

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA-LEÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA**



***APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE VALORES Y VECTORES  
PROPIOS DE UNA MATRIZ CUADRADA***

**MONOGRAFÍA**

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA**

**PRESENTADA POR**

**BRA. JOHANNA DEL CARMEN COREA RUÍZ**

**TUTORA**

**MSC. ANGELA ALTAMIRANO SLINGER**

**LEÓN, JUNIO 2010**

## DEDICATORIA

Durante estos escasos cinco años de lucha constante, de gratas vivencias, de momentos de éxitos y también de angustias y desesperanza para poder cumplir mis objetivos y así poder alcanzar uno de mis más grandes anhelos, culminar mi carrera, los deseos de superarme y de lograr mi meta eran tan grandes que logre vencer todos los obstáculos y es por ello que debo dedicar este triunfo a quienes en todo momento me llenaron de amor y apoyo, y por sobre todo me brindaron su amistad:

A Dios Todopoderoso por iluminarme el camino a seguir y que siempre está conmigo en los buenos y sobre todo en los malos momentos.

A mis Padres: Antonio fajardo Prado y Danelia del Rosario Ruiz Bonilla pilares fundamentales en mi vida, dignos de ejemplo de trabajo y constancia, quienes me han brindado todo el apoyo necesario para alcanzar mis metas y sueños, y han estado allí cada día de mi vida, compartiendo los buenos y los malos ratos ....Los quiero mucho y gracias.

A mis tíos: Yader, Enriqueta, Horacio por todo su apoyo brindado.

A mis primos: Jeobel, Yader, Darwin, por su ayuda incondicional.

A mis grandes amigos, que han sido más que una familia para mi, con las cuales he compartido tantos momentos, y sé que puedo contar con ellos al igual que ellos conmigo, Synthia López, Santos Lanuza y Yohandra Bonilla aunque ya no estemos tan juntos como antes, siempre estarán en mi corazón y se, que sin su apoyo y compañía estos cinco años no hubiesen sido lo mismo.

## **AGRADECIMIENTOS**

Son tantas personas a las cuales debo parte de este triunfo, de lograr alcanzar mi culminación académica, la cual es el anhelo de todos los que así lo deseamos.

Definitivamente a Dios ya que gracias a él pude alcanzar esta meta, esta alegría, que, podré siempre de tu mano alcanzar otras que espero sean para tu gloria.

A mis padres, por darme la estabilidad emocional, económica, sentimental; para poder llegar hasta este logro, que definitivamente no hubiese podido ser realidad sin ustedes. GRACIAS por darme la posibilidad de que de mi boca salga esa palabra...

A todos mis amigos pasados y presentes; pasados por ayudarme a crecer y madurar como persona y presentes por estar siempre conmigo apoyándome en todo las circunstancias posibles, también son parte de esta alegría, LOS RECUERDO.

A mi tutora Msc. Ángela Altamirano Slinger por todo su apoyo y ayuda incondicional ya que gracias a ella pude culminar con este trabajo monográfico.

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>OBJETIVOS</b>	2
<b>CAPITULO 1: ASPECTOS BASICOS</b>	
1.1 Introducción	3
1.2 Matrices	3
1.3 Sistema de Ecuaciones Lineales	7
1.4 Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$	8
1.5 Valores y Vectores Propios	10
1.6 Rapidez de Convergencia	12
<b>CAPITULO 2: APROXIMACIÓN DE VALORES Y VECTORES PROPIOS.</b>	
2.1 Introducción	13
2.2 Método de la Potencia	14
2.3 Método de la Potencia Simétrica	21
2.4 Método de la Potencia Inversa	26
2.5 Método de Deflación de Wielandt	33
2.6 Método de Householder	39
2.7 Método $QR$	49
2.8 Método de Jacobi	62
<b>CAPITULO 3: APLICACIONES DE VALORES Y VECTORES PROPIOS</b>	
3.1 Introducción	74
3.2 Caso 1: Cadenas de Markov	74
3.3 Caso 2: Sistemas Lineales Homogéneos de Ecuaciones Diferenciales	78
3.4 Caso 3: Población de especies	82

3.5 Caso 4: Sistemas dinámicos lineales estables	83
3.6 Caso 5: Vibraciones Longitudinales de una barra elástica	84
3.7 Caso 6: Crecimiento de una población aplicando el modelo Matricial de Leslie	86
<b>CONCLUSIONES</b>	90
<b>ANEXOS:</b>	
Anexo 1: Algoritmo del Método de la Potencia	91
Anexo 2: Algoritmo del Método de la Potencia Simétrica	93
Anexo 3: Algoritmo del Método de la Potencia Inversa	95
Anexo 4: Algoritmo de Deflación de Wielandt	97
Anexo 5: Algoritmo del Método de Householder	99
Anexo 6: Algoritmo del Método $QR$	101
Anexo 7: Algoritmo del Método de Jacobi	104
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	106

# INTRODUCCIÓN

En la teoría de matrices cuadradas para saber si una matriz es diagonalizable se necesita conocer sus valores y vectores propios. Como se sabe, trabajar con una matriz diagonalizable tiene mayores ventajas sobre otra que no lo es. Además los valores y vectores propios tienen muchas otras aplicaciones en diversas ramas de las Matemáticas, en la Física y también en la Ingeniería.

El problema de calcular valores y vectores propios aparece en muchas ocasiones relacionado con problemas de vibraciones y resonancias, con los momentos principales de inercia, con el tensor de esfuerzos, etc. También en el diseño de sistemas de información.

El método usual de cálculo de los valores y vectores propios que se estudia en Álgebra Lineal, en el que se utilizan determinantes, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, conlleva mucho esfuerzo para matrices de gran tamaño. Por lo que se hace necesario disponer de técnicas eficientes para la obtención de valores y vectores propios.

Dada la importancia de los valores y vectores propios, consideré de interés realizar un trabajo monográfico, en el que se provean los métodos más usuales para la aproximación numérica de valores y vectores propios de una matriz cuadrada, presentando su descripción, algoritmo y aplicación.

Esta monografía puede ser utilizada como material de consulta, por estudiantes o profesionales que busquen ampliar sus conocimientos sobre las técnicas numéricas de aproximación de valores y vectores propios, para aplicarlas en situaciones concretas.

El presente trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo se presentan los elementos básicos para abordar los métodos numéricos que se desarrollan en el segundo capítulo. En el capítulo dos se estudian siete métodos iterativos para aproximar valores y vectores propios de una matriz cuadrada.

En el tercer capítulo se muestran algunas aplicaciones de los valores y vectores propios a través de casos. Finalmente en los anexos se presentan los programas correspondientes a los métodos estudiados con su corrida respectiva. Estos programas fueron elaborados en MATLAB, un lenguaje con su entorno de programación que facilita las tareas de cálculo numérico.

# OBJETIVOS

## OBJETIVO GENERAL:

- Mostrar algunos métodos numéricos para aproximar valores y vectores propios de una matriz cuadrada.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Analizar algunos métodos de aproximación de valores y vectores propios de una matriz cuadrada, presentando su descripción y los algoritmos de cálculo respectivos.
- Identificar cada uno de los métodos de aproximación de valores y vectores propios de una matriz cuadrada por sus características particulares.
- Implementar a programas los algoritmos correspondientes a los métodos estudiados utilizando el software MATLAB.
- Ilustrar algunas aplicaciones a la aproximación de valores y vectores propios de una matriz cuadrada, mediante el estudio de casos.

# CAPÍTULO 1

## ASPECTOS BÁSICOS

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se tratan los conceptos y resultados básicos del Álgebra Lineal que sustentan los métodos a estudiar en el capítulo dos. Se estudian aspectos relativos a las Matrices, los Sistema de Ecuaciones Lineales, el Espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  y los Valores y Vectores Propios. También se presentan elementos básicos sobre los Algoritmos y la Convergencia de Sucesiones. Se indicará además la terminología a utilizar en todo el trabajo.

### 1.2 MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números (llamados elementos de la matriz) ordenado en renglones y columnas. Si  $A$  es una matriz con  $m$  renglones y  $n$  columnas se le denomina matriz  $m \times n$  y se le representa como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Algunas matrices presentan características particulares en la posición o en la naturaleza de sus elementos. Muchas de ellas son tan importantes en la teoría y en las aplicaciones, que han recibido denominaciones específicas.

#### Definición 1.1

Matriz Nula es una matriz donde todos sus elementos son ceros. También se denomina matriz cero y se denota  $0_{m \times n}$ .

#### Ejemplo

La matriz siguiente es una matriz nula  $2 \times 3$

$$0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### Definición 1.2

Matriz Cuadrada es aquella matriz que tiene igual número de renglones que de columnas.

### Ejemplo

La matriz  $A$  siguiente es una matriz cuadrada  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

### Definición 1.3

Matriz Triangular (Superior o Inferior) es una matriz cuadrada donde todos los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal principal son ceros.

### Ejemplo

La matriz  $A$  siguiente es una matriz triangular superior  $3 \times 3$  y la matriz  $B$  es una matriz triangular inferior  $3 \times 3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

### Definición 1.4

Matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos ceros excepto los de la diagonal principal.

### Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  es una matriz diagonal  $3 \times 3$

### Definición 1.5

Una Matriz diagonal estrictamente dominante lo es por renglones cuando, para todos los renglones, el valor absoluto del elemento de la diagonal de ese renglón es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos del resto de elementos de ese renglón.

Una Matriz diagonal estrictamente dominante lo es por columnas cuando, para todas las columnas, el valor absoluto del elemento de la diagonal de esa columna es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos del resto de elementos de esa columna.

### Definición 1.6

Matriz identidad es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad.

### Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  es una matriz identidad.

### Definición 1.7

Decimos que una matriz cuadrada  $A$  tiene inversa,  $A^{-1}$  si se verifica que:  
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

### Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  su inversa  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

### Definición 1.8

Una matriz cuadrada es no singular si tiene inversa.

### Definición 1.9

Dada una matriz  $A$  se llama traspuesta de  $A$  a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente los renglones por las columnas. Se representa por  $A^t$ .

### Ejemplo

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$  su traspuesta  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

### Definición 1.10

Matriz simétrica es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta, es decir,  $A = A^t$ , o sea  $a_{ij} = a_{ji}$ .

### Ejemplo

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 9 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  es simétrica ya que es igual a su matriz traspuesta.

### Definición 1.11

Una matriz tridiagonal es una matriz cuadrada que tiene elementos distintos a cero solo en la diagonal principal, la primera diagonal sobre ésta, y la primera diagonal bajo la diagonal principal.

### Ejemplo

La matriz siguiente es una matriz tridiagonal  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### Definición 1.12

Se dice que una matriz  $Q$  es ortogonal si  $Q^{-1} = Q^t$ .

### Definición 1.13

Se dice que dos matrices  $A$  y  $B$  son similares si existe una matriz  $S$  no singular con  $A = S^{-1}BS$ .



Dado que los renglones de una matriz aumentada corresponden a las ecuaciones del sistema asociado, estas tres operaciones equivalen a las siguientes operaciones con los renglones de la matriz aumentada.

- Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
- Intercambiar dos renglones.
- Sumar un múltiplo de un renglón a otro.

Uno de los métodos más utilizados para resolver un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  variables es el Método de Eliminación Gaussiana que transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior, obteniendo un sistema triangular equivalente al original que puede resolverse por sustitución hacia atrás.

Si  $AX = B$  es la representación matricial de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  variables, MATLAB provee la función slash que permite obtener la solución, si existe, aplicando el método de eliminación Gaussiana. El comando a utilizar es  $X = A \setminus B$  una vez introducida previamente la matriz de coeficientes  $A$  y el vector de términos independientes  $B$ .

## 1.4 ESPACIO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^n$ .

### Definición 1.14

Si  $n$  es un entero positivo, entonces una ordenada es una sucesión de  $n$  números reales  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Al conjunto de todas las  $n$  – *adas* ordenadas se le denomina espacio cartesiano de  $n$  – *dimensiones* y se denota mediante  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos vectores en  $\mathbb{R}^n$  a las  $n$  – *adas* ordenadas.

Un vector  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  puede considerarse como una matriz  $1 \times n$  (*matriz renglón*). También pueden representarse los vectores en la notación de

columna  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  de esta manera  $u$  es una matriz  $n \times 1$  (*matriz columna*).

### Definición 1.15

Dos vectores  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  son iguales si  $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$ .

La suma de los vectores  $u$  y  $v$  es  $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$ .

La multiplicación escalar del escalar  $k$  y el vector  $u$  es  $ku = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$ .

### Teorema 1.1

Si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$ ,  $k$  y  $l$  son escalares, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $u + v = v + u$
2.  $u + (v + w) = (u + v) + w$
3.  $u + 0 = 0 + u = u$
4.  $u + (-u) = 0$ , es decir,  $u - u = 0$
5.  $k(lu) = (kl)u$
6.  $k(u + v) = ku + kv$
7.  $(k + l)u = ku + lu$
8.  $1u = u$

### Definición 1.16

Se dice que  $w$  es una combinación lineal de los vectores  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$  si existen escalares  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tales que  $w = k_1v^{(1)} + k_2v^{(2)} + \dots + k_nv^{(n)}$ .

### Definición 1.17

Se dice que el conjunto de vectores  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  es linealmente independiente si existen escalares  $k_1, k_2, \dots, k_n$  todos iguales a cero tales que  $k_1v^{(1)} + k_2v^{(2)} + \dots + k_nv^{(n)} = 0$ .

### Definición 1.18

Si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el producto interior euclidiano  $u \cdot v$  se define como

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

### Definición 1.19

La norma Euclidiana (o longitud Euclidiana) de un vector  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se define como  $\|u\| = (u \cdot u)^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$  y de la misma manera la distancia Euclidiana entre los puntos  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se define como:

$$d = (u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Se acostumbra llamar espacio Euclidiano de  $n - \text{dimensiones}$  a  $\mathbb{R}^n$  con las operaciones de adición, multiplicación por escalares y producto interior euclidiano.

Existen otras normas en  $\mathbb{R}^n$ , entre ellas la norma  $l_\infty$ , para  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  se define como  $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$ , de la misma manera la distancia infinita entre dos vectores  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  se define como:

$$d = \|u - v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - v_i|.$$

### Definición 1.20

Se dice que un conjunto de vectores  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$  de  $\mathbb{R}^n$  es ortogonal si  $v^{(i)} \cdot v^{(j)} = 0$  para toda  $i \neq j$ .

Además, si  $v^{(i)} \cdot v^{(i)} = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces se dice que el conjunto es ortonormal.

Puesto que  $x \cdot x = \|x\|^2$ , un conjunto de vectores ortogonales  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$  es ortonormal si y solo si

$$\|v^{(i)}\|^2 = 1, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

## 1.5 VALORES Y VECTORES PROPIOS

### Definición 1.21

Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces un escalar  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si satisface la ecuación  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

Si  $A$  es una matriz cuadrada y  $\lambda$  es un escalar entonces el  $\det(\lambda I - A) = 0$  si y solo si el sistema de ecuaciones  $(\lambda I - A)x = 0$  tiene soluciones no triviales y es posible expresar  $Ax = \lambda x$ .

### **Teorema 1.2**

Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ .
- 2) El sistema de ecuaciones  $(\lambda I - A)x = 0$  tiene soluciones no triviales.
- 3) Existe un vector  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  diferente de cero, tal que  $Ax = \lambda x$ .

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  entonces el espacio solución del sistema de ecuaciones  $(\lambda I - A)x = 0$  se denomina espacio propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ , y los vectores diferentes de cero, en el espacio propio se denominan vectores propios de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .

### **Teorema 1.3**

Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ,  $n$  valores propios distintos de  $A$  con los vectores propios asociados  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ , entonces  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}\}$  es linealmente independiente.

Los siguientes tres teoremas describen los valores propios trasladados y los valores propios inversos.

### **Teorema 1.4**

Supongamos que  $(\lambda, x)$  es una pareja de valores y vectores propios de una matriz  $A$ . Si  $\alpha$  es una constante cualquiera, entonces  $(\lambda - \alpha, x)$  es una pareja de valores y vectores propios de la matriz  $(A - \alpha I)$ .

### **Teorema 1.5**

Supongamos que  $(\lambda, x)$  es una pareja de valores y vectores propios de una matriz invertible  $A$ . Entonces  $(\frac{1}{\lambda}, x)$  es una pareja de valores y vectores propios de la matriz  $A^{-1}$ .



### **Teorema 1.6**

Supongamos que  $(\lambda, x)$  es una pareja de valores y vectores propios de una matriz  $A$ . Si  $\alpha$  no es un valor propio de  $A$ , entonces  $(\frac{1}{\lambda-\alpha}, v)$  es una pareja de valores y vectores propios de la matriz  $(A - \alpha I)^{-1}$ .

Un aspecto importante de las matrices similares es que tienen los mismos valores propios.

### **Teorema 1.7**

Supongamos que  $A$  y  $B$  son matrices similares con  $A = S^{-1}BS$  y  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  con el vector asociado  $x$ . Entonces,  $\lambda$  es un valor propio de  $B$  con  $Sx$  como vector propio asociado.

### **Teorema 1.8**

Si  $A$  es una matriz simétrica y  $D$  es una matriz ortogonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de  $A$ , entonces existe una matriz ortogonal  $Q$  tal que  $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$ .

El corolario siguiente muestra una de las propiedades más interesantes de las matrices simétricas.

### **Corolario 1**

Si  $A$  es una matriz simétrica de  $n \times n$ , entonces los valores propios de  $A$  son números reales, y existen  $n$  vectores propios de  $A$  que forman un conjunto ortonormal.

## **1.6 CONVERGENCIA RÁPIDA.**

Para describir la rapidez a la que ocurre la convergencia cuando se emplea una técnica numérica iterativa relacionada con sucesiones usaremos la terminología de esta sección.

La siguiente definición se usa para comparar las razones de convergencia de varios métodos.

### Definición 1.22

Supongamos que  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión cuyo valor de convergencia es cero y que  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a un número  $\alpha$ . Si existe una constante positiva  $k$  tal que  $|\alpha_n - \alpha| \leq k|\beta_n|$  para  $n$  grande. Entonces decimos que  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\alpha$  con rapidez de convergencia  $O(\beta_n)$ . Se indica escribiendo  $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ .

Esta definición permite comparar  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  con una sucesión arbitraria  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ , en casi todas las situaciones usamos  $\beta_n = \frac{1}{n^p}$ , para algún número  $p > 0$ , por lo general, se tiene interés en el mayor valor de  $p$  tal que  $\alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ .

Necesitamos un procedimiento nuevo para medir la rapidez con que converge una sucesión esta lo haremos a través de la siguiente definición.

### Definición 1.23

Supongamos que  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión que converge a  $p$ , con  $p_n \neq p$  para toda  $n$ . Si existen constantes positivas  $\lambda$  y  $\alpha$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda$  entonces  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $p$  con orden  $\alpha$  y una constante de error asintótica  $\lambda$ .

Un método iterativo de la forma  $p_n = g(p_{n-1})$  es de orden  $\alpha$ , si la sucesión  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge a la solución  $p = g(p)$  con orden  $\alpha$ .

Una sucesión con un alto orden de convergencia converge más rápidamente que una con un orden más bajo. Nos enfocaremos en dos casos de orden:

1. Si  $\alpha = 1$ , la sucesión será linealmente convergente.
2. Si  $\alpha = 2$ , la sucesión será cuadráticamente convergente.

## CAPITULO 2

### APROXIMACIÓN DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

#### 2.1 INTRODUCCION

Existen muchos métodos para aproximar valores y vectores propios de una matriz cuadrada pero en esta monografía abordaremos siete métodos. El Método de la Potencia que calcula el valor dominante y el vector propio asociado a una matriz arbitraria  $A$ . El Método de la Potencia Simétrica que da una convergencia más rápida al valor propio dominante y el vector propio asociado. El método de la Potencia Inversa permite obtener el valor propio más cercano a determinado valor

y un vector propio asociado. Los Métodos de deflación que producen otros valores propios, una vez conocido el valor propio dominante.

El método de Householder que sirve para convertir una matriz simétrica en una matriz similar tridiagonal en caso de que la matriz no lo sea. El Método  $QR$  que puede aplicarse después a la matriz tridiagonal para obtener aproximaciones a los valores propios. El Método de Jacobi se usa para calcular todas las parejas de valores y vectores propios de una matriz simétrica siempre y cuando sean reales.

## 2.2 MÉTODO DE LA POTENCIA.

Es una técnica iterativa que permite determinar el valor propio de una matriz, es decir, el valor propio con mayor magnitud. Este método no solo produce un valor propio, sino un vector propio asociado.

