UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA- LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

MÉTODOS DE APROXIMACIÓN TRIGONOMÉTRICA

MONOGRAFÍA

PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR:

- BRA. LEDYS YADIRA RIOS RIOS
- BR. ALEJANDRO DANIEL ZAPATA RAMÍREZ

TUTORA: MSc. ANGELA ALTAMIRANO SLINGER

LEÓN, MARZO 2014

DEDICATORIA

Dedico este triunfo primeramente a **Dios** y la **virgen santísima**, que con su poder maravilloso me guiaron en este largo camino.

A mis padres **Cristino Ríos** y **Susana Sánchez** que con sus sabios consejos y buenos ejemplos me brindaron el apoyo que necesitaba.

A mis hermanos **Ulises**, **Yordis**,**Nadia**, **Dalia** y mi querido sobrinito **EslinRíos**, quienes fueron mi fuente de inspiración y alegría en mis momentos de tristeza.

BRA. Ledys Ríos

A **Dios,** el primero y más grande de todos los matemáticos, creador del cosmos.

A **mi familia**, en especial a mis padres, **Donald Zapata** y **María Lorena Ramírez**.

BR. Alejandro Zapata

AGRADECIMIENTO

Primeramente agradecemos a **Dios** nuestro creador, pues él es el primer autor de todos nuestros triunfos.

A nuestras familias **Ríos Sánchez** y **Zapata Ramírez**, por ser siempre nuestro principal apoyo en nuestra educación.

A nuestra tutora**:** Msc. **Ángela Altamirano**, por brindarnos su valioso tiempo, paciencia, sus sabios consejos y por ser la guía principal de este trabajo.

A nuestros **familiares**y **amigos**por su apoyo y motivación.

A todos nuestros **maestros**que un día estuvieron en un salón de clases alimentando nuestro conocimiento para llegar al final de esta carrera profesional.

A todas aquellas personas que de una u otra manera nos ayudaron a salir adelante.

Muchas gracias.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Existen problemas que son demasiado complejos para resolverse analíticamente, o bien imposibles de resolver con las herramientas disponibles. En estos casos, una aproximación puede arrojar una solución suficientemente precisa, reduciendo significativamente la complejidad y el costo de la solución.

La rama de la Matemática que trata de diseñar métodos para aproximar de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente es el Análisis Numérico. Los algoritmos derivados de estos métodos pueden ser implementados en lenguajes de programación de alto nivel o en software matemáticos que facilitan su ejecución.

Un problema que se presenta con frecuencia es el ajuste de un conjunto de datos a una función. Para este fin se han desarrollado diversos métodos, siendo más apropiados unos que otros según los datos a aproximar. Por ejemplo, para datos periódicos es más apropiado usar funciones senos y cosenos para la aproximación dando lugar a la aproximación trigonométrica.

En este trabajo se aborda el problema de aproximar una función a un conjunto de datos periódicos mediante algunos métodos de aproximación trigonométrica. El trabajo consta de dos capítulos, en el primer capítulo se muestran los elementos básicos necesarios para estudiar los métodos de aproximación que se desarrollan en el capítulo dos.

En el segundo capítulo se analizan cuatro métodos de aproximación a través de polinomios trigonométricos; como es el caso del método de aproximación trigonométrica de mínimos cuadrados discretos, el método de aproximación trigonométrica de mínimos cuadrados continuos, método de la transformada de Fourier discreta y el método de la transformada rápida de Fourier; se completa el capítulo presentando algunas de las aplicaciones de la transformada rápida de Fourier.

En los anexos se incluyen los programas elaborados para los métodos abordados y una tabla para números complejos que se utiliza en el desarrollo del método de la trasformada de Fourier discreta, los programas fueron implementados en MATLAB un software apropiado para desarrollar las tareas de análisis numérico.

Este trabajo monográfico puede ser utilizado por estudiantes o profesionales como un material de consulta ante una situación en la que se requiera elegir un método particular de solución usando la aproximación trigonométrica.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL:

Mostrar cómo se lleva a cabo el ajuste de datos periódicos en la aproximación trigonométrica mediante la utilización de métodos discretos y continuos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

-Describir de manera detallada los métodos más usuales para la aproximación trigonométrica de funciones.

-Ilustrar la aplicación de los métodos considerados mediante la presentación de ejemplos.

-Crear un algoritmo eficientepara cada uno de los métodos consideradose implementando su programa correspondiente en MATLAB

CAPÍTULO 1
ELEMENTOS BÁSICOS

1.1INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se abordan los elementos necesarios para la comprensión de nuestro estudio de métodos de aproximación trigonométrica, que se presenta en el capítulo 2.

Se inicia caracterizando los procesos de aproximación e interpolación, a continuación se tratan algunos aspectos específicos de la ortogonalidad para el caso discreto y el caso continuo, y finalizando con la presentación de las series de Fourier.

1.2 APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

El estudio de la teoría de la aproximación comprende dos tipos generales de problemas. El primero se presenta cuando una función se da de manera explícita, pero queremos encontrar un tipo más simple de ella, por ejemplo un polinomio, que nos sirva para determinar valores aproximados de la misma. El segundo se refiere a la adaptación o ajuste de funciones a ciertos datos y a la búsqueda de la función óptima que represente los datos.

El primer problema es conocido como interpolación de funciones. Interpolar significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una media ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado. La interpolación más común es a través de un polinomio que se presenta en diversas formas, tales como, el polinomio de Lagrange, el polinomio de Newton y el polinomio de Hermite. También se usa la interpolación por funciones racionales y por funciones trigonométricas.

En la aproximación de datos y funciones se pueden utilizar funciones elementales tales como, los polinomios, las funciones exponenciales, las funciones racionales y las funciones trigonométricas. Hay dos tipos de aproximaciones: las discretas y las continuas. Las primeras ocurren cuando aproximamos un conjunto finito de datos mediante una función elemental. Las segundas se emplean cuando se conoce la función por aproximar.

1.3 ORTOGONALIDAD

Como el problema de aproximación por mínimos cuadrados se simplifica considerablemente, cuando se seleccionan funciones que satisfacen la condición de ortogonalidad, en esta sección se estudian los conjuntos de este tipo.

Definición (Caso continuo)

El conjunto de funciones$\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ se dice ortogonal en $[a, b]$ si:

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & si\ \ i \neq j \\ d_j > 0, & si\ \ i = j \end{cases}$$

Definición (Caso discreto)

El conjunto de funciones$\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ se dice ortogonal con respecto a n datos en $[a, b]$ si:

$$\sum_{i=0}^{n} \phi_i(x)\phi_j(x) \ = \begin{cases} 0, & si\ \ i \neq j \\ d_j > 0, & si\ \ i = j \end{cases}$$

1.3.1 ORTOGONALIDAD CON RESPECTO A UNA FUNCIÓN DE PESO

Definición

A una función integrable w se le llama función de peso en el intervalo $I\ si\ w(x) \geq 0$, para toda x en I, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I.

Una función de peso tiene por objeto asignar diferentes grados de importancia a las aproximaciones en ciertas partes del intervalo. Por ejemplo, la función de peso:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pone menos énfasis cerca del centro del intervalo $(-1,1)$ y mayor cuando $|x|$ se halla cerca del uno.

Definición

Se dice que $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ respecto a la función de peso w, si

$$\int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0, & cuando\ j \neq k \\ \alpha_k > 0, & cuando\ j = k \end{cases}$$

si además $\alpha_k = 1$ para cada $k = 0,1,2,\dots,n$, se dice que el conjunto es ortonormal.

Teorema 1.1

Si $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ respecto a la función de peso w, entonces la aproximación por mínimos a f en $[a, b]$ respecto a w es

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x),$$

donde para cada $k = 0,1,2,\dots,n$.

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_j(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\left[\phi_j(x)\right]^2\, dx} = \frac{1}{a_k}\int_a^b w(x)\phi_k(x)\, f(x) dx$$

1.4 SERIES DE FOURIER

El uso de las series de las funciones seno y coseno para representar funciones arbitrarias comenzó en la década de 1750, con el estudio del movimiento de un resorte en vibración. Este problema fue estudiado por Jean d' Alembert y luego por el matemático más destacado de la época Leonhard Euler. Pero fue Daniel Bernoulli el primero en proponer el uso de sumas infinitas de senos y cosenos como solución al problema, sumas que ahora conocemos con el nombre de series de Fourier

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de períodoT puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos delmismo período T.

Definición
Se llama serie trigonométrica de periodo 2π a toda serie de funciones dela forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k senkx)$$

Definición
Se llama polinomio trigonométrico de grado N y periodo 2π a todaexpresión de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k senkx)$$

Si al menos uno de los coeficientes ay b es distinto de cero se dice queel grado del polinomio es N.

Si suponemos que la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k senkx)$ converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a lafunciónf, escribimos la igualdad:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k senkx)$$

y si la integramos en $[-\pi, \pi]$, obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \pi a_0$$

de donde sale el valor de a_0. Del mismo modo, si multiplicamos la igualdadpor $\cos kx$ e integramos en $[-\pi, \pi]$, la propiedad de ortogonalidad da:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = \pi a_k$$

Haciendo lo mismo con $\operatorname{sen} kx$ llegamos a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx = \pi b_k$$

Definición

La serie trigonométrica$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k senkx)$construida con los coeficientes $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, f(x)dx$ y $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx$ se llama serie de Fourier.

1.5 TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea f una función integrable definida en R. Su transformada de Fourier será la función definida también en R, que representamos como $\hat{f}$, dada por:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

Igual que las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición o análisis de f en componentes; ahora en lugar de presentar sólo frecuencias discretas formando una sucesión, aparece un rango continuo de frecuencias (todo R.). A cada frecuencia ξ le corresponde un coeficiente $\hat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo; su módulo es la amplitud y su argumento es la fase. La reconstrucción de f a partir de $\hat{f}$ es la síntesis.

