UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN-LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

“Apoyo didáctico para el componente Procesos Aleatorios en la Facultad de Ciencias y Tecnología de la UNAN-León, año 2016”

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIATURA EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

AUTORES:

- **Br. Verónica Leticia Hernández González**
- **Br. Teresa Ersania Hernández Mercado**
- **Br. Juana Francisca Mejía Molina**

Tutor:

- **Msc. W. Milton Carvajal Herradora**

DEDICATORIA

A Dios: Por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mí madre: Juana Mercedes González por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada por su amor.

A mis familiares: A mis abuelos Alcides Castillo y María González por quererme y apoyarme siempre y a todos aquellos que participaron directa o indirectamente en la elaboración de esta tesis.

Verónica Leticia Hernández González

A Dios nuestro padre celestial y a la virgen María: Por haberme permitido llegar hasta este momento importante de mi vida, por haberme dado salud y la fortaleza necesaria para dar por concluido mis estudios universitarios.

A mis padres y abuelos que me brindaron apoyo incondicional, confianza y motivación y a todas aquellas personas que de una u otra manera se involucraron a lo largo del trayecto hasta culminar esta etapa de mi vida.

Teresa Ersania Hernández Mercado

A Dios quién supo guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y no desmayar en los problemas que se presentaban, enseñándome a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento.

A mi madre Caridad del Rosario Molina por su apoyo incondicional, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles, y por ayudarme con los recursos necesarios para estudiar, me ha dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos.

Juana Francisca Mejía Molina

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a Dios nuestro creador, fuente de amor y sabiduría por habernos dado salud, fortaleza, conocimientos y tolerancia para culminar nuestro estudio exitosamente.

A nuestros padres por darnos la vida, por apoyarnos en todo momento, por los valores que nos han inculcado por el apoyo moral, espiritual, económico incondicional que han contribuido con nuestra superación personal.

Con mucho cariño a nuestro tutor **MSc. William Milton Carvajal Herradora**, por compartir sus conocimientos, guiándonos con dedicación y paciencia en nuestro trabajo investigativo, al **Lic. Álvaro Arauz** por sus aportaciones y comentarios.

Y a todas aquellas personas que nos han motivado a lo largo de este proceso educativo.

Índice: Procesos Aleatorios

Apoyo didáctico para el componente Procesos Aleatorios en la Facultad de Ciencias y Tecnología de la UNAN-León, año 2016.

I. INTRODUCCIÓN

Los esfuerzos en logística, control de calidad, minimización de costos, fabricación de productos, manejo de inventarios y otros asuntos económicos e industriales pueden manejarse efectivamente a través del uso de procedimientos estadísticos que apoyan a la toma de decisiones, en el mejoramiento del desempeño laboral y en muchos aspectos de la vida diaria. Hoy en día, el creciente desarrollo de la tecnología ha proporcionado un alto rendimiento, capacidad de almacenamiento de información y velocidad en los cálculos; es por eso que se precisa de herramientas de computación para el manejo de base de datos en su gestión, procesamiento y análisis de resultados, siendo así indispensable el desarrollo y la implementación de software matemáticos-estadísticos con la disponibilidad de rutinas ya programadas o bien la construcción de nuevos programas, la generación de resultados analíticos, gráficos con rapidez de resolución que sean amigable al usuario, por ejemplo: Excel, SPSS, SAS, Gretl, WinQSB, Minitab etc.

En la práctica estos estudios se analizan de acuerdo al tipo de variable ya sea determinísticas o probabilísticas, por ejemplo en problemas de planeación de producción y distribución de productos, se ven involucradas variables determinísticas, permitiendo aplicar modelos matemáticos de optimización tales como: Programación Lineal, Redes de flujo y Administración de Proyectos. En cambio en problemas de producción, transporte y servicio surgen variables probabilísticas, donde se aplican modelos estadísticos tales como Regresión, series de tiempo[1].

El componente Procesos Aleatorio está enmarcado dentro del pensum de las carreras ofrecidas por el Departamento de Matemática-Estadística (Licenciatura en Matemática, Ingeniería Estadística y Licenciatura en Ciencias Actuariales y Financieras) y el Departamento de Computación (Ingeniería en Sistema de la Información e Ingeniería en Telemática); para el Departamento de Matemática-Estadística el componente es de carácter obligatorio a excepción de Matemática que es electiva al igual que las carreras del Departamento de Computación. Ambos Departamentos adscritos a la Facultad de Ciencias y Tecnología, UNAN-León.

Es necesario que las carreras antes mencionadas cuenten con conocimientos básicos previos en Álgebra Lineal, Cálculo diferencial e integral y Estadística inferencial, dado que Procesos Aleatorios es un componente complejo en comparación a otros, algunas veces no se logra cumplementar con su micro-programación ya sea por falta de tiempo o por ser un modelo complicado es por eso que el presente trabajo monográfico tiene como objetivo sistematizar la enseñanza -aprendizaje a través de guías de laboratorio con implementación del lenguaje de programación R ya que este programa es de libre distribución, incluye un lenguaje de programación bien desarrollado, simple y efectivo además es hoy en día un programa de gran relevancia en el mundo académico, siendo esta una herramientas de apoyo didáctico y de investigación.

Diferentes trabajos se han realizado en relación a Procesos Aleatorios:
Aguilar Donaire José Ernesto; titulado “Modelo de series temporales aplicado a las enfermedades diarreicas agudas” el cual se hizo con objetivo de analizar desde una óptica estadística y a través de la modelación ARIMA el comportamiento de la EDA en el municipio de León, en el periodo comprendido desde el 20/08/1991 al 06/06/1994[2].
Lacayo Sandino Conny; titulado “Series temporales aplicadas a la producción de camarones” con el objetivo de predecir los niveles de producción en una granja de cultivo de camarón[3].
Zepeda Paz Marcela; titulado “Simulación de variable aleatoria para computadora” con el objetivo de desarrollar el contenido programático de la componente curricular Simulación[4].

A pesar de que se han hecho trabajos con Procesos Aleatorios, NO EXISTE temas relacionados que lo vinculen con el lenguaje de programación R, una de las razones por la cual nace esta propuesta de desarrollar esta investigación.

La utilidad de esta investigación radica en una enseñanza teórica - práctica de fácil comprensión ya que se elaboran guías como herramienta didácticas adicional a las ya establecidas por el docente; además de bibliografía actual recomendada a profesores que imparten el componente Procesos Aleatorios, alumnos de las carreras previamente mencionadas, estudiantes de otras carreras que les sea útil nuestra investigación por ejemplo: Economía, Administración, Contabilidad, en general a todos aquellos que deseen refrescar sus conocimientos en esta área.

El contenido elaborado del componente Procesos Aleatorios se estructura en tres capítulos: Capítulo 1: En este se describe la situación actual del componente Procesos Aleatorios, Capítulo 2: Se detallan antecedentes, conceptos, fórmulas del componente Proceso Aleatorio, Capítulo 3: Se describen los aspectos generales del Lenguaje de Programación R, y como resultados se incluyen guías de laboratorios con ejercicios resueltos y propuestos que refuerzan el análisis teórico de los modelos estudiados, además sugerencias o soluciones alternas de algunos de estos ejercicios con el fin de familiarizar al alumno con un lenguaje de programación.

II. OBJETIVOS

Objetivo General

- Sistematizar la enseñanza de Procesos Aleatorios a través de guías de laboratorios con implementación de lenguaje R, que permitan estandarizar la didáctica en las distintas carreras que ameritan de esta componente en la Facultad de Ciencias y Tecnología.

Objetivos Específicos

- Describir la temática del componente Procesos Aleatorios correspondiente a cada carrera que fundamente la elaboración de guías de laboratorio y su planificación sistemática.

- Elaborar guías didácticas en lenguaje de programación R, para modelos que afrontan un proceso aleatorio específico, ilustrándolo a través de problemas de aplicación que permitan afianzar en el usuario una mejor comprensión del mismo.

III. MARCO TEÓRICO

Capítulo 1: Aspectos Generales del componente Procesos Aleatorios.

3.1.1 Situación actual del componente

El componente Procesos Aleatorios es una asignatura que se imparte en cinco carreras del Departamento de Matemática-Estadística y el Departamento de Computación, Facultad de Ciencias y Tecnología de la UNAN-León como son: Licenciatura en Matemática, Ingeniera en Estadística, Licenciatura en Ciencias Actuariales y Financieras, Ingeniera en Sistemas de la Información e Ingeniera en Telemática, ya sea como obligatoria o electiva. La asignatura consta con un total de 60 horas en el nivel presencial e incluye tiempo dedicado a teoría y prácticas de laboratorio, distribuidos a los largo de 15 semanas lectivas. Por el momento no es permitido llevarlo por tutorías, pero sí es posible impartirlo de forma intensiva en curso de verano de 48 horas, acorde al tamaño del grupo que lo solicite.

En la carrera de Licenciatura en Matemática se desarrolla el componente Procesos Aleatorios como electiva y se imparte durante el VIII semestre (corresponde al segundo semestre de 4to año lectivo). Esta electiva tiene como requisito la componente Cálculo de Probabilidad I.

En la carrera de Ingeniería en Estadística este componente es obligatorio y se imparte durante el VI semestre (corresponde al segundo semestre de 3er año lectivo). Este componente es obligatorio y requiere de requisito al componente de Inferencia Estadística.

En la carrera de Licenciatura en Ciencias Actuariales y Financieras, el componente es obligatorio, se imparte durante el VI semestre con el nombre de Estadística III (corresponde al primer semestre de 3er año lectivo) que comprende un condensado de Procesos Aleatorios y Series Temporales. Este componente tiene como requisito el componente de Estadística II.

