente a $x > 3$ y $x > 2$

En este caso, se observa que el conjunto solución (S_1) de esta primera condición es el conjunto de números reales mayores que 3 ya que todo número real mayor que 3 es mayor que 2. Por lo tanto, el conjunto solución es:

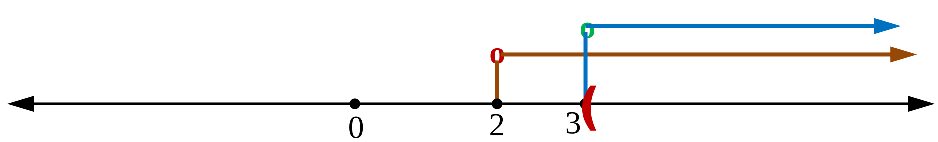
En notación de conjuntos

$$S_1 = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x > 3 \}$$

En forma de intervalo

$$S_1 = (3, \infty)$$

Esta situación la podemos ver gráficamente:



Del gráfico se observa que las semirrectas se interceptan a partir de 3. El conjunto solución lo representamos por la parte roja. El paréntesis indica que el punto cuya coordenada es 3 no está incluido.

b. Resolvamos la segunda condición.

$x - 3 < 0$ y $x - 2 < 0$ es equivalente a $x < 3$ y $x < 2$

En este caso, se observa que el conjunto solución (S_2) de esta segunda condición es el conjunto de números reales menores que 2 ya que todo número real menor que 2 es menor que 2. Por lo tanto, el conjunto solución es:

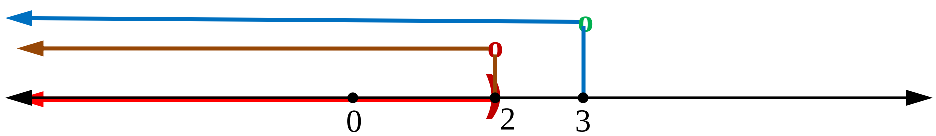
En notación de conjuntos

$$S_1 = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x < 2 \}$$

En forma de intervalo

$$S_1 = (-\infty, 2)$$

Esta situación la podemos ver gráficamente:



Del gráfico se observa que las semirrectas se interceptan a partir de 2. El conjunto solución lo representamos por la parte roja. El paréntesis indica que el punto cuya coordenada es 2 no está incluido.

4. El conjunto solución de la inecuación original será la unión de ambas soluciones.

$S_f = S_1 \cup S_2$

$= (-\infty, 2) \cup (-2, 5)$

O sea,

$$S_f = (-\infty, 2) \cup (-2, 5)$$

Otra forma de resolver una inecuación cuadrática es aplicando los conceptos de número crítico y número de prueba. Este procedimiento lo ilustramos con el siguiente ejemplo

Un número crítico de la inecuación mencionada es una raíz real de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Si r_1 y r_2 son números críticos y $r_1 < r_2$, entonces el polinomio $ax^2 + bx + c$ sólo puede cambiar designo algebraico en r_1 y r_2; por la tanto el signo más o menos de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2) y (r_2, ∞).

Para determinar si estos intervalos son o no solución de la inecuación, se evalúa con un número x de prueba arbitrario en $ax^2 + bx + c$ para cada intervalo. Los resultados obtenidos sirven para ubicar el conjunto de soluciones de la inecuación.

Un procedimiento sistemático para la resolución de inecuaciones cuadráticas es el siguiente:

1. Se trasladan todos los términos de la inecuación al miembro de la izquierda.
2. Se hallan los números críticos r_1 y $r_2$de la ecuación cuadrática y se forman los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2) y (r_2, ∞).
3. Se prueban con valores de fácil sustitución localizados en dichos intervalos para determinar cuáles son los que satisfacen la inecuación.

Ejemplo

Resolver las siguientes inecuaciones:

$$x^2 + x - 2 > 0$$

Solución

(a) Factorizamos la expresión cuadrática pues uno de los lados es igual a cero.

$$(x + 2)(x - 1) > 0$$

(b) Hallamos los números críticos igualando a cero a cada factor del miembro izquierdo.

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Los números críticos son –2 y 1. Estos valores dividen la recta real en tres intervalos: (–∞, –2), (–2, 1) y (1, ∞).

Deseamos determinar el signo de la expresión $x^2 + x - 2$ en los intervalos (–∞, –2), (–2, 1) y (1, ∞). Para esto determinamos el signo de cada uno de los factores usando un valor de x en cada uno de los intervalos. Este valor particular de x se conoce como valor prueba. Por ejemplo, para determinar el signo del factor x + 2 en el intervalo (–∞, –2) escogemos un valor de x que este en este intervalo, digamos x = –3 y lo substituimos en x + 2. Obtenemos x + 2 = –3 + 2 = –1. Luego, x + 2 es negativo en el intervalo (–∞, –2). Por otro lado x–1 = –3–1 = –4 por lo que x–1 es negativo en el intervalo (–∞, –2). Repetimos este procedimiento para los otros dos intervalos. Construimos una tabla, llamada tabla de signos, para organizar la información obtenida:

Intervalos	(–∞, –2) **k = –3**	(–2, 1) **k = 0**	(1, ∞) **k = 2**
Signo de x + 2	–	+	+
Signo de x – 1	–	–	+
Signo de (x + 2)(x – 1)	+	–	+

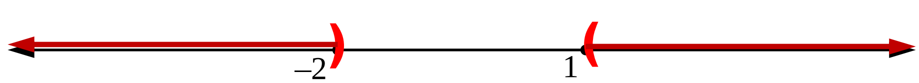
El signo de (x + 2)(x – 1) se obtiene multiplicando el signo de x + 2 con el signo de x – 1. Nos interesa saber dónde (x + 2)(x – 1) > 0; es decir, dónde (x + 2)(x – 1) es positiva. Esto ocurre en(–∞, –2) o en (1, ∞).

Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo:

$$S = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

De manera gráfica:



Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$x^2 \leq 4x + 12$$

Solución

1. Primero despejemos para que un lado de la inecuación sea cero.

$$x^2 - 4x - 12 \leq 0$$

2. Factorizamos el miembro cuadrático.

$$(x - 6)(x + 2) \leq 0$$

3. Hallamos los números críticos igualando a cero a cada factor del miembro izquierdo.

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Los números críticos son –2 y 6. Estos valores dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 6)$ y $(6, \infty)$.

Determinemos el signo de la expresión $x^2 - 4x - 12$en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 6)$ y $(2, \infty)$. Para esto determinamos el signo de cada uno de los factores usando un valor de x en cada uno de los intervalos. Este valor particular de x se conoce como valor prueba. Por ejemplo, para determinar el signo del factor x +6 en el intervalo $(-\infty, -2)$ escogemos un valor de x que este en este intervalo, digamos $x = -4$ y lo substituimos en $x - 6$. Obtenemos $x - 2 = -4 - 2 = -6$. Luego, $x - 6$ es negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$. Por otro lado $x+2 = -4+2 = -2$, por lo que $x+2$ es negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$. Repetimos este procedimiento para los otros dos intervalos. Construimos una tabla, llamada una tabla de signos, para organizar la información obtenida:

Intervalos	$(-\infty, -2)$ **k = –3**	$(-2, 6)$ **k = 0**	$(6, \infty)$ **k = 7**
Signo de $x - 6$	–	–	+
Signo de $x + 2$	–	+	+
Signo de $(x - 6)(x + 2)$	+	–	+

El signo de $(x - 6)(x + 2)$ se obtiene multiplicando el signo de $x - 6$ con el signo de $x + 2$. Nos interesa saber dónde $(x - 6)(x + 2) \leq 0$; es decir, dónde $(x - 6)(x + 2)$ es negativa. Esto ocurre en$(-2, 6)$.

Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo:

$$S = (-2, 6)$$

De manera gráfica:

Resolución de Inecuaciones Cuadráticas por el método gráfico.

A continuación veremos un procedimiento general que es válido para cualquier inecuación cuadrática tenga o no raíces reales. Este procedimiento se basa en saber si la representación gráfica (una parábola) está abierta hacia arriba o hacia abajo y si corta al eje de abscisas.

Dado el polinomio

$$ax^2 + bx + c$$

Su gráfico es una parábola abierta hacia arriba si a es positivo y hacia abajo si a esa negativa.

El discriminante del polinomio es

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$ la gráfica corta al eje x en dos puntos m y n que se obtienen con la fórmula de la ecuación de segundo grado. Si $\Delta = 0$ la gráfica corta al eje x en un solo punto y si $\Delta < 0$ la gráfica no corta al eje x.

Dado el polinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b, c $\in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Respondan:

1. ¿Cómo se obtienen las raíces de P?

2. El gráfico de P corresponde a una parábola. ¿Cuándo se abre hacia arriba? ¿Cuándo se abre hacia abajo?

3. ¿Cómo se obtienen el vértice de la parábola?

Ejemplo

Resolver gráficamente la siguiente inecuación

$$x^2 – 8 < 2x$$

Solución

Primero despejamos para que un lado de la inecuación sea cero.

$$x^2 – 2x – 8 < 0$$

Graficamos la parábola correspondiente al miembro cuadrático, determinando las raíces (o valores reales que hacen cero a dicha expresión), seguidamente, hallamos su vértice y determinamos si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.

En este caso,

$$a = 1, \quad b = –2, \quad c = –8$$

Hallamos las raíces del miembro cuadrático, igualándolo a cero:

$x^2 – 2x – 8 = 0 \Rightarrow (x – 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x – 4 = 0$ o bien $x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ o bien $x = –2$

El vértice V(h, k) es:

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = 1;$

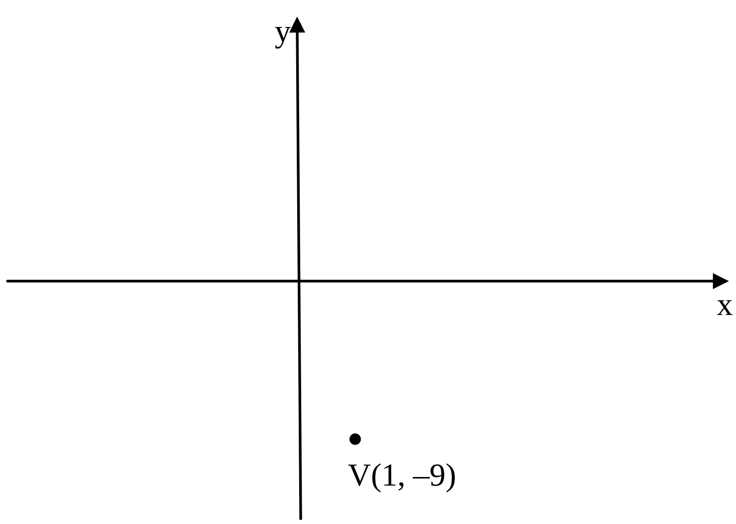
$k = P(1) = 1^2 = 2(1) – 8 = 1 – 2 – 8 = –9$

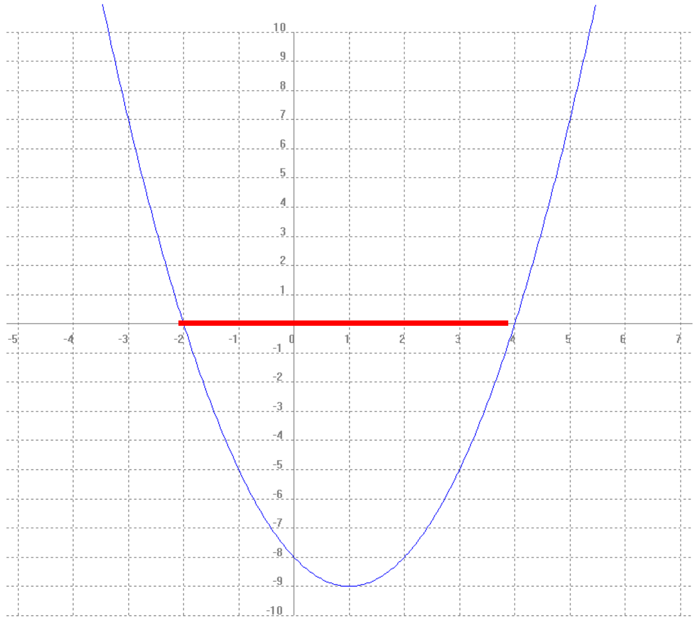
Por lo tanto,

$V(h, k) = V(1, –9)$

La parábola se abre hacia arriba ya que el coeficiente del término cuadrático es positivo.

Su gráfico es:





Como la expresión cuadrática es menor que cero; entonces, la porción de la parábola a considerar es aquella que se encuentra debajo del eje de abscisas. Por lo tanto, los valores de x en donde se encuentra ubicada esta porción son aquellos valores comprendido entre –2 y 4 (raíces).

Entonces, el conjunto solución es:

$$S = (-2, 4)$$

Colocamos paréntesis ya que los extremos no están incluidos.

Ejemplo

Resolver gráficamente la siguiente inecuación

$$2x^2 - 3x + 3 > 0$$

Solución

Graficamos la parábola correspondiente al miembro cuadrático, determinando las raíces (o valores reales que hacen cero a dicha expresión), seguidamente, hallamos su vértice y determinamos si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.

En este caso,

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 3$$

Hallamos las raíces del miembro cuadrático, para ello encontramos primeramente el discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4(2)(3)$

$= 9 - 24$

$= -15 < 0$

Como $\Delta < 0$, la parábola no corta al eje de abscisas. Es decir, el polinomio cuadrático no tiene raíces.

El vértice V(h, k) es:

$h = -\frac{b}{2a} = \mp\frac{-3}{2(2)} = \frac{3}{4}$;

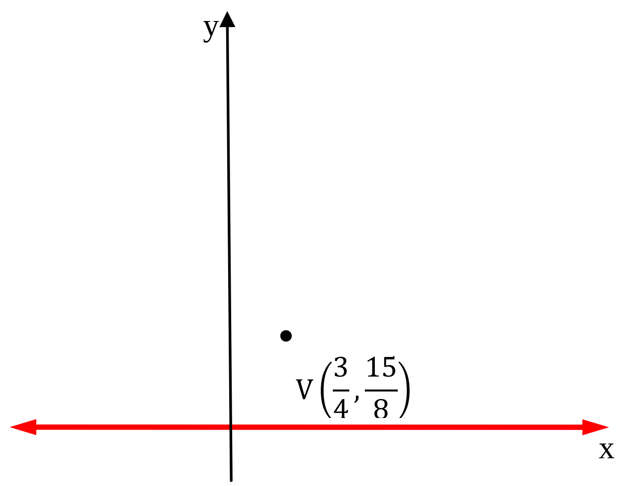
$k = P\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 3 = \frac{15}{8}$

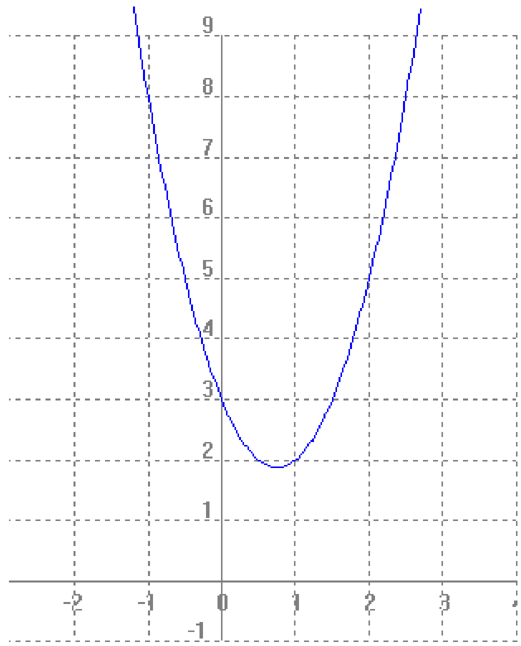
Por lo tanto,

$$V(h, k) = V\left(\frac{3}{4}, \frac{21}{4}\right)$$

La parábola se abre hacia arriba ya que el coeficiente del término cuadrático es positivo.

Su gráfico es:





Como el miembro cuadrático es mayor que cero la parte de la parábola a considerar es aquella que se encuentra por encima del eje de abscisas. Del gráfico observamos que para todos los valores de x la parábola en su totalidad se encuentra por encima eje de abscisas. En consecuencia, el conjunto solución, es:

$$S = \mathbf{R}$$

¿Cuál es el conjunto solución de $2x^2 - 3x + 3 < 0$?