Para aplicar el método de la potencia supondremos que la matriz  $A$  de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  con un conjunto asociado de vectores propios linealmente independientes  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$ .

Supondremos que  $A$  tiene exactamente un valor propio,  $\lambda_1$  cuya magnitud es la mayor, por lo que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$ .

Si  $x$  es un vector cualquiera en  $\mathbb{R}^n$  el hecho de que  $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$  sea linealmente independiente implica que existen las constantes  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  con  $x = \sum_{j=1}^n \beta_j v^{(j)}$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por  $A, A^2, \dots, A^k$  obtenemos:

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^n \beta_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j v^{(j)}, \\ A^2 x &= \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^2 v^{(j)}, \\ &\vdots \\ A^k x &= \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k v^{(j)} \end{aligned}$$

Si factorizamos  $\lambda_1^k$  en cada término de la derecha de la última ecuación, entonces

$$A^k x = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k v^{(j)}$$

Como  $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ , para cualquier  $j = 2, 3, \dots, n$  tenemos  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^k = 0$ , y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \beta_1 v^{(1)} \quad (2.1)$$

Esta sucesión converge a cero si  $|\lambda_1| < 1$  y diverge si  $|\lambda_1| > 1$ , siempre y cuando que  $\beta_1 \neq 0$ .

El escalonamiento comienza seleccionando  $x$  como un vector unitario  $x^{(0)}$  en relación con  $\|\cdot\|_\infty$  y una componente  $x_{p_0}^{(0)}$  de  $x^{(0)}$  con  $x_{p_0}^{(0)} = \|x^{(0)}\|_\infty$

Sea  $y^{(1)} = Ax^{(0)}$  y definamos  $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)}$ , con esta notación,

$$\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_0}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1 \lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}} = \lambda_1 \left[ \frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j v_{p_0}^{(j)}} \right]$$

Entonces, sea  $p_1$  el menor entero tal que  $|y_{p_1}^{(1)}| = \|y^{(1)}\|_\infty$ , y definamos por medio de

$$x^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} y^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} Ax^{(0)}$$

Entonces,

$$x_{p_1}^{(1)} = 1 = \|x^{(1)}\|_\infty$$

A continuación definimos

$$y^2 = Ax^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} A^{(2)} x^{(0)}$$

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left[ \beta_1 \lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)} \right] / y_{p_1}^{(1)}}{\left[ \beta_1 \lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j \lambda_j v_{p_1}^{(j)} \right] / y_{p_1}^{(1)}} = \lambda_1 \left[ \frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j (\lambda_j / \lambda_1)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j (\lambda_j / \lambda_1) v_{p_1}^{(j)}} \right]$$

Sea  $p_2$  el entero más pequeño con

$$|y_{p_2}^{(2)}| = \|y^{(2)}\|_\infty$$

y definamos

$$x^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} y^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} Ax^{(1)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}} A^{(2)} x^{(0)}$$

Definamos las siguientes sucesiones de los vectores  $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  y  $\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$

Lo mismo sucede con una sucesión de escalares  $\{\mu^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$  mediante

$$x^m = Ax^{(m-1)},$$

$$\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \left[ \frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j / \lambda_1)^m \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j / \lambda_1)^{m-1} \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}} \right] \quad (2.2)$$

$$x^m = \frac{y^m}{y_{p_m}^{(m)}} = \frac{A^m x^{(0)}}{\prod_{k+1}^m y_{p_k}^{(k)}}$$

Donde cada paso  $p_m$  sirve para representar el entero más pequeño para el cual

$|y_{p_m}^{(m)}| = \|y^{(m)}\|_{\infty}$ , como  $|\lambda_j / \lambda_1| < 1$  para cualquier  $j = 2, 3, \dots, n$   $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$ , siempre y cuando elijamos  $x^{(0)}$  de modo que  $\beta_j \neq 0$ . Más aun, la sucesión de vectores  $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$  converge al vector propio asociado a  $\lambda_1$  que tiene norma  $l_{\infty}$

Este método tiene las desventajas de que al inicio no se sabe si la matriz tiene o no un solo valor propio dominante. Tampoco se sabe cómo seleccionar  $x^{(0)}$  para estar seguros de que su representación mediante vectores propios de la matriz contenga una contribución distinta de cero del vector propio asociado al valor propio dominante, en caso de que exista.

## Teorema 2.1

Supongamos que una matriz  $A$  de orden  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ordenados en tamaños decrecientes  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Si  $x_0$  se escoge adecuadamente, entonces las sucesiones

$$\left\{ x_k = \left[ x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \dots \quad x_n^{(k)} \right]^T \right\} \text{ y } \{c_k\}$$

generadas recursivamente

$$y_k = Ax_k \quad \text{y} \quad x_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} y_k$$

Donde  $c_{k+1} = x_j^{(k)}$  y  $x_j^{(k)} = \max \left\{ |x_i^{(k)}| : 1 \leq i \leq n \right\}$ , converge respectivamente, al vector propio dominante  $v_1$  y al valor dominante  $\lambda_1$ . Es decir  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = v_1$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_1$ .

## ALGORITMO PARA EL METODO DE LA POTENCIA.

Para aproximar el valor propio dominante y el vector propio asociado de la matriz  $A$  de  $n \times n$  con un vector  $x$  distinto de cero:

### ENTRADA

dimension  $n$ , matriz  $A$ , vector  $x$ , tolerancia  $tol$ , número máximo de iteraciones  $m$ .

### SALIDA

valor propio aproximado  $u$ , vector propio aproximado  $x$  con  $(\|x^{(1)}\|_\infty)$  o bien un mensaje de que rebasó el número máximo de iteraciones.

**Paso 1** Tome  $k = 1$ .

**Paso 2** Obtenga el entero  $p$  más pequeño con  $1 \leq p \leq n$  y  $|x_p| = \|x\|_\infty$

**Paso 3** Tome  $x = x/x_p$

**Paso 4** Mientras  $(k \leq m)$  haga los pasos 5 – 11

**Paso 5** Tome  $y = Ax$

**Paso 6** Tome  $u = y_p$

**Paso 7** Obtenga el entero  $p$  más pequeño con  $1 \leq p \leq n$  y  $|y_p| = \|y\|_\infty$

**Paso 8** Si  $y_p = 0$ , entonces **SALIDA** ('Vector característico',  $x$ );

**SALIDA** (' $A$  tiene el valor característico 0,  
seleccione un nuevo vector  $x$  y reinicie');

**PARAR**

**Paso 9** Tome  $error = \|x - y/y_p\|_\infty$ ;

$$x = y/y_p$$

**Paso 10** Si  $error < tol$ , entonces **SALIDA** ( $u, x$ );

(Procedimiento terminado exitosamente)

**PARAR.**

**Paso 11** Tome  $k = k + 1$

**Paso 12** **SALIDA** ('Excedido el número máximo de iteraciones');

(Procedimiento terminado exitosamente)

**PARAR.**

En el Anexo  $\text{A.1}$ , se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método de la Potencia.

La rapidez con que  $\{x_k\}$  converge a  $\lambda$  se determina mediante las razones de convergencia  $r_k = \frac{\|x_{k+1} - \lambda e\|}{\|x_k - \lambda e\|}$ , y, particularmente, mediante  $r = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k$ . La rapidez de convergencia es grande, por lo cual hay una constante  $C$  tal que para  $k$  grande,

—

Lo anterior significa que

————— —

Entonces la sucesión  $\{x_k\}$  converge linealmente a  $\lambda$ .

No es necesario que la matriz tenga valores propios distintos para que converja el Método de la Potencia. Si el valor propio dominante y único,  $\lambda$ , tiene una multiplicidad mayor que 1, y si  $v_1, \dots, v_m$  son vectores propios linealmente independiente asociados a  $\lambda$ , el procedimiento todavía convergirá en  $\lambda$ . En este caso, la sucesión de vectores  $\{x_k\}$  convergirá a un vector propio de  $\lambda$ , con norma uno, que es una combinación lineal de  $v_1, \dots, v_m$  y depende de la elección del vector inicial  $x_0$ .

### Ejemplo

Encuentre las 3 primeras iteraciones obtenidas con el Método de la Potencia aplicado a la siguiente matriz.

Use

**Solución:**

Siguiendo los primeros pasos del algoritmo manualmente, tendríamos que para

$$k = 1;$$

$$\|x^{(0)}\|_{\infty} = \max\{(1), (-1), (2)\} = 2$$

El entero más pequeño  $p = 3$  entonces  $x_p = 2$

Ahora tomemos

$$x = \frac{x^{(0)}}{x_p}$$

Entonces

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sea  $y = Ax$ , de esta manera encontramos el valor de  $y$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces  $u = y_p = 2$

$$\|y^{(1)}\|_{\infty} = 2$$

El entero más pequeño es  $p = 3$

$$x = \frac{y}{y_p} = \frac{\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tomemos } error = \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_{\infty} = \left\| \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) - \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1 \right) \right\|_{\infty} = \left\| -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0 \right\|_{\infty} = \frac{3}{4}$$

Para la siguiente iteración

$$k = 2;$$

Tenemos que



$$x = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nuestro nuevo  $y$  será

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces  $u = y_p = 3$

$$\|y^{(2)}\|_{\infty} = 3$$

El entero más pequeño es  $p = 3$

$$x = \frac{y}{y_p} = \frac{\begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 3 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 11/12 \\ 9/12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tomemos } error = \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_{\infty} = \left\| \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1 \right) - \left( \frac{11}{12}, \frac{9}{12}, 1 \right) \right\|_{\infty} = \left\| -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, 0 \right\|_{\infty} = \frac{1}{2}$$

Para la última iteración

$$k = 3;$$

Tenemos que

$$x = \begin{bmatrix} 11/12 \\ 9/12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nuestro nuevo  $y$  será

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11/12 \\ 9/12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43/12 \\ 41/12 \\ 44/12 \end{bmatrix}$$

Entonces  $u = y_p = 44/12$

$$\|y^{(3)}\|_{\infty} = 44/12$$

El entero más pequeño es  $p = 3$

$$x = \frac{y}{y_p} = \frac{\begin{bmatrix} 43/12 \\ 41/12 \\ 44/12 \end{bmatrix}}{44/12} = \begin{bmatrix} 43/44 \\ 41/44 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tomemos } error = \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_{\infty} = \left\| \left( \frac{11}{12}, \frac{9}{12}, 1 \right) - \left( \frac{43}{44}, \frac{41}{44}, 1 \right) \right\|_{\infty} = \left\| -\frac{8}{33}, -\frac{8}{11}, 0 \right\|_{\infty} = \frac{8}{11}$$

La corrida correspondiente del programa del Método de la Potencia para este ejemplo, con precisión  $10^{-3}$  se da a continuación:

<i>k</i>	<i>vector x</i>	<i>u</i>	<i>error</i>
1	(0.750000, 0.250000, 1.000000)	2.000000	0.750000
2	(0.916667, 0.750000, 1.000000)	3.000000	0.500000
3	(0.977273, 0.931818, 1.000000)	3.666667	0.181818
4	(0.994186, 0.982558, 1.000000)	3.909091	0.050740
5	(0.998538, 0.995614, 1.000000)	3.976744	0.013056
6	(0.999634, 0.998902, 1.000000)	3.994152	0.003288
7	(0.999908, 0.999725, 1.000000)	3.998536	0.000823

El valor propio es  $u = 3.998536$

El vector propio es  $x = (0.999908, 0.999725, 1.000000)$

## 2.3 MÉTODO DE LA POTENCIA SIMÉTRICA.

Si  $A$  es simétrica, podemos hacer una variación en la elección de los vectores  $x^{(m)}$ ,  $y^{(m)}$  y escalares  $\mu^{(m)}$  para mejorar significativamente la razón de convergencia entre la sucesión  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$  y el valor propio dominante  $\lambda_1$ . Esta variación consiste en considerar todas las componentes y no solo una componente de los vectores  $x^{(m)}$  y  $y^{(m)}$ .

El siguiente teorema nos proporciona las condiciones para la cota del error al aproximar los valores propios de una matriz simétrica.

### Teorema 2.2

Si  $A$  es una matriz simétrica de  $n \times n$  con los valores característicos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  y la  $\|Ax - \lambda x\|_2 < \varepsilon$  para algún vector  $x$  con  $\|x\|_2 = 1$  y con el número real  $\lambda$ , entonces el  $\min_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \lambda| < \varepsilon$ .

## ALGORITMO PARA EL METODO DE LA POTENCIA SIMETRICA

Para aproximar el valor propio dominante y el vector propio asociado de una matriz simétrica  $A$  de  $n \times n$ , dado un vector  $x$  diferente de cero:

### ENTRADA

dimensión  $n$ ; matriz  $A$ ; vector  $x$ ; tolerancia  $tol$ ; número máximo de iteraciones  $m$ .

**SALIDA** valor propio aproximado  $u$ , vector propio  $x$  aproximado con  $(\|x\|_2 = 1)$  o bien un mensaje de que rebasó el número máximo de iteraciones.

**Paso 1** Tome  $k = 1$ ;

$$x = x / \|x\|_2$$

**Paso 2** Mientras  $(k \leq m)$  haga los pasos 3 – 8

**Paso 3** Tome  $y = Ax$

**Paso 4** Tome  $u = x^t y$

**Paso 5** Si  $\|y\|_2 = 0$ , entonces **SALIDA** ('Vector característico',  $x$ );

**SALIDA** ('A tiene el valor característico 0,  
seleccione un nuevo vector  $x$  y reinicie');

**PARAR.**

**Paso 6** Tome  $error = \|x - y / \|y\|_2\|_2$ ;

$$x = y / \|y\|_2$$

**Paso 7** Si  $error < tol$ , entonces **SALIDA** ( $u, x$ );

(Procedimiento terminado exitosamente)

**PARAR.**

**Paso 8** Tome  $k = k + 1$

**Paso 9** **SALIDA** ('Número máximo de iteraciones excedido');

(Procedimiento terminado sin éxito)

**PARAR.**

En el Anexo No.2, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método de la Potencia Simétrica.

La razón de convergencia del Método general de Potencia  $O(|\lambda_2/\lambda_1|^m)$  es y la del Método de Potencia Simétrica es  $O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2m})$ . La sucesión  $\{\mu^{(m)}\}$  es todavía linealmente convergente.

### Ejemplo

Encuentre las 3 primeras iteraciones obtenidas con el método de la Potencia Simétrica aplicado a la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Use  $x^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

### Solución:

Siguiendo los primeros pasos del algoritmo manualmente, tendríamos que para

$$k = 1;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6} = 2.4495$$

Ahora tomemos

$$x = \frac{x}{\|x\|_2}$$

Entonces

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{2.4495} = \begin{bmatrix} 0.40824829 \\ -0.40824829 \\ 0.81649658 \end{bmatrix}$$

Sea  $y = Ax$ , de esta manera encontramos el valor de  $y$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.40824829 \\ -0.40824829 \\ 0.81649658 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22474487 \\ 0.40824829 \\ 1.63299316 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$u = x^t y = [0.40824829 \quad -0.40824829 \quad 0.81649658] \begin{bmatrix} 1.22474487 \\ 0.40824829 \\ 1.63299316 \end{bmatrix} = 1.6663$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{(1.22474487)^2 + (0.40824829)^2 + (1.63299316)^2} = 2.0816$$

$$x = \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{\begin{bmatrix} 1.22474487 \\ 0.40824829 \\ 1.63299316 \end{bmatrix}}{2.081661396} = \begin{bmatrix} 0.588349705 \\ 0.196116568 \\ 0.784466274 \end{bmatrix}$$

Tomemos

$$\begin{aligned} error &= \sqrt{(0.4082483 - 0.58834971)^2 + (-0.4082481 - 0.19611657)^2 + (0.8164966 - 0.78446627)^2} \\ &= \sqrt{0.3987} = 0.6314 \end{aligned}$$

Para la segunda iteración

$$k = 2;$$

Tenemos que

$$x = \begin{bmatrix} 0.588349705 \\ 0.196116568 \\ 0.784466274 \end{bmatrix}$$

Nuestro nuevo  $y$  será

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.588349705 \\ 0.196116568 \\ 0.784466274 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.157282252 \\ 1.765049115 \\ 1.35398821 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$u = [0.588349705 \quad 0.196116568 \quad 0.784466274] \begin{bmatrix} 2.157282252 \\ 1.765049115 \\ 1.35398821 \end{bmatrix} = 3.4616$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{(2.157282252)^2 + (1.765049115)^2 + (1.35398821)^2} = 3.6480$$

$$x = \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{\begin{bmatrix} 2.157282252 \\ 1.765049115 \\ 1.35398821 \end{bmatrix}}{3.6480} = \begin{bmatrix} 0.591363663 \\ 0.483842997 \\ 0.645123996 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tomemos error} &= \sqrt{(0.5883497 - 0.5913637)^2 + (0.1961166 - 0.4838430)^2 + (0.7844663 - 0.6451240)^2} \\ &= \sqrt{0.1022} = 0.3197 \end{aligned}$$

Para la última iteración  $k = 3$ ;

Tenemos que

$$x = \begin{bmatrix} 0.591363663 \\ 0.483842997 \\ 0.645123996 \end{bmatrix}$$

Nuestro nuevo  $y$  será

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.591363663 \\ 0.483842997 \\ 0.645123996 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.311694319 \\ 2.204173653 \\ 2.3654554652 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$u = [0.591363663 \ 0.483842997 \ 0.645123996] \begin{bmatrix} 2.311694319 \\ 2.204173653 \\ 2.3654554652 \end{bmatrix} = 3.9595$$

$$\|y\|_2 = \sqrt{(2.311694319)^2 + (2.204173653)^2 + (2.3654554652)^2} = 3.9746$$

$$x = \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{\begin{bmatrix} 2.311694319 \\ 2.204173653 \\ 2.3654554652 \end{bmatrix}}{3.9746} = \begin{bmatrix} 0.581612 \\ 0.554561 \\ 0.595138 \end{bmatrix}$$

Tomemos

$$\begin{aligned} \text{error} &= \sqrt{(0.591363663 - 0.581612)^2 + (0.483842997 - 0.554561)^2 + (0.645123996 - 0.595138)^2} = \sqrt{0.0076} \\ &= 0.0871 \end{aligned}$$

La corrida correspondiente del programa del Método de la Potencia Simétrica para este ejemplo, con precisión  $10^{-3}$  se da a continuación:

<i>k</i>	<i>vector x</i>	<i>u</i>	<i>error</i>
1	(0.588348, 0.196116, 0.784465)	1.666667	0.631442
2	(0.591364, 0.483843, 0.645124)	3.461538	0.319706
3	(0.581612, 0.554561, 0.595138)	3.959538	0.087147
4	(0.578462, 0.571697, 0.581845)	3.997439	0.021915
5	(0.577631, 0.575940, 0.578477)	3.999840	0.005481
6	(0.577421, 0.576998, 0.577632)	3.999990	0.001370
7	(0.577368, 0.577262, 0.577421)	3.999999	0.000343

El valor propio es  $u = 3.999999$

El vector propio es  $x = (0.577368, 0.577262, 0.577421)$

## 2.4 MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA.

Este método es una modificación del Método de la Potencia que ofrece una convergencia más rápida. Se usa para determinar el valor propio de  $A$  más cercano a un número  $q$  específico.

Supongamos que la matriz  $A$  tiene los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  con los vectores propios linealmente independientes  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ . Consideremos la matriz  $(qI - A)^{-1}$  donde  $q \neq \lambda_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  los valores propios  $(qI - A)^{-1}$  son

$$\frac{1}{\lambda_1 - q}, \quad \frac{1}{\lambda_2 - q}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lambda_n - q}$$

Con los vectores propios  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ . Al aplicar el método de la potencia en  $(qI - A)^{-1}$  obtenemos:

$$y^{(m)} = (qI - A)^{-1} x^{(m-1)}$$

$$\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \frac{y_{p_{m-1}}^{(m)}}{y_{p_{m-1}}^{(m-1)}} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j \frac{1}{(\lambda_j - q)^m} v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\sum_{j=1}^n \beta_j \frac{1}{(\lambda_j - q)^{m-1}} v_{p_{m-1}}^{(j)}} \quad (2.3)$$

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{y_{p_m}^{(m)}}$$

Donde  $p_m$  representa en cada caso el entero más pequeño para el cual  $|y_{p_m}^{(m)}| = \|y^{(m)}\|_\infty$ . La sucesión  $\{\mu^{(m)}\}$  de (2.1) converge a  $\frac{1}{(\lambda_k - q)}$ , donde

$$\frac{1}{|\lambda_k - q|} = \max_{i \leq 1 \leq n} \frac{1}{(\lambda_k - q)}$$

y  $\lambda_n \approx q + \frac{1}{\mu^{(m)}}$  es el valor propio de  $A$  más cercano a  $q$ .