Para las carreras de Ingeniería en Telemática y en Sistemas de la Información, el componente se desarrolla como una electiva y se imparte durante el VIII semestre (corresponde al segundo semestre de 4to año lectivo). Esta electiva no requiere de componentes de requisito pero sí se recomienda dentro de cada macro-programación respectiva que la ruta lógica incluya: Estadística Introductoria y Estadística Aplicada o Analítica.

3.1.2 Esquemas de relación con otras Asignaturas[5]

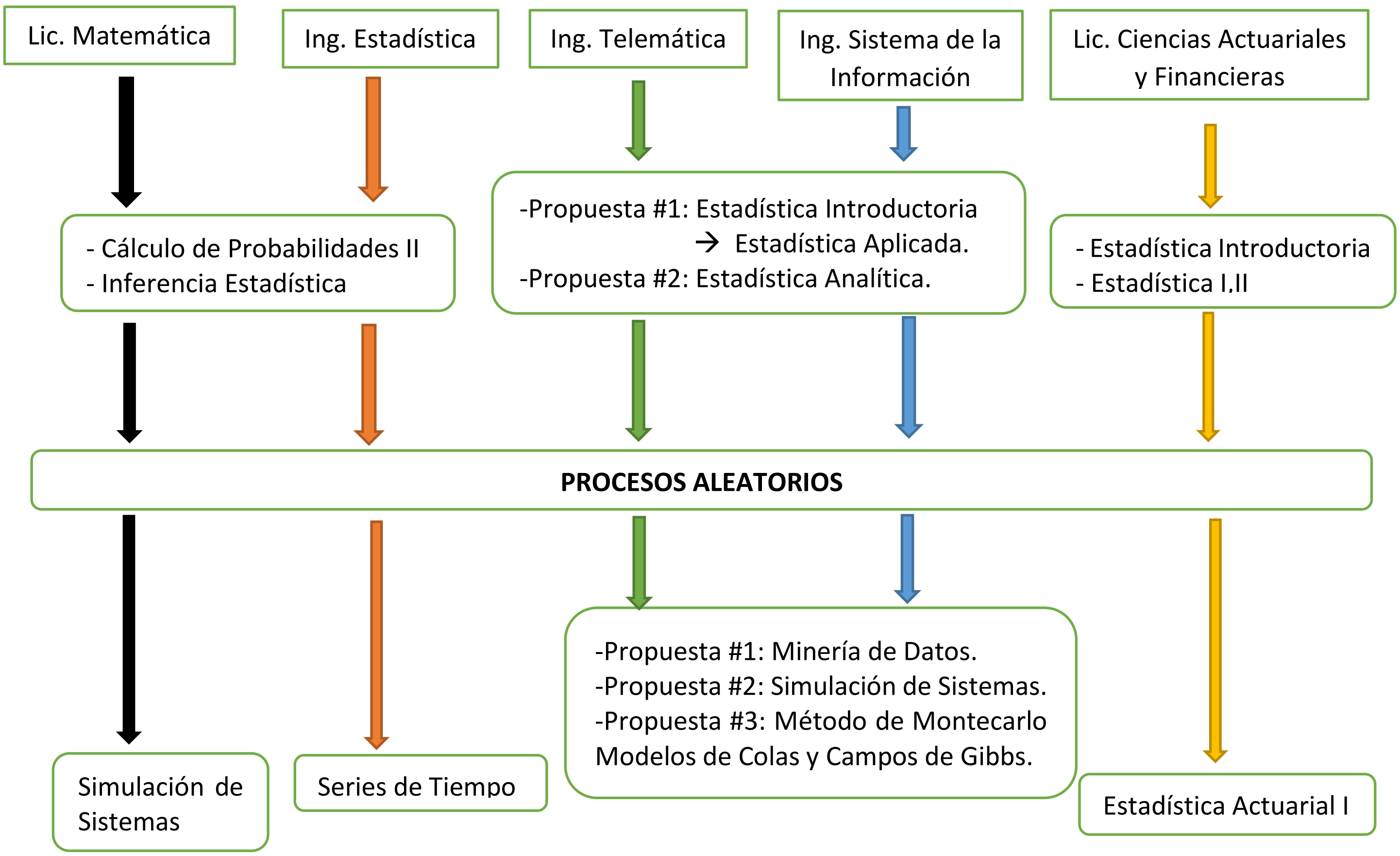


Ilustración 1.Relación del Componente Procesos Aleatorios con otros componentes.

3.1.3 Contenido de Procesos aleatorios [6]

1. Probabilidad y Variable aleatoria. Independencia estadística, Probabilidad condicional, Probabilidad Total y Teorema de Bayes. Variable aleatoria discreta y continua y sus propiedades: Funciones de: Probabilidad, densidad, distribución acumulada. Esperanza Matemática y Varianza.

2. Momentos de orden central: Media, Varianza, Asimetría y Curtosis. Función generatriz de los momentos. Coeficiente de Correlación y Covarianza en Funciones de distribución bivariada. Distribución: conjunta, marginal y condicional.

3. Funciones de Probabilidad para Variables aleatorias discretas: Uniforme, Bernoulli, Binomial, Poisson, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica. Funciones de Densidad para Variables aleatorias continuas: Uniforme, Beta, Exponencial, Normal, T-Student, Gamma, Erlang, Weibull. La Distribución exponencial: Relación dual Poisson-exponencial, Propiedad Pérdida de memoria, Función de riesgo.

4. Desigualdades en Probabilidad y Teoremas Límite: Desigualdad de Markov, Ley de los grandes números, Teorema de Tchebyshev, Teorema del Límite Central.

5. Tópicos en Procesos Estocásticos: Conceptos básicos y Definiciones. Clasificación de Procesos Estocásticos por Tiempo y por Espacio de Estados. Algunos Procesos Aleatorios de interés: Procesos Independientes con Idéntica Distribución (IID), Caminata Aleatoria, Ruido blanco, Martingalas, Proceso Gaussiano, Proceso de Conteo o de Bernoulli, Proceso de Poisson, Movimiento Browniano, Cadenas de Markov.

6. Comportamientos Transitorio y Límite de una Cadena de Markov en tiempos discretos (CMTD): Clasificación de Estados y Diagrama de Transición. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Probabilidades límites y tiempos esperados de recurrencia, Probabilidades de absorción y tiempos esperados de transición.

7. Modelos de cola, clasificación Kendal, Modelos Markovianos y Modelos de Distribución General. Análisis de sensibilidad y análisis de costo.

3.1.4 Metodología y material didáctico a utilizar

Para la componente de Procesos Aleatorios, las clases presenciales cuentan y deberían seguir contando con una duración de dos horas en dos sesiones semanales. La metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje, son planificadas acoplando la parte práctica con el contenido teórico, estructurado en Guías de Laboratorio. Además se realizarán trabajos investigativos y ejercicios con problemas reales para cada tema, que permitan asimilar y afianzar los conocimientos abstractos en los alumnos, alentando en estos el deseo de nuevas propuestas de aplicación. Se propone alternar entre Conferencias, Laboratorios y Trabajos prácticos en los espacios o aula de clase, donde cada alumno cuente con un computador. Al inicio de la sesión podría darse una breve explicación de la clase práctica o laboratorio a realizar, enlazándola con la temática abordada previamente. El desarrollo de cada práctica y ejemplo debe estimular la participación dinámica de cada estudiante.

En ambas partes tanto teórica como práctica se utilizarán como materiales de apoyo: Pizarra digital o en su defecto, Borrador, Pizarra y Marcadores acrílicos.

- Para hardware se requiere de Procesador con velocidad de 2.1 ghz, Memoria RAM de 1 GB. Una PC o laptop con Windows u otro sistema operativo.
- Para software se recomienda la versión actualizada del Lenguaje de programación R.

3.1.5 Aplicación de los procesos Aleatorios a la vida diaria

La Probabilidad constituyen una parte esencial de los procesos aleatorios y son de mucho interés en la actualidad por la cantidad de situaciones prácticas en las que se ven involucradas variables aleatorias que varían en el tiempo o espacio (área) , donde se aplican modelos probabilísticos que son utilizados para representar situaciones de la vida cotidiana, para hacer predicciones y poder así tomar las decisiones más apropiadas sobre problemas específicos, además son de utilidad en otros campo de aplicación, algunos de gran impacto socio- económico, tales como la tasa de desempleo, precio del dólar, la inflación, etc., otros asociados más a la vida cotidiana, tales como el resultado de un juego de azar, de un partido de basquetbol, o el pronóstico del clima.

Los procesos aleatorios son aplicados en distintas áreas como en producción, control de inventarios, cuando se trata de coordinar la tasa de producción, los tiempos de entrega, los niveles de inventarios de materias primas, productos en proceso y productos terminados con la fluctuación aleatoria de la demanda[7].

En el área actuarial cuando se trata de evaluar proyectos de inversión para ver si son viables o no, además de que nos ayuda a formar las variables X y Y modelos de pérdida y utilidades, a predecir, como por ejemplo; el precio de una acción en un futuro, comportamiento del número de siniestros y la cantidad de reclamos[8].

En el área de servicio, se analiza el tiempo de espera de clientes antes de recibir atención; se evalúan, el número de servidores, el número de clientes en la cola, la disciplina de la cola y el orden de atención, para analizar la eficiencia de los servidores y los costos asociados en cada proceso.

3.2.1 Antecedentes de los Procesos Aleatorios

Históricamente en el estudio de los procesos estocásticos se debe al botánico inglés Robert Brown, quién en 1827 observó que los granos de polen en suspensión acuosa mostraban un movimiento continuo y caótico en todas las direcciones. Este comportamiento era a gran escala, lo que cabría esperar una molécula si la teoría cinética fuese correcta, dicho desplazamiento caótico, denominado movimiento inicialmente se atribuyó al hecho de que las partículas tenían vitalidad propia.