Ejemplo

Resolver gráficamente la siguiente inecuación

$$-2x^2 - 3x + 3 < 0$$

Solución

Graficamos la parábola correspondiente al miembro cuadrático, determinando las raíces (o valores reales que hacen cero a dicha expresión), seguidamente, hallamos su vértice y determinamos si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.

En este caso,

$$a = -2, \quad b = -3, \quad c = 3$$

Hallamos las raíces del miembro cuadrático, para ello encontramos primeramente el discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\quad = (-3)^2 - 4(-2)(3)$

$\quad = 9 + 24$

$\quad = 33 > 0$

Como $\Delta > 0$, la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos. Las raíces las encontramos haciendo igual a cero (0) el miembro cuadrático.

$-2x^2 - 3x + 3 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2s}$

$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)}$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{-4}$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{-4}$

El vértice V(h, k) es:

$h = -\frac{b}{2a} = \mp\frac{-3}{2(-2)} = -\frac{-3}{-4} = -\frac{3}{4};$

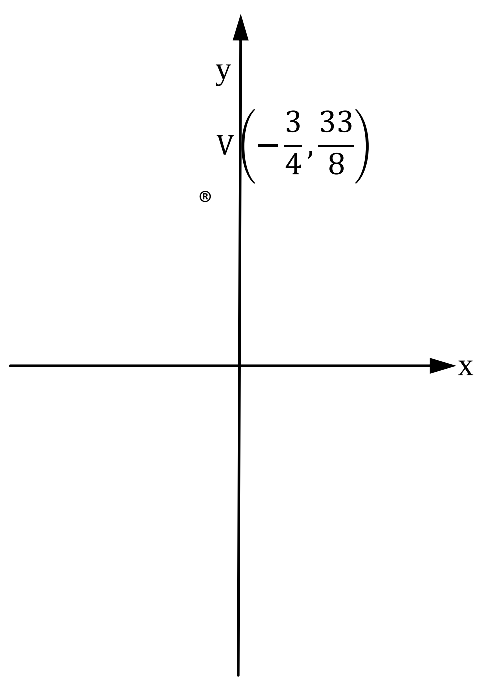
$k = P\left(-\frac{3}{4}\right) = -2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 3 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 3 = \frac{33}{8}$

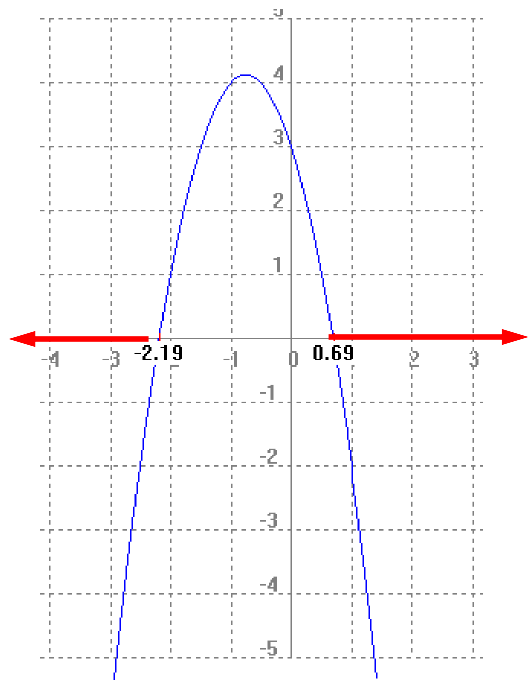
Por lo tanto,

$$V(h, k) = V\left(-\frac{3}{4}, \frac{33}{8}\right)$$

La parábola se abre hacia abajo ya que el coeficiente del término cuadrático es negativo.

Su gráfico es:





Como el miembro cuadrático es menor que cero la parte de la parábola a considerar es aquella que se encuentra por debajo del eje de abscisas. Del gráfico observamos que para los valores de x menores que –2.19 o para los valores de x mayores que 0.69 la parábola se encuentra por debajo del eje de abscisas. En consecuencia, el conjunto solución, es:

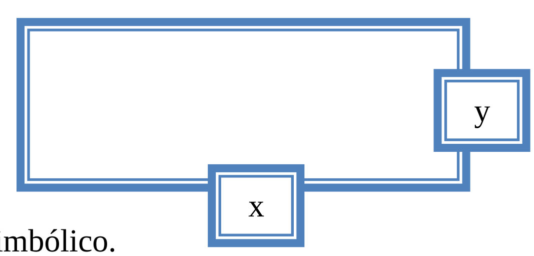
$$S = (-\infty, -2.19) \cup (0.69, \infty)$$

Ejemplo

Un arquitecto desea delimitar un terreno rectangular y tiene 450 metros de cerca disponibles. Encuentra las dimensiones del terreno si el área delimitada debe ser al menos 3 150 m^2.

Solución

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al largo del terreno, y al ancho.



Traduzcamos al lenguaje simbólico.

1. La cerca disponible corresponde al perímetro (P) del terreno:

$P = 2x + 2y \Rightarrow 2x + 2y = 450$

$\Rightarrow x + y = 225$

$\Rightarrow y = 225 – x$ (1)

2. Área (A):

$A \geq 3\ 150 \Rightarrow x \cdot y \geq 3\ 150$ (2)

Sustituyendo (1) en (2):

$x \cdot (225 – x) \geq 3\ 150$

Efectuando las operaciones indicadas, trasponiendo términos y factorizando:

$225x – x^2 \geq 3\ 150 \Rightarrow x^2 – 225x + 3150 \leq 0$

$\Rightarrow (x – 210)(x – 15) \leq 0$

Hallamos los números críticos igualando a cero a cada factor del miembro izquierdo

$x – 210 = 0$ o bien $x – 15 = 0 \Rightarrow x = 201$ o bien $x = 15$

Los números críticos son 15 y 210. Estos valores dividen la recta real en tres intervalos: $(–\infty, 15)$, $(15, 210)$ y $(210, \infty)$.

Deseamos determinar el signo de la expresión $x^2 – 225x + 3150$ en los intervalos $(–\infty, 15)$, $(15, 210)$ y $(210, \infty)$. Para esto determinamos el signo de cada uno de los factores usando un valor de x en cada uno de los intervalos. Para ello construimos la siguiente tabla de signos:

Intervalos	$(–\infty, 15)$ **k = 0**	$(15, 210)$ **k = 20**	$(210, \infty)$ **k = 250**
Signo de $x – 210$	–	–	+
Signo de $x – 15$	–	+	+
Signo de $(x – 210)(x – 15)$	+	–	+

Nos interesa saber dónde $(x – 210)(x – 15) \leq 0$; es decir, dónde $(x – 210)(x – 15)$ es negativo. Esto ocurre en $(15, 210)$.

El conjunto solución, es:

$$S = [15, 210]$$

Ponemos corchetes porque los extremos están incluidos.

En conclusión, las dimensiones del terreno están desde 15 metros hasta 210 metros tanto para el largo y ancho.

Actividades de Aprendizaje

- Resolver analíticamente las siguientes inecuaciones:
  1.1. $x^2 < 3x$
  1.2. $x^2 > 16$
  1.3. $x^2 - 9 < 0$
  1.4. $x^2 > 4x$
  1.5. $x^2 + 11x + 18 < 0$
  1.6. $x^2 + 4x - 12 < 0$
  1.7. $x^2 + 4x + 4 < 0$
  1.8. $x^2 - x - 6 \leq 0$
  1.9. $3x^2 < 10 - x$
  1.10. $6x - 8 > x^2$
- Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:
  1. $x^2 - 5x > 0$
  2. $2x^2 < 5x + 3$
  3. $3x^2 - x + 8 \leq x - 2$
  4. $x^2 - x + 3 < x - 2$
  5. $2x^2 - x + 8 > 9x - 2$
  6. $x^2 - x - 6 < 0$
  7. $5x^2 - x + 8 \geq 2x^2 - 2$
- Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130 cm^2, ¿cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?
- Las ventas mensuales "x" de cierto artículo cuando su precio es de "p" dólares están dadas por $p = 225 - 5x$. El costo de producir "x" unidades al mes del artículo es de $C = 200 + 5x$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo deberán venderse y producirse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 1 500 dólares?

- Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 yardas de cerca disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2100 yardas cuadradas.
- Un lado de un campo rectangular está limitado por un río. Un granjero tiene 100 metros de cerca y quiere cubrir los otros tres lados del campo. Si quiere encerrar un área de al menos 800 metros cuadrados, ¿cuáles son los posibles valores para la longitud del campo a lo largo del río?
- Un macizo rectangular va a ser dos veces más largo que ancho. Si el área circundada debe ser de más de 98 m^2, ¿qué puede concluir sobre el ancho del macizo?

Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Los siguientes ejercicios se proponen para que sean realizados en casa. Se entregarán en la próxima sesión de clases y expondrán su resolución.

1. Resolver analíticamente las siguientes inecuaciones:
   (i) $x^2 – 5x – 14 \leq 0$
   (ii) $2x^2 – 8x – 24 > 0$
2. Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones:
   (i) $2x^2 – 3x + 5 > 0$
   (ii) $x^2 – 5x < 0$
3. Una caja abierta se fabrica de una hoja rectangular metálica de 16 por 14 pies, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si el área de la base de la caja es al menos de 80 pies cuadrados, ¿cuál la máxima altura posible de la caja?

Plan de Clase No. 6

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:** Inecuaciones

Indicadores de logro:

2. Resuelve analíticamente y gráficamente inecuaciones racionales.
3. Interpreta y reconoce el conjunto solución de inecuaciones racionales.
4. Aplica las inecuaciones racionales a la solución de problemas reales.

Tema

Inecuación Racional.

Contenidos

1. Definición. Notación.
2. Conjunto solución.
3. Gráfica.

Materiales:

1. Papelógrafo.
2. Marcadores.
3. Regla.

Actividades Iníciales

Elegir un estudiante al azar para que resuelva el siguiente ejercicio.

1. Resolver

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x}$$

2. Expliquen el procedimiento que utilizó para resolverla.
3. Si tenemos una multiplicación de n factores, y si n es impar, ¿cuál es el signo del producto?
4. Si tenemos una multiplicación de n factores, y si n es par, ¿cuál es el signo del producto?

Actividades de Desarrollo

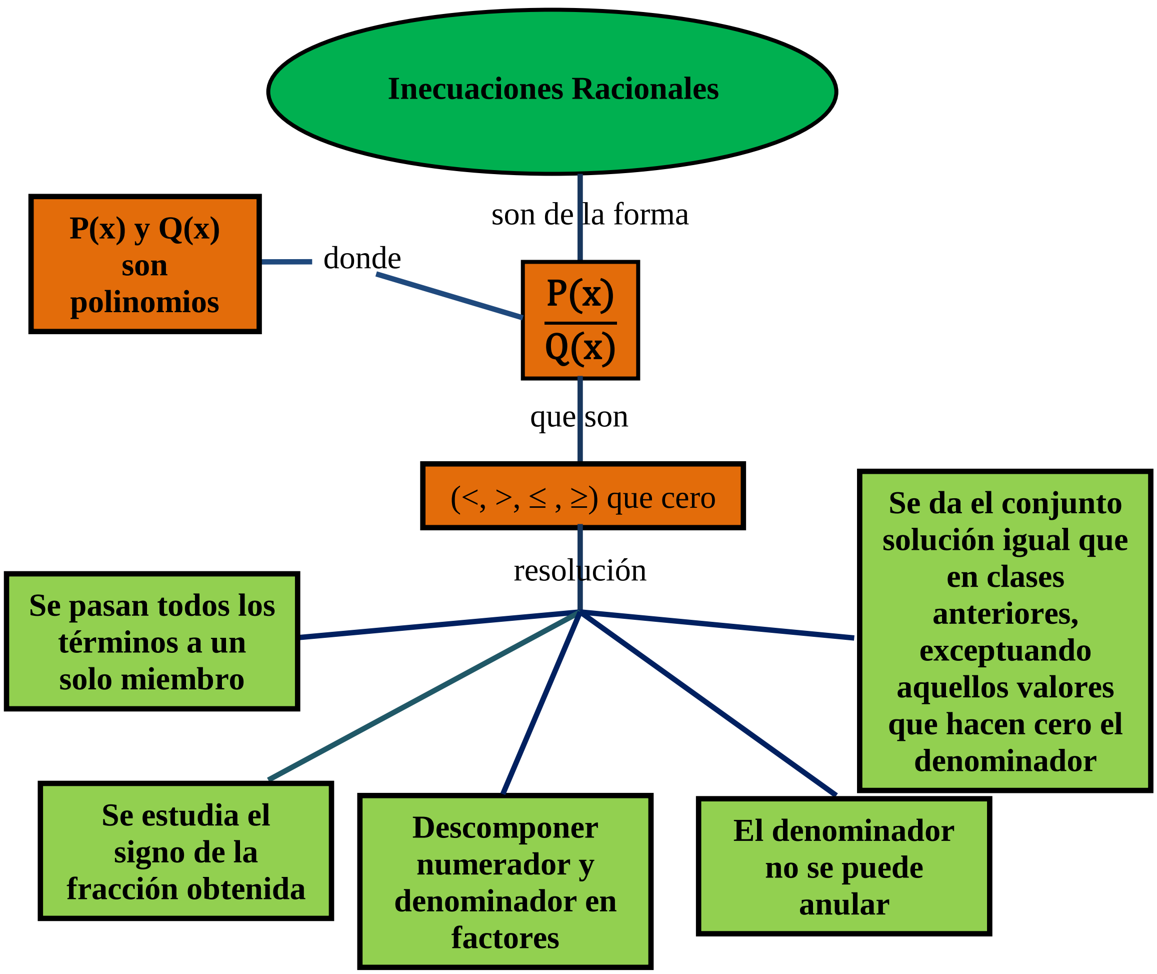
Orientar a cada grupo de cinco estudiantes a que realicen lo siguiente:

1. Escriban en su cuaderno tres inecuaciones racionales.
2. ¿Cómo definiría una inecuación racional?
3. ¿Cómo resolverían una inecuación racional?

Realizar una discusión acerca de las respuestas de cada grupo de estudiantes para concluir lo siguiente:

> Las inecuaciones racionales son aquellas inecuaciones que implican el cociente de dos expresiones algebraicas que pueden ser ambas lineales o una de ellas o las dos cuadráticas.

La profesora o el profesor explicarán el siguiente mapa:



Una de las primeras cosas que debemos de tener en cuenta al momento de resolver una inecuación racional es la de verificar si esta se encuentra comparada con cero, en caso contrario a esto hacer todas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división necesarias. Después de esto nos encargamos de verificar que el denominador de nuestra fracción sea diferente de cero, debido a que si se da este caso, no estaríamos ante una inecuación racional. Posteriormente procedemos a reducirla a una única fracción la cual podamos factorizar en caso del primer tipo de problema que tengamos una ecuación cuadrática en el numerador de nuestra fracción; cuando hemos ya factorizado procedemos a despejar el valor de nuestra incógnita en cada uno de dichos paréntesis y en el denominador de la misma podemos tener incluso hasta tres paréntesis con términos algebraicos, los cuales no tenemos que multiplicar entre sí, sino que en cada uno de ellos despejar el valor de la variable x o la que estemos utilizando y así poder encontrar los diferentes valores de x. Después de esto los planteamos en nuestra recta numérica dichos valores que hemos encontrado y señalamos todos los intervalos correspondientes para ellos, podemos tener una n cantidad de intervalos que posteriormente plantearemos en la tabla de signos para repetir el procedimiento que hicimos en las inecuaciones cuadráticas y como último paso establecer una solución gráfica en nuestra recta numérica.

En resumen

Una inecuación racional es una inecuación de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0; \ \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

donde P(x) y Q(x) son polinomios con $Q(X) \neq 0$.

Para resolver inecuaciones racionales debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

Sean a, b $\in \mathbf{R}$ con $b \neq 0$. Entonces,

1. $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow a \cdot b < 0$
2. $\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow a \cdot b \leq 0$
3. $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow a \cdot b > 0$
4. $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$

Resolución de Inecuaciones Racionales

(a) Método Analítico

Para resolver inecuaciones racionales utilizaremos la tabla de signos tal como lo hemos en la resolución de inecuaciones cuadráticas.