Cuando  $k$ , se conoce (2.1) puede escribirse así:

$$\mu^{(m)} = \frac{1}{(\lambda_k - q)} \left[ \frac{\beta_k v_{p_{m-1}}^{(k)} + \sum_{j \neq k}^n \beta_j \left[ \frac{\lambda_k - q}{\lambda_j - q} \right]^m v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_k v_{p_{m-1}}^{(k)} + \sum_{j \neq k}^n \beta_j \left[ \frac{\lambda_k - q}{\lambda_j - q} \right]^{m-1} v_{p_{m-1}}^{(j)}} \right] \quad (2.4)$$

Por tanto, la elección de  $q$  determina la convergencia siempre y cuando  $\frac{1}{(\lambda_k - q)}$  sea un valor propio dominante y único de  $(qI - A)^{-1}$  (este valor propio también puede ser múltiple). Cuanto más se acerque a  $q$  un valor propio  $\lambda_k$  de  $A$ , más rápida será la convergencia, porque ésta es del orden de

$$O\left(\left|\frac{(\lambda - q)^{-1}}{(\lambda_k - q)^{-1}}\right|^m\right) = O\left(\left|\frac{(\lambda_k - q)^{-1}}{(\lambda - q)^{-1}}\right|^m\right),$$

donde  $\lambda$  representa el valor propio de  $A$ , que es el segundo más cercano a  $q$ .

El cálculo del vector  $y^{(m)}$  se obtiene de la ecuación

$$(A - qI)y^{(m)} = x^{(m-1)}$$

Para resolver este sistema se utiliza la eliminación Gaussiana con pivoteo.

Aunque el Método de la Potencia Inversa requiere la solución de un sistema  $n \times n$  en cada paso, los múltiplos pueden guardarse para reducir los cálculos. La selección de  $q$  puede tener como base cualquier otro medio para localizar el valor propio. El algoritmo del método de la potencia inversa calcula  $q$  a partir de una aproximación inicial  $x^{(0)}$  de un vector propio por medio de



$$q = \frac{x^{(0)t} Ax^{(0)}}{x^{(0)t} x^{(0)}}$$

Esta elección de  $q$  proviene de la observación de que, si  $x$  es un vector propio de  $A$  respecto al valor propio  $\lambda$ , entonces  $Ax = \lambda x$ . Por tanto,  $x^t Ax = Ax^t x$  y

$$\lambda = \frac{x^t Ax}{x^t x} = \frac{x^t Ax}{\|x\|_2^2}$$

Si  $q$  esta cerca de un valor propio, la convergencia será muy rápida.

### Teorema 2.3

Supongamos que una matriz  $A$  de orden  $n \times n$  posee  $n$  valores propios distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , fijemos uno de estos valores propios  $\lambda_j$ . Entonces existe una constante  $\alpha$  tal que  $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_j - \alpha}$  es el valor propio dominante de la matriz  $(A - \alpha I)^{-1}$ .

Es más, si  $(A - \alpha I)^{-1}$  se escoge adecuadamente, entonces las sucesiones  $\{x_k = [x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)}]^t\}$  y  $\{c_k\}$  generadas recursivamente por las fórmulas  $y_k = (A - \alpha I)^{-1} x_k$  y  $x_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} y_k$

Donde  $c_{k+1} = x_j^{(k)}$  y  $x_j^{(k)} = \max \{|x_i^{(k)}| : 1 \leq i \leq n\}$  convergen a la pareja de valor y vector propio dominante  $(\mu_1, v_j)$  de la matriz  $(A - \alpha I)^{-1} y_k = x_k$ . El valor de  $A$  viene fijado por  $\lambda_j = \frac{1}{\mu_1} + \alpha$ .

A menudo el algoritmo siguiente se usa para aproximar un vector propio cuando se conoce un valor propio  $q$  aproximado.

### ALGORITMO PARA EL METODO DE LA POTENCIA INVERSA

Para aproximar un valor propio y el vector propio asociado de la matriz  $A$  de  $n \times n$ , dado un vector  $x$  distinto de cero:

#### ENTRADA

*dimension n, matriz A, vector inicial x, tolerancia tol, número máximo de iteraciones m.*

**SALIDA** valor propio aproximado  $u$ , vector propio aproximado  $x$  con  $(\|x\|_\infty = 1)$  o bien un mensaje de que rebasó el número máximo de iteraciones.

**Paso 1** Tome  $q = \frac{x^t Ax}{x^t x}$

**Paso 2** Tome  $k = 1$ .

**Paso 3** Obtenga el entero  $p$  más pequeño con  $1 \leq p \leq n$  y  $|x_p| = \|x\|_\infty$

**Paso 4** Tome  $x = x/x_p$

**Paso 5** Mientras  $(k \leq m)$  haga los pasos 5 – 11

**Paso 6** Resuelva el sistema lineal  $y = (A - q * I)x$

**Paso 7** Si el sistema no tiene una solución única, entonces

**SALIDA** (' $q$  es un valor propio',  $q$ )

**PARAR.**

**Paso 8** Tome  $u = y_p$

**Paso 9** Obtenga el entero  $p$  más pequeño con  $1 \leq p \leq n$  y  $|y_p| = \|y\|_\infty$

**Paso 10** Tome  $error = \|x - (y/y_p)\|_\infty$ ;

$$x = z ;$$

$$z = y/y_p$$

**Paso 11** Si  $error < tol$ , entonces tome  $u = \left(\frac{1}{u}\right) + q$ ;

**SALIDA** ( $u, x$ );

(Procedimiento terminado exitosamente)

**PARAR.**

**Paso 12** Tome  $k = k + 1$

**Paso 13** **SALIDA** ('Número máximo de iteraciones excedido');

(Procedimiento terminado sin éxito)

**PARAR.**

En el Anexo No.3, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método de la Potencia inversa.

Existen muchas técnicas, como veremos más adelante, para obtener aproximaciones a los otros valores propios de una matriz, una vez calculada una aproximación al valor propio dominante.

### Ejemplo

Encuentre las 3 primeras iteraciones aplicando el Método de la Potencia Inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Use  $x^{(0)} = (1, -1, 2)^t$

### Solución:

Siguiendo los primeros pasos del algoritmo manualmente, tendríamos que calcular el valor de

$$q = \frac{(1 \quad -1 \quad 2) * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}{(1 \quad -1 \quad 2) * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$q = 1.6667$$

Ahora para nuestra primera iteración

$$k = 1;$$

Tenemos que

$$\|x^{(0)}\|_{\infty} = \max|(1), (-1), (2)| = 2$$

El entero más pequeño  $p = 3$  entonces  $x_p = 2$

$$x = \frac{(1 \quad -1 \quad 2)}{2} = (0.5000 \quad -0.5000 \quad 1.0000)$$

Sea  $y = (A - q * I) \setminus x$ , de esta manera encontramos el valor de  $y$  que es resolviendo el sistema anterior

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1.6667 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \setminus (0.5000 \quad -0.5000 \quad 1.0000)$$

Donde  $y = (-0.1070 \quad 1.3923 \quad -0.8566)$ ;

Entonces

$$u = 1.3923 \text{ ya que } u = y_p = 1.3923$$

El entero más pequeño  $p = 2$  entonces  $x_p = 1.3923$

$$\|y\|_\infty = \max|(-0.1071), (1.3923), (0.8566)| = 1.3923$$

$$z = \frac{y}{y_p} = \frac{(-0.1071 \quad 1.3923 \quad -0.8566)}{1.3923} = (-0.0769 \quad 1.0000 \quad -0.6152)$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{error} &= \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_\infty = \max|(1 + 0.0769) \quad (-1 - 1.0000) \quad (2 + 0.6152)| \\ &= \max|1.0769 \quad -2 \quad 2.6154| = 2.6152 \end{aligned}$$

Ahora si

$$\text{error} < \text{tol} \Rightarrow u = \left(\frac{1}{u}\right) + q$$

$$u = \left(\frac{1}{1.3923}\right) + 1.6667 = 2.3849$$

Para nuestra segunda iteración

$$k = 2;$$

Tenemos que

$$\|x^{(0)}\|_\infty = \max|(-0.0769) \quad (1.0000) \quad (-0.6152)| = 1.0000$$

El entero más pequeño  $p = 3$  entonces  $x_p = 1.0000$

$$x = \frac{(-0.0769 \quad 1.0000 \quad -0.6154)}{1} = (-0.0769 \quad 1.0000 \quad -0.6152)$$

Sea  $y = (A - q * I)x$ , de esta manera encontramos el valor de  $y$  que es resolviendo el sistema anterior

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1.6667 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \setminus (0.3132 \quad -1.3014 \quad 1.1202)$$

Donde  $y = (0.3132 \quad -1.3014 \quad 1.1202)$ ;

$u = 1.1202$  ya que  $u = y_p = 1.1202$

$$\|y\|_{\infty} = \max|(0.3132), (-1.3014), (1.1202)| = 1.3014$$

$$z = \frac{y}{y_p} = \frac{(0.3132 \quad -1.3014 \quad 1.1202)}{1.3014} = (0.2407 \quad -1.0000 \quad 0.8608)$$

$$\begin{aligned} \text{error} = \|x - z\|_{\infty} &= \max|(-0.0769 - 0.2407) \quad (1 + 1.0000) \quad (-0.6154 - 0.8608)| \\ &= \max|(0.3176) \quad (2) \quad (1.4762)| = 2 \end{aligned}$$

$$\text{error} < \text{tol} \Rightarrow u = \left(\frac{1}{u}\right) + q$$

$$\mu = \left(\frac{1}{1.3014}\right) + 1.6667 = 2.4351$$

Para nuestra última iteración

$$k = 3$$

$$\|x^{(0)}\|_{\infty} = \max|(0.2407) \quad (-1.0000) \quad (0.8608)| = 1.0000$$

El entero más pequeño  $p = 2$  entonces  $x_p = 1.0000$

$$x = \frac{(0.2407 \quad -1.0000 \quad 0.8608)}{1} = (0.2407 \quad -1.0000 \quad 0.8608)$$

Sea  $y = (A - q * I) \setminus x$ , de esta manera encontramos el valor de  $y$  que es resolviendo el sistema anterior

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1.6667 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \setminus (0.2407 \quad -1.0000 \quad 0.8608)$$

Ahora nuestro nuevo  $y = (-0.2956 \quad 1.5645 \quad -1.2253)$

$$u = 1.5650$$

$$\|y\|_{\infty} = \max|(0.2956) \quad (1.5650) \quad (-1.2253)| = 1.5650$$

$$z = \frac{y}{y_p} = \frac{(0.2956 \quad 1.5645 \quad -1.2253)}{1.5650} = (-0.1889 \quad 1.0000 \quad -0.7832)$$

$$\begin{aligned} \text{error} = \|x - z\|_{\infty} &= \max|(0.2407 - 0.1889) \quad (-1 - 1) \quad (0.8608 + 0.7832)| \\ &= \max|(0.0518) \quad (-2) \quad (1.6440)| = 2 \end{aligned}$$

$$\text{error} < \text{tol} \Rightarrow u = \left(\frac{1}{u}\right) + q$$

$$u = \left(\frac{1}{1.5650}\right) + 1.6667 = 2.3055$$

La corrida correspondiente del programa del Método de la Potencia Inversa para este ejemplo, con precisión  $10^{-3}$  se da a continuación:

<i>k</i>	<i>vector x</i>	<i>u</i>	<i>error</i>
1	(-0.076923, 1.000000, -0.615385)	0.500000	2.278664
2	(-0.240506, 1.000000, -0.860759)	0.898734	0.294904
3	(-0.188908, 1.000000, -0.783362)	1.027730	0.093020
4	(-0.203207, 1.000000, -0.804811)	0.991982	0.025778
5	(-0.199087, 1.000000, -0.798630)	1.002283	0.007428
6	(-0.200261, 1.000000, -0.800392)	0.999347	0.002117
7	(-0.199925, 1.000000, -0.799888)	1.000186	0.000605

El valor propio dominante es 1.000186

El vector propio asociado es  $x = (-0.199925, 1.000000, -0.799888)$

## 2.5 Método de la Deflación de Wielandt.

En un Método de Deflación debemos formar una matriz  $B$  nueva cuyos valores propios sean iguales a los de  $A$ , salvo que el valor propio dominante de  $A$  se reemplaza con el valor propio 0 en  $B$ .

### Teorema 2.4

Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores propios de  $A$  con los vectores propios asociados  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  y que  $\lambda_1$  tiene multiplicidad 1. Sea  $x$  un vector con  $x^t v^{(1)} = 1$ . Entonces, la matriz

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^t$$

Tiene los valores propios  $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  con los vectores propios asociados  $v^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \dots, w^{(n)}$ , donde  $v^{(i)}$  y  $w^{(i)}$  están relacionados por la ecuación

$$v^{(i)} = (\lambda_i - \lambda_1)w^{(i)} + \lambda_1(x^t w^{(i)})v^{(1)} \quad (2.5)$$

para cualquier  $i = 2, 3, \dots, n$

Para describir el Método de Deflación de Wielandt, comenzamos definiendo al vector  $x$  mediante

$$x = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^t \quad (2.6)$$

donde  $v_i^{(1)}$  es una coordenada del vector propio  $v^{(1)}$  distinta de cero y los valores  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  son los elementos del  $i$ -ésimo renglón de  $A$

Con esta definición,

$$x^t v^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^t = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^{(1)}$$

donde la suma es la  $i$ -ésima coordenada del producto  $Av^{(1)}$ . Dado que  $Av^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}$  esto significa que

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)}$$

lo que implica que

$$x^t v^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} (\lambda_1 v_i^{(1)}) = 1$$

Si  $\lambda \neq 0$  es un valor propio con vector propio asociado  $w$ , la relación  $Bw = \lambda w$  implica que la  $i$ -ésima coordenada de  $w$  también debe de ser cero. En consecuencia, la columna de la matriz  $B$  no aporta nada al producto  $Bw = \lambda w$ . Así, la matriz  $B$  puede ser reemplazada por una matriz  $B'$   $(n-1) \times (n-1)$  obtenida al suprimir en  $B$  el  $i$ -ésimo renglón y la  $i$ -ésima columna. La matriz  $B'$  tiene los valores propios  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

Si  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ , se aplica nuevamente el Método de la Potencia a la matriz  $B'$  para determinar este nuevo valor propio dominante y un vector propio  $w^{(2)'$  asociado a  $\lambda_2$ , respecto a la matriz  $B'$ . Si quiere obtener el vector propio asociado  $w^{(2)}$  de la matriz  $B$ , introduzca una coordenada cero entre las coordenadas  $w_{i-1}^{(2)'$  y  $w_i^{(2)'$  del vector dimensional  $(n-1)w^{(2)'$  y luego se calcula  $v^{(2)}$  mediante la ecuación (2.5) dada anteriormente.

Este proceso de Deflación puede servir para obtener aproximaciones a todos los valores y vectores propios de una matriz, el proceso es susceptible al error de redondeo. Si lo empleamos para calcular todos los valores de una matriz, las aproximaciones conseguidas deberán usarse como valores iniciales del Método de la Potencia Inversa aplicado a la matriz original.

Esto garantiza que las aproximaciones converjan en los valores propios de la matriz original, no a los de la matriz reducida, que probablemente contenga errores. Cuando se necesitan todos los valores propios de una matriz, hay que usar el algoritmo de Deflación, que presentaremos a continuación, basadas en transformaciones de similitud.

Este algoritmo calcula el segundo valor propio más dominante y el vector propio asociado de una matriz, una vez determinado el valor propio dominante y el vector propio dominante asociado.

### **ALGORITMO DEL METODO DE LA DEFLACIÓN DE WIELANDT**

Para aproximar el segundo valor propio más dominante y el vector propio asociado de la matriz de  $A$  de  $n \times n$ , dada una aproximación  $\lambda$  al valor propio dominante, se utiliza una aproximación  $v$  al vector propio correspondiente y un vector  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$

#### **ENTRADA**

*dimensión  $n$ , matriz  $A$ , valor propio aproximado  $l$ , con el vector propio  $v \in \mathbb{R}^n$ ,*

*vector  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  tolerancia  $tol$ , número máximo de iteraciones  $m$ .*

#### **SALIDA**

*valor propio aproximado  $u$ ; vector propio aproximado  $r$  o un mensaje de que el método falla.*

**Paso 1** *Sea  $i$  el entero más pequeño con  $1 \leq i \leq n$  y  $|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j|$*

**Paso 2** *Si  $i \neq 1$ ; entonces*

*para  $k = 1, \dots, i - 1$*

*para  $j = 1, \dots, i - 1$*

*tome  $b_{kj} = a_{kj} - \frac{v_k}{v_i} a_{ij}$*

**Paso 3** *Si  $i \neq 1$  e  $i \neq n$ , entonces*

*para  $k = 1, \dots, n - 1$*



para  $j = 1, \dots, i - 1$

$$\text{tome } b_{kj} = a_{k+1,j} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{ij}$$

$$b_{jk} = a_{j,k+1} - \frac{v_j}{v_i} a_{i,k+1}$$

**Paso 4** Si  $i \neq n$ ; entonces

para  $k = 1, \dots, n - 1$

para  $j = 1, \dots, n - 1$

$$\text{tome } b_{kj} = a_{k+1,j+1} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{i,j+1}$$

**Paso 5** Realice el Método de la Potencia en la matriz  $(n - 1) \times (n - 1) B' = (b_{kj})$  con  $x$  como aproximación inicial.

**Paso 6** Si el Método falla, entonces **SALIDA** ('Método falla');

**PARAR**

si no, sea  $u$  el valor propio aproximado y

$$w' = (w'_1, \dots, w'_{n-1})^t \text{ el vector propio aproximado.}$$

**Paso 7** Si  $i \neq 1$ , entonces para  $k = 1, \dots, i - 1$  tome  $w_k = z_k$

**Paso 8**  $w_i = 0$ ;

**Paso 9** Si  $i \neq 1$ , entonces para  $k = 1, \dots, i - 1$  tome  $w_k = z_{k+1}$

**Paso 10** Para  $k = 1, \dots, n$

$$\text{tome } r(k) = (u - l) * w(k) + (\text{suma}) * \left(\frac{v(k)}{v(i)}\right);$$

(Calcule el vector propio utilizando la ecuación (2.5))

**Paso 11** **SALIDA** (' $u, r'$ '); (Procedimiento terminado exitosamente)

**PARAR.**

En el Anexo No.4 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método de La Deflación De Wielandt para una matriz simétrica.

### Ejemplo

Aplicar el Método de Deflación de Wielandt al ejemplo del Método de La Potencia resuelto en la sección 2.2 para encontrar el segundo valor propio más dominante.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$l = 3.9985$$

$$v = (0.999908 \quad 0.999725 \quad 1.00000)$$

Como  $1 \neq 3$  entonces

Para  $k = 1, 2$

Para  $j = 1, 2$

$$\text{Tomemos } b_{11} = a_{22} - \frac{v_2}{v_1} a_{12} = 2 - 1 = 1$$

$$b_{12} = a_{23} - \frac{v_2}{v_1} a_{13} = 1 - 1 = 0$$

$$b_{21} = a_{32} - \frac{v_3}{v_1} a_{12} = 1 - 1 = 0$$

$$b_{22} = a_{33} - \frac{v_3}{v_1} a_{13} = 2 - 1 = 1$$

Entonces  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y tomemos  $x = [1 \quad -1]'$

Para  $k = 1$  encontremos el valor máximo de  $x$  de la siguiente manera

$$\|x\|_{\infty} = \max\{1, -1\} = 1$$

El entero  $p$  más pequeño es  $p = 1$  entonces  $x_p = 1.0000$

$$\text{Ahora tomemos } x = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sea  $y = Bx$  de esta manera encontramos el valor de  $y$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces  $u = y_p = 1.0000$

$$\|y\|_{\infty} = 1.0000$$

El entero  $p$  más pequeño es  $p = 1$  entonces  $y_p = 1.0000$

$$\text{Ahora tomemos } x = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tomemos  $error = \|(1, -1) - (1, -1)\|_{\infty} = \|0, 0\|_{\infty} = 0$

Sea  $w_1 = 0$

$$w_2 = 1$$

$$w_3 = -1$$

Para  $k = 1, 2, 3$

$$r_1 = (u - l)w_1 + (a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3) \frac{v_1}{v_1}$$

$$r_1 = (1 - 3.9985)(0) + [2(0) + 1(1) + 1(-1)] \left( \frac{0.999908}{0.999908} \right)$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = (u - l)w_2 + (a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3) \frac{v_2}{v_1}$$

$$r_2 = (1 - 3.9985)(1) + [2(0) + 1(1) + 1(-1)] \left( \frac{0.999725}{0.999908} \right)$$

$$r_2 = -2.9985$$

$$r_3 = (u - l)w_3 + (a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3) \frac{v_3}{v_1}$$

$$r_3 = (1 - 3.9985)(-1) + [2(0) + 1(1) + 1(-1)] \left( \frac{1.000000}{0.999908} \right)$$

$$r_3 = 2.9985$$

La corrida correspondiente del programa del Método de la Deflación de Wielandt para este ejemplo, con precisión  $10^{-2}$  se da a continuación:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicaremos el método de la potencia a la matriz  $B$ , ella será la matriz  $A$  de trabajo

Introduzca la dimensión de la matriz  $n$ : 2

Introduzca la matriz  $A$ : [1 0; 0 1]

Introduzca el vector  $x$ : [1 -1]'

Introduzca la tolerancia  $tol$ : 0.001

Introduzca el número máximo de iteraciones  $m$ : 20

$k$	$vector\ x$	$u$	$error$
1	(1.000000, -1.000000)	1.000000	0.000000

El valor propio es  $u = 1.000000$

El vector propio es  $x = (1.000000, -1.000000)$

Introduzca 1 si el método falla, 2 si el método no falla, resp: 2

$resp = 2$

El valor propio aproximado es  $u: 1$

El vector propio aproximado es  $z: [1 \ -1]'$

$w = [1 \ -1]$

El valor propio aproximado es  $u = 1.000000$

El vector propio es  $r = (0.000000, -2.998500, 2.998500)$

Los métodos de Deflación no son generalmente apropiados para calcular todos los valores propios de una matriz debido al crecimiento del error de redondeo. Una técnica de reducción de matrices ideada para determinar todos los valores propios de una matriz simétrica se da a través del método conocido como Algoritmo  $QR$ , se aborda en la sección (2.7).