El primer estudio de este fenómeno desde un punto de vista matemático fue realizado en 1900 por Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachalier en su tesis doctoral. La teoría de la especulación que, incluso llego a descubrir la dependencia de la posición de un partícula en cierto instante con respecto a la que ocupaba el instante anterior, conocida años más tarde como propiedad Markoviano. Así mismo en 1904, Henri Poincare explicó que el movimiento caótico se debe al bombardeo continuo al que están sometidas las partículas en suspensión por parte de las moléculas del medio que las rodea, ya sea líquido o gaseoso.

El análisis cuantitativo del movimiento browniano fue desarrollado de forma independiente por Albert Einstein en 1905 y por Marian Smolukhowski en 1908, aunque su formulación rigorosa con fundamentación matemática se debe a Norbert Wiener (1923), quien lo definió como un proceso estocástico Gaussiano y centrado en incrementos independientes estacionarios. Un cuarto de siglo más tarde Paul Levy completo su estudio matemático, por lo que en honor de ambos, es también conocidos como proceso de Wiener o de Wiener-Levy. El físico francés Jean Perrin (1909) supuso que la energía cinética del movimiento browniano de una partícula microscópica debe coincidir con la de una molécula. Paralelamente al estudio del movimiento Browniano se ha ido desarrollando una teoría general de procesos estocásticos, abarcando tanto el estudio de propiedades estructurales básicas, como el tratamiento de clases concretas. Así sobre fundamentos de la teoría de procesos (medibilidad, separabilidad, continuidad muestral, descomponibilidad infinita etc.) cabe citar, los trabajos pioneros de Kolmogorov (1930), Bochner (1933), Doob (1937) y Slutsky (1928, 1937). Las primeras aportaciones sobre ergodicidad de procesos se deben principalmente a Birkhoff (1931), Von Neumann (1932) y Hopf (1937); y sobre estacionaredad podemos reseñar los trabajos de Wiener (1930), Khintchine (1934) y Cramer (1940).

Al presente, los procesos estocásticos se utilizan como modelo probabilístico de fenómenos de naturaleza muy diversa, siendo usual encontrar aplicaciones en campos tales como la medicina, economía, actuaria, etc. Conviene, no obstante, dejar claro que no todos los sucesos son modelables en la misma medida; así para fenómenos climáticos podría estudiar la evolución de las temperaturas anuales o de la economía de un país, el grado de ocupación hotelera por temporada en lo que hay ciertas componentes estacionales, para estos casos pueden obtenerse modelos con una capacidad predictiva aceptable, tanto así que para manejo de acciones se conforma un portafolio de valores y las inversiones sobre cada una se realiza de forma automática a partir de su pronóstico a muy corto plazo. En casos especialmente de índole financiera tales como la evolución de la cotización de un título bursátil, resulta mucho más complicado realizar predicciones y su falta de exactitud no se debe a un mal planteamiento del modelo sino a la imposibilidad de capturar su aleatoriedad, un caso extremo es la sucesión anual de números de la lotería de fin de año para ganar el premio mayor; estas realizaciones deben considerarse como extraídas de un Proceso de Ruido Blanco[9].

La teoría de la Probabilidad se ha desarrollado tanto que ha llegado a convertirse, de ser un tema aislado o de importancia secundaria, a una disciplina intensamente activa y fuertemente conectada con otras ramas de la Matemática. Al mismo tiempo ocupa, una posición central en las aplicaciones matemáticas de diversas ciencias aplicadas, como Estadística, Investigación Operativa, Economía, Biología, entre otras. Con el transcurso del tiempo, la teoría de probabilidad y sus aplicaciones han merecido un puesto en los planes de estudio de facultades, por ser una disciplina esencial en muchos campos[10].

3.2.2 Probabilidad y Variable Aleatoria

Uno de los instrumentos fundamentales de la estadística es la probabilidad, que tuvo sus orígenes en el juego de azar, en el siglo XVII. Los juegos de azar incluyen acciones tales como: girar la rueda de la ruleta, lanzar dados, tirar una moneda, extraer una carta, etc., en las cuales el resultado es incierto, sin embargo este resultado se puede predecir a largo plazo. En la ciencia experimental se presenta la incertidumbre, en genética es incierto saber si un descendiente es hombre o mujer, pero en un largo plazo se conoce aproximadamente el porcentaje de descendientes que serán hombres y viceversa. En una compañía de seguros en el ramo de vida no pueden predecir que personas de un país morirán a la edad de 50 años, pero si puede predecir cuantas personas de ese país morirán a esa edad[11].

El menor valor que puede tener una probabilidad es 0 (lo cual indica que el evento es imposible) y el mayor valor que puede tomar es 1 (lo cual indica que es seguro que ocurra). $0 \leq P(A) \leq 1$. La sumatoria de los valores cuando se consideran todos los valores, es igual a 1.

Históricamente se han desarrollado tres diferentes enfoques conceptuales para definir la probabilidad y para determinar valores de probabilidad: el clásico, el de frecuencia relativa y el subjetivo. El modelo clásico o *a priori* es el que se relaciona con mayor frecuencia con las apuestas y juegos de azar. *P (E) = Número de formas en las que puede ocurrir un evento / Número total de posibles resultados.* El enfoque de frecuencia relativa *a posteriori* utiliza datos que se han observado empíricamente, registra la frecuencia con que ha ocurrido algún evento en el pasado y estima la probabilidad de que el evento ocurra nuevamente con base en estos datos históricos. *P(E)= Número de veces que ha ocurrido el evento en el pasado / Número total de observaciones*[12]. El enfoque subjetivo se utiliza cuando se desea asignar probabilidad a un evento que nunca ha ocurrido[13].

Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento A cuya probabilidad es P(A). Si se obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por B, ya ha ocurrido, deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A. A esta nueva probabilidad del evento A se le conoce como probabilidad condicional.

P(A / B) = P(A∩B) / P(B)   ;   P(B / A) = P(A∩B) / P(A)

Teorema de Bayes es un método usado para calcular las probabilidades posteriores. La importancia radica en que puede aplicarse en el conexo de eventos sucesivos, proporciona la base para determinar la probabilidad condicional de un evento que ya ha ocurrido[14] $P(A_i / B) = P(A_i)*P(B / A_i) / P(B)$; donde P(B) es la probabilidad total $P(B) = P(A_1)*P(B / A_1) + P(A_2)*P(B / A_2) +\ldots+ P(A_n)*P(B / A_n)$.

Una variable aleatoria es un evento *numérico* cuyo valor se determina mediante un proceso al azar. Cuando se asignan valores de probabilidad a todos los valores numéricos posibles de una variable aleatoria X, ya sea mediante un listado o a través de una función matemática, se obtiene como resultado una *distribución de probabilidad.* Por ejemplo al seleccionar al azar una persona de una población y medirle la estatura en centímetros; el experimento es medir personas y la variable aleatoria es la medición de la estatura en centímetros.

Para una variable aleatoria discreta**,** se pueden enlistar todos los valores numéricos posibles de la variable en una tabla con las probabilidades correspondientes. El comportamiento se analiza a través de una función de probabilidad $fx(x) = x = P(X = x)$ *para todo valor x* ϵ Rx. Existen diversas distribuciones estándar de probabilidad que pueden utilizarse como modelos para una amplia gama de variables aleatorias discretas[12].

Valor Esperado y Varianza de una Variable Aleatoria Discreta:

La esperanza matemática de una v.a es la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso. $\mu = E[x] = \sum_i x_i P(x_i)$**.** La varianza es una medida de la dispersión de X respecto de su valor esperado, y se calcula $\sigma^2 = V(x) = E[(x_i - \mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)$.

Distribuciones de Probabilidad de V. A. Discretas

Entre las distribuciones clásicas discretas tenemos: Bernoulli, Binomial, Poisson, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica.

En un ensayo de *Bernoulli* se observa un éxito con probabilidad p o un fracaso con probabilidad q = 1 – p, para $0 \leq p \leq 1$. La distribución *binomial* es la suma de n variables aleatorias de Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas con parámetro p, representa también el número de éxitos en n ensayos independientes, n ∈ N+. La variable aleatoria *Poisson* representa el número de eventos que ocurren en un instante de tiempo de amplitud fija cuando la tasa media de eventos en ese intervalo de tiempo es λ. La distribución de probabilidad *hipergeométrica* está estrechamente relacionada con la distribución binomial, pero difieren en dos puntos: en la distribución hipergeométrica los ensayos no son independientes y la probabilidad de éxito varía de ensayo a ensayo. La variable aleatoria *geométrica* es el número de ensayos de tipo Bernoulli que se requieren hasta observar el primer éxito, se utiliza en la distribución del tiempo de espera, de manera de que si los ensayos se realizan a intervalos regulares al tiempo, esta variable aleatoria proporciona el tiempo transcurrido hasta el primer éxito. La variable aleatoria *binomial negativa* representa el número de ensayos hasta observar la r-ésima ocurrencia de un éxito (r es un número fijo)[15]. *Ver Formulario 1 (Anexo)*

Distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria continua.

Para una variable aleatoria continua no es posible enlistar todos los posibles valores fraccionarios de la variable y, por lo tanto, las probabilidades se determinan a través de una función matemática y se ilustran en forma gráfica mediante una función de densidad de probabilidad o curva de probabilidad.