Es importante descartar los valores reales que anulan el denominador pues las fracciones con denominador nulo no definen ningún número real. Los valores que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la incógnita y, por tanto, no se incluyen.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$$

Solución

Observemos que esta inecuación el miembro izquierdo corresponde a una única fracción y ella está relacionada con el cero. Además, los factores que se encuentran en los términos de la fracción son irreducibles.

1. Hallamos los números críticos igualando a cero cada factor del miembro izquierdo, teniendo en cuenta que los valores que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la incógnita y, por tanto, no se incluyen.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Los números críticos son –1, 2y 4. Estos valores dividen la recta real en cuatro intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, \infty)$.

2. Determinamos el signo del cociente $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$ en los intervalos (–∞, –1), (–1, 2), (2, 4) y (4, ∞), estableciendo el signo de cada uno de los factores tomando un valor de prueba en cada uno de los intervalos para así poder determinar el signo del cociente aplicando la regla de los signos de la multiplicación. Organizamos la información recabada en una tabla de signos.

Intervalos	(–∞, –1) **k = –2**	(–1, 2) **k = 0**	(2, 4) **k = 3**	(4, ∞) **k = 5**
Signo de x – 2	–	–	+	+
Signo de x + 1	–	+	+	+
Signo de x – 4	–	–	–	+
Signo de $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$	–	+	–	+

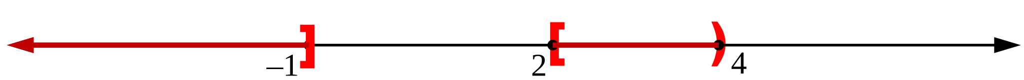
El signo de $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$se obtiene aplicando la regla de los signos para la división. Nos interesa saber dónde $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$; es decir, dónde $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$ es no positivo. Esto ocurre en(–∞, –1] o en [2, 4). Colocamos corchete en los extremos –1 y 2 por el signo de igual, y paréntesis en el extremo 4 porque ese valor se excluye ya que hace cero el denominador.

Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo:

$$S = (-\infty, -1] \cup [2, 4)$$

De manera gráfica:



Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$\frac{3}{1-x} \geq \frac{x+6}{2-x}$$

Solución

1. Trasponemos todos los términos al lado izquierdo de la inecuación.

$\frac{3}{1-x} \geq \frac{x+6}{2-x} \Rightarrow \frac{3}{1-x} - \frac{x+6}{2-x} \geq 0$

2. Simplificamos el miembro izquierdo reduciéndolo a una única fracción.

$\frac{3}{1-x} - \frac{x+6}{2-x} \Rightarrow \frac{3(2-x)-(x+6)(1-x)}{(1-x)(2-x)} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{6-3x-(6-5x-x^2)}{(1-x)(2-x)} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{6-3x-6+5x+x^2}{(1-x)(2-x)} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{2x+x^2}{(1-x)(2-x)} \geq 0$

3. Factorizamos solamente el numerador ya que los factores del denominador son irreducibles.

$\frac{2x+x^2}{(1-x)(2-x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)} \geq 0$

4. Hallamos los números críticos igualando a cero cada factor del miembro izquierdo, teniendo en cuenta que los valores que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la incógnita y, por tanto, no se incluyen.

$x = 0$

$2 + x = 0 \Rightarrow x = -2$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

Los números críticos son –2, 0, 1 y 2. Estos valores dividen la recta real en cinco intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$.

3. Determinamos el signo del cociente $\frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)}$ en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$, estableciendo el signo de cada uno de los factores tomando un valor de prueba en cada uno de los intervalos para así poder determinar el signo del

cociente aplicando la regla de los signos de la multiplicación. Organizamos la información recabada en una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -2)$ **k = –3**	$(-2, 0)$ **k = –1**	$(0, 1)$ **k =** $\frac{1}{2}$	$(1, 2)$ **k =** $\frac{3}{2}$	$(4, \infty)$ **k = 5**
Signo de x	–	–	+	+	+
Signo de 2 + x	–	+	+	+	+
Signo de 1 – x	+	+	–	–	–
Signo de 2 – x	+	+	–	–	+
Signo de $\frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)}$	+	–	+	+	–

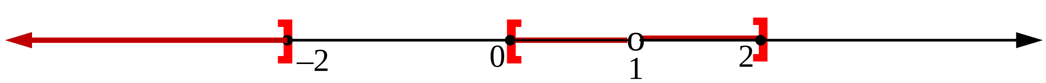
5. El signo de $\frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)}$ se obtiene aplicando la regla de los signos para la división. Nos interesa saber dónde $\frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)} \geq 0$; es decir, dónde $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$ es no negativo. Esto ocurre en $(-\infty, -2]$ o en $[0, 1)$ o en $(1, 2]$. Colocamos corchete en los extremos –2, 0 y 2 por el signo de igual, y paréntesis en el extremo 1 porque ese valor se excluye ya que hace cero el denominador.

Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo:

$$S = (-\infty, -2] \cup [0, 1) \cup (1, 2]$$

De manera gráfica:



Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$\frac{x^2 - x + 1}{2 - x} \geq 1$$

Solución

1. Trasponemos todos los términos al lado izquierdo de la inecuación.

$\frac{x^2-x+1}{2-x} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{2-x} - 1 \geq 0$

2. Simplificamos el miembro izquierdo reduciéndolo a una única fracción.

$\frac{x^2-x+1}{2-x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+1-(2-x)}{2-x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-x+1-2+x}{2-x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{2-x} \geq 0$

3. Factorizamos solamente el numerador ya que el factor del denominador es irreducible.

$\frac{x^2-1}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$

4. Hallamos los números críticos igualando a cero cada factor del miembro izquierdo, teniendo en cuenta que los valores que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la incógnita y, por tanto, no se incluyen.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

Los números críticos son -1, 1 y 2. Estos valores dividen la recta real en cuatro intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$y $(2, \infty)$.

4. Determinamos el signo del cociente $\frac{(x+1)(x-1)}{2-x}$ en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$, estableciendo el signo de cada uno de los factores tomando un valor de prueba en cada uno de los intervalos para así poder determinar el signo del cociente aplicando la regla de los signos de la multiplicación. Organizamos la información recabada en una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -1)$ **k = –2**	$(-1, 1)$ **k = 0**	$(1, 2)$ **k =** $\frac{3}{2}$	$(2, \infty)$ **k = 3**
Signo de $x + 1$	–	+	+	+

Signo de x – 1	–	–	+	+
Signo de 2 – x	+	+	+	–
Signo de $\frac{(x+1)(x-1)}{2-x}$	+	–	+	–

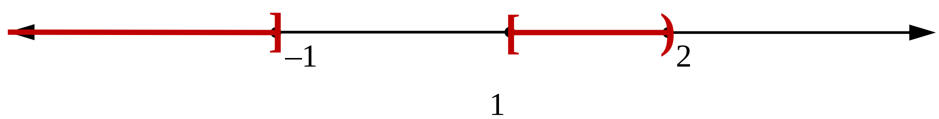
5. El signo de $\frac{(x+1)(x-1)}{2-x}$ se obtiene aplicando la regla de los signos para la división. Nos interesa saber dónde $\frac{x(2+x)}{(1-x)(2-x)} \geq 0$; es decir, dónde $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$ es no negativo. Esto ocurre en $(-\infty, -1]$ o en $[1, 2)$. Colocamos corchete en los extremos –1 y 1 por el signo de igual, y paréntesis en el extremo 2 porque ese valor se excluye ya que hace cero el denominador.

Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo:

$$S = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$$

De manera gráfica:



(b) Método Gráfico.

Se aplican los pasos para graficar funciones racionales y se determinan los intervalos donde el gráfico está por encima o por debajo del eje de abscisas en base al signo de desigualdad que relaciona el miembro racional con el cero.

Veamos el procedimiento con el siguiente:

Ejemplo

Resolver gráficamente la siguiente inecuación:

$$\frac{x-1}{x^2-x-6} < 0$$

Solución

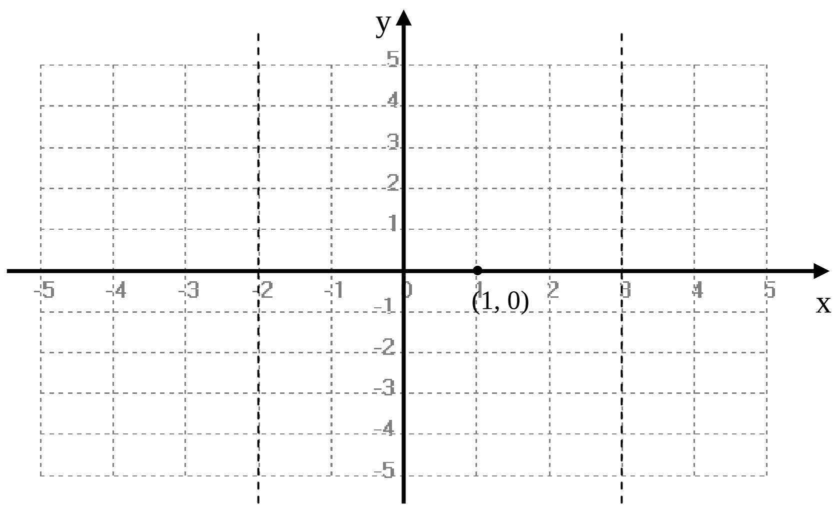
(a) Factorizamos el denominador.

$$\frac{x-1}{(x-3)(x+2)} < 0$$

(b) El numerador x – 1 tiene la raíz 1, por consiguiente, se sitúa el punto (1, 0) en el plano real.

(c) El denominador tiene raíces –2 y 3. Entonces las rectas x = –2 y x = 3 son asíntotas verticales que se representan con línea punteada como mostramos en la siguiente figura.

Representamos geométricamente en el plano real lo realizado en los pasos 1 y 2.



(d) Las raíces –2, 1 y 3 del numerador y del denominador de la expresión racional determinan los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3) \text{ y } (3, \infty)$$

Construimos la siguiente tabla de signos:

Intervalo	(–∞, –2) **k =–3**	(–2, 1) **k = 0**	(1, 3) **k = 2**	(3, ∞) **k = 4**
Signo de $\frac{x-1}{(x-3)(x+2)}$	–	+	–	+
Posición de lagráfica	**Por debajo del eje x**	**Por encima del eje x**	**Por debajo del eje x**	**Por encima del eje x**

(e) Se utiliza la cuarta fila de la tabla de signo para investigar el comportamiento de la expresión racional cerca de cada asíntota vertical.

1. Considérese la asíntota vertical x = –2. Como la gráfica se encuentra por debajo del eje x en el intervalo $(-\infty,-2)$, entonces

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -2^{-}$$

Como la gráfica se encuentra por encima del eje x en el intervalo (–2,1); entonces

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -2^{+}$$

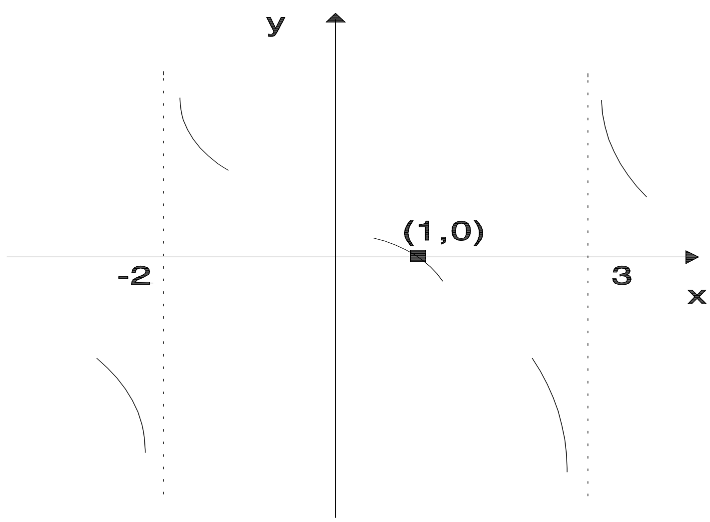
2. Considérese la asíntota vertical x = 3. La gráfica se encuentra por debajo del eje x en el intervalo (1, 3); por consiguiente,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^{-}$$

La gráfica está por encima del eje x en $(3, \infty)$ y así,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^{+}$$

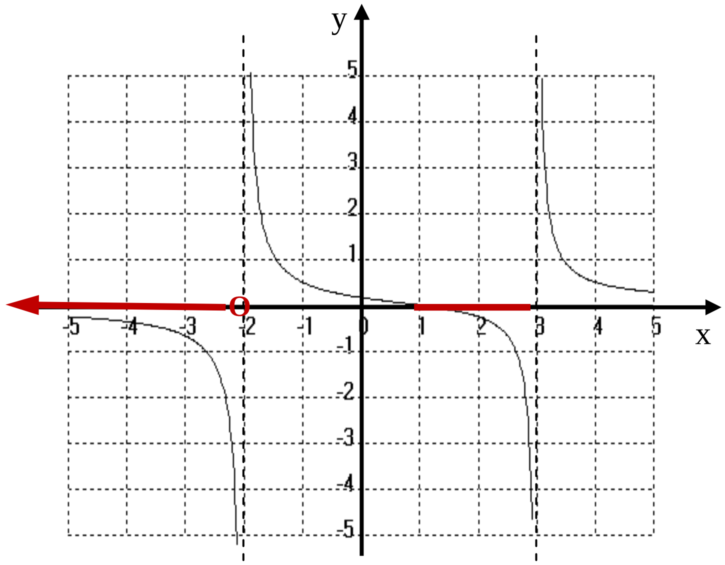
Lo realizado en (a) y (b) del paso 5, lo señalamos en la siguiente figura con trazos de porciones de la gráfica a cada lado de la recta x = –2 y x = 3.



(f) La última fila de la tabla de signos, nos indica que la gráfica cruza al eje x en (1, 0).

(g) Como el grado del numerador x – 1 es menor que el grado del denominador se sigue que el eje x *es una asíntota horizontal.*

(h) Usando la información de los pasos 5, 6 y 7, así como la ubicación de algunos puntos, obtenemos la siguiente gráfica:



Como $\frac{x-1}{(x-3)(x+2)} < 0$ debemos tomar aquellos intervalos en donde la gráfica está por debajo del eje de abscisas tal como se muestra en los trozos gruesos de color rojo de la gráfica anterior.

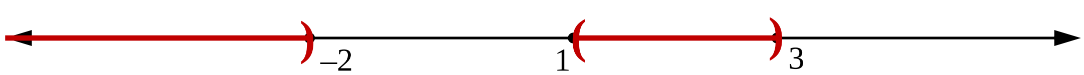
Entonces, el conjunto solución es:

En forma de intervalo

$$S = (-\infty, -2) \cup (1, 3)$$

Colocamos paréntesis en los extremos –2 y 3 porque se excluyen esos valores ya que ellos hacen cero el denominador.

En forma gráfica:



Actividades de Aprendizaje

1. Resolver analíticamente las siguientes inecuaciones.

1. $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$
2. $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$
3. $\frac{x-4}{x(x+2)} \geq 0$
4. $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$
5. $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2(x+2)} > 0$
6. $\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} < 0$
7. $\frac{1+x}{1-x} > 1$
8. $\frac{x+4}{x-2} < 3$
9. $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$
10. $\frac{x+4}{x-2} > 3$
11. $\frac{3}{2-x} \leq \frac{1}{x+4}$
12. $\frac{2}{x-3} \leq -2$

2. Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones.

(a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x} \geq 0$

(b) $\frac{x+3}{2-x} < 2$

(c) $\frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2} < 0$

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+2} \leq 2$

(e) $\frac{x^2}{x^2-x-2} > 0$

3. Una resistencia de 5 ohmios y una resistencia variable se instalan en paralelo. La resistencia resultantes R_t está dada por $R_t = \frac{5R}{5+R}$. Determine los valores de la

resistencia variable R para los cuales la resistencia resultante R_t será mayor de 2 ohmios.

4. La intensidad I en lumens de cierta fuente de luz en un punto a x centímetros de la fuente está dada por $I = \frac{625}{x^2}$. ¿A qué distancias de la fuente de luz la intensidad será menor de 25 lumens?

Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

(d) Los siguientes ejercicios se proponen para que sean realizados en casa. Se entregarán en la próxima sesión de clases y expondrán su resolución.