Propiedades algebraicas

1. $Linealidad$: $\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.

2. $Conjugación$: $\widehat{\left(\overline{f}\right)}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

3. $Traslación$: $Si\ Thf(x) = f(x+h), entonces\ \widehat{(Thf)}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}$.

4. $Modulación$: $Si\ g(x) = f(x) e^{2\pi i h x}, entoces\ \hat{g}(\xi) = \left(T - h\hat{f}\right)(\xi)$.

5. $Dilatación$: $Si\ g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x)\ y\ \lambda > 0, entonces\ \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda \xi)$.

La primera se deduce inmediatamente de la linealidad de la integral; la segunda, de las propiedades de la conjugación; para las demás hay que hacer los cambios de variable adecuados.

Propiedades analíticas

1. $\hat{f} es\ una\ función\ (uniformemente) continua\ y\ |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

2. $Si\ f\ y\ f'\ son\ integrables, \widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i\xi \hat{f}(\xi)$.

3. $Si\ x\ f(x) es\ integrable, \hat{f}\ es\ derivable\ \ y\ \ (\widehat{-2\pi i x f})(\xi) = (\hat{f})'(\xi)$.

4. $Lema\ de\ Riemann - Lebesgue\colon \lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}\,(\xi) = 0$.

5. $Si\ f\ \ y\ \ g\ son\ itegrables, \int f\hat{g} = \int \hat{f}g$.

1.5.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Las funciones que vamos a considerar estarán definidas en el conjunto$\{0,1,2,\dots,\mathrm{N}-1\}$ y tomarán valores complejos. Esto significa que tendremos un elemento de C^{N}, pero para que quede claro el aspecto funcional lo escribiremos como $\mathrm{f(k)}$. Es conveniente considerar que el argumento de la función está definido módulo N, es decir, que en realidad tenemos una sucesión $\{\mathrm{f(k)}\}$ definida para $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$, periódica de periodo $\mathrm{N}\colon \mathrm{f(k+N)} = \mathrm{f(k)}$ para todo k.

La transformada de Fourier discreta asocia a cada$f$ otra “función” $\hat{f}$definida por:

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)e^{-2\pi ijk/N}$$

Como claramente $\hat{f}(k+N) = \hat{f}(k)$, nuevamente podemos considerar que tenemos un elemento de C^N o una sucesión periódica de periodo N indistintamente.

Propiedades

1. $La\ transformada\ de\ Fourier\ discreta\ es\ lineal$.

2. $Traslacion\ en\ tiempo\colon Si\ g(k) = f(k-n), es\ \hat{g}(k) = \hat{f}(k)e^{-2\pi ikn/N}$.

3. $Traslacion\ en\ frecuencia\colon Si\ g(k) = f(k)e^{2\pi ikn/N}, es\ \hat{g}(k) = \hat{f}(k-n)$.

4. $Modulacion\colon Si\ g(k) = f(k)cos2\pi kn/N, \hat{g}(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(k-n) + \hat{f}(k+n))$.

Sea $\omega = e^{-2\pi i/N}$; y $\varpi = e^{2\pi i/N} = \omega^{-1}$ son raíces N-simas de la unidad al igual que sus potencias, es decir, $\omega^{jN} = 1$ para todo j entero. Además,

$$1 + \omega^{j} + \omega^{2j} + \cdots + \omega^{(N-1)j} = \begin{cases} N & si\ j\ es\ multiplo\ de\ N, \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La comprobación de este resultado se reduce a sumar una progresión geométrica.

Con esta notación la transformación:

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) e^{-2\pi i jk/N}$$

se escribe:

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \omega^{jk}.$$

Aunque la teoría de la transformada de Fourier se construye para funciones definidas en todo R, en las aplicaciones la función estará definida en un intervalo que podemos suponer $[0, \mathrm{T}]$.Si pretendemos "representar" la función f definida en $[0, \mathrm{T}]$ por un polinomio trigonométrico como:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i jx/T} ,$$

Al tener N coeficientes podemos hacerlo coincidir con la función en N puntos (se suele decir que p es el polinomio que interpola a f en esos puntos). Si los elegimos de forma que sean$\mathrm{kT/N}$, con $\mathrm{k} = 0, 1, \ldots, \mathrm{N} - 1$, los coeficientes c_j se determinan como solución del sistema lineal:

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i jk/N}$$

CAPÍTULO 2
MÉTODOS DE APROXIMACIÓN TRIGOMOMÉTRICA

2.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se inicia caracterizando los procesos de aproximación e interpolación trigonométrica y todo acerca de cuándo y porqué es mejor usar métodos trigonométricos.

A continuación, se describen algunos de estos métodos, se presentan ejemplos ilustrativos, tablas comparativas para mostrar su eficiencia, sus algoritmos respectivos, así como, el programa en MATLAB correspondiente a cada método que calcula los coeficientes necesarios para formar el polinomio trigonométrico.

2.2 APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Para datos periódicos es más apropiado usar funciones senos y cosenos para la aproximación o interpolación. Esto da lugar a la aproximación e interpolación trigonométrica, las que pueden llevarse a cabo a través de los llamados polinomios trigonométricos, esto es, una función de la forma:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx$$

donde debemos encontrar los coeficientes $a_0, a_1, \dots a_n$ y $b_0, b_1, \dots b_n$.

La función $S(x)$es un polinomio trigonométrico de grado n si a_n y b_n son diferentes de cero.

Se usa el ajuste trigonométrico de mínimos cuadrados para la aproximación e interpolación de datos. Debido a la ortogonalidad de las funciones trigonométricas básicas, en la aproximación trigonométrica mediante mínimos cuadrados no es necesario resolver un sistema lineal.

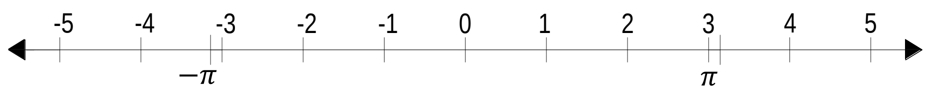
Con grandes cantidades de datos periódicos, también se recomienda la interpolación por medio de polinomios trigonométricos. Una forma eficiente de calcular el polinomio trigonométrico interpolante es la transformada rápida de Fourier.

2.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS DISCRETOS

Iniciaremos nuestro estudio con el método de aproximación trigonométrica de mínimos cuadrados discretos.

Sea un conjunto de $2m$ puntos de parejas de datos$\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$, donde los primeros elementos de los pares dividen uniformemente un intervalo cerrado.

Para simplificar el proceso usaremos el intervalo $[-\pi, \pi]$



$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi$, para cada $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$.

Si el intervalo no es$[-\pi, \pi]$podemos emplear una transformación lineal simple para traducir los datos a esta forma.

El objetivo en este caso consiste en determinar el polinomio trigonométrico:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k\, sen\, kx)$$

que reduzca al mínimo el error:

$$\mathrm{E(s_n)} = \sum_{j=0}^{m-1} [y_j - s_n(x)]^2$$

Igualando a “0” la derivada parcial de E con respecto a a_k:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_k} = 2 \sum_{j=0}^{2m-1} \left[y_j - s_n(x)\right](-\cos kx_j)$$

así

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j \;-\; \sum_{j=0}^{2m-1} s_n\left(x_j\right) \cos kx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j - \frac{a_0}{2} \sum_{j=0}^{2m-1} \cos k\, x_j - \; a_n \sum_{j=0}^{2m-1} \cos k\, x_j \cos nx_j$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} b_l \sum_{j=0}^{2m-1} \cos k\, x_j\; sen\; lx_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n-1} a_l \sum_{j=0}^{2m-1} \cos k\, x_j \cos lx_j - a_k \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)^2$$

por la ortogonalidad definida en el capítulo 1, todas las sumas del lado derecho menos la primera y la última son ceros, esto nos queda:

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j - a_k \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)^2$$

y como

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\cos kx_j)^2 \; = m$$

entonces

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j - a_k\,(m)$$

despejando a_k:

$$a_k m = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j$$

por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j} \;\; ; \text{para cada } \; \mathrm{k} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}.}$$

Haciendo igual procedimiento, igualando a “0” la derivada parcial de E con respecto a b_k:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b_k} = 2 \sum_{j=0}^{2m-1} \left[y_j - s_n(x)\right](-\operatorname{sen} kx_j)$$

así

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} kx_j - \sum_{j=0}^{2m-1} s_n(x_j) \operatorname{sen} kx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} k\, x_j - \frac{a_0}{2} \sum_{j=0}^{2m-1} \operatorname{sen} k\, x_j - a_n \sum_{j=0}^{2m-1} \operatorname{sen} k\, x_j \cos nx_j$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} a_l \sum_{j=0}^{2m-1} \operatorname{sen} k\, x_j\ cos\ lx_j - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} b_l \sum_{j=0}^{2m-1} \operatorname{sen} k\, x_j \operatorname{sen} lx_j - b_k \sum_{j=0}^{2m-1} (\operatorname{sen} kx_j)^2$$

por la ortogonalidad definida en el capítulo 1, todas las sumas del lado derecho menos la primera y la última son ceros, esto nos queda:

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} k\, x_j - b_k \sum_{j=0}^{2m-1} (\operatorname{sen} kx_j)^2$$

y como

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\operatorname{sen} kx_j)^2 = m$$

entonces

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} k\, x_j - b_k\, (m)$$

despejando b_k:

$$b_k m = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} k\, x_j$$

por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{\mathbf{sen}} k\, x_j} \text{ ; para cada } \mathrm{k} = 1, 2, \dots, \mathrm{n} - 1.}$$

Ejemplo 1.