Función de Probabilidad $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$; función densidad $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Valor Esperado y Varianza de una Variable Aleatoria Continua

$\mu = E[x] = \int_{\Re} xf(x)dx$; $\sigma^2 = V(x) = E[(x-\mu)^2] = \int_{\Re} (x-\mu)^2 f(x)dx$

Entre las principales distribuciones continuas se tienen: La distribución normal es la más importante en toda la probabilidad y estadística. Muchas poblaciones numéricas tienen distribuciones que pueden ser representadas muy fielmente por una curva normal apropiada. Los ejemplos incluyen estaturas, pesos y otras características físicas errores de medición en experimentos científicos, mediciones antropométricas en fósiles, tiempos de reacción en experimentos psicológicos, mediciones de inteligencia y aptitud, calificaciones en varios exámenes y numerosas medidas e indicadores económicos. La distribución Normal estándar tiene media cero y varianza uno; esto es, $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

La distribución *Uniforme* (también se da en el caso discreto), es la variable aleatoria distribuida uniformemente en un intervalo *(a, b),* la probabilidad de que la v.a. se encuentre dentro de algún sub-intervalo de *(a, b),* es proporcional a la amplitud de dicho sub-intervalo. La variable aleatoria *exponencial* juega un papel análogo en el caso continuo a la geométrica, la variable aleatoria exponencial tiene la propiedad de no poseer memoria: el haber esperado una cantidad de tiempo determinando sin que haya ocurrido la falla o el suceso en cuestión no condiciona el tiempo adicional de espera futuro, el único parámetro de esta distribución es λ, está relacionada con la tasa media de eventos por unidad de tiempo y tiene la restricción de ser un valor positivo. La variable aleatoria *gamma* representa el tiempo de espera hasta la r-ésima ocurrencia de un fallo o evento cuando los eventos ocurren independientemente entre sí con una tasa promedio λ por unidad de tiempo, con los tiempos inter-eventos distribuidos exponencialmente con el mismo parámetro. Un caso específico de la gamma es la distribución de Erlang, que representa la suma de r variables aleatorias independientemente distribuidas exponencialmente (en este caso, r es un número entero positivo) La distribución ji-cuadrado, la Weibull y la exponencial también se pueden definir como casos particulares de la gamma. Las restricciones sobre los parámetros son λ, r>0 [15]. *Ver Formulario 1 (Anexo)*

3.2.3 Ley de los grandes números y teoremas de límite

3.2.3.1 Ley de los grandes números

a). *Ley fuerte de los grandes números*: Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media $E(X) = \mu$ y sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces $Prob\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1.$ Para las cadenas de Markov irreducibles y recurrentes positivas, la existencia de una distribución estacionaria π permite establecer una ley fuerte de los grandes números. Se basa en examinar el número de visitas en cualquier estado *i* que se produce ante de la etapa *n*: $V_i(n) = \sum_{m=1}^{n} I\{X_m = i\}$ [16].

b). *Ley débil de los grandes números*: establece que: Se puede determinar un n, de tal forma que al tomar una muestra aleatoria de tamaño n o mayor de una población con función de densidad $f(X)$ y media finita $E(X) = \mu$; la probabilidad de que la media muestral difiera de μ, en menos de una cantidad pequeña, puede aproximarse a 1 tanto como desee: $P(|Sn/n - \mu| < \varepsilon) > 1 - \delta$. Haciendo $\bar{X} = S_n/n$, queda $(-\varepsilon < \bar{X} - \mu < \varepsilon) \geq 1 - \delta$.

3.2.3.2 El Teorema de Tchebyshef (Chebyshev): Fue formulado por el matemático ruso P.D Chebyshev. Guarda una fuerte relación con la ley de los grandes números, demuestra que para una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2, y toda constante k positiva, $P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$ que equivale a $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$ o bien $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. También para la media muestral se tiene $P(|\bar{X} - \mu| \leq k\sigma/\sqrt{n}) \geq 1 - 1/k^2$ o bien $P(|\bar{X} - \mu| \geq k\sigma/\sqrt{n}) \leq 1/k^2$. Así para el cuantil k=2, se tiene una probabilidad mínima de 0.75 de que X este a dos desviaciones típicas de la media. Un mínimo del 75% de los valores deben caer dentro de dos desviaciones típicas de la media y un 88.9% de los valores a tres desviaciones típicas de la media, sin importar la forma de la distribución y si la variable es discreta o continua. En la práctica, para distribuciones normales a una, dos y tres desviaciones típicas de la media se tiene las probabilidades exactas de 0.6827, 0.9545 y 0.9973. Los percentiles Normales más utilizados son 0.90, 0.95 y 0.99 con valores de cuantil normal respectivos: 1.645, 1.960 y 2.576.
La desigualdad de Tchebyshef: también puede expresarse desde esta en la forma $P(|X - \mu| \geq k) \leq E[(X - \mu)^2]/k^2 = Var(X)/k^2 \text{ o bien } P(|X - \mu| \leq k) \geq 1 - Var(X)/k^2$.

3.2.3.3 Teorema de límite central: Sea $[X_1, X_2, X_3 \ldots X_n]$ una muestra de variables aleatorias idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2. El promedio muestral $\bar{x}$ tiene una distribución aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n. También la suma $S_n = \sum x_i$ es aproximadamente normal con $\mu * Sn = n\mu, \sigma^2 * Sn = n\sigma^2$. Mientras más grande es el tamaño n, mejor es la aproximación. La distribución de $Z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ se aproxima a la Normal estándar de media 0 y varianza 1. Así se puede definir la variable aleatoria $y_n = \frac{x_n - \mu}{\sigma} * \sqrt{n}$ ~ N(0, 1).

3.2.4 Procesos Estocásticos

La palabra *estocástico* es sinónimo de aleatorio. Un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla en el tiempo mientras que pasa por fluctuaciones al azar.

Definición: Un proceso estocástico es una sucesión o conjunto de variables aleatorias $\{X(t)\,;\ t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, F, \mathbb{P})$: espacio muestral Ω, Conjunto de Eventos F y Probabilidades de eventos $\mathbb{P}$. Para el proceso aleatorio, t es el parámetro de tiempo (o espacio), el cual toma valores en un conjunto T denominado conjunto índice. Según sea T un conjunto numerable o no, el proceso estocástico será de parámetro discreto o continuo. Para el caso discreto un Proceso Aleatorio lo denotamos por $\{Xn, n \in T\}$ para $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. En el caso de espacio de estados discreto, una secuencia de variables que indique el valor del proceso en instantes sucesivos suele representarse por: $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n - 1 = x_n - 1, X_n = x_n\}$

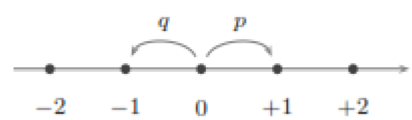
→ Dada la estructura del conjunto paramétrico T y del Espacio de estados S. A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominaran estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto o un espacio de estados continúo. Por otro lado, la variable tiempo puede ser de tipo discreto o de tipo continuo. → Dadas las características probabilísticas de las variables aleatorias: Existen dos clases de procesos estacionarios: estacionario débil y estacionario estricto. Es Estacionario débil en el sentido amplio, si tiene momentos finitos de segundo orden, si $mt(t) = m$ es constante para todo t, y $Cov(X(t), X(t+h)) = E[X(t) * X(t+h)] - m_2$ es la covarianza con $E[X(t)] * E[X(t+h)] = m * m = m_2$; que depende de toda h para cada t. Se dice que $\{X(t)\,;\ t \in T\}$ es un proceso estacionario estricto de orden n si la distribución conjunta de un par de vectores aleatorios de dimensión n arbitraria $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))\ y\ (X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_n + h))$ es la misma para todo $t_1\ t_2, \dots, t_n\ y\ h\ en\ T$.

3.2.4.1 Principales Procesos Aleatorios

a) Ruido Blanco (White noise): Es un proceso estocástico en la cual las variables aleatorias no están correlacionadas, donde $u_w = E\{w(k)\} = 0$, $R_{ww}(\Delta) = E\{w(k)w(k-\Delta)\} = \sigma^2\delta(\Delta)$. El proceso de ruido blanco se aplica en procesado de señales, generación de números aleatorios.

b) Caminata Aleatoria**:** Sea $X_1, X_2,$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[|X_1\ |] < \infty$. Sea $S_0 = 0,\ S_n = \sum_1^n X_i,\ n \geq 1$. El proceso $\{S_n,\ n \geq 0\}$ es llamado *caminata aleatoria* (Random Walk). Es decir, iniciando en el estado 0, al siguiente tiempo el proceso puede pasar al estado +1 con probabilidad p, o al estado −1 con probabilidad q, en donde p+q = 1.

Se usa la misma regla para los siguientes tiempos, es decir, pasa al estado de la derecha con probabilidad p, o al estado de la izquierda con probabilidad q. El valor de X_n es el estado del proceso al tiempo n. Este proceso cambia de un estado a otro en dos tiempos consecutivos de acuerdo a las probabilidades de transición válidas para cualquier n ≥ 0, y para cualesquiera enteros i y j[17].



Es una formalización matemática de la trayectoria que resulta de hacer sucesivos pasos aleatorios, por ejemplo la ruta trazada por una molécula mientras viaja por un líquido o un gas, el precio de una acción fluctuante y la situación financiera de un jugador. Es una trayectoria en el espacio para la cual: hay un punto de partida que es el origen, los pasos son de longitud constante, la dirección que se toma cada paso es aleatoria: ninguna dirección es más probable que las otras.

c) Martingalas**:** Una Martingala a tiempo discreto es un modelo para un juego equilibrado, en término generales es un proceso {X$_{n:\ n}$ = 0,1,…} que cumple la condición. $E\left(x_{n+1\,|}\,X_0 = x_0, \dots, x_n\right) = x_n$.