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x(x+5)}{x-3} \geq 0$ (b) $\frac{(x+3)(2-x)}{4x+1} \geq 0$

(c) $\frac{2x}{x+3} \geq 1$ (d) $\frac{x-6}{x+2} < 1$

(e) $\frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x-2}$

Plan de Clase No. 7

Fecha:

Colegio:

Grado: **Sección:**

Profesor(a):

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:** Inecuaciones

Indicadores de logro:

1. Resuelve inecuaciones que contienen expresiones con valor absoluto..
2. Expresa el conjunto solución de inecuaciones que contienen valor absoluto en la forma de intervalo o como conjunto.
3. Traza en la recta real el conjunto solución de inecuaciones que contienen valor absoluto.
4. Aplica las inecuaciones con valor absoluto a la solución de problemas.

Tema

Inecuaciones con Valor Absoluto.

Contenidos

(a) Definición. Notación.

1. Conjunto solución.

2. Gráfica.

Materiales:

2. Papelógrafo.
3. Marcadores.
4. Regla.
5. Regla.

Actividades Iníciales

Realizarles las siguientes preguntas a las y los estudiantes:

1. ¿Cómo definen el valor absoluto de un número real x?
2. ¿Cuál es la interpretación analítica y geométrica del valor absoluto de un número real?
3. ¿De dónde surge la noción de valor absoluto?

Resumen:

El número $|a|$, no negativo, se llama valor absoluto de a. Se define:

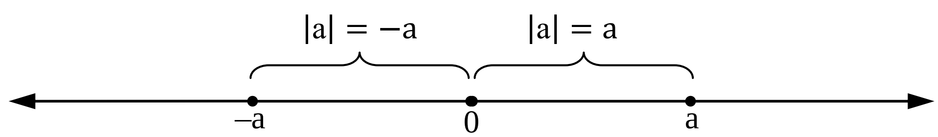
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Según la definición, si a esa no negativo, entonces $|a| = a$; y, si a es negativo, se cambia su signo para obtener $|a| = -a$, en otras palabras, se toma el inverso aditivo u opuesto de a.

Ejemplos

1. $|2| = 2$
2. $|-2| = -(-2) = 2$

La interpretación geométrica del valor absoluto $|a|$ es



Propiedades del Valor Absoluto

Si a y b son números reales y n es un número entero, entonces

(a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(c) $|a^n| = |a|^n$

(d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

La noción de valor absoluto surge de una manera natural en problemas de distancia. En una recta coordenadas, sean A y B puntos con coordenadas a y b. Debido a que la distancia es siempre no negativa, la distancia d entre A y B es d = b – a cuando B está a la derecha de A, y d = a – b cuando B está a la izquierda de A. Véase figura adjunta.

(a) (b)

En el caso (a), b – a es positiva, de modo que puede escribirse;

$$d = b - a = |b - a|$$

y en el caso (b), b – a es negativa, de modo que puede escribirse:

$$d = a - b = -(b - a) = |b - a|$$

Por lo tanto, independientemente de si B está a la derecha o a la izquierda de A, la distancia d entre A y B es:

$$d = |b - a|$$

Para cualquier número real b puede escribirse:

$$|b| = |b - 0|$$

Por lo tanto, el valor absoluto de un número b puede interpretarse geométricamente como su distancia desde el origen sobre una recta coordenada.

Actividades de Desarrollo

Una inecuación con valor absoluto es una inecuación de la forma:

1. $|x| < b$, o bien,
2. $|x| \leq b$, o bien,
3. $|x| > b$, o bien,
4. $|x| \geq b$

Método para resolver Inecuaciones con Valor Absoluto

.

Método 1:

1. Aislar la expresión con valor absoluto a un lado de la inecuación.
2. Hallar los intervalos de prueba. Esto se logra resolviendo la ecuación que resulta de cambiar el signo de desigualdad por el signo de igualdad. La solución de dicha ecuación determina los extremos de los intervalos en la recta numérica.

3. Seleccionar un punto de prueba en cada intervalo para determinar el valor de la expresión con valor absoluto en cada intervalo.
4. La solución la conforman todos los intervalos que hacen que la desigualdad sea cierta. La solución se puede expresar de distintas formas:
    3. Como intervalo
    4. Como conjunto
    5. Gráficamente

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$|x - 20| \leq 6$$

Solución

1. Se omite el paso 1, ya que la expresión valor absoluto se encuentra aislada al lado izquierdo de la inecuación
2. Hallar los intervalos de prueba. Esto se logra resolviendo la ecuación que resulta de cambiar el signo de desigualdad por el signo de igualdad. La solución de dicha ecuación determina los extremos de los intervalos en la recta numérica.

Vamos a resolver la ecuación:

$$|x - 20| = 6$$

Aplicando la definición de valor absoluto, tenemos dos posibilidades:

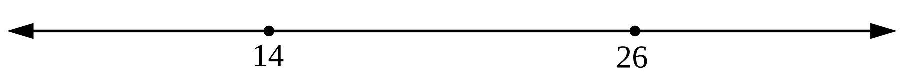
1. $x - 20 = 6 \Rightarrow x = 6 + 20$

$\Rightarrow x = 26$

2. $x - 20 = -6 \Rightarrow x = -6 + 20$

$\Rightarrow x = 14$

Los extremos de intervalos son 14 y 26. Estos valores dividen la recta real entres intervalos: $(-\infty, 14)$, $(14, 26)$ y$(26,\infty)$.



3. Seleccionar un punto de prueba en cada intervalo para determinar el valor de la expresión con valor absoluto.

Intervalo	**Punto de prueba**	**Lado izquierdo de la inecuación evaluada en el punto de prueba**
$(-\infty, 14)$	$\mathbf{x = 0}$	$\lvert x - 20\rvert = \lvert \mathbf{0} - 20\rvert = \lvert -20\rvert = \mathbf{20}$
$(14, 26)$	$\mathbf{x = 20}$	$\lvert x - 20\rvert = \lvert \mathbf{20} - 20\rvert = \lvert 0\rvert = \mathbf{0}$
$(26, \infty)$	$\mathbf{x = 30}$	$\lvert x - 20\rvert = \lvert \mathbf{30} - 20\rvert = \lvert 10\rvert = \mathbf{10}$

4. Determinar los intervalos que forman parte de la solución. La solución la conforman todos los intervalos que hacen que la inecuación sea válida. En la tabla anterior evaluamos el lado izquierdo de la inecuación, ahora determinemos cuál de estos intervalos cumple con la inecuación. En la tabla, observamos que el intervalo de la segunda fila cumple con ser ≤ 6.

El conjunto solución lo podemos expresar de las siguientes formas:

(a) Como conjunto:

$S = \{\ x \in \mathbf{R}\ /\ 14 \leq x \leq 26\ \}$

(b) Como intervalo:

$[14, 26]$

(c) Gráficamente:

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$|3 - 4x| - 9 \geq 0$$

Solución

- Aislar la expresión con valor absoluto a un lado de la inecuación. Aplicando propiedades de las desigualdades podemos realizar operaciones para aislar la expresión con valor absoluto al lado izquierdo de la inecuación.

  $|3-4x| - 9 \geq 0 \Rightarrow |3-4x| \geq 9$

- Hallar los intervalos de prueba. Esto se logra resolviendo la ecuación que resulta de cambiar el signo de desigualdad por el signo de igualdad. La solución de dicha ecuación determina los extremos de los intervalos en la recta numérica.

Vamos a resolver la ecuación:

$$|3-4x| = 9$$

Aplicando la definición de valor absoluto, tenemos dos posibilidades:

3. $3 - 4x = 9 \Rightarrow 4x = 3 - 9$

$\Rightarrow 4x = -6$

$\Rightarrow x = -\frac{6}{4}$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

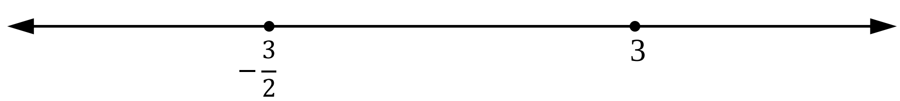
4. $3 - 4x = -9 \Rightarrow 4x = 3 + 9$

$\Rightarrow 4x = 12$

$\Rightarrow x = \frac{12}{4}$

$\Rightarrow x = 3$

Los extremos de intervalos son $-\frac{3}{2}$ y 3. Estos valores dividen la recta real entres intervalos: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$,$\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ y$(3,\infty)$.



- Seleccionar un punto de prueba en cada intervalo para determinar el valor de la expresión con valor absoluto.

Intervalo	**Punto de**	**Lado izquierdo de la inecuación evaluada en el**

	prueba	punto de prueba
$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	**x =** –2	$\lvert 3-4x\rvert = \lvert 3-4(-\mathbf{2})\rvert = \lvert 3+8\rvert = \lvert 11\rvert =$ **11**
$\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$	**x = 0**	$\lvert 3-4x\rvert = \lvert 3-4(\mathbf{0})\rvert = \lvert 3-0\rvert = \lvert 3\rvert =$ **3**
(3,∞)	**x = 4**	$\lvert 3-4x\rvert = \lvert 3-4(\mathbf{4})\rvert = \lvert 3-16\rvert = \lvert -13\rvert =$ **13**

- Determinar los intervalos que forman parte del solución. La solución la conforman todos los intervalos que hacen que la inecuación sea cierta. En la tabla anterior, evaluamos el lado izquierdo de la inecuación, ahora determinemos cuál de estos intervalos cumple con la inecuación. En la tabla, observemos que los intervalos de la primera y tercera fila cumplen con ser ≥ 9.

El conjunto solución lo podemos expresar de las siguientes formas:

(d) Como conjunto:

$$S = \left\{x \in \mathbf{R} \,/\, x \leq -\frac{3}{2} \text{ ó } x \geq 3\right\}$$

(e) Como intervalo:

$$S = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (3,\infty)$$

(f) Gráficamente:

Método 2

Para resolver inecuaciones donde aparece valor absoluto se aplican las propiedades enunciadas en el siguiente:

Teorema

Sea a > 0. Entonces,

(a) $|x| < a$, si y solo si, $-a < x < a$

(b) $|x| \leq a$, si y solo si, $-a \leq x \leq a$

(c) $|x|> a$, si y solo si, $x > a$, o bien, $x <-a$

(d) $|x|\geq a$, si y solo si, $x \geq a$, o bien, $x \leq -a$

Ejemplo

Determinar el conjunto de soluciones que satisfaga la desigualdad $|3x+2|>5$

Solución

Aplicamos la propiedad 3 del teorema anterior, tenemos:

$|3x+2|>5$es equivalente a $3x + 2 > 5$, o bien, $3x + 2 <- 5$

Es decir, la inecuación dada se cumplirá si satisface cualquiera de las dos inecuaciones.

Considerando la primera, tenemos

$3x + 2 > 5$, es equivalente a,

$3x > 3$, es equivalente a,

$x> 1$

Por lo tanto, todo número en el intervalo $(1,\ \infty)$ es una solución.

De la segunda inecuación,

$3x + 2 < -5$, es equivalente a,

$3x < -7$, es equivalente a,

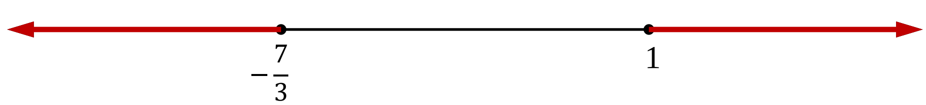
$x <-\frac{7}{3}$

Por tanto, todo número en el intervalo $\left(-\infty-\frac{7}{3}\right)$ es una solución.

El conjunto solución de la desigualdad original, está dada por:

$$S = \left(-\infty-\frac{7}{3}\right)\cup(1,\infty)$$

En forma gráfica:



Ejemplo

Determinar el conjunto de soluciones que satisfaga la desigualdad $|x - 5| < 4$. Ilustrarlo en la recta de los números reales.

Solución

Aplicamos la propiedad 1 del teorema anterior, tenemos:

$-4 < x - 5 < 4$, es equivalente a,

Sumando 5 a los términos de la inecuación:

$-4 + 5 < x - 5 + 5 < 4 + 5$

Reduciendo

$1 < x < 9$

Así, el conjunto de soluciones de la inecuación dada es (1, 9), el cual se ilustra en la siguiente figura.

Ejemplo

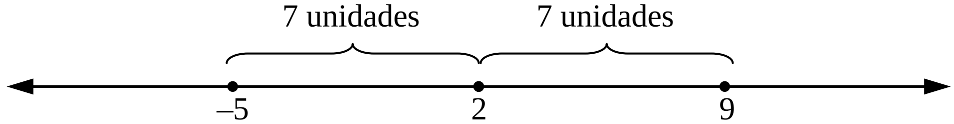
Utilice una inecuación para describir el conjunto de números reales que se encuentren a menos de 7 unidades de 2. Exprese las respuestas de esta inecuación en forma de inérvalo y trace la gráfica.

Solución

Del análisis previo con a = 2 y b = 7 vemos que la inecuación es

$$|x - 2| < 7$$

Resolvemos esta inecuación aplicando la propiedad 1, o simplemente anotar que el intervalo descrito tiene punto medio 2 y longitud 2(7) = 14. Como lo muestra la siguiente figura, esto se puede escribir como (2 – 7, 2 + 7) o bien (–5, 9).



Actividades de Aprendizaje

1. Resolver las siguientes inecuaciones y represente el conjunto solución en forma gráfica.

1. $|3x + 4| < 5$
2. $\left|\frac{x}{3} + 2\right| < 1$
3. $|2x - 1| > 1$
4. $|2 - 5x| \leq 3$
5. $|x - 1| > -3$
6. $4 - |1 - x| \leq 1$
7. $1 - |2x - 3| < 4$
8. $2|x - 2| - 1 > 2$
9. $x^2 < 3|x| + 4$

2. En Los siguientes ejercicios, halle una inecuación cuya solución sea el conjunto de números reales que satisfagan la condición dada. Exprese cada conjunto utilizando notación de intervalo.

(a) Mayor o igual que 2 unidades de –3

(b) Menor que 5 unidades de 12

(c) Menor que $\frac{1}{2}$ unidades de 3.5

(d) Mayor que 7 unidades de $\frac{5}{3}$

3. El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisface la inecuación

$$\left|\frac{p - 16}{0.05}\right| \leq 1$$

donde p se mide en onzas. Determine el intervalo en el cual se halla p.

4. Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0.623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0.005 cm de diámetro especificado. Escriba una inecuación con valor

absoluto que tenga como soluciones todos los diámetros posibles de las partes que encajarán. Resuelva la inecuación para determinar esos diámetros.

Evaluación

(a) Verificar las habilidades adquiridas por las y los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

(b) Valorar la participación de cada uno de las y los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

(c) Observar si exponen en forma crítica sus ideas.

(d) Los siguientes ejercicios se proponen para que sean realizados en casa. Se entregarán en la próxima sesión de clases y expondrán su resolución.

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|3-5x|+4>2$ (b) $|2-5x|<0$ (c) $2|x-5|\geq 3$

2. La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por

$$|c-3\,725\,000|<100\,000$$

donde c es el número de galones de agua utilizados por día. Halle la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

3. Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?

Plan de Clase No. 8

Fecha:

Colegio o Instituto:

Grado: **Sección:**

Profesora o Profesor:

Disciplina: Matemáticas **Unidad V:**Inecuaciones

Indicadores de logro

Comprueba el dominio que alcanzaron las y los estudiantes en el estudio de Inecuaciones.

Contenidos.

Prueba final.

Prueba final

I. Generalidades

Fecha: ________________________

Nombres y apellidos ____

Grado: _____ Sesión: ______ Número: ______

1.10.1. Desarrollo

(a) Respondan:

1. ¿Qué significa resolver una inecuación?
2. ¿Existen inecuaciones lineales que no tengan solución?

Si su respuesta es afirmativa dé un ejemplo de este caso y si es negativa argumente su respuesta.

3. ¿Existen inecuaciones cuadráticas que no tengan solución?

Si su respuesta es afirmativa dé un ejemplo de este caso y si es negativa argumente su respuesta.

(b) Resuelva las siguientes inecuaciones y represente su conjunto solución gráficamente:

(a) $\frac{1}{3}(1 - 2x) + 3x < \frac{1}{4}(2x - 5)$

(b) $x^2 - 7x + 10 > 0$

(c) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 + 2x - 3} < 0$

(d) $|x - 3| \leq 0$

(c) Resuelva gráficamente el inciso (b) y (c) del ejercicio 2.