Sea $F(x) = \cos 2x$, para obtener la aproximación de mínimos cuadrados discretos $S_2(x)$ para los datos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{7}$ donde $x_j = \pi(\frac{j}{m} - 1)$ y $y_j = F(x_j)$ en el intervalo de $[-\pi, \pi]$.

En este caso

$x_j = \frac{j}{4}$ y $y_j = F(x_j)$

y el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados es:

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x + b_1 sen\ x$$

Donde

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j \cos k\, x_j ; para\ \ k = 0,1,2$$

y

$$b_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j \operatorname{sen} k\, x_j \ \ ;\text{para}\ \ \text{k} = 1$$

Sustituyendo tendremos:

$$a_0 = 0.00000$$

$$a_1 = 0.00000$$

$$a_2 = 1.00000$$

$$b_1 = 0.00000$$

Así el polinomio resultante es:

$$S_2\,(x) = cos\ 2x$$

Ejemplo 2

Sea $f(x) = sen\frac{1}{2}x + 2cos\frac{1}{3}x$, para obtener la aproximación de mínimos cuadrados discretos $S_3(x)$ para los datos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{11}$ donde $x_j = \frac{j}{6}$y$y_j = F(x_j)$en el intervalo de $[-\pi, \pi]$.

En este caso

$x_j = \pi(\frac{j}{m} - 1)yy_j = F(x_j)$

y el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados es:

$$S_3(x) = \frac{a_0}{2} + a_3 \cos 3x + \sum_{k=1}^{2} (a_k \cos kx + b_k senkx)$$

Donde

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{11} y_j \cos k\, x_j; para \;\; k = 0,1,2,3$$

y

$$b_k = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{11} y_j \operatorname{sen} k\, x_j \;\; ;\text{para} \;\; \text{k} = 1, 2,$$

Sustituyendo tendremos:

$$a_0 = 3.13290$$

$$a_1 = 0.58821$$

$$a_2 = -0.27006$$

$$a_3 = 0.21756$$

$$b_1 = 0.83416$$

$$b_2 = -0.30978$$

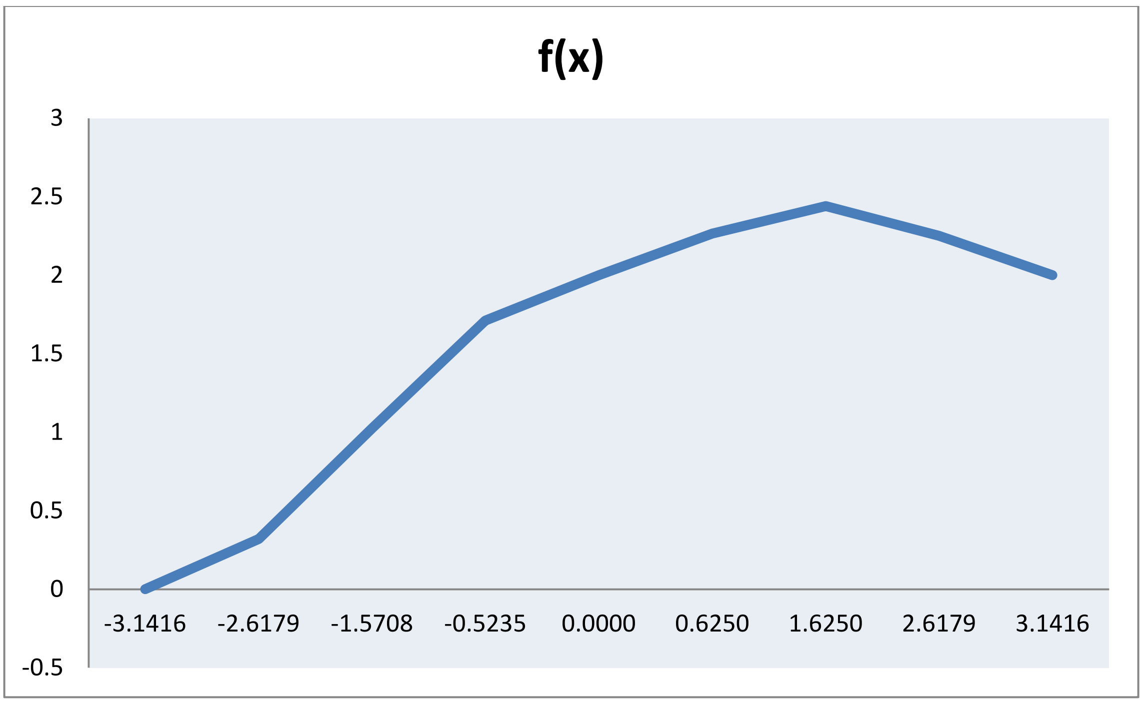
Así el polinomio resultante es:

$$S_3\,(x) = 1.56645 + 0.58821cosx - 0.27006cos2x + 0.21756cos3x + 0.83416senx - 0.30978sen2x$$

Valores de $\boldsymbol{f(x)}$y $\boldsymbol{S_3(x)}$

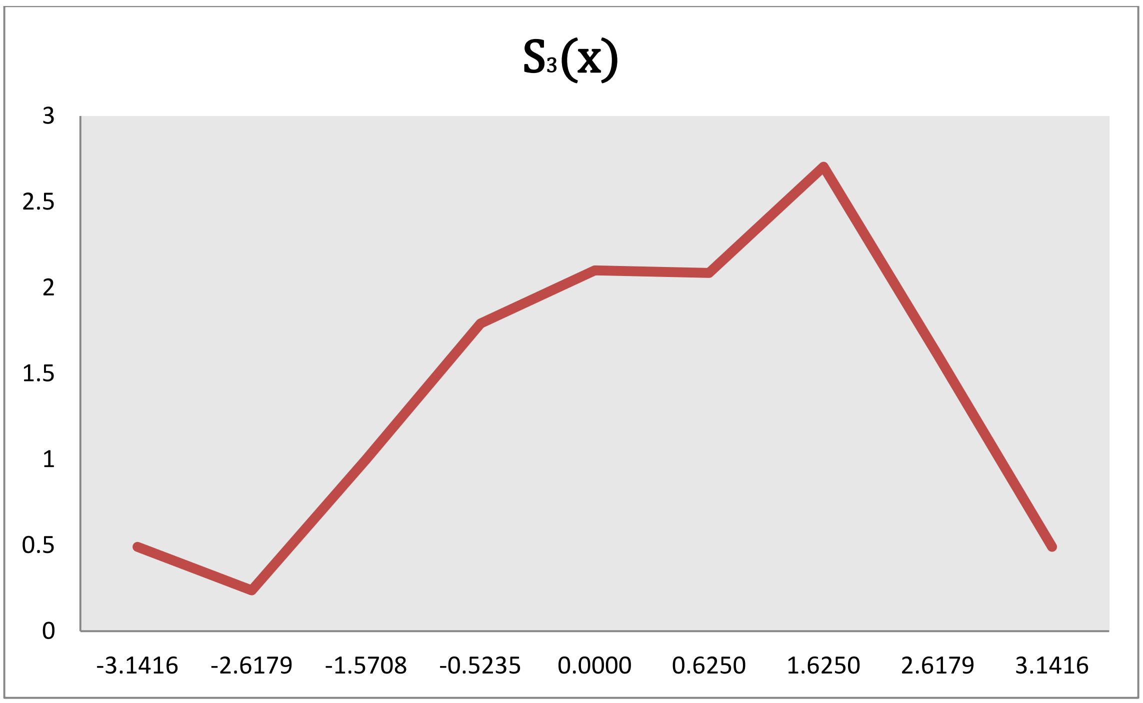
X	$f(x)$	$S_3(x)$	$\lvert f(x) - S_3(x)\rvert$
-3.1416	-0.000004241	0.490630679	$4.906349200*10^{-1}$
-2.6179	0.319709485	0.236693753	$8.301573200*10^{-2}$
-1.5708	1.024941503	1.002347961	$2.259389300*10^{-2}$
- 0.5235	1.710855600	1.792110223	$8.125462300*10^{-2}$
0.0000	2.000000000	2.102160000	$1.021600000*10^{-1}$
0.6250	2.264192493	2.087232436	$1.769660057*10^{-1}$
1.6250	2.439709850	2.704730668	$2.650208180*10^{-1}$
2.6179	2.251536838	1.607602239	$6.439345990*10^{-1}$
3.1416	1.999995759	0.490609320	1.509386439

Usando los valores de X y $f(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico de la función: $f(x) = sen\frac{1}{2}x + 2cos\frac{1}{3}x$