En palabras esta igualdad significa que el estado promedio del proceso al tiempo futuro $(n+1)$, es el valor del proceso en su último momento observado, es decir, en x_n. Se trata de una ley de movimiento aleatorio que es equilibrada pues en promedio el sistema no se mueve del último momento observado, establece que el valor esperado del próximo estado futuro del proceso dado toda su historia pasada o simplemente el estado actual del proceso. En el contexto de juego de apuestas, el proceso de Martingala se denomina "juego justo", ya que sirve para modelar la riqueza de un jugador en el tiempo cuando la ganancia o pérdida esperada en cada turno es cero. El término "Martingala" proviene del nombre francés que alude a una estrategia de juego consistente en duplicar las apuestas hasta ganar con seguridad[17].

d) Movimiento browniano: En 1827 el botánico R. Brown observó el comportamiento aleatorio de los granos de polen en una suspensión de agua; a este fenómeno lo denominó movimiento Browniano. Es el movimiento aleatorio de las partículas en suspensión en un fluido (un líquido o un gas) resultante de colisión con la velocidad de desplazamiento de átomos o moléculas en gas o el líquido. Los procesos Brownianos reúnen tres procesos en uno:
   a. Un proceso gaussiano,
   b. Un proceso de Markov continuo y
   c. Un proceso de incrementos independientes.

El movimiento Browniano consiste en que una partícula que inicialmente se encuentra en determinada posición (se asume $x(0) = 0$) es sometida a innumerables y continuos impactos en su entorno, gracias a lo cual está en constante y perpetuo movimiento. El desplazamiento de la partícula en un intervalo de tiempo (s, t), el cual es amplio comparado con el tiempo medio entre impactos, puede ser considerado como la suma de un número indeterminadamente grande de pequeños desplazamientos, por lo cual parece razonable suponer, en virtud del Teorema Central del Límite, que $X(t) - X(s)$ es normalmente distribuido[17].

Se explica este movimiento suponiendo que las partículas sufren innumerables colisiones con las moléculas del líquido que se mueven de una forma aleatoria. Aunque el efecto de cada choque sea insignificante, el efecto acumulativo de ellos produce el desplazamiento observable y significativo[18].

e) Proceso de Markov**:** Es aquel cuyo estado futuro solo depende del estado presente y no del pasado; los procesos de Markov verifican la propiedad de

Markov. En los procesos de Markov el estado actual del proceso incorpora toda la información que necesitamos para estimar el estado futuro y la probabilidad de un comportamiento futuro no se altera si incorporamos información sobre el pasado estado.

Estos tipos de procesos son importantes y son modelos en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov y puede expresarse de la siguiente forma: Para cualesquiera estados $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad.

$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$. De esta forma la probabilidad del evento $(X_n = x_n)$ solo depende del evento $(X_{n-1} = x_{n-1})$, mientras que la información correspondiente al evento pasado $(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-2} = x_{n-2})$ es irrelevante, en particular los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Markov pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y una ley de movimiento específico.

La desigualdad de Markov: Sirve de fundamento a la anterior para su demostración. Sea X una variable aleatoria no negativa y sea $k > 0$, entonces

$$P(X > k) \leq E(X)/k.$$

f) Las cadenas de Markov: Es una sucesión de ensayos similares u observaciones en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados posibles y en donde también la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende solo del resultado del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo, son modelos matemáticos más sencillos para representar fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, ciertamente la teoría de los procesos estocásticos puede verse como una generalización de una forma u otra, de las cadenas de Markov[15].

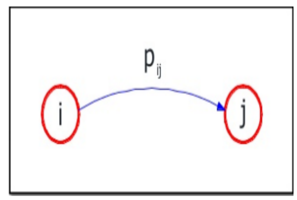
Definición: Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0,1, \ldots\}$, con espacio de estados discreto, y que satisface la propiedad de

Markov, esto es, para cualquier entero $n \geq 0$ y para cualquier estado $x_0, \dots, x_{n+1}$, se cumple $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$.

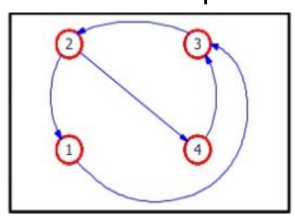
En una cadena de Markov la probabilidad de transición juegan un papel fundamental: $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{i,j}(n)$ que pueden depender de i,j ∈ E y de n ∈ N. Dotando a E de un orden arbitrario, es posible citar tales probabilidades de transición en una matriz de transición correspondiente a $P(n) = (p_{i,j}(n))_{i,j \in E'}$

Todas las matrices P(n) son *matrices estocásticas*, en el sentido de que debe cumplir: mientras las filas suman 1, las columnas no están sometidas a este requisito, lo que destaca el diferente papel que juegan unas y otras. Las matrices cuyas columnas también suman 1 se denominan *biestocásticas*[16].

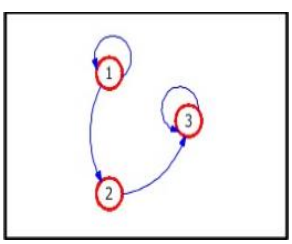
Diagrama de transición: Es un gráfico dirigido cuyos nodos son los estados y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de las transacciones existentes. Es un arreglo donde se condensan las probabilidades de pasar de un estado a otro



Cadenas Irreductible: Una cadena de Markov es irreducible si todo estado puede alcanzarse desde cualquier otro estado después de una cantidad finita de transiciones. En este caso se comunican todos los estados de la cadena. Todos los estados de las cadenas irreductible deben formar un conjunto cerrado.

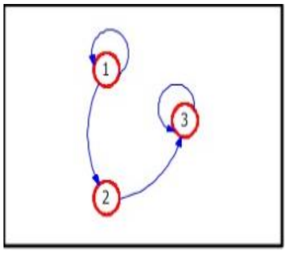


- *Clasificación de estados* [19].
  - ✓ Estado Absorbente



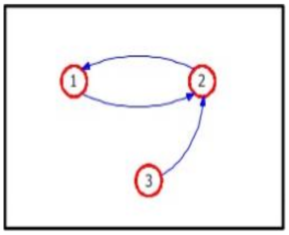
Un estado *i* es estado absorbente si $p_{ii} = 1$ siempre que se entre a un estado de absorbente, nunca se saldrá de él. Por supuesto; un estado absorbente es un conjunto cerrado que solo contiene un estado. (El estado 3 es un estado absorbente)

- ✓ Estado Transitorio



Un estado i es transitorio si hay un estado *j* alcanzable desde i, pero el estado *i* no es alcanzable desde el estado *j* en otras palabras un estado *i* es transitorio si hay manera de dejar el estado *i* de tal modo que nunca se regrese a él. (El estado 2 es un estado transitorio).

- ✓ Estado Recurrente



Si un estado no es transitorio, se llama estado recurrente. Todos los estados de una cadena irreductible deben ser recurrentes. (Los estados 1 y 2 son recurrentes); el estado 3 es transitorio).

g) Proceso de Bernoulli**:** Es un proceso estocástico de parámetro discreto cuya estructura es muy sencilla, en cada paso, se observa la ocurrencia o no ocurrencia de un determinado evento cuya probabilidad se mantiene constante y el cual cada observación es independiente de todas las observaciones anteriores. El proceso de Bernoulli es en efecto un proceso estocástico de tipo ruido blanco.

Ejemplo de Proceso de Bernoulli: Un inspector de calidad verifica si los productos de una línea de ensamblaje son defectuosos observando una secuencia de productos. Si el i-ésimo producto es defectuoso, registra $X_i = 1$, de lo contrario anota $X_i = 0$. Si los defectos se deben a causas aleatorias de modo que la presencia de defectos en un producto es independiente de la presencia de defectos en los otros productos, y si además, la proporción *p* de artículos defectuosos se mantiene constante a través de todas las observaciones, $X_i| \; i \; \geq 1$ *,* es un proceso Bernoulli [15].

h) El proceso de nacimiento-muerte [17]: es un caso especial del proceso de Markov en tiempo continuo donde las transiciones de estado son de dos tipos: el nacimiento, lo cual incrementa la variable de estado por uno y muertes, lo que disminuye el estado por uno.

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i+1, \\ \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

En donde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \mu_1, \mu_2$ son constantes positivas conocidas como las tasas instantáneas de nacimiento y muerte, respectivamente. El tiempo de estancia en el estado i tiene distribución $\exp(\lambda_i + \mu_i)$en donde se define $\mu_0 = 0$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (EChK): Las probabilidades de transición en n pasos de una Cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD), satisfacen las ecuaciones: $[p_{ij}](n) = \sum [p_{ir}](k) * [p_{rj}](n-k)$ en estados i, j de S, donde k es entero fijo tal que $0 \leq k \leq n$.