(d) Un nuevo modelo de cohete se lanza verticalmente hacia arriba, de modo que su altura (medida en pies) t segundos después del lanzamiento está dada por

$$H(t) = -16t^2 + 384t + 4$$

(a) ¿Durante qué tiempo el cohete está por encima de los 1 284 pies?

(b) ¿Durante qué tiempo el cohete está por debajo de los 1284 pies?

(e) Un vehículo marchando a 25 km/h recorre un camino que mide un número entero de km. Cuando llevaba recorrida la mitad del camino, le faltaba menos de 3 h 31 min, y cuando llevaba recorridos 60 km le faltaban más de 4 h 35 min de marcha. ¿Cuál es la longitud del camino?

(f) Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?

Reflexiones Finales

En la realización de nuestra Unidad Didáctica hemos pasado por un proceso de modificaciones cambiando los problemas florecidos e incluyendo las nuevas ideas que han ido surtiendo, dichas ideas, en algunas ocasiones, le daban al tema un enfoque totalmente distinto al que inicialmente teníamos.

Somos conscientes de que aunque demos por terminada nuestra Unidad Didáctica, cuando se vuelva a revisar surgirán nuevas ideas. Por lo que una Unidad Didáctica siempre admite modificaciones o arreglos que la vayan perfeccionando debido a la experiencia personal.

La mayor complicación con que nos enfrentamos al elaborar nuestra Unidad Didáctica fue la de seleccionar las tareas destinadas a la secuenciación de las clases. También hubo ciertas complicaciones a la hora de concretar las competencias que se quieren desarrollar.

No es suficiente con realizar una unidad didáctica de un tema concreto una vez en la vida, uno de los motivos por los que esto no es posible es que en la actualidad la situación de los centros no es la que había hace años, pues se ha visto condicionada por un avance tecnológico, social y de poder adquisitivo que ha influido directamente en la motivación del estudiantado. Este hecho, quizá sea el motivo de utilizar nuevos recursos y materiales que despierten interés. Otra de las razones es que no todos los grupos de alumnos a los que nos vamos a enfrentar son iguales, de hecho cada colectivo va a ser distinto. Por todo esto hay que adecuar cada unidad en el momento de ser usada.

El trabajar en grupo me ha supuesto una experiencia enriquecedora a lo largo del curso, ya que nuestros distintos puntos de vista se han complementado gracias a todos los debates y discusiones que han ido surgiendo al trabajar la materia.

Para terminar, no es fácil pensar como profesores cuando aún pensamos como estudiantes, pero con grandes esfuerzos creemos haber avanzado en este campo, gracias a la formación adquirida en esta asignatura.

Recomendaciones

a. Implementar talleres y capacitaciones, donde se aborden problemas y tópicos algebraicos, modelos pedagógicos: Enseñanza por Competencias, el uso y manejo de algún software matemático con el propósito de desarrollar habilidades matemáticas en las y los estudiantes.

b. Explorar qué conocimientos previos tienen las y los estudiantes necesarios para la construcción de los nuevos conocimientos.

c. Promover en las y los estudiantes la auto preparación constante y el trabajo en grupo que le permita enriquecer sus experiencias de aprendizajes, así como la formación de estrategias propias de aprendizaje.

d. Orientar la elaboración de materiales didácticos, selección de problemas concretos, que propicie en las y los estudiantes el desarrollo de habilidades de deducción, experimentación, generalización, razonamiento, argumentación, representación y trazado de diagramas que le permita potenciar el razonamiento lógico – matemático.

e. Aplicar las distintas formas de evaluación propuesta u otras que consideren convenientes con el propósito de superar aquellos aspectos que presentan dificultad.

f. Revisar los planes y programas de Matemática con el objeto de adaptarlos a nuestra realidad social y económica.

g. Implementar el trabajo compartido entre profesores del centro donde se pondrá en práctica el documento y resolver problemas de manera conjunta.

h. Diseñar nuevas propuestas de problemas que tomen como punto de partida, el entorno y las necesidades comunitarias.

Bibliografía

i. Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría, ejemplos y ejercicios.* Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica.

ii. Barrantes, H. (2001). *Introducción a la matemática.* San José, Costa Rica: EUNED.

iii. Garrote, M.; Hidalgo, M. J.; Blanco, L. J. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. *Suma* (núm. 46, págs. 37-44)**.**

iv. Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

v. Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

vi. Monteagudo, M. F.; Paz, J.; Cámara, M. T. (1997). *Matemáticas I.* Zaragoza: Editorial Edelvives. OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

vii. Rees, P. y Sparks, F. (1970). *Álgebra*. México, D. F.: Editorial McGraw-Hill.

viii. Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

ix. Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

x. Rondón D, Jorge E. (2006). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. 1ª. Edición. Bogotá, Colombia.

xi. Swokoski, E. (1995). *Álgebra con Geometría Analítica*. México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

xii. Swokoski, E. y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica (10ª edición)*. México, D. F.: Thomson Learning.

xiii. Zill, Dennis. *Álgebra y Trigonometría*. 2da. Edición. México, D. F.: Editorial McGraw-Hill.

Anexos

Anexo No. 1

CUADRO DE DISTRIBUCIÓN DE LAS UNIDADAES EN EL TIEMPO UNDECIMO GRADO

SEMESTRE	N° Y NOMBRE DE LA UNIDAD	TIEMPO (HORAS CLASES)	TEPCE
I	Unidad I : Probabilidades	14 horas / clases	PRIMERO
	Unidad I : Probabilidades Unidad II : Progresiones	10 horas / clases 4 horas / clases	SEGUNDO
	Unidad II : Progresiones	14 horas / clases	TERCERO
	Unidad II : Progresiones Unidad III : Funciones Exponenciales y Logarítmicas	6 horas / clases 8 horas / clases	CUARTO
	Unidad III : Funciones Exponenciales y Logarítmicas	14 horas / clases	QUINTO
II	Unidad IV: Resolvamos Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas	14 horas / clases	SEXTO
	Unidad IV: Resolvamos Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas **Unidad V: Resolvamos Inecuaciones**	8 horas / clases **6 horas / clases**	SÉPTIMO
	Unidad V : Resolvamos Inecuaciones	**14 horas / clases**	OCTAVO
	Unidad V : Resolvamos Inecuaciones Unidad VI : Geometría Analítica	**4 horas / clases** 10 horas / clases	NOVENO
	Unidad VI : Geometría Analítica	14 horas / clases	DECIMO

Anexo No. 2

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

UNDÈCIMO GRADO

NOMBRE DE LA UNIDAD : RESOLVAMOS INECUACIONES

NÚMERO DE LA UNIDAD : V

TIEMPO SUGERIDO : 24 HORAS / CLASES

Competencia de Grado:

1. Resuelve inecuaciones lineales, cuadráticas, racionales y con valor absoluto de acuerdo a sus características y propiedades en problemas de su entorno.

Competencia de Ejes Transversales:

1. Manifiesta respeto a la diversidad y a la dignidad humana al relacionarse con las personas en un ambiente pluralista a fin de contribuir a una cultura de paz.

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
1	▪ Resuelve problemas de su entorno relacionados a inecuaciones con una variable y sus propiedades.	▪ Inecuaciones lineales**,** cuadráticas y racionales. ▪ Definición. Conjunto solución. Gráfica.	▪ Observa y escucha los videos: “Ecuaciones e inecuaciones”, “Las inecuaciones” para iniciar con el desarrollo del contenido. ▪ Con ayuda del docente, concluye que: - Una inecuación es una desigualdad en la que aparece una incógnita. La solución de una inecuación es, por lo general, un intervalo o la unión de intervalos de números reales.	▪ Verificar que las y los estudiantes resuelven problemas de su entorno relacionados a inecuaciones con una variable y sus propiedades.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Indicadores de Logro</th><th>Contenidos Básicos</th><th>Actividades de aprendizajes sugeridas</th><th>Procedimientos de Evaluación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>

- Explicar la diferencia de desigualdad e inecuación con los siguientes ejemplos:
  1. $3 < 7$
  2. $-2 > -5$
  3. $x \leq 2$
  4. $x-3 \geq y$

Las desigualdades 3 y 4 son inecuaciones.

- Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas.

<table>
<tr><th>INECUACIÓN</th><th>TIPO</th></tr>
<tr><td>$4x-3 > 2x +5$</td><td>1º grado; 1 incógnita.</td></tr>
<tr><td>$x-1 \geq y$</td><td>1º grado; 2 incógnita</td></tr>
<tr><td>$x^2-5x \leq 4$</td><td>2º grado; 1 incógnita.</td></tr>
<tr><td>$xy-3 > 0$</td><td>2º grado; 2 incógnita.</td></tr>
</table>

- Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad. El método para resolver una inecuación es similar al utilizado para resolver ecuaciones, tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades.

$$Si\ \ a < b,\ \ entonces\ \ a - b < 0$$
$$Si\ \ a > b,\ \ entonces\ \ a - b > 0$$
$$Si\ \ a \leq b,\ \ entonces\ \ a - b \leq 0$$
$$Si\ \ a \geq b,\ \ entonces\ \ a - b \geq 0$$

</td><td>

- Reconoce la importancia del trabajo en equipo cooperativo.

- Practica normas de conducta y convivencia de paz con sus compañeros.

</td></tr>
</table>

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			▪ Resuelva inecuaciones de manera que las represente gráficamente y en forma de intervalos. 1. $x + 7 > 9$ 2. $2x + 3 \leq x + 6$ 3. $-6x + 7 \geq x + 9$ 4. $-6x \leq -72$ 5. $\frac{1}{3}x - 9 > \frac{2}{3}x + 6$ 6. $-6x + 9 < -2x + 8$ Resuelva problemas aplicando desigualdades. 1. ¿Qué números satisfacen las condiciones dadas? a. El doble de un número menos 3 es mayor que -6 b. 5 más el triple de un número es menor o igual a 7. c. 15 reducido por el triple de un número es menor o igual a ½. d. d. El doble de un numero menos 5 es mayor o igual a 4 veces dicho número.	

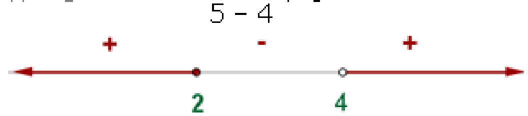
No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			2. Una microempresa fabrica camisetas con un precio unitario de venta de C$ 60 y un costo unitario de C$ 45. Si los costos fijos son de C$ 100 000, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidas para que la microempresa tenga utilidades. 3. Suponga que un Call Center le ofrece un puesto en el que usted elija entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga C$ 6 000 más una comisión del 2% sobre las ventas anuales. El otro método paga un sola comisión del 8% sobre las ventas realizadas en el mes ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método? 4. Para que un negocio tenga ganancias, es evidente que el rendimiento R debe ser mayor que el costo C, en pocas palabras, solo puede haber ganancias para $R > C$. Si una empresa produce discos compactos y la ecuación de sus costos, durante una semana es $C= 300 + 1{,}5x$ (donde x es el número de discos fabricados) mientras la ecuación de su rendimiento es $R=2x$ (donde x es el numero de discos vendidos en una semana) ¿Cuántos discos deben vender dicha empresa para obtener ganancias? ▪ Una inecuación simultánea es una inecuación con desigualdad doble; **Si $a < x < b$ entonces**	

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			a < x, ∧ , x < b, es decir, el conjunto solución es la intersección de los dos conjuntos solución: $$S=\{x/x>a\}\cap\{x/x<b\}$$ ▪ Encontrar la solución de inecuaciones simultáneas de primer grado. a. $6<4x-2<7$ c. $-7 \leq 2x+1 < 19$ b. $-1\leq\frac{3-7x}{4}\leq 6$ d. $2 < \frac{1}{2}x - 6 \leq 8$ ▪ Deduce con ayuda de él o la docente que: - Sean a, b, c constantes reales tales que $a\neq 0$. Sea x una variable real. Llamamos inecuación cuadrática a aquellas en la cual uno de sus miembros es una expresión de la forma ax^2+bx+c y el otro miembro es cero. - Resolver el siguiente problema aplicando inecuación simultanea. 1. Si la temperatura en Managua, durante un período de 24 horas osciló entre los 95 ºF y 100 ºF ¿Cuál fue la variación en grados Celsius si F=9/5C+32? 2. Para ingresar a cierta universidad, un estudiante debe obtener un promedio final que este entre	

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			85 y 100 puntos en tres exámenes de admisión. Obtiene 80 y 83 en los dos primeros exámenes ¿Cuánto podría obtener en el tercer examen para ingresar a la universidad? 3. Para calcular la relación, entre la masa corporal y la estatura (IMC) de una persona se utiliza la fórmula: $IMC = \frac{Masa}{(Estatura)^2}$ - Diversos estudios realizados, han concluido que el grupo de mejor salud y más esperanza de vida corresponde a un IMC comprendido entre 20 y 25. Utilizando la fórmula para el IMC, calcular el rango de los pesos entre los cuales se pueden encontrar personas que miden entre 1,50 m a 1,80 m. Una persona que tiene un IMC en el límite inferior, mide 1,74m. Para ser considerada saludable, ¿Cuál debiera ser su peso? ▪ Concluye que son inecuaciones cuadráticas: $2x^2 +2x +1<0$ $2x^2+8>0$ $x^2-5x +6\geq 0$ $3x^2- 27c\leq 0$ ▪ Al resolver este tipo de inecuaciones se pueden presentar dos casos: **Caso 1:** Consideremos como caso 1, aquel en el cual la expresión ax^2+bx+c es factorizable.	

<table>
<tr><th>No.</th><th>Indicadores de Logro</th><th>Contenidos Básicos</th><th>Actividades de aprendizajes sugeridas</th><th>Procedimientos de Evaluación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
Para resolver estas inecuaciones se debe factorizar la expresión, para posteriormente aplicar el procedimiento usado de una ``tabla de signos"
Ejemplo: x^2-5x +6$\geq$0
x^2-5x +6= (x - 3)(x - 2)
de donde x = 3 y x = 2
<table>
<tr><th></th><th>(-α ;2)</th><th>(2;3)</th><th>(3 ; α)</th></tr>
<tr><td>(x - 3)</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>(x - 2)</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>(x - 3)(x - 2)</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>Solución</td><td colspan="3">x ∈ (-α ;2) U (3 ; α)</td></tr>
</table>
Resuelva determinando el conjunto solución, gráficos e intervalo de las inecuaciones cuadráticas.
$2x^2-3x-2\leq 0$ $x^2+2x - 8<0$
$-2x^2 -8 >0$ $7x -21x^2 \geq 0$
$3-x^2 \geq 0$ $-2x^2+7x-3\geq 0$
$4x^2 – x\geq 0$ $x^2-2x+1>0$
Caso 2:
Consideremos como Caso 2, aquel en el cual la expresión ax^2 + bx + c no es factorizable. Para resolver estas inecuaciones usaremos el siguiente teorema: Sean a, b, c, constantes reales y x una variable real tales que a $\neq$ 0 y b^2- 4ac <0 , entonces se cumple que:
i. Si a>0 , entonces , $ax^2 + bx + c > 0$, $\forall x \in R$
ii. Si a<0 , entonces , $ax^2 + bx + c < 0$, $\forall x \in R$
</td><td></td></tr>
</table>

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			Resuelva las inecuaciones cuadráticas determinando gráficos e intervalos en los que halla solución. $2x^2 + x + 3 \geq 0$ $-x^2 - x - 1 > 0$ $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$ $3x - 4x^2 - 5 < 0$ $6 + 2x^2 \geq 0$ $3x^2 - 5 \geq 0$ $4x^2 - x \geq 0$ $x^2 - 2x + 1 > 0$ ▪ Las **inecuaciones racionales** se resuelven de un modo similar a las de **segundo grado**, pero hay que tener presente que **el denominador no puede ser cero.** Para resolver inecuaciones racionales debemos seguir los siguientes pasos: 1. Hallamos las raíces del numerador y del denominador. 2. Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas para que no se pueda anular el denominador. 3. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo. 4. La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo de la desigualdad dada.	