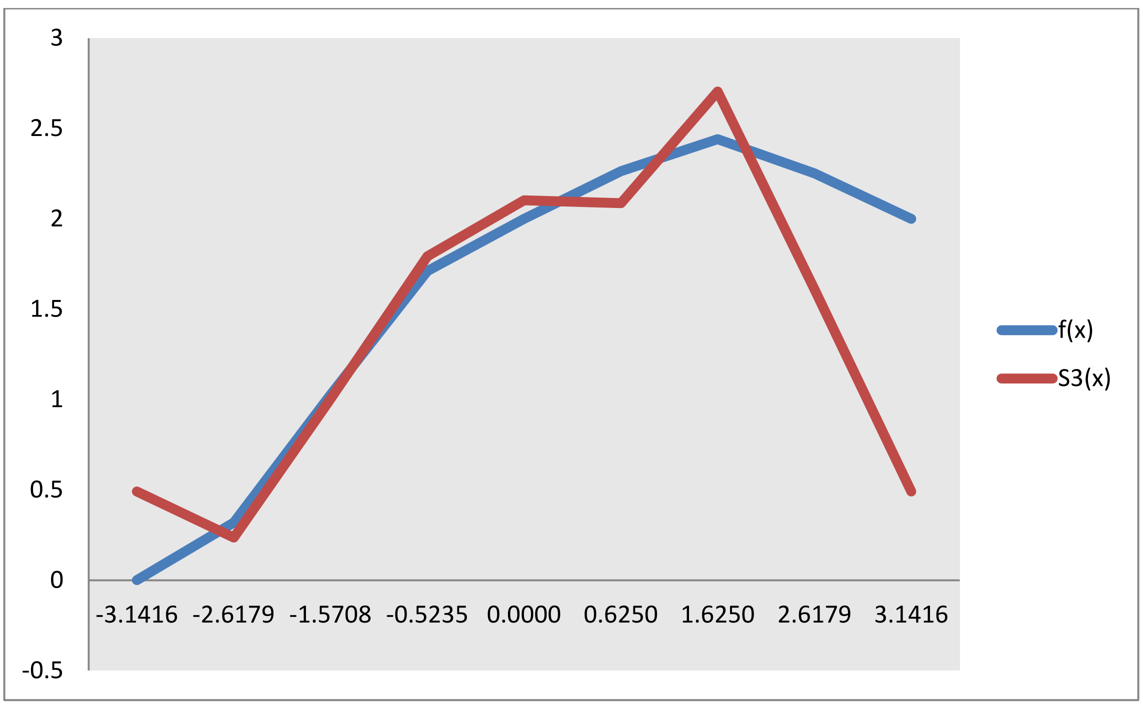


Usando los valores de X y $S_3(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico del polinomio resultante:

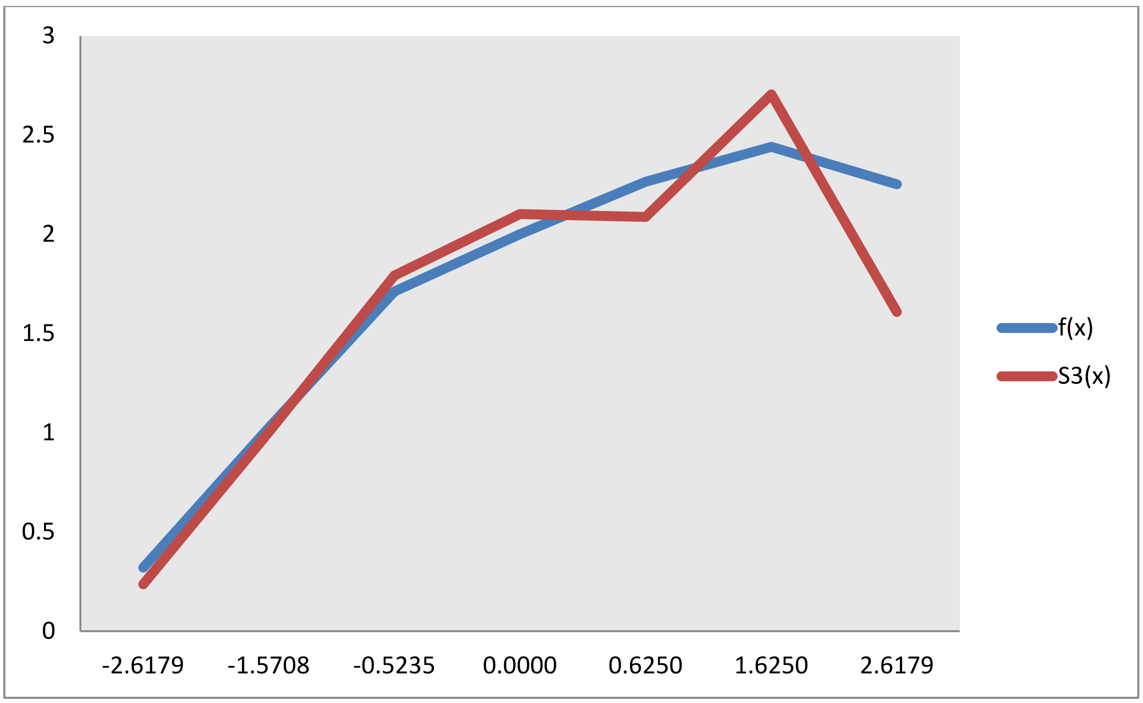
$$S_3\,(x) = 1.56645 + 0.58821cosx - 0.27006cos2x + 0.21756cos3x + 0.83416senx - 0.30978sen2x$$



Comparando los gráficos de $f(x)$ y $S_3(x)$ notamos que el gráfico del polinomio resultante se aproxima bastante al gráfico de la función.



Evitando los extremos notamos una mayor similitud entre $f(x)$ y $S_3(x)$



Algoritmo del Método de aproximación trigonométrica de mínimos cuadrados discretos

Para obtener el polinomio trigonométrico

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k sen\ kx)$$

para determinada función $f(x)$:

ENTRADA: enteros no negativos m y n

SALIDA: coeficientes$a_0, a_1, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$

Paso 1: para $j = 0,1, \dots, 2m - 1$ tome $x_j = \pi(\frac{j}{m} - 1)$

Paso 2: para $j = 0,1, \dots, 2m - 1$ tome $y_j = f(x_j)$

Paso 3: para $k = 0,1, \dots, n$ haga el paso 4

Paso 4: tome$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos k\, x_j$

Paso 5: para $k = 1,2, \dots, n - 1$ haga el paso 6

Paso 6: tome $b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen} k\, x_j$

Paso 7: SALIDA ($a_0, a_1, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$)

PARAR.

En el anexo No.1 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo anterior con su salida respectiva.

2.4 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS CONTINUOS

Sea $\tau_n$el conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones$\phi_{0,}\phi_{1,} \dots, \phi_{2n-1}$. A este conjunto se le denomina conjunto de polinomios trigonométricos de grado menor o igual que n. Para una función $f \in C[-\pi,\pi]$, queremos obtener la aproximación de mínimos cuadrados continuos mediante las funciones de τ_n en la forma:

$$S_n \ (x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx \ + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \ \cos kx + b_k \ sen \ kx).$$

Dado que el conjunto de funciones $\{\phi_{0,}\phi_{1,} \dots, \phi_{2n-1}\}$ es ortogonal en $[-\pi,\pi]$ respecto a$\omega(x) \equiv 1$ determinamos los coeficientes $a_k \ y \ b_k$, haciendo uso del teorema 1.1.

Para

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 \ kx \ dx}$$

(Integrando el denominador, usando integración por partes)

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos2kx+1}{2} dx}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\left[\frac{sen2kx}{2*2k} + \frac{1}{2} \ x\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\left[\frac{sen2kx}{4k} + \frac{1}{2} \ x\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\left[0 + \frac{1}{2} \ x\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\left[\frac{1}{2} \ x\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\left[\frac{1}{2} \ \pi + \frac{1}{2} \ \pi\right]}$$

$$a_k \ = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ f(x) dx}{\pi}$$

Por tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, f(x)dx} \;\; ; \; para\ cada\ k = 0,1,2,\dots,n}$$

Para

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} sen^2\, kx\, dx}$$

(Integrando el denominador, usando integración por partes)

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-cos2kx}{2}\, dx}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\left[\frac{1}{2}x - \frac{sen2kx}{2*2k}\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\left[\frac{1}{2}\, x - \frac{sen2kx}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\left[\frac{1}{2}\, x - 0\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\left[\frac{1}{2}\, x\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\left[\frac{1}{2}\, \pi + \frac{1}{2}\, \pi\right]}$$

$$b_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx}{\pi}$$

Por tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, f(x)dx} \;\; ; \; para\ cada\ k = 1,2,\dots,n-1}$$

Ejemplo 1

Obtenga el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos

$S_2(x)$para$f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$.

En este caso el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados es:

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 cos2x + a_1 cosx + b_1 senx$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\ kx\ dx \quad ; para\ \ k = 0{,}1{,}2$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\ kx\ dx \quad ; para\ \ k = 1$$

Sustituyendo tendremos:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$b_1 = 2$$

Así el polinomio resultante es:

$$S_2(x) = 2\ sen\ x$$

Ejemplo 2

Obtenga el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos

$S_2(x)$para$f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$.

En este caso el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados es:

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 cos2x + a_1 cosx + b_1 senx$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\ kx\ dx \quad ; para\ \ k = 0,1,2$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\ kx\ dx \quad ; para\ \ k = 1$$

Sustituyendo tendremos:

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_1 = -4$$

$$a_2 = \quad 1$$

$$b_1 = 0$$

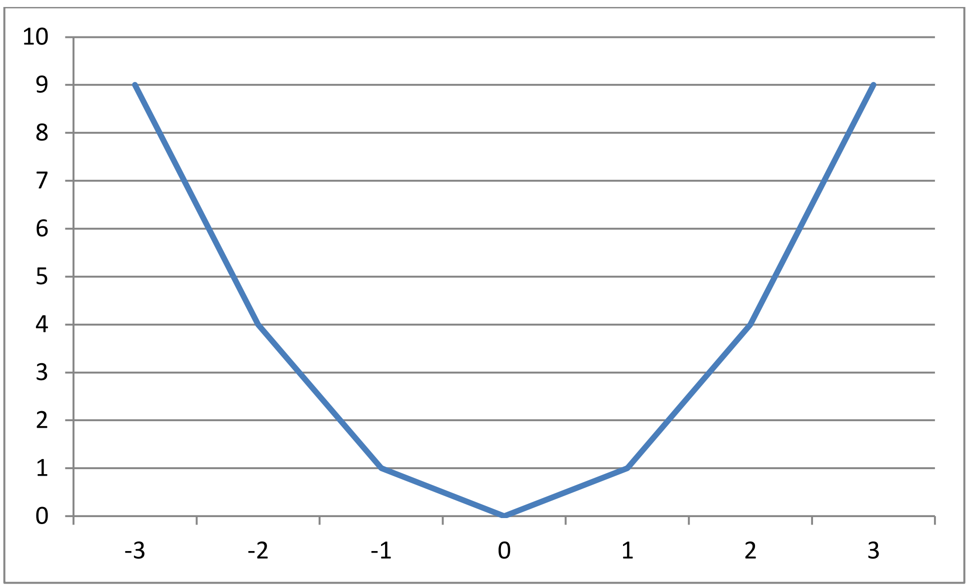
Así el polinomio resultante es:

$$S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$$

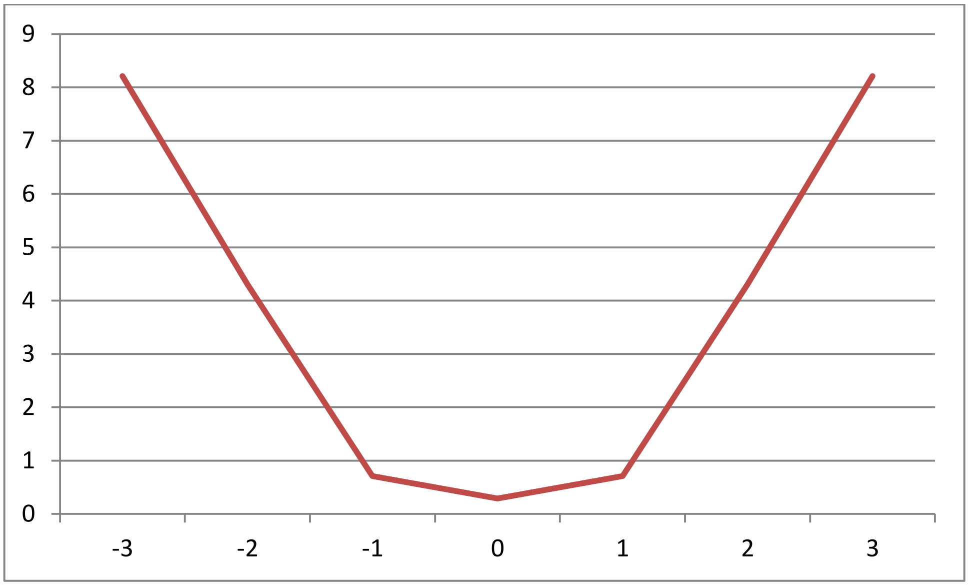
Valores de $\boldsymbol{f(x)}$y $\boldsymbol{S_2(x)}$

X	$f(x)$	$S_2(x)$	$\lvert f(x) - S_3(x)\rvert$
-3	9	8.210008	$7.89992*10^{-1}$
-2	4	4.300812	$3.00812*10^{-1}$
-1	1	0.712512	$2.87488*10^{-1}$
0	0	0.289868	$2.89868*10^{-1}$
1	1	0.712512	$2.87488*10^{-1}$
2	4	4.300812	$3.00812*10^{-1}$
3	9	8.210008	$7.89992*10^{-1}$

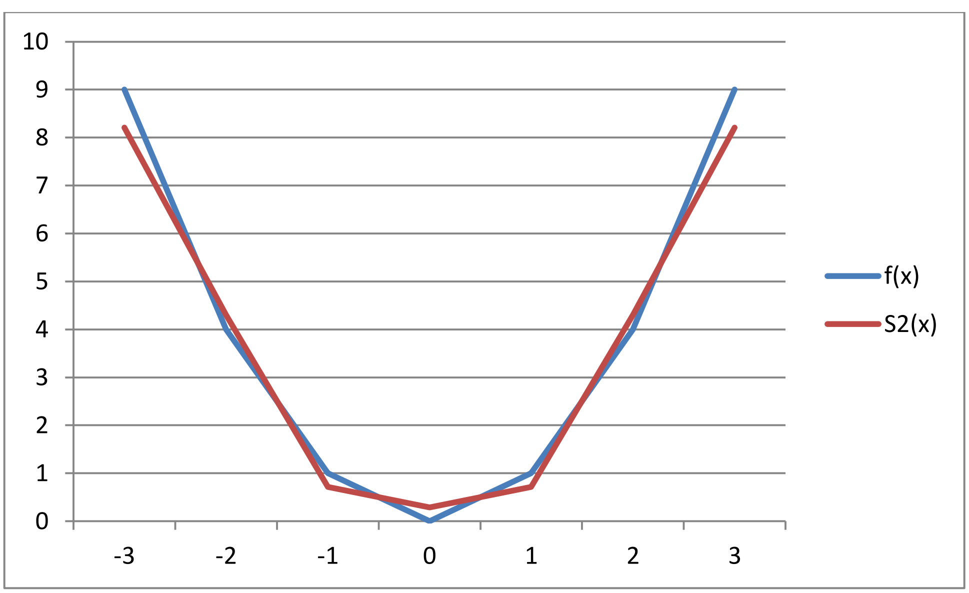
Usando los valores de X y $f(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico de la función: $f(x) = x^2$



Usando los valores de X y $S_2(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico del polinomio resultante: $S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$



Comparando los gráficos de $f(x)$ y$S_2(x)$ notamos que el gráfico del polinomio resultante se aproxima bastante al gráfico de la función.



Algoritmo del Método de aproximación trigonométrica de mínimos cuadrados continuos

Para obtener el polinomio trigonométrico

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k senkx)$$

para determinada función $f(x)$:

ENTRADA: enteros no negativos n

SALIDA: coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$

Paso 1: para $k = 0,1, \dots, n$ haga el paso 2

Paso 2: tome$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, f(x) dx$

Paso 3: para $k = 1,2, \dots, n-1$ haga el paso 4

Paso 4: tome$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \, f(x) dx$

Paso 5: SALIDA ($a_0, a_1, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$)

PARAR.

En el anexo No.2 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo anterior con su salida respectiva.

2.5 MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Sea un conjunto de $2m$ puntos de parejas de datos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ donde los primeros elementos de los pares dividen uniformemente un intervalo cerrado, y $m = 2^p$ para algún entero positivo "p".

Al igual que en el método de mínimos cuadrados discretos, usaremos el intervalo$[-\pi, \pi]$ y de la misma forma si el intervalo no es $[-\pi, \pi]$ procedemos a hacer una transformación lineal para traducir los datos a esta forma.

El objetivo en este caso consiste en determinar el polinomio trigonométrico:

$$S_n(x) = \frac{a_0 + a_n\, cos\, nx}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k\, sen\, kx)$$

En este caso en vez de evaluar directamente las constantes $a_k\ y\ b_k$, la transformada de Fourier calcula los coeficientes complejos c_k en:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx}$$

Donde:

$$C_k\ = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}\ \ ;\ \ para\ cada\ k = 0,1, \dots, n$$

Luego que las constantes c_k se han determinado, los coeficientes $a_k\ y\ b_k$, los encontraremos usando la fórmula de Euler donde:

$$e^{iz} = cosz + isenz\ ; para\ cada\ k = 0,1, \dots, n$$

Así:

$$\frac{1}{m} c_k (-i)^k = \frac{1}{m} c_k e^{-i\pi k}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}\, e^{-i\pi k} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik(-\pi + \frac{\pi j}{m})}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j (cosk(-\pi + \pi\, j/m)\ + isenk(-\pi + \pi\, j/m)\ )$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(coskx_j + i\, senkx_j \right)$$

Por tanto:

$$a_k + ib_k = \left(\frac{-1}{m} \right)^k c_k$$

Siendo:

$$a_k = Re \left(\frac{c_k}{m} \right) (-1)^k$$

y

$$b_k = Im \left(\frac{c_k}{m} \right) (-1)^k$$

La reducción de operaciones de las transformadas de Fourier se debe a que el cálculo de los coeficientes complejos c_k nos proporciona los $a_k\ y\ b_k$ de manera conjunta.

Ejemplo.

Use el método de la transformada de Fourier discreta para calcular el polinomio trigonométrico interpolante de cuarto grado en $[-\pi,\pi]$ para la siguiente función:$f(x) = cos\pi x - 2sen\pi x$ donde$x_j = -\pi + \frac{j\pi}{4}; para\ cada\ j = 0,1,\dots,7yy_j = f(x_j)$

Calculamos los $C_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$; $para\ k = 0,1,2,3,4$.