Estas ecuaciones proporcionan un método para obtener las probabilidades de transición en n pasos, tanto por el cálculo de Potencia de matrices (cuadradas) o a partir de relaciones recursivas con vectores de probabilidad inicial. El ahorro de cálculos debe ser considerado a la hora de aplicar el método sea directo o iterativo. La notación de multiplicar un escalar k por un vector V (o matriz), se hará por acomodo: $k * V = V * k$ ó $1/_k * V = V/_k$

En notación matricial, veremos que la matriz de transición en n pasos $P^{(n)} = P^n$, donde P^n es la n-ésima potencia de la matriz estocástica P. Las EChK en notación matricial son $P^{(n)} = P^{(n-k)} * P^{(k)}$. Al hacer $P\{X_0 = j / X_0 = i\} = \delta ij$, que toma valor $\delta ij = 1$, para i=j, y valor de cero en cualquier otro caso, se tiene que $P(0)$ es la matriz identidad. También por definición para n=1 se tiene que $P(1) = P$; así para $n = 0$: $P(0) = P_0 = I$, y para $n = 1$: $P(1) = P_1 = P$. Al asumir que se cumple para n de 0 a k, hay que ver si se cumple para $k+1$: $P(k+1) = P(k+1-k) * P(k) = P_{(1)} * P_{(k)}$;por hipótesis de inducción $P(k+1) = P1 * Pk$, y por álgebra de matrices $P_{(k+1)} = P_{1+k} = P_{k+1}$,

Probabilidad Limite**:** Procedimiento para calcular el vector de probabilidades límite $\boldsymbol{\pi}$: Trasponer la matriz de transición **P**, y restarle la identidad $\mathbf{P^t - I}$, sustituir la primer fila por el vector unidad [1, 1, 1,…,1] y denotar esta matriz A. Resolver el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) $A * \boldsymbol{\pi} = ⓔ$; $ⓔ = [1, 0, 0, \ldots, 0]^t$; $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_M]^t$

a) *Probabilidades límite en matrices 2x2:* Si $P = [[p\ , 1 - p]\ [1 - q\ , q]]$, entonces $[\pi 0\ , \pi 1]\ =\ [1 - q\ , 1 - p]/(1 - p + 1 - q)$.

b) *En matrices 3x3:* Si $P\ =\ [[p_{00}, p_{01}, p_{02}]\ [p_{10},\ p_{11}, p_{12}][p_{20}, p_{21}, p_{22}]]$ entonces $[\pi_0,\ \pi_1, \pi_2]\ =\ [\Delta_0,\ \Delta_1, \Delta_2]/\Delta$, donde $\Delta\ =\ \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$ y los Δ_i se calculan por:

$\Delta_0\ =\ (1 - p_{11}) * (1 - p_{22}) - p_{12} * p_{21}$	$\Delta_1\ =\ p_{01} * (1 - p_{22}) + p_{02} * p_{21}$	$\Delta_2\ =\ p_{02} * (1 - p_{11}) + p_{01} * p_{12}$

3.2.5 Modelos de Cola

Una cola es una línea de espera y la teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de línea de espera particulares o sistema de colas. Se caracteriza por el número de clientes que pueden admitir, pueden ser finitas e infinita; la suposición de una cola infinita estándar en la mayoría de los modelos. Además sirven para encontrar un buen compromiso entre costos del sistema y los tiempos promedio de la línea de espera para un sistema dado.

La teoría de colas estudia aquellos sistemas en lo que existe contienda por los recursos lo que hace que en un momento dado pueda haber más demanda de recursos que recursos disponible, por los que algunas de estas solicitudes de servicio deberán esperar a ser atendidas, formándose así una cola de acceso de las tareas a los recursos, e incluso podrán ser rechazadas por falta de capacidad de almacenamiento. En los modelos de colas existentes, las tareas generadas por los usuarios de una población llegan al sistema en un instante de tiempo aleatorio. Estas tareas demandan una cantidad de servicio también aleatoria, y sirven una a una o por grupos. El orden en el que se sirven las tareas que ocupan la cola del sistema lo determina una disciplina de gestión de cola.

Un Modelo de cola o Modelo de Congestión, consiste en acoplar apropiadamente parámetros de los procesos de llegada y de servicio para un Sistema de Colas que permita describir el comportamiento del mismo y a la vez generar medidas de rendimiento. Se identifican como datos de entrada: la tasa de servicio µ y la tasa de llegadas λ. Cliente: unidad en espera que llega requiriendo la realización de al menos un servicio. Se identifica en un sistema de colas los procesos de nacimiento y muerte, al darse entrada y salida del mismo mediante la correspondencia entre aquellos parámetros. Los clientes pueden ser personas, maquinas, partes, ítems, etc. La cola es la línea de espera; el número de clientes que esperan ser atendidos en lo cotidiano, la cola no incluye a clientes que están siendo atendidos. La capacidad del Sistema de colas incluye tanto a unidades en espera como atendiéndose.

Aplicaciones de la teoría de colas se perciben en aspectos cotidianos de la vida diaria, que incluyen: servicio, banca, comercio, transporte, manufactura, telecomunicaciones, sistemas informáticos entre otros. En la actualidad, la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) considera a la teoría de colas y los métodos analíticos matriciales como una herramienta fundamental para el manejo del flujo de la información.

Elementos de la teoría de colas

- *Fuente de entrada o población potencial*: una característica de la fuente de entrada es su tamaño. El tamaño es el número total de clientes que pueden requerir servicio en determinado momento.
- *Población Finita*: Es un grupo limitados de clientes que representa la fuente que usara un servicio y que en ocasiones forma una cola.
- *Población infinita*: Es aquella población que tiene el tamaño suficiente en comparación con el sistema de servicio, para que los cambios en el tamaño de la población, ocasionados por disminuciones o incremento a la población, no afectan de manera sustancial las probabilidades del sistema. (ejemplo en un supermercado los clientes hacen fila, en el banco, en una estación de gasolinera etc.)
- *Proceso de llegada*: es la forma en que los clientes de la fuente de entrada llegan a solicitar un servicio. La característica más importante de los procesos de llegada es el tiempo entre llegadas, que es la cantidad de tiempo entre dos llegadas sucesivas de clientes a un sistema de colas. Por ejemplo si un banco tiene mucha gente, cuando llega un cliente se puede ir.
- *Cliente*: es todo individuo de la población potencial que solicita un servicio

- *Capacidad de colas*: es el máximo número de clientes que pueden estar haciendo cola (antes de comenzar a ser servidos. De nuevo puede suponerse finita o infinita.
- *Disciplina de la cola*: se refiere al orden en el que se seleccionan sus miembros para recibir el servicio.

Notación de Kendall

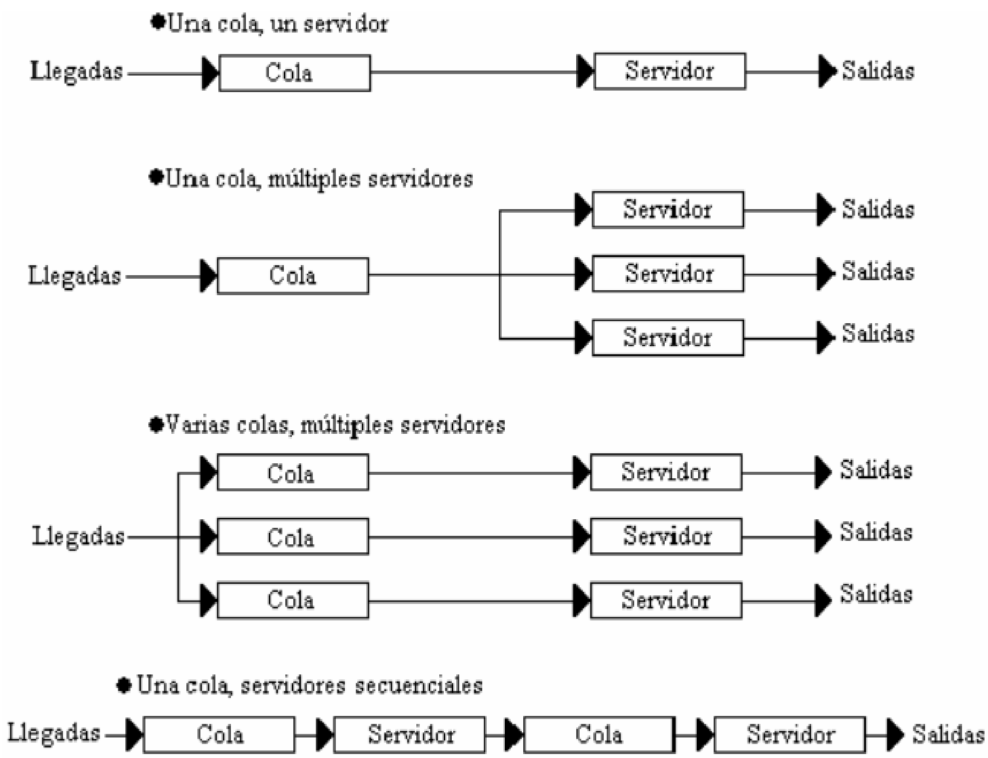
En el año 1953 el matemático David G. Kendall, originario de Inglaterra, implemento la notación de colas, la cual es utilizada para identificar las características de una línea de espera por medio de iniciales un sistema podrá ser denotado de la siguiente manera[21]:

Notación	Significado
A	Modelos de llegadas: Valores posibles M: Tiempo entre llegadas exponenciales D: Tiempo entre llegadas Deterministas G: Tiempo entre llegadas Generales(Cualquier Distribución)
B	Modelos de servicios (puede tomar los valores de A)
X	Números de servidores
Y	Capacidad de sistema (número máximo de clientes en el sistema) se puede omitir si es infinita
Z	Disciplina (se puede omitir si es infinita)
V	Es el número de estados de servicio, se puede omitir si es 1

Tipos de Sistemas de colas

Un sistema de líneas de esperas es un conjunto de clientes, un conjunto de servidores, y un orden en el cual los clientes llegan y son atendidos. Un sistema de líneas de esperas es un proceso de Nacimiento-muerte con una población formada por cliente en espera del servicio o que están en servicio, una muerte ocurre cuando un cliente abandona la instalación. El estado del sistema es el número de clientes en la instalación.