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			Ejemplo: $\frac{x-2}{x-4} \geq 0$ 1. Hallamos las raíces del numerador y del denominador. $x - 2 = 0 \quad x = 2$ $x - 4 = 0 \quad x = 4$ 2. 2º Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas. 3. Tomamos **un punto de cada intervalo y evaluamos el signo** en cada intervalo:  $\frac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$ $x = 0 \qquad \frac{0-2}{0-4} > 0$ $x = 3 \qquad \frac{3-2}{3-4} < 0$ $x = 5 \qquad \frac{5-2}{5-4} > 0$  	

<table>
<tr><th>No.</th><th>Indicadores de Logro</th><th>Contenidos Básicos</th><th>Actividades de aprendizajes sugeridas</th><th>Procedimientos de Evaluación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo de la inecuación.
S = (-∞, 2] U (4, ∞)

▪ Resolver las desigualdades racionales propuestas:
$\frac{x-1}{2x+3} \geq 0$ $\frac{3x^2-2x}{3x+2} \leq -2$
$\frac{x-2}{x-5} \leq 2$ $\frac{3}{2x-2} > \frac{1}{2x+1}$
$\frac{2x-3}{x+1} \geq \frac{3}{4}$ $\frac{x^2+5x+6}{x-4} \geq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>▪ Aplica propiedades de las inecuaciones con valor absoluto en la resolución de problemas de la vida cotidiana.</td><td>▪ Inecuaciones con valor absoluto.

▪ Definición.

▪ Conjunto solución.

▪ Gráfica.</td><td>▪ En conjunto con el o la docente recordar que:

- El valor absoluto nos permite considerar una magnitud numérica sin tener en cuenta el signo. Su definición formal es:

$|a| = \begin{cases} a & \text{para } a > 0 \\ 0 & \text{para } a = 0 \\ -a & \text{para } a < 0 \end{cases}$
$\forall a \in$ R
y significa que el valor absoluto de un número nunca es negativo.</td><td>▪ Comprobar la aplicación de las propiedades de las inecuaciones con valor absoluto en la resolución de problemas de la vida cotidiana.</td></tr>
</table>

$$|-5| = |5| = 5$$

No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación
			Ejemplo: ▪ La solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto requieren del conocimiento y dominio de algunas propiedades fundamentales que guíen los procesos. A continuación se dan las propiedades que serán usadas en el tema en cuestión. a. $\lvert x\rvert \geq 0$ b. $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$ c. $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$ d. $\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$ e. $\left\lvert \frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$, si $y \neq 0$ f. $\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ g. $\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$, o $x \geq a$ ▪ Encontrar los valores que satisfacen las expresiones dadas. Exprese la solución en diferentes notaciones: $\lvert 3-x\rvert = \lvert 1+2x\rvert$ $\lvert 2x-3\rvert = 4$ $\left\lvert 12-\frac{3x}{4}\right\rvert = -1$ $\lvert 3x+5\rvert > 6$ $\left\lvert \frac{3}{2}-\frac{5x}{3}\right\rvert \leq 2$ $\left\lvert \frac{2}{5}-\frac{8}{3}x\right\rvert \leq 2$ $\lvert 4x-3\rvert \leq 1$ $\left\lvert \frac{3x-1}{4}\right\rvert < 6$ $\lvert 6-5x\rvert \leq \frac{1}{2}$	

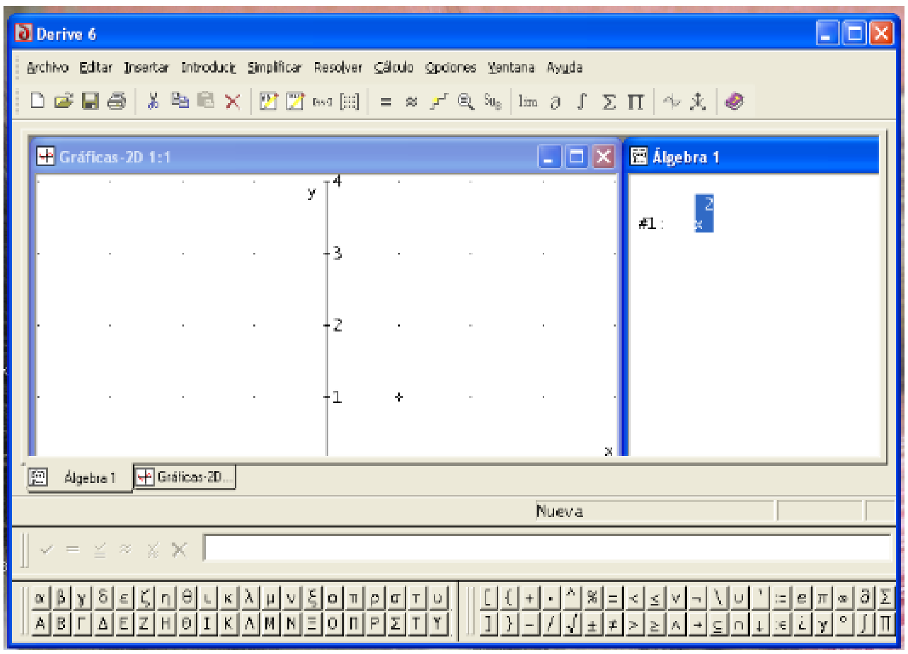
No.	Indicadores de Logro	Contenidos Básicos	Actividades de aprendizajes sugeridas	Procedimientos de Evaluación

Anexo No. 3

Uso del DERIVE 6

Las ventanas principales de Derive 6, al igual que otras aplicaciones bajo Windows, consta de una barra de herramientas con iconos que facilitan el uso de distintas funciones que ejecuta la aplicación.

Hay tres ventanas principales o entornos: Álgebra, Gráficas 2D y Gráficas 3D. En cada una de ellas, la barra de herramientas tiene elementos comunes y otros propios de su entorno. Cuando trabajamos con más de una a la vez, está activa la que está resaltada. El aspecto general de la venta principal de la aplicación es:



Barra de herramientas ⟵

Entorno gráfico (ventana no activa)

Entorno algebraico (ventana activa)

Pestañas indicadoras de ventanas

Editor de línea

Alfabeto Griego

Símbolos matemáticos

Teclas de funciones interesantes en el entorno algebraico:

F1: Ayuda.

F2: Editor de línea para introducir una expresión.

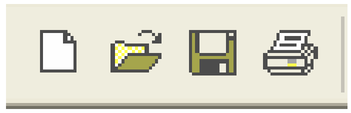
F3: Introduce en la línea de edición una expresión previamente marcada.

F4: Introduce en la línea de edición una expresión previamente marcada, introduciéndola entre paréntesis.

F5: Inserta una línea de texto.

BARRA DE HERRAMIENTAS DERIVE 6

Iconos de Manejo de Archivos

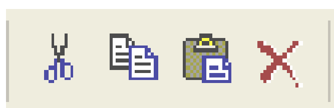


Nuevo Abrir Guardar Imprimir

Iconos de Ventanas

Álgebra Gráfica 2D Gráfica 3D Ayuda

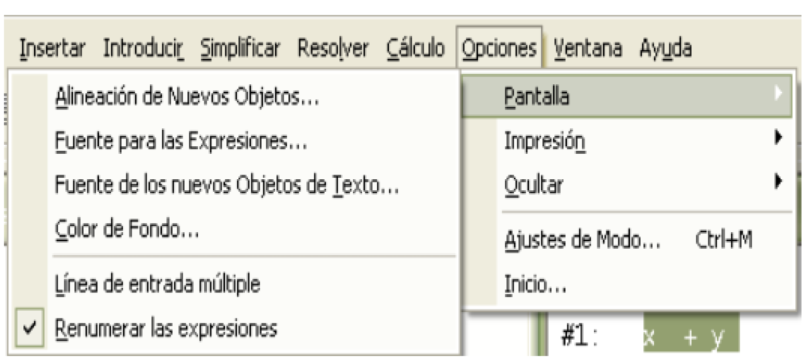
Iconos de Edición



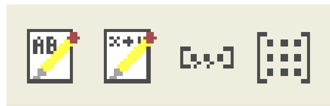
Cortar Copiar Pegar Eliminar

Menú de Ventanas

Menú de Opciones

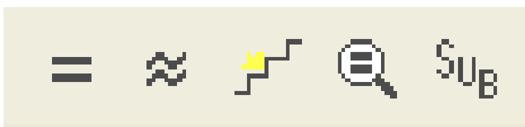


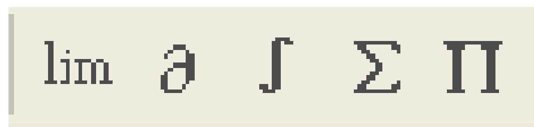
Ventana de Álgebra



Introducir Texto Expresión Vector Matriz

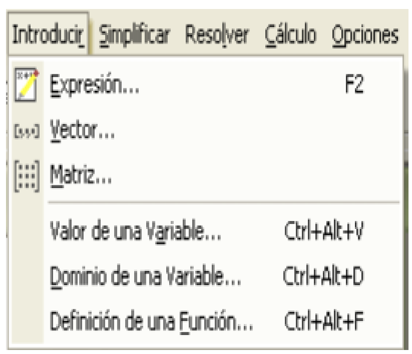
Simplificar Pasos intermedios Calculus



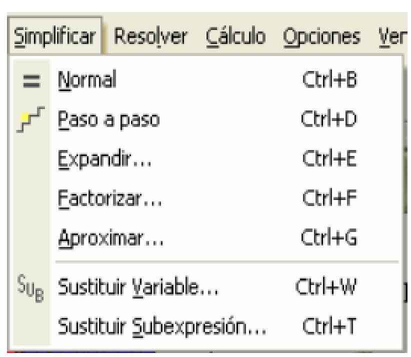


Básico Aproximar Resolver Sustituir Límite Derivada Integral Suma Producto

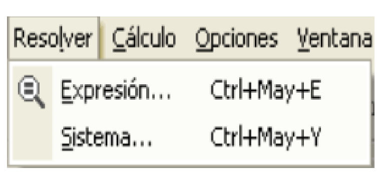
Menú Introducir



Menú Simplificar

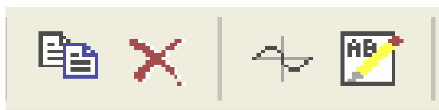


Menú Resolver

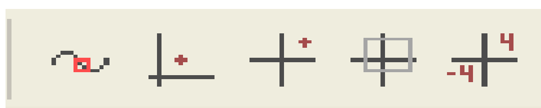


Menú Cálculo

Ventana Gráfica 2D

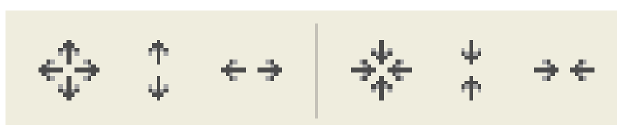


Copiar ventana 2D	Borrar última gráfica	Dibujar expresión F4	Insertar anotación F12



Trazar gráfica	Centrar en el cursor	Centrar en el origen	Seleccionar rango	Restablecer rango

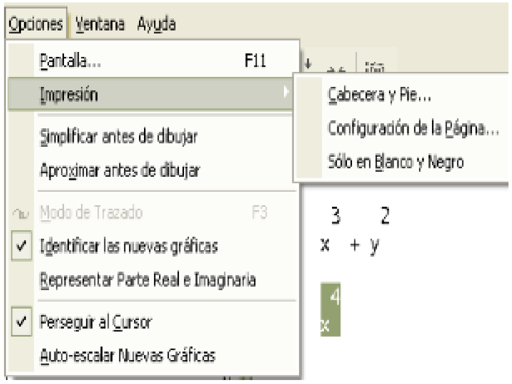
ZOOM



Hacia fuera F10	Reducir en OY F8	Reducir en OX F6	Hacia dentro F9	Ampliar en OY F7	Ampliar en OX F5

Menú Seleccionar

Menú Opciones



INECUACIONES

Resolver/expresión

- Método algebraico: resuelve ecuaciones e inecuaciones mediante métodos algebraicos siempre que sea posible, calcula las soluciones exactas (tanto raíces reales como complejas). Si se quiere calcular sólo las raíces reales o dentro de un intervalo concreto se indica en el Dominio. La función Derive es

  SOLVE(expresión,variable,Real/Extremos del Intervalo)

Utilizando Simplificar/Aproximar tendremos las soluciones aproximadas, tanto reales como complejas.

APPROX(SOLVE(expresión,variable,Real/Extremos del Intervalo))

- Método numérico: resuelve ecuaciones mediante métodos numéricos. Encuentra una única solución de la ecuación en el intervalo especificado (raíz real). Una representación gráfica del problema nos ayudará a encontrar todos los intervalos donde es posible hallar una única raíz.

  SOLVE(expresión,variable,Real/Extremos del Intervalo)

  Nota:

  En el caso de ecuaciones algebraicas es capaz de encontrar aproximadamente todas las soluciones posibles, tanto reales como complejas.

Resolución gráfica de inecuaciones

Para resolver las inecuaciones gráficamente introducimos la expresión en la ventana de álgebra y la representaremos en una ventana de Gráficas-2D.

Ejemplo

Estudia para qué conjunto de números reales se verifica la inecuación

$$|x^2 - 9| < 2$$

Procedimiento

1. En la ventana de Álgebra introducimos la expresión

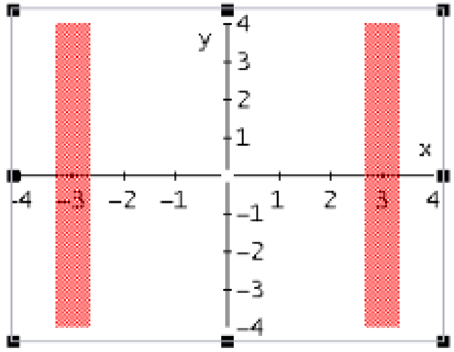
   ABS(x^2 – 9) < 2

2. Con la expresión anterior marcada, abrimos una ventana de Gráficas-2D y dibujamos.
3. Para introducir el dibujo en la ventana de Álgebra seleccionamos en la barra de herramientas de la ventana gráfica: Archivo/Incrustar.
4. Para obtener la solución analítica, utilizaremos la instrucción de la barra de herramientas Resolver/Expresión o el icono correspondiente.

#1: $|x^2 - 9| < 2$

#2: SOLVE $(|x^2 - 9| < 2,\ x)$

#3: $\sqrt{7} < x < \sqrt{11} \ \vee \ -\sqrt{11} < x < \sqrt{7}$



Ejercicios

Resolver gráfica y analíticamente las siguientes inecuaciones.

(a) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

(b) $|x + 2| - |x| \geq 1$

(c) $|x - 1| + |x + 2| \leq 3$

(d) $\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x-6} \leq 0$

Anexo No.4

Windows para Funciones (FW26)

Manual de Instrucciones

I. Cómo Dibujar una función.

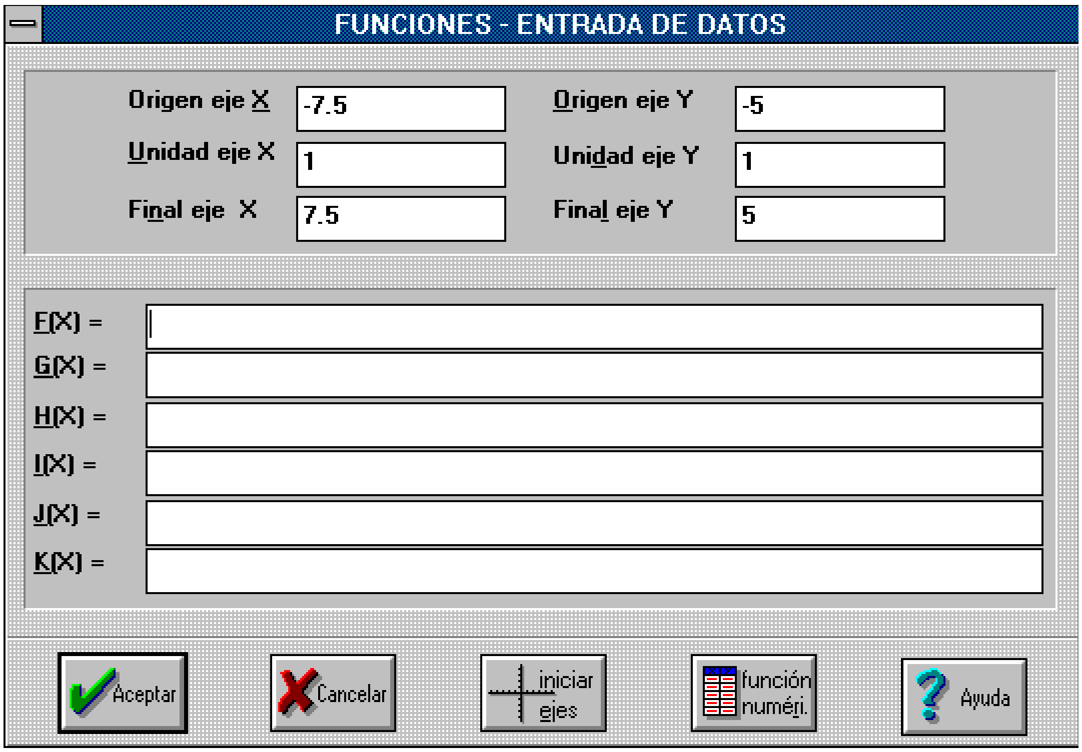
Al arrancar el programa, aparece un cuadro de diálogo denominado **FUNCIONES – Entrada de datos**. Este es el diálogo de control principal del programa.