## 2.6 MÉTODO DE HOUSEHOLDER.

Para aplicar el Algoritmo  $QR$ , la matriz simétrica debe estar en forma tridiagonal, es decir, las únicas componentes distintas de cero de la matriz se encuentran ya sean en la diagonal o en las subdiagonales directamente arriba y debajo de la diagonal.

El primer problema consiste en encontrar una matriz simétrica tridiagonal cuyos valores propios coincidan con los de la matriz original. Para este propósito usamos una técnica conocida como el Método de Householder. Este Método se utiliza para encontrar una matriz simétrica tridiagonal  $B$  que sea semejante a una matriz simétrica dada  $A$ .

### Definición 2.1

Sea  $w \in \mathbb{R}^n$  con  $w^t w = 1$ . La matriz de  $n \times n$ ,

$$P = I - 2ww^t,$$

recibe el nombre de transformación de Householder.

Las transformaciones de Householder sirven para suprimir de manera selectiva bloques de elementos de vectores o columnas de matrices en una forma extremadamente estable respecto al error del redondeo.

### Teorema 2.5

Si  $P = I - 2ww^t$ , es una transformación de Householder, entonces  $P$  es simétrica y ortogonal; por tanto,  $P^{-1} = P$ .

El Método de Householder empieza con la determinación de una transformación  $P^{(1)}$  tal que  $A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)}$  tiene

$$a_{j1}^{(2)} = 0, \quad \text{para cada } j = 3, 4, \dots, n \quad (2.7)$$

Por simetría, esto implica que  $a_{1j}^{(2)} = 0$ .

Se elige el vector  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$  de manera que  $w^t w = 1$ , lo que sostiene la ecuación (2.3), y en la matriz

$$A^{(2)} = P^{(1)}AP^{(1)} = (I - 2ww^t)A(I - 2ww^t),$$

tenemos  $a_{11}^{(2)} = a_{11}$  y  $a_{j1}^{(2)} = 0$ , para cada  $j = 3, 4, \dots, n$ . Esta elección impone  $n$  condiciones a las  $n$  incógnitas  $w_1, \dots, w_n$ .

Al usar  $w_1 = 0$  se garantiza que  $a_{11}^{(2)} = a_{11}$ . Queremos que

$$P^{(1)} = I - 2ww^t$$

Satisfaga

$$P^{(1)}(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})^t = (a_{11}, \alpha, 0, \dots, 0)^t, \quad (2.8)$$

donde más tarde se seleccionara  $\alpha$ . Para simplificar la notación, utilizamos

$$\hat{w} = (w_2, w_3, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \hat{y} = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})^t \in \mathbb{R}^{n-1},$$

y  $\hat{P}$  como la  $(n-1) \times (n-1)$  transformación de Householder

$$\hat{P} = I_{n-1} - 2\hat{w}\hat{w}^t$$

La ecuación (2.4) se convierte entonces en

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \hat{P} & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \hat{P}\hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\hat{P}\hat{y} = (I_{n-1} - 2\hat{w}\hat{w}^t)\hat{y} = \hat{y} - 2(\hat{w}^t\hat{y})\hat{w} = (\alpha, 0, \dots, 0)^t \quad (2.9)$$

Sea  $r = \hat{w}^t\hat{y}$ . Entonces

$$(\alpha, 0, \dots, 0)^t = (a_{21} - 2rw_2, a_{31} - 2rw_3, \dots, a_{n1} - 2rw_n)^t,$$

y podemos determinar todas las  $w_i$  si logramos determinar  $\alpha$  y  $r$ . Al igualar los componentes, obtenemos

$$\alpha = a_{21} - 2rw_2$$

y

$$0 = a_{j1} - 2rw_j \quad \text{para cada } j = 3, \dots, n$$

Esto es,

$$2rw_2 = a_{21} - \alpha \quad (2.10)$$

y

$$2rw_j = a_{j1}, \quad \text{para cada } j = 3, \dots, n \quad (2.11)$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de las ecuaciones anteriores y al sumar, obtenemos

$$4r^2 \sum_{j=2}^n w_j^2 = (a_{21} - \alpha)^2 + \sum_{j=3}^n a_{j1}^2$$

Puesto que  $w^t w = 1$  y  $w_1 = 0$ , tenemos  $\sum_{j=2}^n w_j^2 = 1$  y

$$4r^2 = \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 - 2\alpha a_{21} + \alpha^2 \quad (2.12)$$

Con base en la ecuación (2.9) y en el hecho de que  $P$  es ortogonal, tenemos

$$\alpha^2 = (\alpha, 0, \dots, 0)(\alpha, 0, \dots, 0)^t = (\hat{P}\hat{y})^t \hat{P}\hat{y} = \hat{y}^t \hat{P}^t \hat{P}\hat{y} = \hat{y}^t \hat{y}$$

Por tanto,

$$\alpha^2 = \sum_{j=2}^n a_{j1}^2$$

que, al ser sustituida en (2.12) nos da:

$$2r^2 = \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 - \alpha a_{21}$$

Para asegurarnos de que  $2r^2 = 0$  solo si  $a_{21} = 0, a_{31} = 0, \dots, a_{n1} = 0$ , elegimos el signo, de modo que

$$\alpha = -\text{sgn}(a_{21}) \left( \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

lo que implica que

$$2r^2 = \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 + |a_{21}| \left( \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

Con estas opciones de  $\alpha$  y  $2r^2$  resolvemos las ecuaciones (2.10) y (2.11) para obtener

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r} \quad y \quad w_j = \frac{a_{j1}}{2r} \quad \text{para cada } j = 3, \dots, n$$

Para resumir la elección de  $P^{(1)}$ , tenemos

$$\alpha = -\text{sgn}(a_{21}) \left( \sum_{j=2}^n a_{j1}^2 \right)^{1/2}$$

$$r = \left( \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} a_{21} \alpha \right)^{1/2}$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r}$$

y

$$w_j = \frac{a_{j1}}{2r} \quad \text{para cada } j = 3, \dots, n$$

Con esta opción elegida,

$$A^{(1)} = P^{(1)} A P^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & \vdots & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \vdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \vdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \vdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Una vez que hemos encontrado  $P^{(1)}$  y  $A^{(2)}$ , el proceso se repite para  $k = 2, 3, \dots, n - 2$  como sigue:

$$\alpha = -\text{sgn}(a_{k+1,k}^{(k)}) \left( \sum_{j=k+1}^n (a_{jk}^{(k)})^2 \right)^{1/2};$$

$$r = \left( \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha a_{k+1,k}^{(k)} \right)^{1/2};$$

$$w_1^{(k)} = w_2^{(k)} = \dots = w_k^{(k)} = 0;$$

$$w_{k+1}^{(k)} = \frac{a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha}{2r};$$

$$w_j^{(k)} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{2r}, \text{ para cualquier } j = k + 2, k + 3, \dots, n$$

$$P^{(k)} = I - 2w^{(k)} \cdot (w^{(k)})^t$$

y,

$$A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)},$$

donde



$$A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^{(k+1)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

De este modo se forma la matriz tridiagonal, y simétrica  $A^{(n-1)}$ , donde

$$A^{(n-1)} = P^{(n-2)}P^{(n-3)} \dots P^{(1)}AP^{(1)} \dots P^{(n-3)}P^{(n-2)}$$

### Teorema 2.9

Si los vectores  $X$  e  $Y$  tienen la misma norma, entonces existe una matriz ortonormal y simétrica  $P$  tal que:

$$Y = PX, \text{ donde } P = 2WW', \text{ siendo } W = \frac{X-Y}{\|X-Y\|_2}$$

Puesto que  $P$  es ortogonal y simétrica se tiene que

$$P^{-1} = P$$

### Corolario 2

Sea  $X$  el vector  $[x_1 \dots x_n]'$  de orden  $n \times 1$ . Si  $k$  es un número natural con  $1 \leq k \leq n - 2$  entonces existe un vector  $W_k$  y una matriz  $P_k = I - 2W_kW_k'$  tales que

$$P_k X = P_k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -S \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Y$$

## ALGORITMO PARA EL METODO DE HOUSEHOLDER

Para obtener una matriz tridiagonal simétrica  $A^{(n-1)}$  similar a la matriz simétrica  $A = A^{(1)}$  se construyen las siguientes matrices  $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n-1)}$ , donde  $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$  para cualquier  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ :

**ENTRADA** *dimensión  $n$ ; matriz  $A$ .*

**SALIDA**  $A^{(n-1)}$  (*En cada caso podemos sobrecribir  $A$* ).

**Paso 1** Para  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ , haga los pasos 2 - 14 :

**Paso 2** Tome

$$q = \sum_{j=k+1}^n (a_{jk}^{(k)})^2.$$

**Paso 3** Si  $a_{k+1,k}^{(k)} = 0$ , entonces tome  $f = -q^{1/2}$

$$\text{si no, tome } f = -\frac{q^{1/2} a_{k+1,k}^{(k)}}{|a_{k+1,k}^{(k)}|}.$$

**Paso 4** Tome  $RSQ = f^2 - f a_{k+1,k}^{(k)}$  (Nota  $RSQ = 2r^2$ )

**Paso 5** Tome  $v_k = 0$ ; (Nota:  $v_1, \dots, v_{k-1} = 0$ , pero no se necesitan)

$$v_{k+1} = a_{k+1,k}^{(k)} - f$$

$$\text{Para } j = k + 2, \dots, n \text{ tome } v_j = a_{jk}^{(k)}.$$

$$\text{(Nota: } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2RSQ}}\right) v = \frac{1}{2r} v)$$

**Paso 6** Para  $j = k, k + 1, \dots, n$  tome  $u_j = \left(\frac{1}{RSQ}\right) \sum_{i=k+1}^n a_{ji}^{(k)} v_i$ .

$$\text{(Nota: } u = \left(\frac{1}{RSQ}\right) A^{(k)} v = \frac{1}{2r^2} A^{(k)} v = \frac{1}{r} A^{(k)} w)$$

**Paso 7** Tome  $PROD = \sum_{i=k+1}^n v_i u_i$

$$\text{(Nota: } PROD = v^t u = \frac{1}{2r^2} v^t A^{(k)} v)$$

**Paso 8** Para  $j = k, k + 1, \dots, n$  tome  $z_j = u_j - \left(\frac{PROD}{2RSQ}\right) v_j$

$$\text{(Nota: } z = u - \frac{1}{2RSQ} v^t u v = u - \frac{1}{4r^2} v^t u v)$$

$$= u - w w^t u = \frac{1}{r} A^{(k)} w - w w^t \frac{1}{r} A^{(k)} w$$

**Paso 9** Para  $l = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$ , haga los pasos 10 y 11

$$\left( \text{Nota: calcule } A^{(k+1)} = A^{(k)} - v z^t - z v^t (I - 2 w w^t) A^{(k)} \right)$$

$$(I - 2 w w^t)$$

**Paso 10** Para  $j = l + 1, \dots, n$  tome

$$a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - v_l z_j - v_j z_l;$$

$$a_{lj}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k+1)}$$

**Paso 11** Tome  $a_{ll}^{(k+1)} = a_{ll}^{(k)} - 2 v_l z_l$

**Paso 12** Tome  $a_{nn}^{(k+1)} = a_{nn}^{(k)} - 2 v_n z_n$ .

**Paso 13** Para  $j = k + 2, \dots, n$  tome  $a_{kj}^{(k+1)} = a_{jk}^{(k+1)} = 0$

**Paso 14** Tome  $a_{k+1,k}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k)} - v_{k+1} z_k$

$$a_{k+1,k}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k)}$$

(Nota: los otros elementos de  $A^{(k+1)}$  son los mismos de  $A^{(k)}$ )

**Paso 15 SALIDA** ( $A^{(n-1)}$ );

(El proceso se terminó.  $A^{(n-1)}$  es simétrico, tridiagonal y similar a  $A$ )

**PARAR.**

En el Anexo No. 5, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método Householder para una matriz simétrica.

### Ejemplo

Aplice el Método de Householder para poner la siguiente matriz en forma tridiagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### Solución:

Para nuestra primera iteración.

Tomemos  $k = 1$

Encontremos el Valor de  $q$

$$q = (-1)^2 + (-1)^2$$

$$q = 2.$$

Como  $a_{21}^{(1)} \neq 0$  entonces  $f = -\frac{\frac{1}{2^2}(-1)}{|-1|}$

$$f = \frac{\frac{1}{2^2}}{1}$$

$$f = 1.4142$$

Ahora encontremos  $RSQ = (1.4142)^2 - 1.4142(-1)$

$$RSQ = 3.4142$$

Hagamos  $v_1 = 0$ ;

$$v_2 = -1 - 1.4142 = -2.4142$$

Para  $j = 3$  tomemos  $v_3 = -1$

Ahora siguiendo nuestro algoritmo para  $j = 1, 2, 3$  encontremos  $u_j$

Para  $j = 1$

$$u_1 = \left(\frac{1}{3.4142}\right) * (3.4142)$$

$$u_1 = 1.0000$$

Para  $j = 2$

$$u_2 = \left(\frac{1}{3.4142}\right) * (-3.8284)$$

$$u_2 = -1.1213$$

Para  $j = 3$

$$u_3 = \left(\frac{1}{3.4142}\right) * (0.4142)$$

$$u_3 = 0.1213$$

Calculemos  $PROD = (-2.4142) * (-1.1213) + (-1) * (0.1213)$

$$PROD = 2.7070 - 0.1213$$

$$PROD = 2.5857$$

Ahora para  $j = 1, 2, 3$  encontremos  $z_j$

Para  $j = 1$

$$z_1 = 1 - \left(\frac{2.5857}{6.8284}\right) * (0)$$

$$z_1 = 1.0000$$

Para  $j = 2$

$$z_2 = -1.1213 - \left(\frac{2.5857}{6.8284}\right) * (-2.4142)$$

$$z_2 = -0.2071$$

Para  $j = 3$

$$z_3 = 0.1213 - \left(\frac{2.5857}{6.8284}\right) * (-1)$$

$$z_3 = 0.5000$$

Ahora  $l = 2$  y  $j = 3$

$$\text{Tomemos } a_{32}^{(2)} = -1 - 2.4142 * (0.5000) - (-1) * (-0.2071)$$

$$a_{32}^{(2)} = 0$$

$$\text{Hagamos } a_{23}^{(2)} = a_{32}^{(2)} = 0$$

$$\text{Continuando encontremos } a_{22}^{(2)} = 2 - 2 * (-2.4142) * (-0.2071)$$

$$a_{22}^{(2)} = 1.0000$$

$$\text{y } a_{33}^{(2)} = 2 - 2 * (-1.0000) * (-0.5000)$$

$$a_{33}^{(2)} = 3.0000$$

$$\text{Para } j = 3 \text{ hagamos } a_{13}^{(1)} = a_{31}^{(2)} = 0$$

$$\text{Tomemos } a_{21}^{(2)} = -1 + 2.4142 * (-1.0000)$$

$$a_{21}^{(2)} = 1.4142$$

Entonces la matriz  $A^2$  encontrada es

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.4142 & 0 \\ 1.4142 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

La corrida correspondiente del programa del Método de Householder, se da a continuación:

La matriz  $A^{n-1}$  es

$$A = \begin{bmatrix} 2.0000 & 1.4142 & 0 \\ 1.4142 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

## 2.7 MÉTODO QR

Para aplicar este Método, partimos de una matriz simétrica en forma tridiagonal, es decir, las únicas entradas no nulas de la matriz están en la diagonal o en las subdiagonales directamente arriba o debajo de la diagonal. Si esta no es la forma de la matriz simétrica, el primer paso consiste en aplicar el Método de Householder para calcular una matriz simétrica tridiagonal similar a la matriz dada.

Si con  $A$  denotamos una matriz simétrica tridiagonal, podremos simplificar un poco la notación marcando los elementos de  $A$  así:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Si  $b_2 = 0$  o  $b_n = 0$ , entonces la matriz  $1 \times 1$   $[a_1]$  o bien  $[a_n]$  produce inmediatamente un valor propio  $a_1$  o  $a_n$  de  $A$

Cuando  $b_j = 0$  para alguna  $j$ , donde  $2 < j < n$  el problema se puede minimizar considerando, en vez de  $A$ , las matrices más pequeñas

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{j-1} & a_{j-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_{j+1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{j+1} & a_{j+1} & b_{j+2} & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{j+2} & a_{j+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Si ningún  $b_j$  es cero, el Método  $QR$  forma una sucesión de las matrices  $A = A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$ , así:

1.  $A^{(1)} = A$  se factoriza como un producto  $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$ , donde  $Q^{(1)}$  es ortogonal y  $R^{(1)}$  es triangular superior.
2.  $A^{(2)}$  se define como  $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$ .

En general,  $A^{(i)}$  se factoriza como un producto  $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$  de una matriz ortogonal.

$Q^{(i)}$  y de una matriz triangular superior  $R^{(i)}$ . Después, definimos  $A^{(i+1)}$  como el producto de  $R^{(i)}$  y  $Q^{(i)}$  en la dirección inversa  $A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)}$ . Dado que  $Q^{(i)}$  es ortogonal,  $R^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}$  y

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = \left( R^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)} \right) Q^{(i)} = Q^{(i)t}A^{(i)}Q^{(i)} \quad (2.15)$$

y  $A^{(i+1)}$  es simétrica con los mismos valores propios que  $A^{(i)}$ . Por la forma en que definimos  $R^{(i)}$  y  $Q^{(i)}$ , también podemos garantizar que  $A^{(i+1)}$  es tridiagonal.

Por inducción,  $A^{(i+1)}$  tiene los mismos valores propios que la matriz original. El éxito del procedimiento se debe al hecho de que  $A^{(i+1)}$  tiende a una matriz diagonal con los valores propios de  $A$  a lo largo de la diagonal.

Para describir la construcción de las matrices de factor  $Q^{(i)}$  y  $R^{(i)}$  necesitamos manejar el concepto de matriz de rotación.

### Definición 2.3

Una matriz de rotación  $P$  difiere de la matriz identidad en cuatro elementos como máximo. Estos tienen la forma

$$p_{ii} = p_{jj} = \cos\vartheta \quad \text{y} \quad p_{ij} = -p_{ji} = \sin\vartheta, \text{ para alguna } \vartheta \in i \neq j.$$

Es fácil demostrar que, con cualquier matriz de rotación  $P$ , la matriz  $P$  difiere de  $A$  solo en la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima columnas y la matriz  $AP$  difiere de  $A$  solo en el  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo renglones. Para cualquier  $i \neq j$ , podemos elegir el ángulo  $\vartheta$  de modo que el producto  $PA$  tenga un elemento cero para  $(PA)_{ij}$ .