Se muestran los tipos de sistema existente, donde se describe para cada caso que tipo de sistema es. Es importante mencionar que se estudiaran los *sistemas M/M/1,* *M/M/1/K, Y M/M/C,* los cuales se pueden observar en los dos primeros casos; sin embargo los sistemas más complejos se pueden resolver teniendo como base estos, pero en muchos casos no es posible resolverlos analizándolos matemáticamente y se analizan por medio de su comportamiento. V*er formulario 2 Anexo*.



Sistema de colas M/M/1

Con respecto a la notación Kendall, para este sistema se tienen las siguientes características:

- Se tiene un sistema de llegadas que se producen según un proceso de Poisson de razón λ donde los tiempos entre llegadas estarán distribuidas exponencialmente $Exp(\lambda)$ donde λ es en número medio de llegadas por unidad de tiempo.
- Los tiempo entre servicios son distribuidos de manera exponencial $Exp(\mu)$ Donde μ es el número medio de paquetes que el servidor es capaz de atender por unidad de tiempo.

Sistema de colas M/M/1/K

En este sistema debe de considerarse que se está limitando el número de paquetes que van a poder entrar a la cola, es decir si la cola estuviera llena de paquetes que van a poder entrar a la cola, es decir si la cola estuviera llena los paquetes que llegaran después serian rechazados. La ventaja que tiene este tipo de sistema es que no se necesita utilizar una condición de no saturación debido a que la capacidad es limitada y por ello se encuentra siempre en estado estable, sin importar cuál sea el valor de ρ. Las probabilidades en este sistema están dados por

$$Pn = \begin{cases} \dfrac{\rho^{n}(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \rightarrow cuando(\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{K+1} \rightarrow cuando(\rho = 1) \end{cases}$$

P_n probabilidad de que haya n paquetes en el sistema

ρ intensidad de tráfico en el sistema

K Numero de paquete que caben en el sistema

Sistema de colas M/M/C

Este sistema al igual que el sistema M/M/1 presenta una capacidad infinita por la cual se establece una condición de no saturación para alcanzar el estado estable, ya que de esta manera se cuida que el número de paquetes no crezca infinitivamente. Para este software solo se ocuparan colas que se saturan, por lo que la condición será la siguiente: $\rho < 1$

Donde ρ se calcula así $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

ρ = Intensidad del tráfico en el sistema

λ = Número medio de llegadas

c = Numero de servidores en el sistema

μ = Número medio de paquetes que el servidor es capaz de atender por unidad de tiempo.

Capítulo 3: Introducción al lenguaje de programación R

El uso de un programa de computación (software) estadístico es importante tanto en la ciencia básica como en la aplicada en el ejercicio profesional, para realizar pruebas de hipótesis, ajustes de modelos, análisis de diseños experimentales complejos, analizar grandes bases de datos y una gran cantidad de variables.

3.3.1 Evolución de lenguaje de programación R

Versión 0.16: Es la última versión alfa desarrollada esencialmente por Ihaka y Gentleman, que incluye gran parte de las características descritas en el "White Book". La lista de correo comenzó su andadura el 1 de abril de 1997. Versión 0.49 (23 de abril de 1997): Es la versión más antigua de la que se conserva el código (que todavía compila en algunas plataformas UNIX). En esta fecha arrancó también CRAN con tres espejos que albergaban 12 paquetes. Poco después aparecieron las versiones alfa para Windows y Mac OS. Versión 0.60 (5 de diciembre de 1997): R se integra oficialmente en el Proyecto GNU. El código se versiona a través de CVS. Versión 1.0.0 (29 de febrero de 2000): Los desarrolladores lo consideran suficientemente estable para su uso en producción.4 Versión 1.4.0: Se introducen los métodos S4 y aparece la primera versión para Mac OS X. Versión 2.0.0 (4 de octubre de 2004): Introduce el lazy loading, que permite una carga rápida de datos con un coste de memoria mínimo. Versión 2.1.0: Aparece el soporte para UTF-8 y comienzan los esfuerzos de internacionalización para distintos idiomas. Versión 2.9.0: El paquete 'Matrix' se incluye en la distribución básica de R. Versión 2.11.0 (22 de abril de 2010): Soporte para sistemas Windows de 64 bits. Versión 2.13.0 (14 de abril de 2011): Añadida una nueva función al compilador que permite acelerar las funciones convirtiéndolas a byte-code. Versión 2.14.0 (31 de octubre de 2011): Añadidos espacios de nombres obligatorios para los paquetes. Añadido un nuevo paquete de paralelización. Versión 2.15.0 (30 de marzo de 2012): Nuevas funciones de balanceo de cargas. Mejorada la velocidad de serialización para grandes vectores. Versión 3.0.0 (3 de abril de 2013): Mejoras en GUI, funciones gráficas, gestión de memoria, rendimiento e internacionalización. Última versión 3.2.4 (16 de marzo 2016): Últimas Versiones hasta la fecha 3.3.1 (21 de junio del 2016) y Versión 3.3.3 (06 de marzo del 2017)

3.3.2 ¿Qué es R?

R es un sistema para el análisis estadístico y gráfico creado por los neozelandeses **R**oss Ihaka y **R**oberth Gentleman en 1993. Se llamó R, en parte al reconocimiento de la influencia de S y además para hacer gala de sus propios logros. R se distribuye gratuitamente bajo los términos de la GNU (General Public Licence); implementa un dialecto del lenguaje S, desarrollados en los laboratorios Bell por John Chambers, su desarrollo y distribución son llevados a cabo por varios estadísticos conocidos como el Grupo Nuclear de desarrollo de R[21]. Está disponible para los sistemas operativos Windows, Macintosh, Unix y GNU/Linux. Los "manuales" de R, incluidos en todas las instalaciones. Son: An introduction to R. Writing R extensions. R data import/export. The R language definition. R installation and administration[22].

El lenguaje R, siendo un lenguaje de programación orientado a objetos, incorpora sentencias básicas de bucles y condicionamiento junto con herramientas sofisticadas de alto nivel para el análisis estadístico, lo cual le da una enorme flexibilidad, se trata de uno de los lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística, siendo además muy popular en el campo de la minería de datos, la investigación biomédica, la bioinformática y las matemáticas financieras, entre otros. A esto contribuye la posibilidad de cargar diferentes bibliotecas o paquetes con funcionalidades de cálculo o graficación. Por todas estas razones, el lenguaje R tiene cada vez más preponderancia en el mundo académico y en la investigación estadísticas. En primer lugar, debemos aclarar que R es un lenguaje interpretado, no compilado. Esto quiere decir que el usuario puede ingresar expresiones o comandos de R tras el carácter de petición que inmediatamente serán evaluados, devolviendo el intérprete un resultado, además encadenar una secuencia de instrucciones o expresiones en R para crear lo que se conoce como scripts. Los tres tipos básicos de datos son el numérico (constantes numéricas reales o enteras, indistintamente), las cadenas de caracteres (que se encierran entre comillas) y los lógicos.

3.3.3 Principales características

+ R es un software libre: Cuenta con la licencia GNU GPL. Muchos de los software comerciales estadísticos cuestan cientos de dólares. Como SigmPlot cuesta cerca de 900 dólares, Minitab más de 1500 dólares, MatLab 2150 dólares, entre otros.

+ R incluye un lenguaje de programación bien desarrollado, simple y efectivo, que admite condicionales, ciclos, funciones recursivas y posibilidad de entradas y salidas. Este lenguaje es orientado a objetos, muy parecido en su sintaxis a C/C++. Las facilidades de programación incluidas en R son muy amplias, lo que hace más eficiente la implementación de nuevos procedimientos, así como el uso reiterado de funciones existentes.

+ En R es permitido editar todas las funciones y ver su implementación, la que se puede modificar de acuerdo con las necesidades del usuario.

+ Es multiplataforma. Puede utilizar R en Windows, Mac, Linux y Unix. Esto significa que cualquier persona puede trabajar con nuestros datos, gráficos, análisis y más importante aún usar nuestras instrucciones (también conocido como scripts o código) para generar las gráficos y el análisis. Programas tales como R-studio, Java GUI for R, R- commander, RKWard, entre otros, y con más de 6000 paquetes indexado en CRAN, Biocoductor, GitHub y R-Forge.

+ Es de código abierto, existe una gran comunidad de voluntarios trabajando para mejorarlo, lo cual permite ser moldeado y dirigido a cuestiones específicas. Creando así programas y paquetes. Se puede examinar el código para cualquier función o cálculo que se realiza. De hecho, puedes incluso modificar y mejorar estas funciones cambiando el código.

+ Manipulación de datos. R te permite manipular (seleccionar, recodifica, recuperar) datos muy rápidamente. Algunos paquetes de R han sido diseñados para ello especialmente, como plyr.

+ Más fácil automatización. R utiliza un lenguaje de script en lugar de una interfaz gráfica de usuario, por lo que es mucho más fácil de automatizar cosas en R que en otros programas. Esto le puede ahorrar un montón de tiempo, especialmente cuando tiene que volver a ejecutar el mismo análisis varias veces.

+ Lee cualquier tipo de datos. R puede leer prácticamente cualquier tipo de datos (.txt, .csv, .dat, etc). También hay paquetes de R específicamente diseñados para leer archivos JSON, SPSS, Excel, SAS, STATA. E incluso se puede usar los datos de cualquier sitio web y ejecutar consultas SQL.

+ Más fácil Organización de Proyectos. Es más fácil mantener un proyecto organizado cuando se trata de R porque las diferentes tareas o sub-proyectos se pueden guardar en archivos separados almacenados en la misma carpeta y unidos entre sí en un mismo proyecto con RStudio.

+ Es compatible con grandes conjuntos de datos. R es compatible con los datos de mayor tamaño, y puede soportar grandes volúmenes de datos con paquetes como Hadoop.