Escriba una función, por ejemplo "SEN(X)". Pulse **<RETURN>** o haga clic en el botón **Aceptar**. Inmediatamente aparecerá la ventana **FUNCIONES** y se dibujará la función.

Si pulsa sobre el menú "1 fu.", accederá a toda una serie de opciones que podrá ejecutar sobre la función dibujada: Imagen, Anti imagen, Raíces, Discontinuidades aisladas, Máximos, Mínimos, Puntos de inflexión, Derivada en un punto, Integral definida, Integral de línea, Intervalos de crecimiento, Intervalos de Decrecimiento, Intervalos de concavidad, Intervalos de convexidad, Función derivada, Segunda derivada, Función integral.

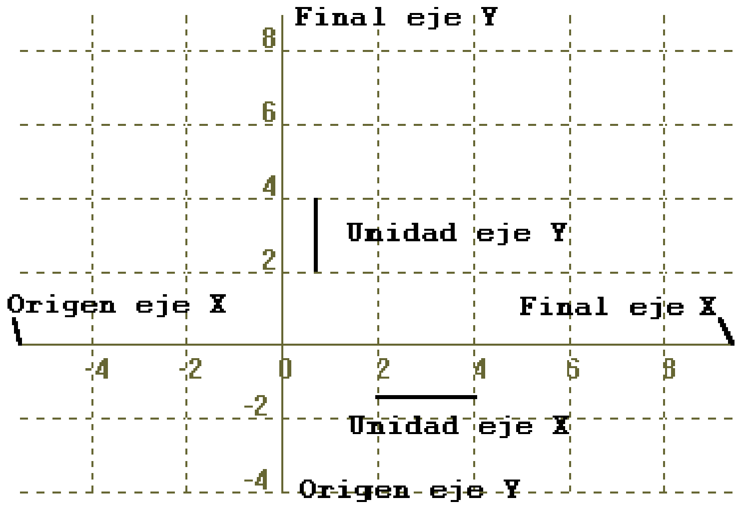
Si quiere cambiar las funciones o los valores de los ejes, escoja dentro del menú **Principal** la opción **Cambiar funciones o parámetros** refiriéndose a los valores de los ejes.

II. Cuadro de diálogo: Funciones - Entrada de datos.



Es un cuadro de diálogo dividido en tres partes: La superior, sirve para introducir los valores de los ejes. La siguiente, precedidas por F(X)=, G(X)=,... es donde introduciremos las expresiones de hasta seis funciones. A continuación, la zona de botones.

Valores de los ejes



Hay que recordar que cada cuadro de entrada funciona como una calculadora. Así, si quisiéramos, por ejemplo, poner como Unidad eje X: pi/2, podemos escribir exactamente eso.

Expresiones

Escriba aquí las funciones que quiera representar, seis como máximo. Para editar, utilice las teclas del cursor <DELETE> y <BACKSPACE>. La forma de escribir las funciones debe cumplir una serie de normas de sintaxis son las usuales.

Zona de Botones

Hay 5 botones:

1. **Aceptar**. Se pulsará cuando se hayan introducido las funciones y se quieran representar.

2. **Cancelar**. Cuando no quiera que surta efecto los últimos cambios en el cuadro ENTRADA DE DATOS, se volverá a la ventana principal con las funciones previamente representadas.

5. **Inicializar ejes**. Aparecerán éstos con los valores originales, que son : para el eje X, -7.5, 1, 7.5 y para el eje Y, -5, 1, 5.

6. **Función numérica**. Cuando quiera representar una función numérica, pulse esta opción. Aparecerá un cuadro de diálogo en el cual podrá escoger cuál de las seis funciones escoge para representar una función numérica. Pueden representarse hasta un máximo de seis funciones numéricas. A continuación, aparecerá un nuevo cuadro de diálogo, <u>función numérica - Introducir valores</u>, en el cual podrá colocar los X y F(X) mediante números de la función.

7. **Ayuda**. Accede a esta información.

II. Normas de sintaxis.

Para escribir las funciones se deben seguir unas normas de sintaxis que, en principio, son las usuales. Las describimos a continuación:

La variable independiente la representaremos mediante X.
Se permite y recomienda el uso de paréntesis.
Las operaciones admitidas son:

- **+** Suma
- **-** Diferencia
- ***** Producto
- **/** División
- **^** Potencia

Las funciones permitidas y su sintaxis son:

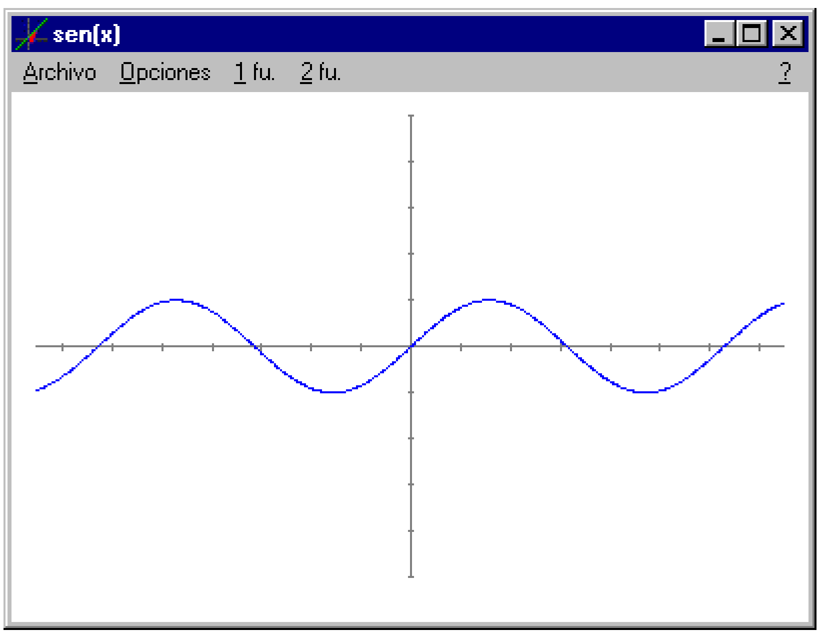
SEN( ) : Seno	radianes.	**SEG( )** : Seno	grados sexagesimales
COS( ) : Coseno	"	**COG( )** : Coseno	"
TAN( ) : Tangente	"	**TAG( )** : Tangente	"

ASE( ) : ArcoSeno "	**ASG( )** : ArcoSeno "
ACO( ) : ArcoCoseno "	**ACG( )** : ArcoCoseno "
ATA( ) : ArcoTangente"	**ATG( )** : ArcoTangente "
LN( ) : Logaritmo Neperiano	**LOG( )** : Logaritmo en base 10
EXP( ) : Exponencial e^x	**ALO( )**:ArcoLogaritmo en base 10. 10^x
ABS( ) : Valor absoluto	
PI o **P** : 3.141593	**NE** : 2.718282

Recordemos que puede calcularse el logaritmo en cualquier base mediante la siguiente fórmula: $Log_b(x)$=LN(X)/LN(b).

III. Opciones de los menús.

Si termina el proceso de dibujar una o más gráficas, por ejemplo la función "SEN(X)", observaremos la ventana FUNCIONES con el siguiente aspecto:



Encontramos los típicos botones:

Minimización. La ventana queda reducida a su icono. Esto es muy útil para despejar el área de trabajo cuando empleamos varias aplicaciones juntas o, incluso, cuando trabajamos con varios programas FUNCIONES para Windows simultáneamente.

Maximización. Muy interesante para utilizar toda la pantalla para representar los gráficos.

La esquina inferior derecha sirve para **dimensionar** la ventana. Con ella podremos dar al gráfico el tamaño que deseemos.

Creemos que la forma habitual de trabajar debe ser con la ventana maximizada. No la utilizaremos cuando queramos ejecutar varias veces el programa o bien cuando queramos darle un cierto tamaño al dibujo, cuando, por ejemplo, queramos incluirlo en algún texto.

Pulsando en cualquier punto de la ventana FUNCIONES, con el botón izquierdo del ratón, aparecen señaladas las coordenadas de dicho punto.

Vemos una **barra de menú** con 5 opciones: **Archivo**, **1 fu.**, **2 fu.**, **Opciones**, **Ayuda**.

Menú **Archivo**. Si lo seleccionamos, accedemos a seis submenús:

Cambiar funciones o parámetros... Alt F. Sirve para ir al cuadro de diálogo Funciones - Entrada de datos. Cuando queramos cambiar de funciones o los valores de los ejes. <Alt F> es una tecla aceleradora, es decir que, pulsándola, se accede a dicha opción.

Abrir.... Muestra el diálogo Abrir archivo, en el cual podemos seleccionar un archivo que contenga datos que correspondan a funciones analíticas o numéricas así como valores de los ejes.

Guardar. Guarda los datos que se hallan en el cuadro de diálogo FUNCIONES - Entrada de datos. En el caso de que no tenga nombre aparece el diálogo guardar como y podemos asignar un nombre al archivo.

Guardar como. Guarda los datos que se hallan en el cuadro de diálogo Funciones - Entrada de datos en un archivo con el nombre que deseemos

Imprimir . Imprime el gráfico contenido de la ventana.

Salir. La forma habitual de abandonar el programa.

Menú **Opciones**.

Copiar en el portapapeles. Para copiar el contenido de la ventana en el "Portapapeles". Es la forma que tenemos para pasar los gráficos creados a otros programas. Para recuperarlos, vamos a la aplicación receptora. Nos situamos en el lugar donde deseamos que aparezca el gráfico y seleccionamos la opción, que suele estar en el menú **Edición**, **Pegar**. Esta opción también se consigue pulsando las teclas **CTRL INS**.

Limpiar. Cuando hemos realizado una de las anteriores opciones, por ejemplo cálculo de la integral definida, su efecto queda dibujado hasta que una nueva opción sea requerida. Si interesa dejar el estado inicial de la gráfica, debemos utilizar esta opción. Esta opción también se consigue pulsando el botón derecho del ratón.

Las siguientes cinco opciones son del tipo **Activo**/**Inactivo**. Cuando están activadas aparece el símbolo ***V*** delante.

Pizarra. Cambia el fondo, generalmente blanco, a negro, que es el color tradicional de FUNCIONES para DOS. Por defecto, aparece desactivada

Trama. Además de los ejes, teje una cuadrícula de líneas discontinuas. Por defecto, aparece desactivada

Valor unidad de los ejes. Cada unidad de los ejes aparece acompañada de su valor. Por defecto aparece desactivada

Mostrar puntos singulares. Cuando el programa encuentra máximos, mínimos, intervalos, etc. aparecen con su valor. Por defecto, esta opción aparece activada. Si la desactivamos estos valores no aparecerán.

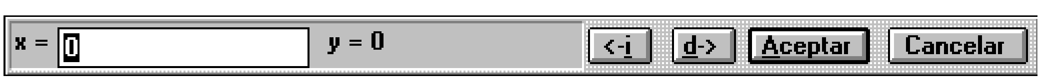
Trazar cálculos. Cuando el programa busca máximos, mínimos, intervalos, etc., lo hace de forma dinámica y nos va indicando por dónde anda la búsqueda mediante una línea roja que va cruzando de derecha a izquierda. Esta prelación es muy interesante y da, creemos, al programa un gran valor didáctico. A veces, según como utilicemos el programa, puede interesarnos no visualizar todo el proceso. Desactivando esta opción, lo conseguiremos. El beneficio es un gran incremento de la velocidad. Se recomienda especialmente esta opción para el cálculo de la **Función derivada**. Por defecto, esta opción aparece activada,

Baja precisión. Cuando se representan los puntos singulares, opción **Mostrar puntos singulares** activada, se pueden mostrar los valores con alta precisión, millonésima, o baja , ésta depende de la estimación del error cometido. Por defecto aparece activada, baja precisión, porqué lo creemos más didáctico.

Error en los cálculos. Todos los procesos de cálculo del programa son numéricos. Mediante esta opción podemos conocer una estimación del error de cálculo cometido.

Menú **1 fu.**. Este menú será activo sólo cuando haya una única función representada. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a un total de 17 opciones.

Imagen Alt I. Se nos ofrece un cuadro de diálogo en el que podemos introducir el valor de la X. Pulsando el botón **Aceptar** o <RETURN> se nos da su imagen en el caso de que la tuviera. Si se encuentra entre los límites del eje X, es dibujada



Los botones **<-i** i **d->** permiten calcular las imágenes de los puntos contiguos. Esto da unas enormes posibilidades a esta opción como, por ejemplo, para explicar el concepto de **máximo** relativo de una función.

Finalmente, si queremos abandonar esta opción, pulsaremos el botón **Cancelar** o la tecla <ESC>.

Antiimagen. Se nos pide un número, mediante un cuadro de diálogo, que ha de hallarse entre los límites del eje Y. De forma dinámica, se nos irán indicando, caso de que las tuviera, todas sus antiimágenes.

Raíces. El programa, de forma dinámica, busca las raíces de la función.

Discontinuidades aisladas. El programa da los puntos singulares donde NO está definida la función. En este caso, nos dará el límite. En el caso "1/(X-2)", nos dirá que en 2 lim= infinito. Si fuera "sen(X)/X", nos escribirá que en el 0 lim=1.

Sólo indica las que ha encontrado por su precisión. Por ejemplo: (x^2-4)/(x-2), que tiene una discontinuidad en x=2, si la unidad del eje X es entera, 1 por ejemplo, sí será encontrada. Pero si representamos (x-3.1234)^2/(x-3.1234), que tiene una clara discontinuidad en 3.1234, no será hallada. Para hacerlo, tendríamos que poner como unidad del eje X 3.1234 o un múltiplo suyo. Esto es debido a que se utiliza un método totalmente numérico y a que se calcula en un cierto número de puntos. Concretamente, entre los valores izquierdo y derecho del eje X, se calcula en 600 puntos. En casos como TAN(X), aunque no encuentre exactamente donde se halla el punto donde no está definida la función y se disparen los valores, nos indica POSIBLE PUNTO DE DISCONTINUIDAD infinito.

Máximos. El programa nos da los máximos locales de la función.

Mínimos. Se nos ofrecen los mínimos.

Puntos de inflexión. Cálculo de los mismos.

Derivada en un punto. Aparece el mismo cuadro de diálogo que en la opción **imagen**. El funcionamiento es idéntico. Se nos ofrece el valor y el dibujo de la recta tangente. Aquí, la opción encontrar valores adyacentes, vuelve a ser especialmente útil.

Integral definida. Nos pide el valor de los límites inferior y superior del intervalo de integración. Se calcula, ofrece su valor y se dibuja en la gráfica lo que representa.

Integral de línea. Nos pide el valor de los límites. Calcula el valor y se nos dibuja en la gráfica lo que representa

Intervalos de crecimiento. Aparece en la gráfica una línea roja, donde la función es creciente, indicando los extremos de los intervalos.

Intervalos de decrecimiento, **Intervalos de concavidad**, **Intervalos de convexidad**. Lo mismo que el caso anterior, pero en la zona donde se cumple lo especificado. Para hallar los límites de los intervalos, podemos, asimismo, encontrarlos de una forma distinta calculando máximos, mínimos, puntos de inflexión y discontinuidades.

Función derivada. Se nos ofrece, de forma dinámica, la construcción de la gráfica de la función derivada. Para obtener un valor concreto, podemos escoger la opción derivada en un punto.

Segunda derivada. Construcción de la función derivada segunda.

Función integral. Construcción de la función integral a partir de un punto que, previamente, se nos habrá solicitado mediante un cuadro de diálogo . Para obtener un valor concreto, escoger la opción integral definida.