Nota: Para el cálculo de los C_k hacemos uso de la tabla de valores para los números complejos, para $k = 0,1,\dots,7$ y para $j = 0,1,\dots,7$ ubicada en el anexo 3

Resultando las siguientes ecuaciones que se resolverán usando los valores de:$y_j = F(x_j)$

$$C_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$C_1 = y_0 + \left[(i+1)/\sqrt{2}\right]y_1 + iy_2 + \left[(i-1)/\sqrt{2}\right]y_3 - y_4 - \left[(i+1)/\sqrt{2}\right]y_5 - iy_6 - \left[(i-1)/\sqrt{2}\right]y_7$$

$$C_2 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 + y_4 + iy_5 - y_6 - iy_7$$

$$C_3 = y_0 + \left[(i-1)/\sqrt{2}\right]y_1 - iy_2 + \left[(i+1)/\sqrt{2}\right]y_3 - y_4 - \left[(i-1)/\sqrt{2}\right]y_5 + iy_6 - \left[(i-1)/\sqrt{2}\right]y_7$$

$$C_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7$$

A partir de estos datos resulta:

$$C_0 = -1.011412$$

$$C_1 = -1.041089 + 0.408875i$$

$$C_2 = -1.204456 + 1.101624i$$

$$C_3 = -4.485487 + 8.211819i$$

$$C_4 = 0.367172$$

Ahora encontramos:

$$a_0 = -0.252853$$

$$a_1 = 0.260272$$

$$a_2 = -0.301114$$

$$a_3 = 1.121372$$

$$a_4 = 0.091793$$

$$b_1 = -0.102219$$

$$b_2 = 0.275406$$

$$b_3 = -2.052955$$

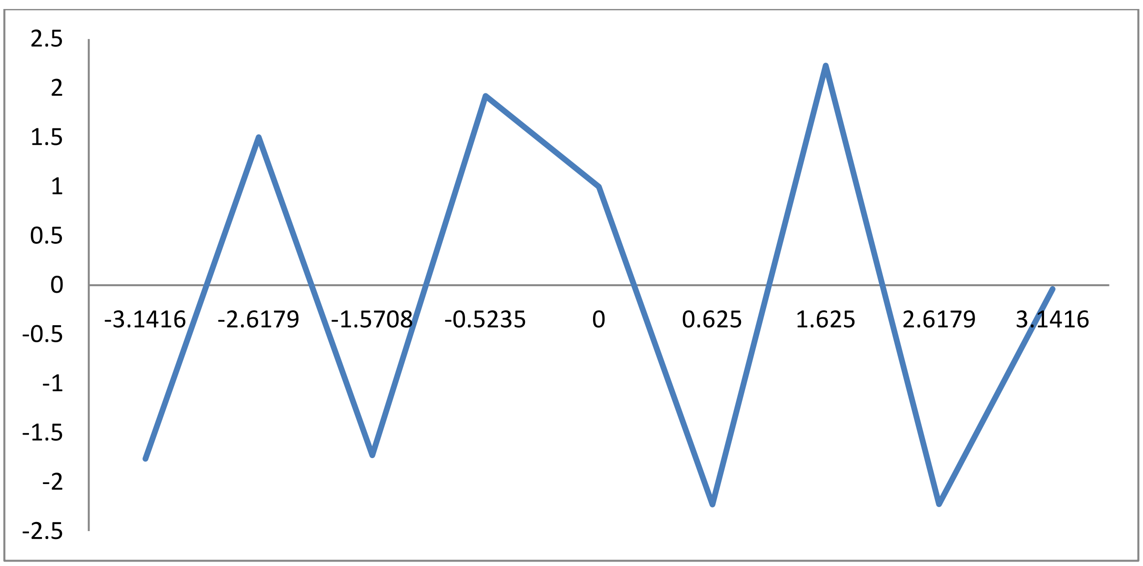
El polinomio interpolante es:

$$\begin{aligned} S_4(x) = {} & -0.126426 + 0.260277cosx - 0.301114cos2x + 1.121372cos3x \\ & + 0.045896cos4x - 0.102219senx + 0.275406sen2x - 2.052955sen3 \end{aligned}$$

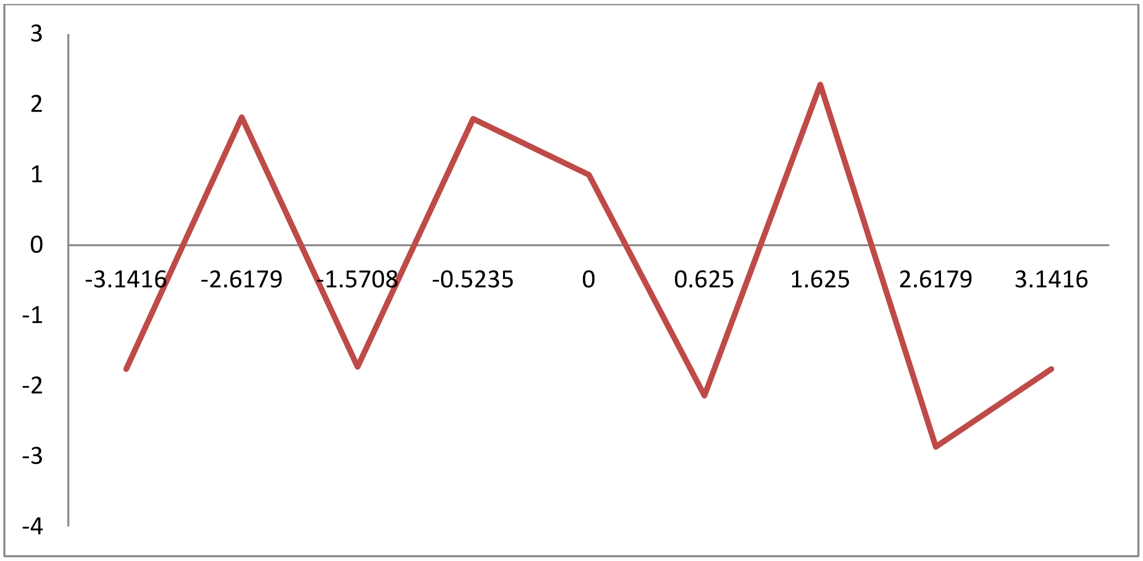
Valores de $f(x)$y $S_4(x)$

X	$f(x)$	$S_4(x)$	$\lvert f(x) - S_4(x) \rvert$
-3.1416	-1.763320	-1.763343	$2.300000*10^{-5}$
-2.6179	1.502387	1.817631	$3.152440*10^{-1}$
-1.5708	-1.730156	-1.730138	$1.800000*10^{-5}$
- 0.5235	1.920792	1.791359	$1.294330*10^{-1}$
0.0000	1.000000	1.000005	$5.000000*10^{-6}$
0.6250	-2.230442	-2.140104	$9.033800*10^{-2}$
1.6250	2.230442	2.279191	$4.874900*10^{-2}$
2.6179	-2.226352	-2.867582	$6.412300*10^{-1}$
3.1416	-0.042031	-1.763243	$1.721212*10^{0}$

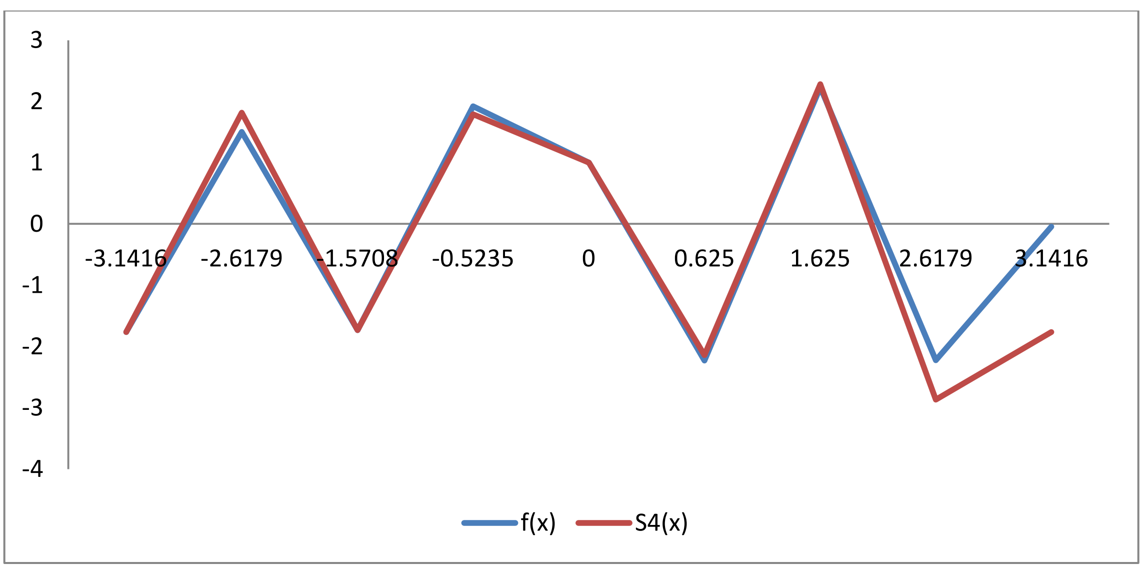
Usando los valores de X y $f(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico de la función:$f(x) = cos\pi x - 2sen\pi x$



Usando los valores de X y $S_4(x)$de la tabla anterior presentamos el grafico del polinomio resultante:$S_4(x) = -0.126426 + 0.260277cosx - 0.301114cos2x + 1.121372cos3x + 0.045896cos4x - 0.102219senx + 0.275406sen2x - 2.052955sen3$



Comparando los gráficos de $f(x)$ y $S_4(x)$ notamos que el gráfico del polinomio resultante se aproxima bastante al gráfico de la función.



Algoritmo del Método de la transformada de Fourier discreta

Para obtener el polinomio de aproximación trigonométrica:

$$S_n(x) = \frac{a_0 + a_n \cos nx}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

para determinada función $f(x)$:

ENTRADA: $m; n; y_0, y_1, \ldots, y_{2m-1}$

SALIDA: $numeros\ complejos;\ c_0, \ldots, c_n;\ numeros\ reales;\ a_0, \ldots, a_n;\ b_n, \ldots, b_{n-1}$

Paso1: para $k = 0,1, \ldots, n$ haga el paso 2

Paso2: tome $C_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$

Paso3: para $k = 0,1, \ldots, n$ haga el paso 4

Paso4: tome $a_k = Re\left(\frac{c_k}{m}\right)(-1)^k$

Paso5: para $k = 1, \ldots, n-1$ haga el paso 6

Paso 6: tome $b_k = Im\left(\frac{c_k}{m}\right)(-1)^k$

Paso7: SALIDA ($c_0, \ldots, c_n;\ a_0, \ldots, a_n;\ b_n, \ldots, b_{n-1}$)

PARAR

En el anexo No.4 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo anterior con su salida respectiva.

2.6 METODODE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

La transformada rápida de Fourier es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta disminuyendo notablemente la cantidad de operaciones necesarias, siendo este uno de los algoritmos aritméticos más ampliamente utilizados.