Además, toda matriz de rotación  $P$  es ortogonal, porque la definición implica que

$$PP^t = I$$

La factorización de  $A^{(1)}$  en  $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$  utiliza un producto de  $n - 1$  matrices de rotación de este tipo para construir

$$R^{(1)} = P_n P_{n-1} \dots P_2 A^{(1)}$$

Primero establecemos que la matriz de rotación  $P_2$  tenga

$$p_{11} = p_{22} = \cos\vartheta_2 \quad \text{y} \quad p_{12} = -p_{21} = \sin\vartheta_2$$

Donde

$$\sin\vartheta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} \quad \text{y} \quad \cos\vartheta_2 = \frac{a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}}$$

Entonces, la matriz

$$A_2^{(1)} = P_2 A^{(1)}$$

Tiene un cero en la posición (2,1) esto es, en el segundo renglón y en la primera columna, ya que el elemento (2,1) de  $A_2^{(1)}$  es

$$(-\sin\vartheta_2)a_1 + (\cos\vartheta_2)b_2 = \frac{-b_2 a_1}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{b_2^2 + a_1^2}} = 0$$

Como la multiplicación  $P_2 A^{(1)}$  afecta a los renglones 1 y 2 de  $A^{(1)}$ , la nueva matriz no necesariamente conserva los elementos cero en las posiciones (1,3), (1,4), ..., y (1,n). Sin embargo,  $A^{(1)}$  es tridiagonal y, por tanto, los elementos (1,4), ..., y (1,n) de  $A_2^{(1)}$  son cero. Solo el elemento (1,3) en el primer renglón y tercera columna, puede hacerse distinto de cero.

En términos generales, seleccionamos la matriz  $P_k$  de modo que el  $(k, k+1)$  -ésimo elemento de  $A_k^{(1)} = P_k A_{k-1}^{(1)}$  sea cero, lo cual hace que el  $(k-1, k+1)$  -elemento se convierta en uno distinto de cero. La matriz  $A_k^{(1)}$  tiene la forma

$$A_k^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & z_{k-1} & q_{k-1} & r_{k-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & x_k & y_k & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

y  $P_{k+1}$  tiene la forma

$$P_{k+1} = \left[ \begin{array}{c|cc|c} I_{k-1} & & 0 & 0 \\ \hline & c_{k+1} & s_{k+1} & 0 \\ \hline 0 & -s_{k+1} & c_{k+1} & 0 \\ \hline 0 & & 0 & I_{n-k-1} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{ renglón } k \\ \uparrow \text{ columna } k \end{array} \quad (2.16)$$



Donde 0 denota la matriz nula con la dimensión adecuada.

Elegimos las constantes  $c_{k+1} = \cos \vartheta_{k+1}$  y  $s_{k+1} = \sin \vartheta_{k+1}$  en  $P_{k+1}$ , de modo que el  $(k+1, k)$  elemento de  $A_{k+1}^{(1)}$  sea cero; es decir,  $s_{k+1}x_k - c_{k+1}b_{k+1} = 0$ . Puesto que  $c_{k+1}^2 + s_{k+1}^2 = 1$ , la solución a esta ecuación es:

$$s_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}} \quad \text{y} \quad c_{k+1} = \frac{x_k}{\sqrt{b_{k+1}^2 + x_k^2}}$$

y  $A_{k+1}^{(1)}$  tiene la forma

$$A_k^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & z_k & q_k & r_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & x_{k+1} & y_{k+1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{k+2} & a_{k+2} & b_{k+3} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Al proseguir con esta construcción en la sucesión  $P_2, \dots, P_n$  obtenemos la matriz triangular superior.

$$R^{(1)} \equiv A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} z_1 & q_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & q_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & z_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

La otra mitad de la factorización  $QR$  es la matriz

$$Q^{(1)} = P_2^t P_3^t \dots P_n^t,$$

Porque la ortogonalidad de las matrices de rotación implica que

$$Q^{(1)}R^{(1)} = (P_2^t P_3^t \dots P_n^t) \cdot (P_n \dots P_3 P_2)A^{(1)} = A^{(1)}$$

La matriz  $Q^{(1)}$  es ortogonal porque

$$(Q^{(1)})^t Q^{(1)} = (P_2^t P_3^t \dots P_n^t)^t (P_2^t P_3^t \dots P_n^t) = (P_n \dots P_3 P_2) \cdot (P_2^t P_3^t \dots P_n^t) = I$$

En consecuencia  $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$  es una matriz Hessenberg superior, ya que la multiplicación de  $Q^{(1)}$  de la matriz triangular superior  $R^{(1)}$  no influye en los

elementos del triangulo inferior. Lo anterior implica que  $A^{(2)}$  efectivamente es tridiagonal, pues sabemos que es simétrica.

Los elementos situados fuera de la diagonal de  $A^{(2)}$ , generalmente serán mas pequeños que los correspondientes de  $A^{(1)}$ , así que  $A^{(2)}$  se acerca mas a ser una matriz diagonal que  $A^{(1)}$ . El proceso se repite para construir  $A^{(3)}, A^{(4)}, \dots$

Si los valores propios de  $A$  tienen módulos distintos, con  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$  entonces la rapidez de convergencia del elemento  $b_{j+1}^{(i+1)}$  a 0 en la matriz  $A^{(i+1)}$  depende del cociente  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right|$ . La rapidez de convergencia  $b_{j+1}^{(i+1)}$  a 0 determina la razón con la que el elemento  $a_j^{(i+1)}$  converge al  $j$  – ésimo valor propio  $\lambda_j$ . Así, la rapidez de convergencia puede ser lenta si  $\left| \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right|$  esta cerca de la unidad.

Si queremos acelerar esta convergencia, se utiliza un método de desplazamiento semejante al empleado con el Método de la Potencia Inversa. Se selecciona una constante  $s$  cercana a un valor propio de  $A$ , con lo cual se modifica la ecuación 2.10 para escoger  $Q^{(i)}$  y  $R^{(i)}$ , de modo que

$$A^{(i)} - sI = Q^{(i)}R^{(i)} \quad (2.17)$$

y equivalentemente, podemos definir que la matriz  $A^{(i+1)}$  sea

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} + sI \quad (2.18)$$

Con esta modificación, la rapidez de convergencia de  $b_{j+1}^{(i+1)}$  a cero depende de la razón  $\left| \frac{(\lambda_{j+1}-s)}{\lambda_j-s} \right|$ , la cual puede ocasionar una mejor significativa en la rapidez original de convergencia de  $a_j^{(i+1)}$  en  $\lambda_j$  si  $s$  esta cerca de  $\lambda_{j+1}$ , pero no de  $\lambda_j$ .

En el listado del algoritmo  $QR$ , cambiamos  $s$  en cada paso para que, cuando  $A$  tenga los valores propios del modulo definido,  $b_n^{(i+1)}$  converja a cero mas rápido que  $b_j^{(i+1)}$  para cualquier entero  $j$  menor que  $n$  cuando  $b_n^{(i+1)}$  es suficientemente pequeño, suponemos que  $\lambda_n \approx a_n^{(i+1)}$  eliminamos los  $n$  – ésimos renglones y columnas de la matriz y procedemos en la misma forma para obtener una aproximación de  $\lambda_{n-1}$ . El proceso continua hasta determinar una aproximación para cada valor propio.

El algoritmo incorpora el método de desplazamiento  $s_i$ , donde  $s_i$  es el valor propio mas cercano a  $a_n^{(i)}$  de la matriz

$$E^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{n-1}^{(i)} & b_n^{(i)} \\ b_n^{(i)} & a_n^{(i)} \end{bmatrix}$$

Este desplazamiento traduce los valores propios de  $A$  por un factor  $s_i$ . Con esta técnica de desplazamiento, la convergencia suele ser cúbica. El algoritmo acumula estos desplazamientos hasta que  $b_n^{(i+1)} \approx 0$  y luego agrega los desplazamientos  $a_n^{(i+1)}$  para aproximar el valor propio  $\lambda_n$

Si  $A$  tiene los valores propios del mismo modulo,  $b_j^{(i+1)}$  puede tender a cero para alguna  $j \neq n$  con mayor rapidez que  $b_n^{(i+1)}$ .

## ALGORITMO DEL MÉTODO QR

Para obtener los valores propios de la matriz tridiagonal simétrica de  $n \times n$

$$A \equiv A_1 = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ b_2^{(1)} & a_2^{(1)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & b_n^{(1)} & a_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

### ENTRADA

*dimensión de la matriz  $n$ ; matriz  $A$ ; tolerancia  $tol$ ; número máximo de iteraciones  $m$ .*

### SALIDA

*$u$  y  $l$  valores propios de  $A$  o un mensaje de que rebasó el número máximo de iteraciones.*

**Paso 1** Tome  $k = 1$ ;

$$SHIFT = 0 \quad (\text{shift acumulado})$$

**Paso 2** Mientras  $k \leq m$ , haga los pasos 3 – 19

*(Los pasos 3 – 7 prueban el éxito.)*

**Paso 3** Si  $|A(n, n - 1)| \leq tol$ , entonces tome  $l = A(n, n) + SHIFT$ ;

**SALIDA** ( $l$ );

tome  $n = n - 1$ ;

**Paso 4** Si  $|A(n, 1)| \leq tol$ , entonces tome  $l = A(1,1) + SHIFT$ ;

**SALIDA** ( $l$ );

tome  $n = n - 1$ ;

$A(1,1) = A(2,2)$ ;

para  $j = 2, \dots, n$ ;

tome  $A(j, j) = A(j + 1, j + 1)$ ;

$A(j, j - 1) = A(j + 1, j)$ ;

**Paso 5** Si  $n = 0$ , entonces

**PARAR.**

**Paso 6** Si  $n = 1$ , entonces

tome  $l = A(1,1) + SHIFT$ ;

**SALIDA** ( $l$ );

**PARAR.**

**Paso 7** Para  $j = 3, \dots, n - 1$ ;

Si  $|A(j, j - 1)| \leq tol$ , entonces

**SALIDA**  $\left( \begin{array}{l} \text{Dividiendo la matriz } A', \text{ y la} \\ \text{matriz } A = A, SHIFT \end{array} \right)$

**Paso 8** (Calcula shift)

Tome  $b = -((A(n - 1, n - 1) + (A(n, n))))$ ;

$p = (A(n, n) * (A(n - 1, n - 1) - (A(n, n - 1))^2)$ ;

$t = (b^2 - 4 * p)^{1/2}$ ;

**Paso 9** Si  $b > 0$ , entonces tome  $u1 = \frac{-2*p}{(b+t)}$  ;

$$u2 = \frac{-(b+t)}{2}$$

$$\text{si no, tome } u1 = \frac{(t-b)}{2}$$

$$u2 = \frac{2*p}{(t-b)}$$

**Paso 10** Si  $n = 2$ , entonces tome  $l1 = u1 + SHIFT$ ;

$l2 = u2 + SHIFT$ ;

**SALIDA** ( $l1, l2$ );

**PARAR.**

**Paso 11** Elija  $v$  tal que  $|(v - A(n, n))| = \min \{|(u_1 - A(n, n))|, |(u_2 - A(n, n))|\}$ ;

**Paso 12** (*shift acumulado*)

$$\text{Tome } SHIFT = SHIFT + v$$

**Paso 13** (*shift realizado*)

$$\text{Para } j = 1, \dots, n; \text{ tome } d_j = A(j, j) - v$$

**Paso 14** Pasos 14 y 15 calculan  $R^k$

$$x_1 = d_1;$$

$$y_1 = A(2, 1);$$

**Paso 15** Para  $j = 2, \dots, n$

$$\text{Tome } z(j-1) = ((x(j-1))^2 + (A(j, j-1))^2)^{1/2};$$

$$c(j) = x(j-1)/z(j-1);$$

$$s(j) = A(j, j-1)/z(j-1);$$

$$q(j-1) = c(j) * y(j-1) + s(j) * d(j);$$

$$x(j) = -s(j) * y(j-1) + c(j) * d(j);$$

$$\text{Si } j \neq n, \text{ entonces tome } r(j-1) = s(j) * A(j+1, j);$$

$$y(j) = c(j) * A(j+1, j)$$

$$(A(j, 1) = P(j) * A(j-1, 1)) \text{ apenas se ha calculado } R^{(k)} = A(n, 1)$$

**Paso 16** (*Paso 16 – 18 calculan  $A^{k+1}$* )

$$\text{Tome } z(n) = x(n);$$

$$A(1, 1) = s(2) * q(1) + c(2) * z(1);$$

$$A(2, 1) = s(2) * z(2)$$

**Paso 17** Para  $j = 2, 3, \dots, n-1$

$$\text{Tome } A(j, j) = s(j+1) * q(j) + c(j) * c(j+1) * z(j);$$

$$A(j+1, j) = s(j+1) * z(j+1)$$

**Paso 18** Tome  $A(n, n) = c(n) * z(n)$ ;

**Paso 19** Tome  $k = k + 1$ ;

**Paso 20 SALIDA** ('Número máximo de iteraciones excedido');

('Procedimiento terminado exitosamente')

**PARAR.**

En el Anexo No. 6, se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo del Método *QR*.

El Método *QR* puede aplicarse en forma tal que produzca los vectores propios de una matriz y también sus valores propios; en cambio, el algoritmo no fue diseñado para hacer eso. Si además de los valores propios se necesitan los vectores propios de una matriz simétrica, es preferible utilizar el método de las potencias inversas, o bien, aplicar una técnica mas potente.

### **Ejemplo**

Aplique dos iteraciones del algoritmo *QR* a la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### **Solución:**

Para nuestra primera iteración hagamos  $k = 1$  y  $SHIFT = 0$

Ahora calculemos  $b, p, t$

$$b = -(A(2,2) + A(3,3))$$

$$b = -4$$

$$p = A(3,3) * A(2,2) - [A(3,2)]^2$$

$$p = 3$$

$$t = [b^2 - 4 * p]^{1/2}$$

$$t = 2$$

Como  $b < 0$  entonces

$$u(1) = \frac{t - b}{2}$$

$$u(1) = 3$$

$$u(2) = 2 * p / (t - b)$$

$$u(2) = 1$$

Elijamos  $v$  tal que  $|v - A(3,3)| = \min\{|(u_1 - A(3,3))|, |(u_2 - A(3,3))|\}$

Entonces  $v = 3$  o  $v = 1$

$$SHIFT = SHIFT + v$$

$$SHIFT = 0 + 3$$

$$SHIFT = 3$$

Para  $j = 1, 2, 3$  calculemos  $d(1)$ ,  $d(2)$ ,  $d(3)$

$$d(1) = A(1,1) - v$$

$$d(1) = 2 - 3$$

$$d(1) = -1$$

$$d(2) = A(2,2) - v$$

$$d(2) = -1$$

$$d(3) = A(3,3) - v$$

$$d(3) = -1$$

Ahora tomemos

$$x(1) = d(1)$$

$$x(1) = -1$$

$$y(1) = A(2,1)$$

$$y(1) = -1$$

Para  $j = 2$  calculemos  $z(1)$ ,  $c(2)$ ,  $s(2)$ ,  $q(1)$  y  $x(2)$

$$z(1) = [(x(1))^2 + (A(2,1))^2]^{1/2}$$

$$z(1) = 1.4142$$

$$c(2) = x(1)/z(1)$$

$$c(2) = -0.7071$$

$$s(2) = A(2,1)/z(1)$$

$$s(2) = -0.7071$$

$$q(1) = c(2) * y(1) + s(2) * d(2)$$

$$q(1) = 1.4142$$

$$x(2) = -s(2) * y(1) + c(2) * d(2)$$

$$x(2) = 0$$

Como  $2 \neq 3$  entonces tomemos

$$r(1) = s(2) * A(3,3)$$

$$r(1) = 0.7071$$

$$y(2) = c(2) * A(3,3)$$

$$y(2) = 0.7071$$

Continuando para  $j = 3$  calculemos

$$z(2) = [x(2)^2 + (A(3,2))^2]^{1/2}$$

$$z(2) = 1.0000$$

$$c(3) = x(2)/z(2)$$

$$c(3) = 0$$

$$s(3) = A(3,2)/z(2)$$

$$s(3) = -1.0000$$

$$q(2) = c(3) * y(2) + s(3) * d(3)$$

$$q(2) = 1.0000$$

$$x(3) = -s(3) * y(2) + c(3) * d(3)$$

$$x(3) = 0.7071$$

Ahora tomemos

$$z(3) = x(3)$$

$$z(3) = 0.7071$$

Resolvamos  $A(1,2) = s(2) * q(1) + c(2) * z(1)$

$$A(1,2) = (-0.7071) * (1.4142) + (-0.7071) * (1.4142)$$

$$A(1,2) = -1 - 1$$

$$A(1,2) = -2$$

$$y(2,2) = s(2) * z(2)$$

$$b(2,2) = (-0.7071) * 1$$

$$b(2,2) = -0.7071$$

Para  $j = 2$  tenemos que

$$A(2,2) = s(3) * q(2) + c(2) * c(3) * z(2)$$

$$A(2,2) = (-1) * (1) + (-0.7071) * (0) * (1)$$

$$A(2,2) = -1$$

$$b(3,2) = s(3) * z(3)$$

$$b(3,2) = (-1) * (0.7071)$$

$$b(3,2) = -0.7071$$

Tomemos

$$A(3,2) = c(3) * z(3)$$

$$A(3,2) = (0) * (0.7071)$$

$$A(3,2) = 0$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -0.7071 & 0 \\ -0.7071 & -1 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix}$$

Para nuestra segunda iteración hagamos  $k = 2$  y  $SHIFT = 3$

Calculemos el valor de  $b, p, t$

$$b = -(A(2,2) + A(3,3))$$

$$b = 1$$

$$p = A(3,3) * A(2,2) - [A(3,2)]^2$$

$$p = -0.5$$

$$t = [b^2 - 4 * p]^{1/2}$$

$$t = 1.7321$$

Como  $b > 0$  entonces

$$u(1) = -1 * p / (b - t)$$

$$u(1) = 0.3660$$

$$u(2) = (b - t) / 2$$

$$u(2) = -1.3661$$

Elijamos  $v$  tal que  $|v - A(3,3)| = \min\{|(u_1 - A(3,3))|, |(u_2 - A(3,3))|\}$

$$|v - 0| = \min\{|0.3660 - 0|, |-1.3661 - 0|\}$$

Entonces  $v = 0.3660$  o  $v = -0.3660$

Para este caso tomaremos  $v = 0.3660$

Tomemos  $SHIFT = SHIFT + v$

$$SHIFT = 3 + 0.3660$$

$$SHIFT = 3.3660$$

Para  $j = 1, 2, 3$  calculemos  $d(1), d(2), d(3)$

$$d(2) = A(2,2) - v$$

$$d(2) = -1.3660$$

$$d(3) = A(3,3) - v$$

$$d(3) = -0.3660$$

Tomemos  $x(1) = d(1)$

$$x(1) = -2.3660$$

$$y(1) = A(2,1)$$

$$y(1) = -0.7071$$

Para  $j = 2$  calculemos  $z(1), c(2), s(2), q(1)$  y  $x(2)$

$$z(1) = [x(1)^2 + (A(2,1))^2]^{1/2}$$

$$z(1) = 2.4694$$

$$c(2) = x(1)/z(1)$$

$$c(2) = -0.9581$$

$$s(2) = A(2,1)/z(1)$$

$$s(2) = -0.2863$$

$$q(1) = c(2) * y(1) + s(2) * d(2)$$

$$q(1) = 1.0686$$

$$x(2) = -s(2) * y(1) + c(2) * d(2)$$

$$x(2) = 1.1064$$

Como  $2 \neq 3$  entonces encontremos  $r(1)$  y  $y(2)$

$$r(1) = s(2) * A(3,3)$$

$$r(1) = 0.2024$$

$$y(2) = c(2) * A(3,3)$$

$$y(2) = 0.6775$$

Para  $j = 2$  calculemos  $z(2), c(3), s(3), q(2)$  y  $x(3)$

$$z(2) = [x(2)^2 + (A(3,2))^2]^{(1/2)}$$

$$z(2) = 1.3130$$

$$c(3) = x(2)/z(2)$$

$$c(3) = 0.8427s(3) = A(3,2)/z(2)$$

$$s(3) = 0.5385$$

$$q(2) = c(3) * y(2) + s(3) * d(3)$$

$$q(2) = 0.7680$$

$$x(3) = -s(3) * y(2) + c(3) * d(3)$$

$$x(3) = 0.0564$$

Tomemos

$$z(3) = x(3)$$

$$z(3) = 0.0564$$

Calculemos los valores de la matriz próxima.

$$A(1,3) = s(2) * q(1) + c(2) * z(1)$$

$$A(1,3) = (-0.2863) * (1.0686) + (0.9581) * (2.4694)$$

$$A(1,3) = -2.6718$$

$$b(2,3) = s(2) * z(2)$$

$$b(2,3) = (-0.2863) * (1.3130)$$

$$b(2,3) = -0.3759$$

$$A(2,3) = s(3) * q(2) + c(2) * c(3) * z(2)$$

$$A(2,3) = (-0.5385) * (0.7680) + (-0.9581) * (0.8427) * (1.3130)$$

$$A(2,3) = -1.4737$$

$$b(3,3) = s(3) * z(3)$$

$$b(3,3) = (-0.5385) * (0.0564)$$

$$b(3,3) = -0.03036$$

$$A(3,3) = c(3) * z(3)$$

$$A(3,3) = (0.8427) * (0.0564)$$

$$A(3,3) = 0.04753$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.6718 & -0.3759 & 0 \\ -0.3759 & -1.4737 & -0.03036 \\ 0 & -0.03036 & 0.04753 \end{bmatrix}$$

La corrida correspondiente del programa del Método *QR*, se da a continuación:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.6718 & -0.3759 & 0 \\ -0.3759 & -1.4737 & -0.03036 \\ 0 & -0.03036 & 0.04753 \end{bmatrix}$$

El valor propio es

$$l = 0.585786$$

$$l_1 = 3.414214$$

$$l_2 = 2.000000$$

## 2.8 MÉTODO DE JACOBI

Este método es un algoritmo para calcular todas las parejas de valores propios y vectores propios de una matriz simétrica que es muy fácil de entender. Es un método fiable que proporciona respuestas uniformemente precisas y que para matrices de orden menor o igual que 10 es competitivo frente a otros métodos más sofisticados; también es aceptable para matrices de orden menor o igual que 20, si la velocidad de convergencia no es una cuestión muy relevante.