Ecuación de regresión.... Esta opción sólo aparece activa cuando haya una única función numérica del tipo, **regresión**, introducida. Nos ofrece la ecuación de la función ajustada. También el coeficiente de correlación. Dicha información podemos pasarla al portapapeles pulsando el botón **Si**.

Solo ver puntos. Esta opción sólo aparece activa cuando haya una única función numérica del tipo, **regresión**, introducida. Nos ofrece la posibilidad de sólo ver los puntos y no la gráfica de regresión.

Menú **2 fu.**. Este menú será activo solo cuando haya dos funciones representadas. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a 2 opciones.

Cortes. Busca los puntos de corte entre las dos funciones.

Área. Cálculo del área entre las dos funciones entre dos puntos cualesquiera. Dichos puntos tendrán que ser introducidos previamente mediante un cuadro de diálogo.

Menú **?**.

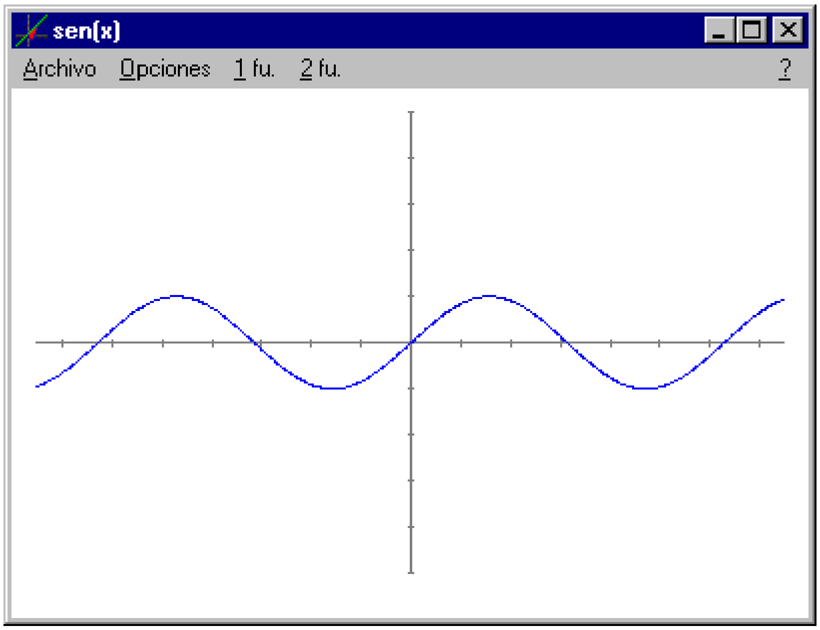
Índice F1. Se accede al índice de la ayuda de este programa. Pulsando <F1> produce el mismo efecto. Es un sistema de ayuda hipertexto. Permite navegar entre los diferentes tópicos, que aparecen coloreados en verde, pulsando con el botón izquierdo del ratón, o mediante la tecla <TABULADOR> confirmando con la tecla <RETURN>. En esta ayuda, prácticamente, se encuentra todo el presente manual

Uso de la ayuda. Se accede a la ayuda general de Windows que explica cómo funciona el sistema de Ayuda Windows.

Acerca.... Aparece el cuadro inicial del programa donde se informa del nombre del autor .

5 - Opciones de los menús.

Si termina el proceso de dibujar una o más gráficas, por ejemplo la función "SEN(X)", observaremos la ventana FUNCIONES con el siguiente aspecto:



Encontramos los típicos botones:

Minimización. La ventana queda reducida a su icono. Esto es muy útil para despejar el área de trabajo cuando empleamos varias aplicaciones juntas o, incluso, cuando trabajamos con varios programas FUNCIONES para Windows simultáneamente.

Maximización. Muy interesante para utilizar toda la pantalla para representar los gráficos.

La esquina inferior derecha sirve para **dimensionar** la ventana. Con ella podremos dar al gráfico el tamaño que deseemos.

Creemos que la forma habitual de trabajar debe ser con la ventana maximizada. No la utilizaremos cuando queramos ejecutar varias veces el programa o bien cuando queramos darle un cierto tamaño al dibujo, cuando, por ejemplo, queramos incluirlo en algún texto.

Pulsando en cualquier punto de la ventana FUNCIONES, con el botón izquierdo del ratón, aparecen señaladas las coordenadas de dicho punto.

Vemos una **barra de menú** con 5 opciones: **Archivo**, **1 fu.**, **2 fu.**, **Opciones**, **Ayuda**.

Menú **Archivo**. Si lo seleccionamos, accedemos a seis submenús:

Cambiar funciones o parámetros... Alt F. Sirve para ir al cuadro de diálogo Funciones - Entrada de datos. Cuando queramos cambiar de funciones o los valores de los ejes. <Alt F> es una tecla aceleradora, es decir que, pulsándola, se accede a dicha opción.

Abrir.... Muestra el diálogo Abrir archivo, en el cual podemos seleccionar un archivo que contenga datos que correspondan a funciones analíticas o numéricas así como valores de los ejes.

Guardar. Guarda los datos que se hallan en el cuadro de diálogo FUNCIONES - Entrada de datos. En el caso de que no tenga nombre aparece el diálogo guardar como y podemos asignar un nombre al archivo.

Guardar como . Guarda los datos que se hallan en el cuadro de diálogo Funciones - Entrada de datos en un archivo con el nombre que deseemos

Imprimir . Imprime el gráfico contenido de la ventana.

Salir . La forma habitual de abandonar el programa.

Menú **Opciones**.

Copiar en el portapapeles. Para copiar el contenido de la ventana en el "Portapapeles". Es la forma que tenemos para pasar los gráficos creados a otros programas. Para recuperarlos, vamos a la aplicación receptora. Nos situamos en el lugar donde deseamos que aparezca el gráfico y seleccionamos la opción, que suele estar en el menú **Edición**, **Pegar**. Esta opción también se consigue pulsando las teclas **CTRL INS**.

Limpiar. Cuando hemos realizado una de las anteriores opciones, por ejemplo cálculo de la integral definida, su efecto queda dibujado hasta que una nueva opción sea requerida. Si interesa dejar el estado inicial de la gráfica, debemos utilizar esta opción. Esta opción también se consigue pulsando el botón derecho del ratón.

Las siguientes cinco opciones son del tipo **Activo/Inactivo**. Cuando están activadas aparece el símbolo ***V*** delante.

Pizarra. Cambia el fondo, generalmente blanco, a negro, que es el color tradicional de FUNCIONES para DOS. Por defecto, aparece desactivada

Trama. Además de los ejes, teje una cuadrícula de líneas discontinuas. Por defecto, aparece desactivada

Valor unidad de los ejes. Cada unidad de los ejes aparece acompañada de su valor. Por defecto aparece desactivada

Mostrar puntos singulares. Cuando el programa encuentra máximos, mínimos, intervalos, etc. aparecen con su valor. Por defecto, esta opción aparece activada. Si la desactivamos estos valores no aparecerán.

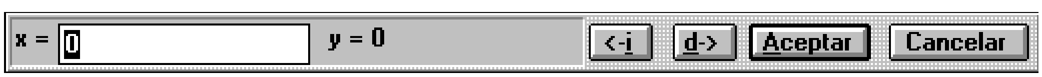
Trazar cálculos. Cuando el programa busca máximos, mínimos, intervalos, etc., lo hace de forma dinámica y nos va indicando por dónde anda la búsqueda mediante una línea roja que va cruzando de derecha a izquierda. Esta prelación es muy interesante y da, creemos, al programa un gran valor didáctico. A veces, según como utilicemos el programa, puede interesarnos no visualizar todo el proceso. Desactivando esta opción, lo conseguiremos. El beneficio es un gran incremento de la velocidad. Se recomienda especialmente esta opción para el cálculo de la **Función derivada**. Por defecto, esta opción aparece activada,

Baja precisión. Cuando se representan los puntos singulares, opción **Mostrar puntos singulares** activada, se pueden mostrar los valores con alta precisión, millonésima, o baja , ésta depende de la estimación del error cometido. Por defecto aparece activada, baja precisión, porqué lo creemos más didáctico.

Error en los cálculos. Todos los procesos de cálculo del programa son numéricos. Mediante esta opción podemos conocer una estimación del error de cálculo cometido.

Menú **1 fu.**. Este menú será activo sólo cuando haya una única función representada. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a un total de 17 opciones.

Imagen Alt I. Se nos ofrece un cuadro de diálogo en el que podemos introducir el valor de la X. Pulsando el botón **Aceptar** o <RETURN> se nos da su imagen en el caso de que la tuviera. Si se encuentra entre los límites del eje X, es dibujada



Los botones **<-i** i **d->** permiten calcular las imágenes de los puntos contiguos. Esto da unas enormes posibilidades a esta opción como, por ejemplo, para explicar el concepto de **máximo** relativo de una función.

Finalmente, si queremos abandonar esta opción, pulsaremos el botón **Cancelar** o la tecla <ESC>.

Antiimagen. Se nos pide un número, mediante un cuadro de diálogo, que ha de hallarse entre los límites del eje Y. De forma dinámica, se nos irán indicando, caso de que las tuviera, todas sus antiimágenes.

Raíces. El programa, de forma dinámica, busca las raíces de la función.

Discontinuidades aisladas. El programa da los puntos singulares donde NO está definida la función. En este caso, nos dará el límite. En el caso "1/(X-2)", nos dirá que en 2 lim= infinito. Si fuera "sen(X)/X", nos escribirá que en el 0 lim=1.

Sólo indica las que ha encontrado por su precisión. Por ejemplo: (x^2-4)/(x-2), que tiene una discontinuidad en x=2, si la unidad del eje X es entera, 1 por ejemplo, sí será encontrada. Pero si representamos (x-3.1234)^2/(x-3.1234), que tiene una clara discontinuidad en 3.1234, no será hallada. Para hacerlo, tendríamos que poner como unidad del eje X 3.1234 o un múltiplo suyo. Esto es debido a que se utiliza un método totalmente numérico y a que se calcula en un cierto número de puntos. Concretamente, entre los valores izquierdo y derecho del eje X, se calcula en 600 puntos. En casos como TAN(X), aunque no encuentre exactamente donde se halla el punto donde no está definida la función y se disparen los valores, nos indica POSIBLE PUNTO DE DISCONTINUIDAD infinito.

Máximos. El programa nos da los máximos locales de la función.

Mínimos. Se nos ofrecen los mínimos.

Puntos de inflexión. Cálculo de los mismos.

Derivada en un punto. Aparece el mismo cuadro de diálogo que en la opción **imagen**. El funcionamiento es idéntico. Se nos ofrece el valor y el dibujo de la recta tangente. Aquí, la opción encontrar valores adyacentes, vuelve a ser especialmente útil.

Integral definida. Nos pide el valor de los límites inferior y superior del intervalo de integración. Se calcula, ofrece su valor y se dibuja en la gráfica lo que representa.

Integral de línea. Nos pide el valor de los límites. Calcula el valor y se nos dibuja en la gráfica lo que representa

Intervalos de crecimiento. Aparece en la gráfica una línea roja, donde la función es creciente, indicando los extremos de los intervalos.

Intervalos de decrecimiento, **Intervalos de concavidad**, **Intervalos de convexidad**. Lo mismo que el caso anterior, pero en la zona donde se cumple lo especificado. Para hallar los límites de los intervalos, podemos, asimismo, encontrarlos de una forma distinta calculando máximos, mínimos, puntos de inflexión y discontinuidades.

Función derivada. Se nos ofrece, de forma dinámica, la construcción de la gráfica de la función derivada. Para obtener un valor concreto, podemos escoger la opción derivada en un punto.

Segunda derivada. Construcción de la función derivada segunda.

Función integral. Construcción de la función integral a partir de un punto que, previamente, se nos habrá solicitado mediante un cuadro de diálogo . Para obtener un valor concreto, escoger la opción integral definida.

Ecuación de regresión.... Esta opción sólo aparece activa cuando haya una única función numérica del tipo, **regresión**, introducida. Nos ofrece la ecuación de la función ajustada. También el coeficiente de correlación. Dicha información podemos pasarla al portapapeles pulsando el botón **Si**.

Solo ver puntos. Esta opción sólo aparece activa cuando haya una única función numérica del tipo, **regresión**, introducida. Nos ofrece la posibilidad de sólo ver los puntos y no la gráfica de regresión.

Menú **2 fu.**. Este menú será activo solo cuando haya dos funciones representadas. En caso contrario, las opciones aparecen en color gris y no están activas. Si lo seleccionamos, accedemos a 2 opciones.

Cortes. Busca los puntos de corte entre las dos funciones.

Área. Cálculo del área entre las dos funciones entre dos puntos cualesquiera. Dichos puntos tendrán que ser introducidos previamente mediante un cuadro de diálogo.

Menú **?**.

Índice F1. Se accede al índice de la ayuda de este programa. Pulsando <F1> produce el mismo efecto. Es un sistema de ayuda hipertexto. Permite navegar entre los diferentes tópicos, que aparecen coloreados en verde, pulsando con el botón izquierdo del ratón, o mediante la tecla <TABULADOR> confirmando con la tecla <RETURN>. En esta ayuda, prácticamente, se encuentra todo el presente manual

Uso de la ayuda. Se accede a la ayuda general de Windows que explica cómo funciona el sistema de Ayuda Windows.

Acerca.... Aparece el cuadro inicial del programa donde se informa del nombre del autor .

6 - Limitaciones.

-El número máximo de funciones que se puede representar es de seis. Pueden ser explícitas, numéricas, o combinación de ambas.

-Los cálculos se realizan en el rango comprendido entre -10^{19} y 10^{19}. Si se rebasan , el programa nos muestra: Error por desbordamiento, overflow. Durante el cálculo de los valores de las imágenes de una función, el programa nos indica: No tiene imagen.

-La precisión de los cálculos es de 10^{-6}. Valores menores que éstos, son redondeados a 0.

-El número máximo de divisiones en los ejes es de 100. Si damos un valor : Unidad eje X o Y que le corresponda un mayor número de divisiones, estos valores cambian para adecuarse al máximo de 100 divisiones. El programa no avisa de este hecho.

-El número máximo de caracteres que puede tener una función explícita es de 200.

-El número máximo de valores que puede tener una función numérica es de 400.

-El valor absoluto máximo que se puede introducir en las funciones numéricas es 100000000.

-El valor absoluto máximo que se puede introducir en una regresión cuadrática o exponencial es 100000.

-El número de puntos en los cuales se calcula la función, entre el "Origen del eje X" y el "Final del eje X", es de 600.

IV. Limitaciones.

El número máximo de funciones que se puede representar es de seis. Pueden ser explícitas, numéricas, o combinación de ambas.

Los cálculos se realizan en el rango comprendido entre -10^{19} y 10^{19}. Si se rebasan , el programa nos muestra: Error por desbordamiento, overflow. Durante el cálculo de los valores de las imágenes de una función, el programa nos indica: No tiene imagen.

La precisión de los cálculos es de 10^{-6}. Valores menores que éstos, son redondeados a 0.

El número máximo de divisiones en los ejes es de 100. Si damos un valor : Unidad eje X o Y que le corresponda un mayor número de divisiones, estos valores cambian para adecuarse al máximo de 100 divisiones. El programa no avisa de este hecho.

El número máximo de caracteres que puede tener una función explícita es de 200.

El número máximo de valores que puede tener una función numérica es de 400.

El valor absoluto máximo que se puede introducir en las funciones numéricas es 100000000.

El valor absoluto máximo que se puede introducir en una regresión cuadrática o exponencial es 100000.

El número de puntos en los cuales se calcula la función, entre el "Origen del eje X" y el "Final del eje X", es de 600.

Las reglas de prioridad son las conocidas. Recomendamos escribir todas las operaciones. Delante de paréntesis y de las funciones anteriores, no es necesario poner el signo de multiplicar, en el supuesto de que éste sea el caso.

Ejemplos de funciones:

f(x)= sen(x)   g(x)= x^3-4x^2+3x-1 h(x)=(x-1)/((x-1)*(x+3))

Al tratar de representar una función introducida incorrectamente, el programa nos avisa, mediante un cuadro de mensaje, que ha ocurrido un error de sintaxis y, en ciertos casos, nos dice de que tipo es: haber cerrado demasiados paréntesis, no haber introducido ninguna función, etc.