El algoritmo de la transformada rápida de Fourier es una mejora al método de la transformada de Fourier discreta obteniendo la misma precisión pero con menos operaciones elementales.

Algoritmo de la transformada rápida de Fourier

Para calcular los coeficientes de la suma

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{2m-1} c_k(\cos kx + i \, sen \, kx)$$

para los datos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ done $m = 2^p$ y $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$ $para\ j = 0,1, \dots ,2m - 1$.

ENTRADA: $m, p; y_0, y_1, \dots , y_{2m-1}$

SALIDA: $numeros\ complejos; c_0, \dots , c_{2m-1}; numeros\ reales;\ a_0, \dots , a_m;\ b_1, \dots , b_{m-1}$

Paso1: Tome $M = m$;

$$q = p;$$

$\zeta = e^{\pi i/m}$.

Paso 2: Para $j = 0, 1, \dots , 2m - 1$ tome $c_j = y_j$.

Paso 3: Para $j = 1, 2, \dots , M$tome $\xi_j = \zeta^j$;

$\xi_{j+M} = -\xi_j$.

Paso 4: Tome $k = 0$;

$\xi_0 = 1$.

Paso 5: Para $L = 1, 2, \dots, p+1$ haga los pasos 6-12.

Paso 6: Mientras $K < 2m - 1$ haga los pasos 7-11.

Paso 7: Para $j = 1, 2, \dots, M$ haga los pasos 8-10.

Paso 8: Sea $K = k_p * 2^p + k_{p-1} * 2^{p-1} + \cdots + k_1 * 2 + k_0$; $(Descomponga\ k)$

tome$K_1 = K/2^q = k_p * 2^{p-q} + \cdots k_{q+1} * 2 + k_q$;

$$K_2 = k_p * 2^p + k_{q+1} * 2^{p-1} + \cdots + k_p * 2^q.$$

Paso 9: Tome$\eta = c_{K+M}\xi_{K_2}$;

$$c_{K+M} = c_K - \eta;$$

$c_K = c_K + \eta$.

Paso 10: Tome $K = K + 1$.

Paso 11: Tome $K = K + M$.

Paso 12: Tome $K = 0$;

$$M = M/2\,;$$

$q = q - 1$.

Paso 13: Mientras $K < 2m - 1$ haga los pasos 14-16.

Paso 14: Sea $K = k_p * 2^p + k_{p-1} * 2^{p-1} + \cdots + k_1 * 2 + k_0$; $(Descomponga\ k)$

tome $j = k_0 * 2^p + k_1 * 2^{p-1} + \cdots + k_{p-1} * 2 + k_p$.

Paso 15: Si $j > K$ entonces intercambie c_j y c_k.

Paso 16: Tome $K = K + 1$.

Paso 17: Tome $a_0 = c_0/m$;

$a_m = Re(e^{-i\pi m}\, c_m/m)$.

Paso 18: Para $j = 1, \dots, m-1$ tome $a_j = Re(e^{-i\pi j}\, c_j/m)$

$b_j = Im(e^{-i\pi j}\, c_j/m)$.

Paso 19: SALIDA $(c_0, \dots, c_{2m-1};\ \ a_0, \dots, a_m;\ \ \ b_m, \dots, b_{m-1})$;

PARAR.

En el anexo No.5 se presenta el programa en MATLAB correspondiente al algoritmo anterior con su salida respectiva.

Ejemplo.

Use el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para calcular el polinomio trigonométrico interpolante de cuarto grado en $[-\pi, \pi]$ para la función $f(x) = |x|$.

Los datos de entrada para el algoritmo son:

$$m = 4$$

$$p = 2$$

$$y_0 = \pi, \quad y_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad y_2 = \frac{\pi}{2}\pi, \quad y_3 = \frac{\pi}{4}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = \frac{\pi}{4}, \quad y_6 = \frac{\pi}{2}, \quad y_7 = \frac{3\pi}{4}$$

Resultando:

$$C_0 = 12.56637 + 0i$$

$$C_1 = 5.363034 + 0i$$

$$C_2 = 0.000000 + 0i$$

$$C_3 = 0.9001512 + 0i$$

$$C_4 = 0.000000 + 0i$$

$$C_5 = 0.9001512 + 0i$$

$$C_6 = 0.000000 + 0i$$

$$C_7 = 5.363034 + 0i$$

$$a_0 = 3.141593$$

$$a_1 = -1.340759$$

$$a_2 = 0.000000$$

$$a_3 = -0.2300378$$

$$a_4 = 0.000000$$

$$b_1 = 0.000000$$

$$b_2 = 0.000000$$

$$b_3 = 0.000000$$

El polinomio interpolante es:

$$S_4(x) = 1.570796 - 1.340759cosx - 0.2300378cos3x$$

2.7 APLICACIONES DE LA TRASFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series y transformada rápida de Fourier se ponen de manifiesto en la asombrosa variedad de las aplicaciones que ellas tienen en las diversas ramas de la matemática y de la física, desde la teoría de números y geometría hasta la mecánica cuántica. En esta sección presentaremos algunas de las aplicaciones de la transformada rápida de Fourier.

- La trasformada rápida de Fourier se usa para el diseño de controladores clásicos de sistemas realimentados, si conocemos la densidad espectral de un sistema y la entrada podemos conocer la densidad espectral de la salida. Esto es muy útil para el diseño de filtros de radio transistores.

- La Transformada rápida de Fourier tiene un uso muy amplio en lo referente al tratamiento digital de señales, se encuentra implementada bajo la forma de dispositivos electrónicos de reconocimiento de voz e imagen.

- La transformada rápida de Fourier se utiliza para pasar al dominio de la frecuencia una señal para así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.

- La trasformada rápida de Fourier sirve para resolver ecuaciones diferenciales con mayor facilidad.

- La Transformada Rápida de Fourier es usada en la ecualización de audio por computadora, técnica que manipula la forma de la respuesta en frecuencia de una señal.

- La Transformada rápida de Fourier es utilizada para codificar el sonido en MP3. Los formatos digitales de sonido tales como MOD, MID, WAV y CMF donde los inconvenientes en el almacenamiento de los archivos de sonido, velocidad y conversión eran ineficientes, el MP3 es un formato de sonido que cambio el concepto de compresión de audio ya que mantiene la calidad del sonido aprovechando la deficiencias en la percepción del audio por el oído del ser humano.

- La transformada rápida de Fourier se aplica en el análisis del sonido al evaluar la distribución de frecuencias de la energía que transmite un sonido, porque el oído humano ejerce tal capacidad en el proceso de audición.

- La transformada rápida de Fourier es utilizada en el tratamiento de imágenes, es decir el mejoramiento de la apariencia, restauración de degradaciones y compresión de esta.

- La transformada rápida de Fourier se usa en el análisis espectral, método de análisis poderoso para poner en evidencia periodicidades ocultas en una serie temporal, tal como lo es, por ejemplo, el electroencefalograma.

CONCLUSIONES

En los capítulos anteriores estudiamos, la aproximación de una función a un conjunto de datos periódicos mediante algunos métodos de aproximación trigonométrica, siendo los más usuales:método de mínimos cuadrados discreto, método de mínimos cuadrados continuo,método de la transformada discreta de Fourier y el método de la transformada rápida de Fourier.

- Método de mínimos cuadrados discretos: Este método nos sirve para determinar un polinomio trigonométrico que aproxime una función para un conjunto discreto de datos,con un margen de error aproximado de entre 10^{-1} y 10^{-2}.

- Método de mínimos cuadrados continuos: Con este método se puede determinar un polinomio trigonométrico que aproxime una función en determinado intervalo, similaral método de mínimos cuadrados discretos este tiene un margen de error de $10^{-1.}$

- Método de la transformada discreta de Fourier: En este método determinamos el polinomio trigonométrico que aproxima la función para un conjunto de datos. Este método a través del uso de números complejos simplifica el cálculo de los coeficientes para la construcción del polinomio interpolante. Este método tiene un margen de error menor (hasta 10^{-5}) al de los métodos antes mencionados.

- Método de la transformada rápida de Fourier: Este método es una mejora al método de la transformada discreta de Fourier, siendo este el método de mayor aplicación en diversos campos de investigación por su eficiencia y notable rapidez.

BIBLIOGRAFÍA

- Burden, R. y Faires, J. Análisis Numérico. Segunda edición. Editorial Iberoamericana S.A de C.V. México D.F. 1996

- Scheid, F. Teoría y Problemas de Análisis Numérico. Primera edición. Editorial Libros McGraw-Hill S.A de C.V. México. 1972

- Fausett, V. Laurene. Applied Numerical Analysis Using Matlab. Tercera edición. Editorial Prentice Hall. Madrid. 1999

- Mathews, J. y Fink, K. Métodos Numéricos con Matlab. Tercera edición. Editorial Prentice Hall. Madrid. 2000

- Duoandikoetxea, J. Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier.UNAN.Managua. 2003

- Castro, R. Transformada de Fourier y los MP3. UNAC. Bellavista. 2012

ANEXOS

ANEXO 1

```
%Programa para encontrar los coeficientes de un polinomio
%trigonométrico de aproximación mediante el método de mínimos
%cuadrados discretos

functionpatmcd(p,n)
%Datos
%p es el número de puntos
%n es el grado del polinomio trigonométrico
%Resultados
%a es el vector de los coeficientes de los cos(jx)
%b es el vector de los coeficientes de los sen(jx)

p=input('\n Introduzca el número de puntos ')
n=input('\n Introduzca el grado del polinomio ')
m=p/2;
%calculo de puntos

forj=1:p
x(j)=pi*((j-1)/m-1);
y(j)=sin(1/2*x(j))+2*cos(1/3*x(j)); %Esta líneavaríasegún la función F(x)
end

%Cálculo de los coeficientes

fork=1:n+1
   suma1=0;
forj=1:p
      suma1=suma1+y(j)*cos((k-1)*x(j));
end
a(k)=1/m*suma1;
end

fork=1:n-1
   suma2=0;
forj=1:p
      suma2=suma2+y(j)*sin(k*x(j));
end
b(k)=1/m*suma2;
end


%Salida
fprintf('\n Los coeficientes del polinomio trigonométrico son ');
fork=0:n
fprintf('\n a(%d)=%f ',k,a(k+1));
end
fork=1:n-1
fprintf('\n b(%d)=%f ',k,b(k));
end
```