Este método funciona para todas las matrices simétricas reales; esta limitación no es muy severa ya que, en la práctica, hay un gran número de problemas en la ingeniería y en la matemática aplicada que involucran el cálculo de los valores propios de una matriz simétrica. Desde un punto de vista teórico, el Método de

Jacobi incorpora algunas técnicas que se utilizan en algoritmos más sofisticados.

### Rotaciones Planas

Empecemos con una revisión geométrica sobre los cambios de coordenadas. Sea  $X$  un vector en el espacio  $n$  – dimensional y consideremos la aplicación lineal  $Y = RX$ , donde  $R$  es la matriz de orden  $n \times n$  dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\phi & \dots & \sin\phi & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -\sin\phi & \dots & \cos\phi & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } p \\ \leftarrow \text{fila } q \end{matrix}$$

En esta expresión todos los términos de  $R$  que están fuera de la diagonal son cero salvo los dos que valen  $\pm \sin\phi$  y todos los términos de la diagonal son 1 excepto los dos que valen  $\cos\phi$ . El efecto de esta transformación  $Y = RX$  puede verse fácilmente:

$$\begin{aligned} y_j &= x_j && \text{cuando } j \neq p \text{ y } j \neq q \\ y_p &= x_p \cos\phi + x_q \sin\phi \\ x_q &= -x_p \sin\phi + x_q \cos\phi \end{aligned}$$

Esta aplicación lineal también es una rotación de ángulo  $\phi$  en el plano coordenado  $X_p O X_q$ . Eligiendo adecuadamente el ángulo  $\phi$ , podemos conseguir que  $y_p = 0$  o bien  $y_q = 0$  en el vector imagen. La transformación inversa  $X = R^{(1)}Y$  es una rotación de ángulo  $-\phi$  en el mismo plano coordenado  $X_p O X_q$ . Observemos que  $R$  es una matriz ortogonal, o sea,

$$R^{(1)} = R' \quad \text{o bien} \quad R'R = I.$$

### Sucesiones de transformaciones de Jacobi

Empezando con una matriz simétrica  $A$ , construimos una sucesión de matrices ortogonales:  $R_1, R_2, \dots$  de la siguiente manera:

$$D_0 = A$$

$$D_j = R_j' D_{j-1} R_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Construyamos la sucesión  $\{R_j\}$  de manera que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} D_j = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (2.20)$$

Este proceso se define cuando los elementos que están fuera de la diagonal son suficientemente pequeños, de manera que

$$D_k \approx D \quad (2.21)$$

Siendo

$$D_k = R'_k R'_{k-1} \dots R'_1 A R_1 R_2 \dots R_{k-1} R_k \quad (2.22)$$

Si definimos

$$R = R_1 R_2 \dots R_{k-1} R_k \quad (2.23)$$

entonces  $R^{-1}AR = D_k$  así que

$$AR = RD_k \approx R \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (2.24)$$

Si expresamos las columnas de  $R$  como vectores:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  entonces podemos expresar  $R$  como un vector fila de vectores columnas:

$$R = [X_1, X_2, \dots, X_n] \quad (2.25)$$

Esto nos permite escribir la relación (2.24) columna a columna:

$$[AX_1, AX_2, \dots, AX_n] \approx [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n] \quad (2.26)$$

De las relaciones (2.25) y (2.26) se deduce que  $X_j$ , que es la  $j$  – ésima columna de  $R$ , es una aproximación del vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_j$ .

### Descripción del Método de Jacobi

El objetivo en cada paso del Método de Jacobi es reducir a cero dos de los términos simétricos que están fuera de la diagonal, digamos los que ocupan las posiciones  $(p, q)$  y  $(q, p)$ . Denotemos por  $R_1$  la primera matriz ortogonal que vamos a usar, de manera que en la matriz

$$D_1 = R'_1 A R_1 \quad (2.27)$$

Los elementos  $d_{pq}$  y  $d_{qp}$  sean cero, y donde  $R_1$  es de la forma

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila } p \\ \\ \leftarrow \text{fila } q \\ \\ \end{matrix} \quad (2.28)$$

Aquí todos los elementos de  $R_1$  que están fuera de la diagonal son cero excepto: el que vale  $s$  colocado en la fila  $p$ , columna  $q$ , y el que vale  $-s$  colocado en la fila  $q$ , columna  $p$ . Por otro lado, todos los elementos diagonales valen 1 excepto los dos que valen  $c$  en las posiciones  $p$  –ésima y  $q$  –ésima. de la diagonal. Esta matriz es la matriz de una rotación plana, en la que hemos usado la notación  $c = \cos\theta$  y  $s = \sin\theta$ .

Debemos verificar que la transformación (2.27) sólo altera los elementos de las filas y las columnas  $p$  –ésima y  $q$  –ésima. Consideremos la multiplicación de  $A$  por  $R_1$ , o sea, el producto  $B = AR_1$ .

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qp} & \cdots & a_{qq} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Aplicando la regla de multiplicación de matrices, filas de la primera por columnas de la segunda, observamos que no se producen cambios en las columnas primeras a  $(p - 1)$  –ésima,  $(p + 1)$  –ésima,  $(q - 1)$  –ésima y  $(q + 1)$  –ésima y a  $n$  –ésima ; solo se alteran las columnas  $p$  –ésima y  $q$  –ésima:

$$\begin{aligned} b_{jm} &= a_{jm} \quad \text{cuando } m \neq p \text{ y } m \neq q \\ b_{jp} &= ca_{jp} - sa_{jq} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \\ b_{jq} &= sa_{jp} + ca_{jq} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.30)$$

Un argumento parecido prueba que al multiplicar  $R_1'$  por  $A$  solo se alteran las filas  $p$  –ésima y  $q$  –ésima. En consecuencia, la transformación

$$D_1 = R_1'AR_1 \quad (2.31)$$

Solo altera los elementos de las filas y las columnas  $p$  –ésima y  $q$  –ésima. Los elementos  $d_{jk}$  de la matriz  $D_1$  que no son iguales que los correspondientes de  $A$  se calculan mediante las formulas

$$\begin{aligned} d_{jp} &= ca_{jp} - sa_{jq} \quad \text{para } j \neq p \text{ y } j \neq q \\ d_{jq} &= sa_{jp} + ca_{jq} \quad \text{para } j \neq p \text{ y } j \neq q \\ d_{pp} &= c^2a_{pp} + s^2a_{qq} - 2csa_{pq} \\ d_{qq} &= s^2a_{pp} + c^2a_{qq} + 2csa_{pq} \\ d_{pq} &= (c^2 - s^2)a_{pq} + cs(a_{pp} - a_{qq}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

y los demás se hallan por simetría.

### Como hacer $d_{pq}$ y $d_{qp}$ iguales a cero

El objetivo en cada paso del Método de Jacobi es reducir a cero los elementos  $d_{pq}$  y  $d_{qp}$  que están fuera de la diagonal. La estrategia obvia es tomar

$$c = \cos\vartheta \text{ y } s = \sin\vartheta \quad (2.33).$$

Siendo  $\vartheta$  el ángulo de rotación que produce el efecto deseado. Sin embargo para calcular este ángulo hay que realizar algunas manipulaciones ingeniosas con las identidades trigonométricas. Usando (2.33) para calcular la cotangente del ángulo doble obtenemos

$$\vartheta = \cot 2\vartheta = \frac{c^2 - s^2}{2cs} \quad (2.34)$$

Supongamos que  $a_{pq} \neq 0$  y deseamos obtener  $d_{pq} = 0$ . Entonces, usando la última ecuación de (2.32), obtenemos

$$0 = (c^2 - s^2)a_{pq} + cs(a_{pp} - a_{qq}) \quad (2.35)$$

Ordenando un poco los términos nos queda  $\frac{(c^2 - s^2)}{(cs)} = \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{a_{pq}}$  que, junto con (2.34) nos permite calcular  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{2a_{pq}} \quad (2.36)$$

Aunque podemos usar la fórmula (2.36) junto con las fórmulas (2.33) y (2.34) para calcular  $c$  y  $s$ , puede probarse que se propaga menos error de redondeo si calculamos  $\tan\vartheta$  y usamos este valor en cálculos posteriores. Así pues tomamos

$$t = \tan\vartheta = \frac{s}{c} \quad (2.37)$$

Dividiendo el numerador y el denominador de (2.34) entre  $c^2$  obtenemos

$$\vartheta = \frac{1 - s^2/c^2}{2s/c} = \frac{1 - t^2}{2t}$$

que nos da la ecuación

$$t^2 + 2t\vartheta - 1 = 0 \quad (2.38)$$

Puesto que  $t = \tan\vartheta$  la menor de las raíces de la ecuación (2.37) corresponde al menor ángulo de rotación que podemos tomar y que cumple  $|\vartheta| \leq \frac{\pi}{4}$ . La forma especial que tiene la ecuación de segundo grado nos permite trabajar con la siguiente fórmula para hallar la menor de sus raíces

$$t = -\vartheta \pm (\vartheta^2 + 1)^{1/2} = \frac{\text{sign}(\vartheta)}{|\vartheta| + (\vartheta^2 + 1)^{1/2}} \quad (2.39)$$

Siendo  $\text{sign}(\vartheta) = 1$  cuando  $\vartheta \geq 0$  y  $\text{sign}(\vartheta) = -1$  cuando  $\vartheta < 0$ . Una vez hallado  $t$ , los valores  $c$  y  $s$  se calculan usando las fórmulas

$$c = \frac{1}{(t^2 + 1)^{1/2}} \quad \text{y} \quad s = ct \quad (2.40)$$

### Resumen del paso general

Resumimos ahora los cálculos que hay que realizar para hacer cero el elemento  $d_{pq}$ . En primer lugar hay que elegir la fila  $p$  de la columna  $q$  de manera que  $a_{pq} \neq 0$ . En segundo lugar se determinan los valores preliminares

$$\vartheta = \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{2a_{pq}}$$



$$t = \frac{\text{sign}(\vartheta)}{|\vartheta| + (\vartheta^2 + 1)^{1/2}} \quad (2.41)$$

$$c = \frac{1}{(t^2 + 1)^{1/2}}$$

$$s = ct$$

En tercer lugar, para construir  $D = D_1$ , se toman

$$d_{pq} = 0;$$

$$d_{qp} = 0;$$

$$d_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2csa_{pq}$$

$$d_{pp} = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2csa_{pq}$$

for  $j = 1:n$

$$\text{if } j \neq p \text{ y } j \neq q \quad (2.42)$$

$$d_{jp} = ca_{jp} - sa_{jq}$$

$$d_{pj} = d_{jp}$$

$$d_{jq} = sa_{jq} + ca_{jp}$$

$$d_{qj} = d_{jq}$$

$$b_{jm} = a_{jm} \quad \text{cuando } m \neq p \text{ y } m \neq q$$

$$b_{jp} = ca_{jp} - sa_{jq}$$

$$b_{jq} = sa_{jq} + ca_{jp} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

### Actualización de la matriz de los vectores propios

Es necesario también ir calculando el producto  $R_1, R_2, \dots, R_j$  cuando se detenga el algoritmo en la  $k$  – ésima iteración, entonces tendremos la matriz ortogonal

$$V_k = R_1, R_2, \dots, R_k \quad (2.43)$$

Para ir calculando estas matrices  $V_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$  empezamos tomando como matriz inicial  $V = I$ . Usando unas variables vectoriales  $P$  y  $Q$  para almacenar las columnas  $p$  – ésima y  $q$  – ésima de  $V$ , respectivamente, entonces en cada paso se realizan las siguientes operaciones:

```

for j = 1:n
    P_j = v_jp;
    Q_j = v_jq;
end
for j = 1:n
    v_jp = cP_j - sQ_j;
    v_jq = sP_j + cQ_j;
end

```

(2.44)

### Estrategia para decidir que $a_{pq}$ se elimina

La velocidad de convergencia del Método de Jacobi se estima mediante la suma de los cuadrados de los elementos que están fuera de la diagonal:

$$S_1 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|^2 \quad (2.45)$$

$$S_2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq j}}^n |d_{jk}|^2, \text{ siendo } D_1 = R'AR \quad (2.46)$$

A continuación se presenta el algoritmo completo para el Método de Jacobi.

### ALGORITMO DEL MÉTODO DE JACOBI.

Para aproximar un conjunto completo de pares de valores y vectores propios de una matriz  $A$  de  $n \times n$ , real y simétrica.

**ENTRADA** *dimensión  $n$ ; matriz  $A$ ; tolerancia  $tol$ .*

**SALIDA**  *$n$  pares de valores y vectores propios.*

**Paso 1** *Inicializar  $V, D$  y el parámetro estado.*

$D = A;$

$V = \text{eye}(n);$

$\text{estado} = 1;$

**Paso 2** Calcular el elemento  $(p, q)$  que tiene mayor magnitud entre los que están fuera de la diagonal.

$$[m1 \ p] = \max \left( \text{abs} \left( D - \text{diag}(\text{diag}(D)) \right) \right);$$

$$[m2 \ q] = \max (m1);$$

$$p = p(q);$$

**Paso 3** Mientras estado = 1 seguir los pasos 4 – 6.

**Paso 4** Determinar  $\vartheta$ ,  $t$ ,  $c$ ,  $s$

$$\vartheta = \frac{D(q,q) - D(p,p)}{2 * D(p,q)};$$

$$t = \frac{\text{sign}(\vartheta)}{(\text{abs}(\vartheta) + \text{sqrt}(\vartheta^2 + 1))};$$

$$c = \frac{1}{\text{sqrt}(t^2 + 1)};$$

$$s = c * t;$$

**Paso 5** Actualización de la matriz de los vectores propios.

$$R = [c \ s; -s \ c];$$

$$D([p \ q], :) = R' * D([p \ q], :);$$

$$D(:, [p \ q]) = D(:, [p \ q]) * R;$$

$$V(:, [p \ q]) = V(:, [p \ q]) * R;$$

$$[m1 \ p] = \max \left( \text{abs} \left( D - \text{diag}(\text{diag}(D)) \right) \right);$$

$$[m2 \ q] = \max (m1);$$

$$p = p(q)$$

**Paso 6** Estrategía para decidir que  $(p, q)$  se elimina.

$$\text{Si } (\text{abs}(D(p, q)) < \text{tol} * \text{sqrt}(\text{sum}(\text{diag}(D).^2)/n))$$

$$\text{estado} = 0.$$

**Paso 7** SALIDA ('valores y vectores propios')

## PARAR.

En el Anexo No. 7 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al Método de Jacobi.

### Ejemplo

Aplice el Método de Jacobi a la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ con una aproximación de } 10^{-2}$$

### Solución:

$$\text{Hagamos } A = D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{estado} = 1$$

Encontremos el valor de  $[m1 \ p]$

$$\begin{aligned} [m1 \ p] &= \max \left| \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = \max \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \max \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$m1 = [1 \ 1 \ 1]$$

$$p = [2 \ 1 \ 2]$$

Ahora prosigamos a calcular  $[m2 \ q]$

$$[m2 \ q] = \max(m1)$$

$$m2 = 1$$

$$q = 1$$

$$p = p(q)$$

$$p = 2(1) = 2$$

Como ya conocemos cuanto vale  $p$  y  $q$  calculemos  $theta$

$$theta = (D(q, q) - D(p, p)) / 2 * D(p, q)$$

$$theta = \frac{(4 - 3)}{2 * (-1)}$$

$$theta = \frac{1}{-2}$$

$$\theta = -0.5000$$

Como  $\theta$  es menor que cero entonces  $\text{sign}(\theta) = -1$  y con este valor encontremos  $t$ , luego  $c$  y  $s$

$$t = \frac{\text{sign}(\theta)}{\text{abs}(\theta) + \sqrt{\theta^2 + 1}}$$

$$t = \frac{-1}{|-0.5000| + \sqrt{(-0.5000)^2 + 1}}$$

$$t = \frac{-1}{1.6180}$$

$$t = -0.6180$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{(-0.6180)^2 + 1}}$$

$$c = \frac{1}{1.1756}$$

$$c = 0.8507$$

$$s = c * t$$

$$s = 0.8507 * -0.6180$$

$$s = -0.5257$$

Ahora construyamos la matriz de  $R$  sustituyendo los valores de  $c$  y  $s$  como se muestra en la ecuación siguiente.

$$R = [c \quad s; -s \quad c]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.8507 & -0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

$$D([p \ q], :) = R' * D([p \ q], :)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3.9283 & -2.4278 & 0.5257 \\ 1.2523 & 2.0262 & -0.8507 \\ 0 & -1.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$D(:, [p \ q]) = D(:, [p \ q]) * R$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.6180 & 0 & 0.5257 \\ -0.0000 & 2.3820 & -0.8507 \\ 0.5257 & -0.8507 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$V(:, [p \ q]) = V(:, [p \ q]) * R$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.8507 & 0.5257 & 0 \\ -0.5257 & 0.8507 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$[m1 \ p] = \max(\text{abs}(D - \text{diag}(\text{diag}(D))))$$

$$m1 = 0.8507$$

$$p = 3$$

$$[m2 \ q] = \max(m1)$$

$$m2 = 0.8507$$

$$q = 2$$

$$p = p(q)$$

$$p = 3$$

$$\text{Si } (\text{abs}(D(p, q)) < 0.01 * \text{sqrt}(\text{sum}(\text{diag}(D).^2)/3)$$

$$\text{estado} = 0$$

$$D = \text{diag}(\text{diag}(D))$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.1680 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3820 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Con una aproximación de 10

Los valores propios son:

$$l(1) = 4.1680$$

$$l(2) = 2.3820$$

$$l(3) = 2.0000$$

Los vectores propios son:

$$v(1) = (0.8507 \ 0.5257 \ 0)$$

$$v(2) = (-0.5257 \ 0.8507 \ 0)$$

$$v(3) = (0 \ 0 \ 1)$$

La corrida correspondiente del programa del Método de Jacobi, se da a continuación con una tolerancia de  $10^{-2}$ .

Los valores propios son

$$l(1) = 4.732048$$

$$l(2) = 2.999996$$

$$l(3) = 1.267956$$

Los vectores propios son

$$v(1) = (0.789401 \ -0.576443 \ 0.211093)$$

$$v(2) = (0.576107 \ 0.576896 \ -0.579044)$$

$$v(3) = (0.212007 \ 0.578710 \ 0.787495)$$

## CAPITULO 3: APLICACIONES

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este capítulo es el hacer uso de los diferentes Métodos de Aproximación de valores y vectores propios de una matriz Cuadrada estudiados en el Capítulo dos, en la solución de problemas aplicados en la Matemática, Física, Ingeniería, Estadística y otras ciencias. A continuación se trataran seis casos.

### 3.2 CASO 1: CADENAS DE MARKOV

Se denomina cadena finita de Markov a un proceso estocástico consistente en una sucesión de pruebas cuyos resultados  $X_1, X_2, \dots$  satisfacen las dos propiedades siguientes:

1. Cada resultado pertenece a un conjunto finito de estados  $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_m\}$  llamado espacio de estados del sistema; si el resultado de la  $n - \text{ésima}$  prueba es  $S_i$  decimos que el sistema está en el estado  $S_i$  en la vez  $n$  o en el paso  $n - \text{ésimo}$ .
2. El resultado de una prueba depende sólo del resultado de la prueba inmediatamente precedente y no de cualquier otro resultado previo; con cada par de estados  $(S_i, S_j)$  se establece la probabilidad  $p_{ij}$  de que  $S_j$  suceda inmediatamente después de que suceda  $S_i$ . Los números  $p_{ij}$  llamados probabilidades de transición pueden ordenarse en una matriz:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

llamada matriz de transición, que se considera que permanece igual a través del tiempo.

El vector de probabilidad que representa la situación inicial se denomina vector de estado inicial:  $p_0$ . Si se multiplica por la matriz  $P$  se obtiene el vector  $p_1$  que representa la situación en el momento o paso 1. Al multiplicar nuevamente por la matriz  $P$  se obtiene el vector  $p_2$  que refleja la situación en el momento o paso 2 y así sucesivamente. Como:

$p_1 = p_0P, p_2P = p_1P = p_0PP = p_0P^2, p_3 = p_2P = p_0P^2P = p_0P^3$  es  $p_n = p_0P^n$  de modo que se puede obtener el vector de estado en un momento o paso cualquiera  $n$  multiplicando el vector de estado inicial por la potencia  $n$  –ésima de la matriz  $P$ .

Si existe un vector estacionario, o vector de tendencia, es decir, que se mantenga en el tiempo, debe cumplir la condición:  $tP = t$ . Este vector es independiente del vector de estado inicial  $p_0$ . La matriz estacionaria surge como  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  siendo cada una de sus filas el vector estacionario  $t$ .

Recordemos que las matrices positivas (las que tienen todos sus elementos positivos). Estas matrices según el **Teorema de Perrón**, poseen un valor propio real positivo, cuyo módulo es mayor que el módulo de los otros, que pueden ser

reales o complejos y este valor propio dominante  $\lambda$  es único. Además, el vector propio asociado, formado por elementos positivos y normalizados es único.

Una matriz es recíproca si  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  es

$$m_{ii} = 1; m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}; m_{ij} \in \mathbb{R}_0^+ \quad (a)$$



Una matriz es consistente o coherente si  $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$m_{ij} \cdot m_{jk} = m_{ik} \quad (b)$$

de donde es recíproca y coherente la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_1}{\mu_2} & \frac{\mu_1}{\mu_3} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} & 1 & \frac{\mu_2}{\mu_3} \\ \frac{\mu_3}{\mu_1} & \frac{\mu_3}{\mu_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices tienen una propiedad importante: toda fila (respectivamente toda columna) es igual a cualquier otra fila (respectivamente otra columna) multiplicada por un coeficiente de modo que su rango resulta ser 1. Como se sabe que la traza de una matriz cuadrada es igual a la suma de todos sus valores propios, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(A).$$

En una matriz recíproca y coherente la traza es igual a  $n$  de modo que la suma de sus valores propios debe ser  $n$ . Si el rango es 1 hay una sola raíz distinta de cero y vale  $n$ , que es la raíz maximal.

Ahora bien, cuando el conocimiento del entorno es impreciso, como ocurre con muchas decisiones en un ambiente de incertidumbre, el modelo debe incluir la noción de nivel de presunción, y en lugar de una ley de probabilidad se deben tomar leyes de posibilidad, lo que da lugar a la necesidad de utilizar técnicas operativas distintas, teniendo en cuenta el ambiente incierto en que se desarrollan.

No obstante, existe un gran paralelismo entre la teoría de probabilidades y la de posibilidades. En la primera, el axioma fundamental es la aditividad en la medida, en la segunda el axioma fundamental es la monotonía en la inclusión para toda valuación.

El encadenamiento markoviano se realiza a través de operadores asociados suma-producto, mientras que en la incertidumbre se lleva a cabo mediante operadores asociados máximo-mínimo.

Consideremos un referencial finito  $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  y un subconjunto borroso del referencial  $\tilde{w} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$ .

A partir de  $\tilde{w}$  construimos la matriz recíproca y coherente  $M$  para la cual se da que

$$M * \tilde{w} = n\tilde{w}^t$$

donde  $n$  es el orden de la matriz  $M$ .

Ahora bien, si  $\lambda_1$  es el valor propio de una matriz cuadrada recíproca (no coherente) de orden  $n$  podemos definir un indicador de coherencia tal que

$$I_c = \frac{\lambda}{n}$$

- Si el  $\lambda_1$  está próximo a  $n$  se puede admitir que la matriz es casi coherente.

- Si  $\lambda_1$  está muy alejado de  $n$  se deberán reajustar los elementos de la matriz.
- Si la matriz recíproca es coherente resulta ser  $M[\mu_i]^T = n[\mu_i]^T$

- Si la matriz recíproca no es coherente se tendrá que  $M[\mu'_i]^T = \lambda_1[\mu'_i]^T$ . Entonces se aceptará  $\mu'_i$  si el indicador de coherencia definido  $I_c$  es suficientemente pequeño.

Luego se normalizará  $[\mu'_i]$  en el sentido que se da a esta palabra en la teoría de los conjuntos borrosos, es decir:

$$\mu_i'' = \frac{\mu'_i}{\text{MAX}_i \mu'_i} \quad (c)$$

o bien, si se quiere obtener una ponderación (semejante a probabilidad):

$$\mu_i''' = \frac{\mu'_i}{\sum_{i=1}^n \mu'_i} \quad (d)$$

### **Ejemplo: Selección de un candidato a presidente**

Se trata de la selección de un candidato a Presidente. Consideraremos para ello tres criterios relevantes para evaluar las políticas de elección:

- 1) sentido de la Ética,
- 2) carrera política,
- 3) estudios académicos.

Se hace notar que para las valuaciones (no medidas) se ha utilizado el operador comparación válido en el ámbito de la subjetividad.

Para estos criterios construiremos una matriz recíproca estableciendo la siguiente valuación, que surge de la consulta a 15 expertos:

- el criterio (1) vale 4 veces el criterio (2)
- el criterio (1) vale 3 veces el criterio (3)

Teniendo en cuenta las propiedades indicadas en (a) resulta:

$$\begin{array}{c}
 (1) \quad (2) \quad (3) \\
 (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1/4 & 1 & 4/3 \\ 1/3 & 3/4 & 1 \end{bmatrix} \\
 (2) \\
 (3)
 \end{array}$$

Esta matriz es recíproca. Calculemos el valor y vector propio correspondiente a esta Matriz con una aproximación inicial  $[1 \ 1 \ 1]'$

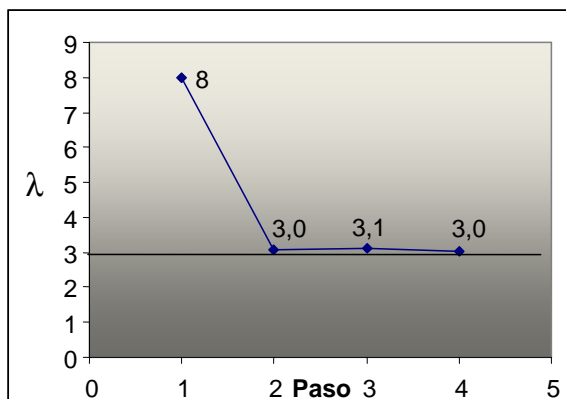
### Solución:

A continuación se presenta la solución correspondiente a la matriz anterior con una aproximación de  $10^{-2}$ , esta solución la encontramos aplicando el Programa en MATLAB del Método de La Potencia, aquí determinamos el valor propio mas dominante y su vector propio asociado.

<i>k</i>	<i>vector x</i>	<i>u</i>	<i>error</i>
1 (1.000000,	0.322917, 0.260417)	8.000000	0.739583
2 (1.000000,	0.299435, 0.272034)	3.072917	0.023482
3 (1.000000,	0.302653, 0.275377)	3.013842	0.003343
4 (1.000000,	0.302898, 0.275196)	3.036742	0.000245

El valor propio es  $u = 3.036742$

El vector propio es  $x = (1.000000, 0.302898, 0.275196)$



Con esta corrida se observa la estabilización del vector propio para un

$\lambda_1 = 3.03$  (Valor propio dominante) y el vector propio  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.30 \\ 0.275 \end{bmatrix}$  con un error de 0.000245.

### 3.3 Caso 2: SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Forma matricial de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

Si  $X, A(t)$  y  $F(t)$  denotan, respectivamente, las matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

puede ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o simplemente,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t) \tag{3.2}$$

si el sistema es homogéneo (3.2) se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3.3}$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.3) también se escriben como  $x' = Ax + F$  y  $x' = Ax$  respectivamente.

La solución general del sistema homogéneo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 3y\end{aligned}$$

es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Puesto que ambos vectores tienen la forma básica

$$X_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i(t)} \quad i = 1, 2, \dots$$

$k_1$  y  $k_2$  son constantes, esto nos induce a preguntar si siempre es posible encontrar una solución de la forma

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda_i(t)} = k e^{\lambda(t)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Para el sistema lineal homogéneo de primer orden dado en la forma general

$$x' = Ax \quad (3.5)$$

donde  $A$  es una matriz de constantes de  $n \times n$ .

### Teorema 3.1

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$   $n$  valores propios reales distintos de la matriz  $A$  de los coeficientes del sistema lineal homogéneo (3.5) y sean  $k_1, k_2, \dots, k_n$  los correspondientes vectores propios. Entonces la solución general de (3.5) en el intervalo  $-\infty < t < \infty$  está dada por  $X = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n k_n e^{\lambda_n t}$

Sea el sistema lineal homogéneo  $x'(t) = A(t)x(t)$  siendo la matriz cuadrada  $A(t)$  de orden  $n$  se tiene que siempre existe la solución trivial  $x(t) = 0$ .



Consideremos a  $\Phi(t)$ , una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo, la solución general del sistema lineal homogéneo es  $x(t) = \Phi(t)k$ , donde  $k$  es una matriz columna de constantes reales arbitraria.

Si la matriz  $A$  tiene  $n$  valores propios distintos, entonces tiene  $n$  vectores propios independientes. En ese caso, la solución general del correspondiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales puede escribirse como una combinación lineal:

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n$$

### Ejemplo

El sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

Puede escribirse de forma matricial como

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = AX(t)$$

Compruebe que  $(2, [1 \ 1]')$  y  $(3, [1 \ 2]')$  son parejas de valor propio- vector propio de la matriz  $A$ .

### Solución:

A continuación se presenta la solución correspondiente a la matriz anterior con una aproximación de  $10^{-2}$ , esta solución la encontramos aplicando el programa en MATLAB del Método de la Potencia Simétrica descrito en el Anexo No 3, aquí probamos que 2 y 3 son parejas de valores y vectores propios dada una aproximación inicial.

Potenciasimetrica

Introduzca la dimension de la matriz  $n$ : 2

Introduzca la matriz  $A$ : [1 1; -2 4]

Introduzca el vector  $x$ : [1 1]'

Introduzca la tolerancia  $tol$ : 0.001

Introduzca el número máximo de iteraciones  $m$ : 20

**$k$**       **vector  $x$**        **$u$**       **error**

1 (0.707107, 0.707107) 2.000000 0.000000

El valor propio es  $u = 2.000000$

El vector propio es  $x = (0.707107, 0.707107)$

Potenciasimetrica

Introduzca la dimension de la matriz  $n$ : 2

Introduzca la matriz  $A$ : [1 1; -2 4]

Introduzca el vector  $x$ : [1 2]'

Introduzca la tolerancia  $tol$ : 0.001

Introduzca el número máximo de iteraciones  $m$ : 20

$k$	$vector\ x$	$u$	$error$
1	(0.447214, 0.894427)	3.000000	0.000000

El valor propio es  $u = 3.000000$

El vector propio es  $x = (0.447214, 0.894427)$

### 3.4 CASO 3: POBLACIÓN DE ESPECIES

#### Ejemplo

Supongamos que una especie de escarabajos tiene vida media de 4 años, que una hembra en su primer año tiene una razón de supervivencia de  $\frac{1}{2}$ , en el segundo año una razón de supervivencia de  $\frac{1}{4}$ , en su tercer año una razón de supervivencia de  $\frac{1}{8}$ . Supongamos además que 1 hembra procrea, en promedio, 2 hembras nuevas en el tercer año y 4 hembras nuevas en el cuarto año. La matriz que describe la contribución de 1 hembra en un año a la población hembra en el año siguiente es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde, como antes, el elemento en el  $i$ -ésimo renglón y en la  $j$ -ésima columna denota la contribución probabilística que hace una hembra de edad  $j$  en la población hembra  $i$  en el próximo año.

- Use el Método de la Potencia para determinar el valor propio dominante de esta matriz y su vector propio asociado con una aproximación inicial de  $[1\ 1\ 1\ 1]'$

**Solucion:**

A continuación se presenta la solución correspondiente a la matriz anterior con una aproximación de  $10^{-2}$ , esta solución la encontramos aplicando el programa en MATLAB del Método de La Potencia, aquí determinamos el valor propio mas dominante y su vector propio asociado.

<i>k</i>	<i>vector x</i>			<i>u</i>	<i>error</i>
1 (1.000000,	0.083333,	0.041667,	0.020833)	6.000000	0.979167
2 (0.333333,	1.000000,	0.041667,	0.010417)	0.166667	0.916667
3 (0.500000,	0.666667,	1.000000,	0.020833)	0.166667	0.958333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
41 (1.000000,	0.726325,	0.259882,	0.045823)	0.688398	0.010716
42 (1.000000,	0.711183,	0.258275,	0.046206)	0.703054	0.015142
43 (1.000000,	0.712887,	0.253497,	0.046030)	0.701373	0.004778

El valor propio es  $l = 0.701373$

El vector propio es  $x = (1.000000, 0.712887, 0.253497, 0.046030)$

### 3.5 CASO 4: SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES ESTABLES

Un sistema dinámico es un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en un tiempo, el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes.

En cuanto a la elaboración de los modelos, los elementos y sus relaciones, se debe tener en cuenta:

1. Un sistema está formado por un conjunto de elementos en interacción.
2. El comportamiento del sistema se puede mostrar a través de diagramas causales.

3. Hay varios tipos de variables: variables exógenas (son aquellas que afectan al sistema sin que éste las provoque) y las variables endógenas (afectan al sistema pero éste sí las provoca).

Un sistema dinámico lineal también puede representarse por las ecuaciones:  $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$   $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$  ...donde  $A$  es una matriz variable de  $n \times n$ ,  $B$  es una matriz variable de  $n \times r$ ,  $C$  es una matriz variable de  $m \times n$ ,  $D$  es una matriz variable de  $m \times r$ ,  $x$  es un vector variable  $n$  - dimensional,  $y$  es un vector variable  $m$  - dimensional y  $u$  es un vector variable  $r$  - dimensional. Para que el sistema sea estable todos los valores propios de la matriz  $A$  deben tener una parte real no positiva para toda  $t$ .

### Ejemplo:

Consideremos un sistema dinámico lineal donde  $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  ¿Es el sistema estable?

### Solución:

A continuación se presenta la solución correspondiente a la matriz anterior con una aproximación de  $10^{-2}$ , esta solución la encontramos aplicando el Programa en MATLAB del Método de La Potencia Inversa.

Potencia inversa

Introduzca la dimension de la matriz  $n$ : 3

Introduzca la matriz  $A$ : [-1 2 0; -2.5 -7 4; 0 0 -5]

Introduzca el vector  $x$ : [1 0 0]'

Introduzca la tolerancia  $tol$ : 0.01

Introduzca el número máximo de iteraciones  $m$ : 50

$k$	$vector\ x$	$u$	$error$
1 (1.000000,	-0.416667,	0.000000)	-1.833333 0.416667
2 (1.000000,	-0.483871,	0.000000)	-1.967742 0.067204
3 (1.000000,	-0.496795,	0.000000)	-1.993590 0.012924
4 (1.000000,	-0.499360,	0.000000)	-1.998720 0.002565

El valor propio dominante es -1.998720

El vector propio asociado es  $x = (1.000000, -0.499360, 0.000000)$

### 3.6 CASO 5: VIBRACIONES LONGITUDINALES DE UNA BARRA ELÁSTICA

Las vibraciones longitudinales de una barra elástica de rigidez  $p(x)$  y densidad  $\rho(x)$  local se describen mediante la ecuación diferencial parcial

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right]$$

donde  $v(x, t)$  es el desplazamiento promedio longitudinal de una sección de la barra, desde su posición de equilibrio  $x$  en el tiempo  $t$ . Podemos escribir las vibraciones como una suma de vibraciones armónicas simples:

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} (t - t_0)$$

donde

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du_k}{dx}(x) \right] + \lambda_k \rho(x) u_k(x) = 0$$

Si la barra tiene una longitud  $l$  y está fija en sus extremos, entonces esta ecuación diferencial es válida para  $0 < x < l$  y  $v(0) = v(l) = 0$ . Un sistema con estas ecuaciones diferenciales se denomina sistema de Sturm-Liouville, y los números  $\lambda_k$  son valores propios con las correspondientes funciones propias  $u_k(x)$ .

Supongamos que la barra tiene 1 m de longitud, una rigidez uniforme  $p(x) = p$  y una densidad también uniforme  $\rho(x) = \rho$ . Para aproximar  $u$  y  $\lambda$ , sea  $h = 0.2$ , entonces  $x_j = 0.2j$ , para  $0 \leq j \leq 5$ , y podemos aplicar la siguiente fórmula de diferencia centrada  $f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi_1)$  para aproximar las primeras derivadas. Estos nos dan el sistema lineal

$$Aw = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04 \frac{\rho}{p} \lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = -0.04 \frac{\rho}{p} \lambda w$$

Calcular los cuatro valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

con una exactitud de  $10^{-5}$  aplicando el algoritmo  $QR$ .

**Solución:**

A continuación se presentan los 4 valores propios correspondientes a la matriz anterior con una exactitud de  $10^{-5}$ , estos valores los encontramos aplicando el programa en MATLAB del Método  $QR$

El valor propio es  $l = 1.381966$

El valor propio es  $l = 0.381966$

El valor propio es  $l_1 = 3.618034$

El valor propio es  $l_2 = 2.618034$

**3.7 CASO 6: Crecimiento de una población aplicando el modelo Matricial de Leslie.**

El modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población, humana o animal, clasificando a las hembras por edades en clases o intervalos de igual número de años. Suponga que la edad máxima alcanzada por una hembra cualquiera de la población es  $L$  años y que la población se divide en  $n$  clases de edades. Con la siguiente tabla se identifican la clase y los intervalos correspondientes.

<i>Clase de edades</i>	<i>Intervalo de edades</i>
1	$[0, L/n]$
2	$[L/n, 2L/n]$
3	$[2L/n, 3L/n]$
$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$[(n - 2)L/n, (n - 1)L/n]$
$n$	$[(n - 1)L/n, L]$

Construyamos el vector inicial de edades de la siguiente manera

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

A medida que transcurre el tiempo y debido a los procesos biológicos (nacimiento, envejecimiento y muerte), cambia el número de hembras que hay en cada una de las  $n$  clases.

La forma más fácil de estudiar el proceso de envejecimiento consiste en hacer observaciones discretas de la población en tiempos discretos  $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Este modelo requiere que la duración entre dos tiempos sucesivos de observación sea igual a la duración de los intervalos de edad.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= L/n \\ t_2 &= 2L/n \\ &\vdots \\ t_k &= kL/n \\ &\vdots \end{aligned}$$

La matriz de Leslie es la siguiente:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Lx^{(0)} \\ x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L^kx^{(0)} \end{aligned}$$

Así si la distribución inicial de las edades,  $x^{(0)}$ , y la matriz de Leslie,  $L$  son conocidas, se puede determinar de la distribución de las edades de las hembras en cualquier tiempo futuro.

### Comportamiento en el Límite.

Los valores propios de  $L$  son las raíces del polinomio propio correspondiente.