Corrida del “Programa para encontrar los coeficientes de un polinomiotrigonométrico de aproximación mediante el método de mínimoscuadrados discretos”

» patmcd

Introduzca el número de puntos 12

p =12

Introduzca el grado del polinomio 3

n =3

Los coeficientes del polinomio trigonométrico son

a(0)=3.132905

a(1)=0.588681

a(2)=-0.270064

a(3)=0.217568

b(1)=0.834164

b(2)=-0.309787 »

ANEXO 2

```
%Programa para encontrar los coeficientes de un polinomio
%trigonométrico de aproximación mediante el método de mínimos
%cuadrado continuos

functionpatmcc(n)
%Datos
%n es el grado del polinomio trigonométrico
%m es el número de puntos en que se subdivide el intervalo
% [-pi, pi], m es par

%Resultados
%a es el vector de los coeficientes de los cos(jx)
%b es el vector de los coeficientes de los sen(jx)

n=input('\n Introduzca el grado del polinomio ')



%Cálculo de los coeficientes
%Este programa está escrito para el caso particular F(x)=X^2
%para otros casos deberán modificarse un poco las líneas que
%sean indicadas con un "%" al final.

fork=0:n
h=pi/100;
fa=(-pi)^2*cos(k*(-pi)); %
fb=(pi)^2*cos(k*pi); %
s0=fa+fb;
s1=0;
s2=0;
forj=1:199
   x=-pi+j*h;
fx=(x)^2*cos(k*x); %
ifmod(j,2)==0

      s2=s2+fx;
elses1=s1+fx;
end
end
q=h*(s0+2*s2+4*s1)/3;

a(k+1)=(1/pi)*q;
end

fork=1:n-1
h=pi/100;
fa=(-pi)^2*sin(k*(-pi));%
fb=(pi)^2*sin(k*pi);%
s0=fa+fb;
s1=0;
s2=0;
```

```
forj=1:199
x=-pi+j*h;
fx=(x)^2*sin(k*x); %
ifmod(j,2)==0

      s2=s2+fx;
elses1=s1+fx;
end
end
q=h*(s0+2*s2+4*s1)/3;

b(k)=(1/pi)*q;
end

%Salida
fprintf('\n Los coeficientes del polinomio trigonométrico son ');
fork=0:n
fprintf('\n a(%d)=%f ',k,a(k+1));
end
fork=1:n-1
fprintf('\n b(%d)=%f ',k,b(k));
end
```

Corrida del “Programa para encontrar los coeficientes de un polinomiotrigonométrico de aproximación mediante el método de mínimoscuadrados continuos”

» patmcc

Introduzca el grado del polinomio 2

n =2

Los coeficientes del polinomio trigonométrico son

a(0)=6.579736

a(1)=-4.000000

a(2)=1.000000

b(1)=0.000000 »

ANEXO 3

Tabla de valores para los números complejos.

En este caso la tabla esta adecuada solo para valores de 0 a 7.

		Valores de j							
		0	1	2	3	4	5	6	7
Valores de k	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	$\frac{i+1}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{i-1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)$	$-i$	$-\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)$
	2	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$
	3	1	$\frac{i-1}{\sqrt{2}}$	$-i$	$\frac{i+1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)$	i	$-\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)$
	4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	5	1	$-\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)$	i	$-\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)$	-1	$\frac{i+1}{\sqrt{2}}$	$-i$	$\frac{i-1}{\sqrt{2}}$
	6	1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1	i
	7	1	$-\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)$	$-i$	$-\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)$	-1	$\frac{i-1}{\sqrt{2}}$	i	$\frac{i+1}{\sqrt{2}}$

ANEXO 4

```
%Programa para encontrar los coeficientes de un polinomio
%trigonométrico de aproximación mediante el método de la transformada
%de fourier discreta

functionpattfd(p,n)
%Datos
%p es el número de puntos
%n es el grado del polinomio trigonométrico
%Resultados
%a es el vector de los coeficientes de los cos(jx)
%b es el vector de los coeficientes de los sen(jx)

p=input('\n Introduzca el número de puntos ')
n=input('\n Introduzca el grado del polinomio ')
m=p/2;

%cálculo de puntos

forj=1:p
x(j)=-pi+((pi*(j-1))/m);
y(j)=cos(pi*x(j))-2*sin(pi*x(j));%Esta líneavaríasegún la funciónF(x)

end

%Cálculo de los coeficientes

fork=1:n+1
   suma1=0;
forj=1:p
      suma1=suma1+y(j)*exp((i*(k-1)*pi*(j-1))/m);
end
c(k)=suma1/m;

end



%Salida

fprintf('\n Los coeficientes del polinomio trigonométrico son ');
fork=0:n
fprintf('\n a(%d)=%f ',k,real(c(k+1))*((-1)^k));
end
fork=1:n-1
fprintf('\n b(%d)=%f ',k,imag(c(k+1))*((-1)^k));
end
```

Corrida del “Programa para encontrar los coeficientes de un polinomiotrigonométrico de aproximación mediante el método de la transformada de Fourier discreta”

» pattfd

Introduzca el número de puntos 8

p = 8

Introduzca el grado del polinomio 4

n =4

Los coeficientes del polinomio trigonométrico son

a(0)=-0.252853

a(1)=0.260272

a(2)=-0.301114

a(3)=1.121372

a(4)=0.091793

b(1)=-0.102219

b(2)=0.275406

b(3)=-2.052955

ANEXO 5

```
%Programa para encontrar los coeficientes de un polinomio
%trigonométrico de aproximación mediante el método de la transformada
%rápida de Fourier

functionpattrf(m,p)

m=input('\n Introduzca m: ')
p=input('\n Introduzca p: ')

forj=0:(2*m-1),
fprintf('\nIntroduzca y(%d): ',j);
y(j+1)=input('');
end


M=m; %Paso 1
q=p;
T=exp(pi*i/m);

forj=0:2*m-1 %Paso 2
c(j+1)=y(j+1);
end

forj=1:M %Paso 3
S(j+1)=T^j;
S(j+M)=-S(j);
end

K=0; %Paso4

S(1)=1;

forL=1:p+1, %Paso 5
whileK<2*m-1, %Paso 6
forj=1:M,    %Paso 7

Kb=K;
forg=p: -1: 0, %Paso 8 - Representación binaria
ifKb >= 2^g
k(g+1)=1;
               Kb= Kb-2^g;
else
k(g+1)=0;
end
end

pq=p-q;
         K1=0;

forg=p: -1: q,
            K1= K1 + k(g+1)*2^pq;
pq=pq-1;
end
```

```
K2=0;

pp=p;

forg=q: p,
            K2= K2 + k(g+1)*2^pp;
pp=pp-1;
end

E=c(K+M+1)*S(K2+1); %Paso 9
c(K+M+1)=c(K+1)-E;
c(K+1)=c(K+1)+E;

K=K+1; %Paso 10

end

      K=K+M; %Paso 11;

end

K=0; %Paso 12
   M=M/2;
   q=q-1;

end

whileK<2*m-1,
Kb=K;
forg=p: -1: 0, %Paso 14 - Representación binaria
ifKb >= 2^g
k(g+1)=1;
         Kb= Kb-2^g;
else
k(g+1)=0;
end
end

   j=0;
pp=p;

forg=0:p,
      j=j+k(g+1)*2^pp;
pp=pp-1;
end

ifj>K, %Paso 15
v=c(j+1);
c(j+1)=c(K+1);
c(K+1)=v;
end

   K=K+1; %Paso 16
```

```
end

a(1)=c(1)/m; %Paso 17
a(m+1)=real(exp(-i*pi*m)*c(m+1)/m);

forj=1:m-1, %Paso 18
a(j+1)=real(exp(-i*pi*j)*c(j+1)/m);
b(j+1)=imag(exp(-i*pi*j)*c(j+1)/m);
end

forj=0:2*m-1,
fprintf('\nc(%d): %s \n',j,num2str(c(j+1),7)); %Paso 19
end

fprintf('\n');

forj=0:m,
fprintf('\na(%d): %f',j,a(j+1));
end

fprintf('\n');

forj=1:m-1,
fprintf('\nb(%d): %f',j,b(j+1));
end

fprintf('\n');
```

Corrida del “Programa para encontrar los coeficientes de un polinomiotrigonométrico de aproximación mediante el método de la transformadarápida de Fourier”

» pattrf

Introduzca m: 4

m =4

Introduzca p: 2

p =2

Introduzca y(0): -1.763288

Introduzca y(1): 2.235910

Introduzca y(2): -1.730152

Introduzca y(3): 0.467320

Introduzca y(4): 1.000000

Introduzca y(5): -2.029744

Introduzca y(6): 2.171320

Introduzca y(7): -1.362778

c(0): -1.011412

c(1): -1.04109+0.4088756i

c(2): -1.204456+1.101624i

c(3): -4.485486+8.21182i

c(4): 0.367172

c(5): -4.485486-8.21182i

c(6): -1.204456-1.101624i

c(7): -1.04109-0.4088756i

a(0): -0.252853

a(1): 0.260272

a(2): -0.301114

a(3): 1.121372

a(4): 0.091793

b(1): -0.102219

b(2): 0.275406

b(3): -2.052955