El polinomio propio es  $p(\lambda) = |\lambda I - L|$

$$q(\lambda) = 1 \text{ para } \lambda \neq 0$$

Como ningún valor de  $a_i$  o  $b_i$  es negativo,  $q(\lambda)$  decrece en forma monótona para los valores de  $\lambda$  mayores que cero. Además,  $q(\lambda)$  tiene una asíntota vertical en  $\lambda = 0$  y tiende a cero cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Una matriz de Leslie tiene un valor positivo único. Además  $\lambda_1$  es simple y tiene multiplicidad uno.

$$Lx_1 = \lambda_1 x_1 \quad \text{es} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ b_1 b_2 b_3/\lambda_1^3 \\ b_1 b_2 b_3/\lambda_1^3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

### Teorema 3.2

Una matriz de Leslie  $L$ , tiene un valor positivo único  $\lambda_1$ . Este valor propio es simple y tiene un vector  $x_1$  cuyas entradas son positivas.

### Teorema 3.3

Si  $\lambda_1$  es el valor único positivo de una matriz de Leslie  $L$  y si  $\lambda_i$  es cualquier otro valor propio real o complejo de  $L$ , entonces,  $|\lambda_i| \leq \lambda_1$ .

### Teorema 3.4

Si dos entradas sucesivas  $a_i$  y  $a_{i+1}$ , de la primera fila de una matriz de Leslie  $L$ , son diferentes de cero, el valor positivo de  $L$  es estrictamente dominante.

Se presentan tres casos que dependen del valor positivo  $\lambda_1$ :

(i) La población finalmente crece si  $\lambda_1 > 1$ . Esta determina una población de crecimiento cero.

(ii) La población finalmente decrece si  $\lambda_1 < 1$

(iii) La población se estabiliza si  $\lambda_1 = 1$



$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}$  es la tasa neta de reproducción de la población.

### Ejemplo 1

Suponga que una población animal es dividida en dos clases de edades y que su matriz de Leslie es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Calcular los valores propios y los vectores propios correspondientes a la matriz anterior.

#### Solución:

La solución se realizó con una tolerancia de 0.5 usando el programa en MATLAB del Método de Jacobi.

Los valores propios son:

$$l(1) = 1.617437$$

$$l(2) = -0.617437$$

Los vectores propios son:

$$v(1) = (0.859126 \ 0.511765)$$

$$v(2) = (-0.511765 \ 0.859126)$$

## CONCLUSIONES

- ❖ La solución de un número considerable de problemas de Mecánica, Física, Química y otras ciencias requieren obtener uno o todos los valores propios de ciertas matrices, y a veces también los vectores propios asociados.
- ❖ Existen diversas técnicas numéricas que aproximan los valores y vectores propios de una matriz cuadrada de acuerdo a ciertas condiciones iniciales. En este trabajo se analizaron siete métodos de aproximación de valores y vectores propios de una matriz cuadrada.
- ❖ Se puede utilizar el Método de la Potencia para calcular el valor propio dominante y el vector propio asociado de una matriz cuadrada arbitraria  $A$ . Si la matriz  $A$  es simétrica el Método de la Potencia Simétrica da una convergencia más rápida al valor propio dominante y el vector propio asociado.
- ❖ El Método de la Potencia Inversa permite obtener el valor propio más cercano a determinado valor y un vector propio asociado de una matriz cuadrada arbitraria.
- ❖ El Método de Deflación de Wielandt produce el segundo valor propio más dominante de una matriz cuadrada arbitraria, una vez conocido el valor propio dominante. Este método es vulnerable a errores de redondeo y se aplica sólo si se requiere varios valores propios. Para mejorar la precisión de los valores propios aproximados obtenidos con el Método de Deflación de Wielandt puede emplearse el Método de la Potencia Inversa.
- ❖ El Método de Householder sirve para convertir una matriz simétrica en una matriz similar tridiagonal. El Método  $QR$  se aplica a esta matriz tridiagonal para obtener aproximaciones a los valores propios. Los vectores propios asociados pueden calcularse mediante el Método de la Potencia Inversa aplicado a los valores propios obtenidos con el Método  $QR$ .
- ❖ El Método de Jacobi calcula todos los pares de valores propios y vectores propios asociados de una matriz simétrica real. Es un método fiable que proporciona respuestas uniformemente precisas.

ANEXOS

## ANEXO No. 1 PROGRAMA DEL MÉTODO DE LA POTENCIA

%Programa que aproxima el valor propio dominante y el %vector propio asociado de la matriz A de n x n con un %vector x distinto de cero mediante el Método de la %Potencia.

```
function potencia(n,A,x,tol,m)
%Datos
%n dimension
%A la matriz
%x vector inicial
%tol tolerancia
%m número máximo de iteraciones
%Resultados
%u valor propio aproximado
%x vector propio aproximado

n=input('Introduzca la dimension de la matriz n: ');
A=input('Introduzca la matriz A: ');
x=input('Introduzca el vector x: ');
tol=input('Introduzca la tolerancia tol: ');
m=input('Introduzca el número máximo de iteraciones m: ');
k=1;
fprintf('\n k          vector x          u
error ');
nx=norm(x,inf);
for i=1:n
    if(abs(x(i))==nx)
        break;
    end
end
p=i;
x=x/x(p);
while(k<=m)
```

```

y=A*x;
u=y(p);
ny=norm(y,inf);
for i=1:n
    if(abs(y(i))==ny)
        break;
    end
end
p=i;
if(y(p)==0)
    fprintf('\n vector característico x= \n',x);
    fprintf('\n la matriz A tiene el valor propio 0,
seleccione un nuevo vector x y reinicie ');
    return;
end
z=y/y(p);
error=norm(x-z,inf);
x=z;
fprintf('\n %d ',k);
fprintf('(');
    for i=1:n-1
        fprintf('%10f,',x(i));
    end
    fprintf('%10f)',x(n));
    fprintf('%10f %10f \n',u,error);

if(error<tol)
    fprintf('\n El valor propio es u=%f \n',u);
    fprintf('\n El vector propio es x=');
    for i=1:n-1
        fprintf('%10f,',x(i));
    end
    fprintf('%10f)\n',x(n));
    return;
end
k=k+1;
end

fprintf('\n Excedido el número máximo de iteraciones \n');

```

## ANEXO No. 2

### PROGRAMA DEL MÉTODO DE LA POTENCIA SIMETRICA

%Programa que aproxima el valor propio dominante y el %vector propio asociado de la matriz simétrica A de n x n %dado un vector x diferente de cero.

```
function potencia simétrica(n,A,x,tol,m)
%Datos
%n dimension
%A la matriz
%x vector inicial
%tol tolerancia
%m número máximo de iteraciones
%Resultados
%u valor propio aproximado
%x vector propio aproximado

n=input ('Introduzca la dimensión de la matriz n: ');
A=input ('Introduzca la matriz A: ');
x=input ('Introduzca el vector x: ');
tol=input ('Introduzca la tolerancia tol: ');
m=input ('Introduzca el número máximo de iteraciones m: ');
k=1;
nx=norm(x);
x=x/nx;

fprintf('\n k          vector x          u
error ');

while(k<=m)
    y=A*x;
    u=x'*y;
    ny=norm(y);
    if(ny==0)
        fprintf('\n vector característico x= \n',x);
```

```

        fprintf('\n la matriz A tiene el valor propio 0,
seleccione un nuevo vector x y reinicie ');
        return;
    end
    z=y/ny;
    error=norm(x-z);
    x=z;
    fprintf('\n %d ',k);
    fprintf('(');
    for i=1:n-1
        fprintf('%10f,',x(i));
    end
    fprintf('%10f)',x(n));
    fprintf('%10f %10f \n',u,error);

    if(error<tol)
        fprintf('\n El valor propio es u=%f \n',u);
        fprintf('\n El vector propio es x=');
        for i=1:n-1
            fprintf('%10f,',x(i));
        end
        fprintf('%10f)\n',x(n));
        return;
    end
    k=k+1;
end

fprintf('\n Excedido el número máximo de iteraciones \n');

```

### ANEXO No. 3

## PROGRAMA DEL MÉTODO DE LA POTENCIA INVERSA

%Programa que aproxima un valor propio y un vector propio asociado de la matriz A de n x n dado un vector x %diferente de cero.

```
function potenciainversa(n,A,x,tol,m)
%Datos
%n dimension
%A la matriz
%x vector inicial
%tol tolerancia
%m número máximo de iteraciones
%Resultados
%u valor propio aproximado
%x vector propio aproximado

n=input('Introduzca la dimension de la matriz n: ');
A=input('Introduzca la matriz A: ');
x=input('Introduzca el vector x: ');
tol=input('Introduzca la tolerancia tol: ');
m=input('Introduzca el número máximo de iteraciones m: ');
q=(x'*A*x)/(x'*x);
k=1;
nx=norm(x,inf);
for i=1:m
    if(abs(x(i))>=nx)
        break;
    end
end
p=i;
x=x/x(p);

fprintf('\n k          vector x          u
error ');
```



```

while(k<=m)
    I=eye(n);
    if (det(A-q*I)==0)
        fprintf('\n un valor propio es %f ',q);
        return;
    end
    y=(A-q*I)\x;
    u=y(p);
    ny=norm(y,inf);
for i=1:n
    if(abs(y(i))==ny)
        break;
    end
end
p=i;

    z=y/y(p);
    error=norm(x-z);
    x=z;
    u=(1/u)+q;
    fprintf('\n %d ',k);
    fprintf('(');
        for i=1:n-1
            fprintf('%10f,',x(i));
        end
        fprintf('%10f)',x(n));
        fprintf('%10f %10f \n',u,error);

if(error<tol)

    fprintf('\n El valor propio dominante es %f \n',u);
    fprintf('\n El vector propio asociado es x=');
    for i=1:n-1
        fprintf('%10f,',x(i));
    end
    fprintf('%10f)\n',x(n));
    return;
end
k=k+1;
end

fprintf('\n Excedido el número máximo de iteraciones \n');

```

## ANEXO No. 4

### PROGRAMA DEL MÉTODO DE DEFLACION DE WIELANDT.

%Programa que aproxima el segundo valor propio más %dominante y un vector propio asociado de la matriz A de  $n \times n$  dado una aproximación  $l$  al valor propio dominante, %se utiliza una aproximación  $v$  al vector propio %correspondiente y un vector  $x$  de  $n-1$  componentes.

```
function deflación(n,A,l,v,x)
%Datos
%n dimension de la matriz
%A la matriz
%l valor propio aproximado
%v vector propio de n componentes
%x vector de n-1 componentes

%Resultados
%u valor propio aproximado
%r vector propio aproximado

n=input('Introduzca la dimension de la matriz n: ');
A=input('Introduzca la matriz A: ');
l=input('Introduzca el valor propio aproximado l:');
v=input('Introduzca el vector propio de n componentes v:');
x=input('Introduzca el vector de n-1 componentes x: ');

nv=norm(v,inf);
for i=1:n
    if(abs(v(i))==nv)
        break;
    end
end
if (i~=1)
    for k=1:i-1
        for j=1:i-1
            B(k,j)=A(k,j)-(v(k)/v(i))*A(i,j);
```

```

        end
    end
end
if (i~=1)&(i~=n)
    for k=i:n-1
        for j=1:i-1
            B(k,j)=A(k+1,j)-(v(k+1)/v(i))*A(i,j);
            B(j,k)=A(j,k+1)-(v(j)/v(i))*A(i,k+1);
        end
    end
end
if (i~=n)
    for k=i:n-1
        for j=i:n-1
            B(k,j)=A(k+1,j+1)-(v(k+1)/v(i))*A(i,j+1);
        end
    end
end
B=[B]
fprintf('\n Aplicaremos el Método de la Potencia a la matriz
B, ella será la matriz A de trabajo \n');

potencia
resp= input('\n Introduzca 1 si el método falla, 2 si el
método no falla, resp: ')
if (resp==1)
    fprintf('\n El método falla ');
    return;
else
    u=input('El valor propio aproximado es u: ')
    z=input('El vector propio aproximado es z: ')
end

if (i~=1)
    for k=1:i-1
        w(k)=z(k)
    end
end
w(i)=0;
if (i~=n)
    for k=i+1:n
        w(k)=z(k-1)
    end
end
for k=1:n
    suma=0;
    for j=1:n
        suma=suma+A(i,j)*w(j);
    end
end

```

```

        r(k)=(u-1)*w(k)+(suma)*(v(k)/v(i));
    end
end
fprintf('\n El valor propio aproximado es u=%f \n',u);
fprintf('\n El vector propio es r=');
    for i=1:n-1
        fprintf('%10f,',r(i));
    end
    fprintf('%10f)\n',r(n))

```

## ANEXO No. 5 PROGRAMA DEL MÉTODO HOUSEHOLDER

%Programa para obtener una matriz tridiagonal simétrica  $A^{(n-1)}$  componentes similar a la matriz simétrica  $A=A^{(I)}$ , se construyen las siguientes matrices  $A^{(2)}, A^{(3)}, \dots, A^{(n-1)}$ , donde  $A^{(k)}=(a^{(k)})$  con  $(ij)$  componentes para cualquier  $k=1,2,\dots,n-1$ .

```

function householder(n,A)
%Datos
%n dimensión de la matriz
%A la matriz
%Resultados
%A^(n-1)

n=input('Introduzca la dimension de la matriz n: ');
A=input('Introduzca la matriz A: ');
for k=1:n-2
    suma=0;
    for j=k+1:n
        suma=suma+(A(j,k))^2;
    end
    q=suma;
    if A(k+1,k)==0
        f=-q^(1/2);
    else
        f=-((q^(1/2))*A(k+1,k)/abs(A(k+1,k)));
    end
    RSQ=f^2-(f*A(k+1,k));
    v(k)=0;
    v(k+1)=A(k+1,k)-f;

    for j=k+2:n
        v(j)=A(j,k);
    end
    for j=k:n

```

```

sumal=0;
  for i=k+1:n
    sumal=sumal+A(j,i)*v(i);
  end

  u(j)=(1/RSQ)*sumal;
  end
  suma2=0;
  for i=k+1:n
    suma2=suma2+u(i)*v(i);
  end
PROD=suma2;
  for j=k:n
    z(j)=u(j)-(PROD/(2*RSQ))*v(j);
  end

  for l=k+1:n-1

    for j=l+1:n
      A(j,l)=A(j,l)-v(l)*z(j)-v(j)*z(l);
      A(l,j)=A(j,l);
    end
    A(l,l)=A(l,l)-2*v(l)*z(l);
  end
  A(n,n)=A(n,n)-2*v(n)*z(n);
  for j=k+2:n
    A(k,j)=0;
    A(j,k)=0;
  end
  A(k+1,k)=A(k+1,k)-v(k+1)*z(k);
  A(k,k+1)=A(k+1,k);
end
fprintf('\n La matriz A^(n-1) es')

A=[A]

```

## ANEXO No. 6 PROGRAMA DEL MÉTODO QR

%Programa para obtener los valores propios de la matriz  
%tridiagonal simétrica n x n A

```
function metodoqr(n,A,tol,m)
%Datos
%n dimensión de la matriz
%A matriz A
%tol tolerancia
%m número máximo de iteraciones
%Resultados
%u,l valores propios de A
```

```
n=input('Introduzca la dimension de la matriz n: ');
A=input('Introduzca los elementos de la matriz A: ');
tol=input('Introduzca la tolerancia tol: ');
m=input('Introduzca el número máximo de iteraciones m: ');
k=1;
SHIFT=0;
while(k<=m)
    if(abs(A(n,n-1))<=tol)
        l=A(n,n)+SHIFT;
        fprintf('\n El valor propio es l=%f \n',l);
        n=n-1;
    end
    if(abs(A(2,1))<=tol)
        l=A(1,1)+SHIFT;
        fprintf('\n El valor propio es l=%f \n',l);
        n=n-1;
        A(1,1)=A(2,2);
        for j=2:n
            A(j,j)=A(j+1,j+1);
            A(j,j-1)=A(j+1,j);
        end
    end
end
```

```

end
if n==0
    return
end
if n==1
    l=A(1,1)+SHIFT;
    fprintf('\n El valor propio es l=%f \n',l);
    return
end
for j=3:n-1
    if (abs(A(j,j-1))<=tol)
        fprintf('\n La matriz A dividida es \n');
        A=[A]
        return
    end
end
b=-(A(n-1,n-1)+A(n,n));
p=A(n,n)*A(n-1,n-1)-(A(n,n-1))^2;
t=((b)^2-4*p)^(1/2);
if b>0
    u1=-2*p/(b+t);
    u2=-(b+t)/2;
else
    u1=(t-b)/2;
    u2=2*p/(t-b);
end
if n==2
    l1=u1+SHIFT;
    l2=u2+SHIFT;
    fprintf('\n El valor propio es l1=%f \n',l1);
    fprintf('\n El valor propio es l2=%f \n',l2);
    return
end
w=[abs(u1-A(n,n)) abs(u2-A(n,n))];
g=min(w);
if abs(u1-A(n,n))==g
    v=u1;
end
if abs(u2-A(n,n))==g
    v=u2;
end
SHIFT=SHIFT+v;
for j=1:n
    d(j)=A(j,j)-v;
end
x(1)=d(1);
y(1)=A(2,1);

```

```

for j=2:n
    z(j-1)=((x(j-1))^2+(A(j,j-1))^2)^(1/2);
    c(j)=x(j-1)/z(j-1);
    s(j)=A(j,j-1)/z(j-1);
    q(j-1)=c(j)*y(j-1)+s(j)*d(j);
    x(j)=-s(j)*y(j-1)+c(j)*d(j);

    if (j~=n)
        r(j-1)=s(j)*A(j+1,j);
        y(j)=c(j)*A(j+1,j);
    end
end
z(n)=x(n);
A(1,1)=s(2)*q(1)+c(2)*z(1);
A(2,1)=s(2)*z(2);
for j=2:n-1
    A(j,j)=s(j+1)*q(j)+c(j)*c(j+1)*z(j);
    A(j+1,j)=s(j+1)*z(j+1);
end
A(n,n)=c(n)*z(n);
k=k+1;
end
fprintf('\n Excedido el número máximo de iteraciones \n');

```



## ANEXO No. 7 PROGRAMA DEL MÉTODO DE JACOBI

%Programa que aproxima un conjunto completo de pares de  
%valores y vectores propios de una matriz  $A$  de  $n \times n$ , real %y  
simétrica.

```
function jacobi(n,A,tol)
%Datos
%n número de filas y de columnas de la matriz A
%A la matriz nxn real y simétrica
%tol tolerancia

%Resultados
%D matriz diagonal de los valores propios
%V matriz nxn de los vectores propios
n=input('Introduzca el número n de filas y columnas de la
matriz A: ');
D=input('Introduzca la matriz A: ');
tol=input('Introduzca la tolerancia tol: ');

V=eye(n);
estado=1;
%Cálculo del elemento (p,q) de A que tiene mayor
%magnitud entre los que están fuera de la diagonal
[m1 p]=max(abs(D-diag(diag(D))));
[m2 q]=max(m1);
p=p(q);
while(estado==1)

    % Eliminación de Dpq y Dqp
    theta=(D(q,q)-D(p,p))/2*D(p,q);
    t=sign(theta)/(abs(theta)+sqrt(theta^2+1));
    c=1/sqrt(t^2+1);
    s=c*t;

    R= [c s;-s c];
    D([p q],:)=R'*D([p q],:);
```

```

D(:,[p q])=D(:,[p q])*R;
V(:,[p q])=V(:,[p q])*R;
[m1 p]=max(abs(D-diag(diag(D)))));
[m2 q]=max(m1);
p=p(q);
if (abs(D(p,q))<tol*sqrt(sum(diag(D).^2)/n))
    estado=0;
end
end
D=diag(diag(D));
fprintf('\n Los valores propios son \n');

for i=1:n

    fprintf('\n l(%i)=%f \n',i,D(i,i));
end

fprintf('\n Los vectores propios son \n');

for i=1:n
    fprintf(' v(%i)=(',i);

    for j=1:n
        fprintf(' %f ',V(j,i));
    end
    fprintf(')\n');
    fprintf('\n');
end
end

```

## BIBLIOGRAFÍA

- ❖ Bakhvalov N.S. Numerical Methods. Editorial MIR Publishers. Moscú 1977.
  
- ❖ Burden Richard L y Faires J Douglas. Análisis numérico. Séptima edición. Editorial Thompson Learning. México 2002.
  
- ❖ Fausett Laurene V. Applied Numerical Analysis Using MATLAB. Editorial Prentice Hall. Upper Saddle River 1999.
  
- ❖ Howard Antón. Introducción al Álgebra Lineal. Primera edición. Editorial Limusa. México 1985.
  
- ❖ Mathew John H y Fink Kurtis D. Métodos numéricos con MATLAB. Tercera edición. Editorial Prentice Hall. Madrid 2000.
  
- ❖ Rorres y Antón. Aplicaciones de Álgebra Lineal. Editorial Limusa-Wiley, México 1979.

- ❖ Zill Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica, s.a. México D.F 1988.