+ La replicabilidad. R tiene características que hacen mucho más fácil replicar los resultados de su análisis; algo que es importante para la detección de errores. En primer lugar, es fácil de agregar comentarios a las secuencias de comandos para que quede claro lo que estás haciendo. Comentar el código es importante por lo que puede servir como una "traducción" para alguien más que lo vea en el futuro. En segundo lugar, los datos y el análisis permanecen separados en R, lo que permite ver la progresión lógica.

+ Precisión. R fue diseñado específicamente para hacer análisis estadístico, por lo que es más preciso y exacto para el análisis de datos.

+ Los gráficos. R tiene capacidades avanzadas de gráficos. Se puede crear gráficos utilizando tanto el paquete básico de R como lattice o ggplot.

3.3.4 Desventaja de uso y aplicación de R

Los mensajes de error que R nos muestra, no es específica sobre los fallos que estamos realizando y solo un usuario con cierta experiencia en el uso de R puede saberlo.

R es un lenguaje de programación en línea de comando, lo cual no involucra el uso de menús como otros programas estadísticos, esto hace que muchas personas que no están familiarizadas en la programación, les resulte muy difícil migrar a R. Pero esto más que una desventaja es una ventaja, porque al programar entenderás mejor la base de la estadística y el análisis de datos, comparados con otras personas que no utilizan R.

3.3.5 Relación y diferencia con otros programas estadísticos

Otros sistemas de software comerciales que integran con R incluyen: JMP, Mathematica, MATLAB, Spotfire, SPSS, Statistica, Platform Symphony, SAS, Tableau Software, Esri ArcGis, Dundas y Statgraphics. Y los software libres GNU Octave, Maxima, RStudio, Gnumeric, Gretl, WinBUGS, Tinn-R, SPP.

Además de la clara ventaja del costo cero de R versus los otros programas, las salidas de procesos que ofrece R son concisas y dejan al usuario la opción de solicitar un mayor nivel de detalle, favorecen una mejor práctica en el uso de la estadística, al mismo tiempo permitir a los estudiantes seguir empleando el mismo programa en su futuro ejercicio profesional, sin necesidad de invertir dinero en programas estadísticos y con la ventaja de aprovechar los conocimientos técnicos adquiridos previamente. En resumen, la gran versatilidad de los procedimientos estadísticos disponibles, la capacidad de producir gráficos de calidad y la amplia documentación gratuita, hacen de R un excelente programa estadístico para ser usado en docencia e investigación. La gratuidad de R además, permite no solo trasmitir el uso de un software legal, sino también acceder libremente a un programa de alta calidad. Por otra parte, la transparencia en la construcción de R permite un mayor control del proceso de generación de conocimiento por parte de los usuarios.

3.3.6 Instalación de R

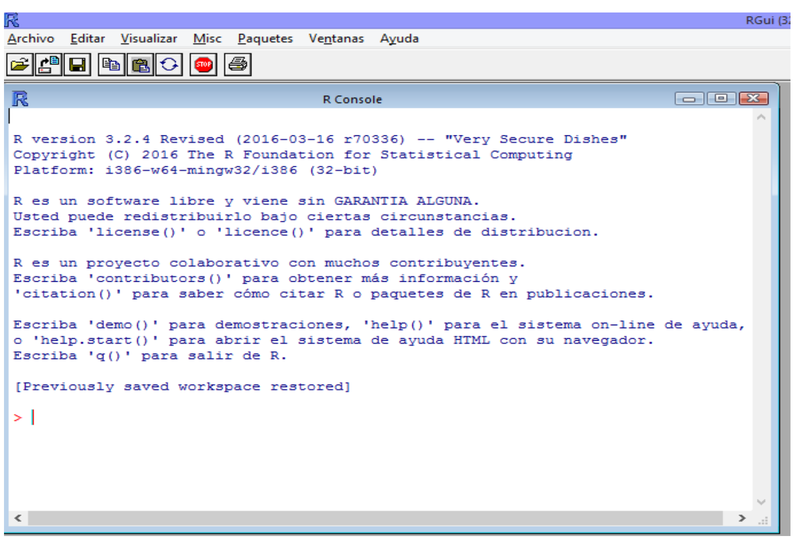
- Programa disponible en http//: www.rproyect.org/index.html, “descargar”.
- Al abrirse la ventana “Abrir archivo-Advertencia de seguridad”, hacemos clic sobre el botón “Ejecutar”.
- Seleccionamos el idioma de instalación.

- Seguimos las instrucciones del asistente de instalación de R, "siguiente".
- Leemos las condiciones de licencia de R, "siguiente".
- Seleccionamos la carpeta donde instalaremos R, "siguiente".
- Seleccionamos los componentes a instalar, "siguiente".
- Especificamos si utilizaremos opciones de configuración, "siguiente".
- Seleccionamos dónde se crearán accesos directos al programa.
- Seleccionamos tareas adicionales como la de "Crear un icono en el escritorio", "siguiente".
- Una vez ejecutadas las acciones anteriores, R se instalará automáticamente.
- Para terminar el proceso hacemos clic sobre el botón "Finalizar".

3.3.7. Consola del ambiente R.

Menú principal: Compuesto por los menús: Archivo, Editar, Visualizar, Misc, Paquetes, Ventanas, y Ayuda. Al desplegar estos menús, podemos realizar procedimientos complementarios a la escritura de programas en R.

Iconos de funciones: Constituyen accesos abreviados o rápidos a las funciones más usadas de R, como: abrir archivos de programas (documentos con extensión *.txt, *.R); cargar espacios de trabajo (archivos con extensión *.RData); copiar; pegar; copiar y pegar consecutivamente en la Consola, interrumpir la ejecución de instrucciones, e imprimir.



La consola es el espacio en donde: en letras rojas, aparecen las instrucciones dadas a R y en letras azules, sus resultados.

La ventana Script es un espacio en donde podemos escribir instrucciones. Para que R las ejecute primero debemos seleccionarlas y luego realizar cualquiera de las acciones siguientes: desplegar el menú: Editar → correr línea o seleccionar; presionar la tecla F5; presionar simultáneamente las teclas CTRL+R; o presionar el siguiente ícono: Para grabar un Script desplegamos el menú Archivo → Guardar o Archivo → Guardar como.

Para abrir una Script existente desplegamos el menú Archivo → Abrir Script…

3.3.8 Objetos y operaciones básicas.

En el lenguaje R se puede trabajar con varias clases de objetos; algunos estándar en cualquier lenguaje de programación y otros son objetos específicos de R, objetos pensados para ser manejados con propósitos estadísticos [25].

Vectores: El vector es la estructura de datos básica y puede asumir diversos modos, entre ellos: numéricos, caracteres y lógicos. R utiliza el operador de asignación "<-" (también se puede poner en sentido contrario), en general no se hacen asignaciones con "=". Los operadores básicos son +, −, ∗, /, ^, log, exp, sin, cos, tan, sqrt. En R tenemos los dos valores lógicos: TRUE y FALSE. Los operadores lógicos so<=, >, >=, == para igual y !=para distinto. Además '&' se usa para indicar intersección ("y"), '|' indica disyunción ("o") y '!' indica la negación.

Ejemplo: el vector numérico x es una secuencia de números consecutivos del 1 al 4.

```
> x
[1] 1 2 3 4
```

Factores: Es cuando los datos pueden ser agrupados de acuerdo a un determinado criterio. Un factor es un objeto que tiene como base un vector, al cual se le ha identificado sus niveles. Estos niveles describen grupos en el vector.

Ejemplo:. estudiantes.origen<-c("getafe","mostoles","madrid","madrid","mostoles", "leganes","getafe","leganes","madrid","mostoles","parla","alcorcon","mostoles", "getafe","leganes"), lenght(estudiantes.origen)

```
 [1] "getafe"   "mostoles" "madrid"   "madrid"   "mostoles" "leganes
 [7] "getafe"   "leganes"  "madrid"   "mostoles" "parla"    "alcorco
[13] "mostoles" "getafe"   "leganes"
```

Arreglos y Matrices**:** Son la extensión natural de los vectores. Un arreglo (array) o una matriz se podrían definir del siguiente modo:

m1 <- array(1:20,dim=c(5, 4)) ; m1

Es una tabla o arreglo de dos dimensiones (filas y columnas). Una matriz tiene todos sus elementos de un mismo modo, factores o vectores, pero no ambos.

Ejemplo: la matriz m1 tiene 20 elementos, 5 filas y cuatro 4 columnas.

```
> m1
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    6   11   16
[2,]    2    7   12   17
[3,]    3    8   13   18
[4,]    4    9   14   19
[5,]    5   10   15   20
```

*Listas y data frames***:** Una lista es un objeto cuyas componentes pueden ser arrays, listas, Data Frames, Variables lógicas,... y cualquier combinación de éstos (permite almacenar datos de distinta naturaleza como nombre, edad, ingresos, trabajos anteriores...) Los distintos elementos de la lista no han de ser necesariamente del mismo tipo. Por ejemplo, *Lst <- list(name="Fred", wife="Mary", no.children=3, child.ages=c(4,7,9))* devuelve una lista con formada por 4 objetos, dos variables de tipo carácter, un valor numérico y un vector de tres componentes.

Los data.frames (campos de datos) son el objeto más habitual para almacenar datos. La forma de pensar en un data.frame es considerar que cada fila representa a un individuo de una muestra y el correspondiente valor para cada columna se corresponde con la medición de alguna variable para ese individuo (fila-individuo, columna-variable).

Ejemplo: el cuadro de datos llamado grupo 1, está compuesto por los factores residencia y sexo y los vectores, edad y nota.

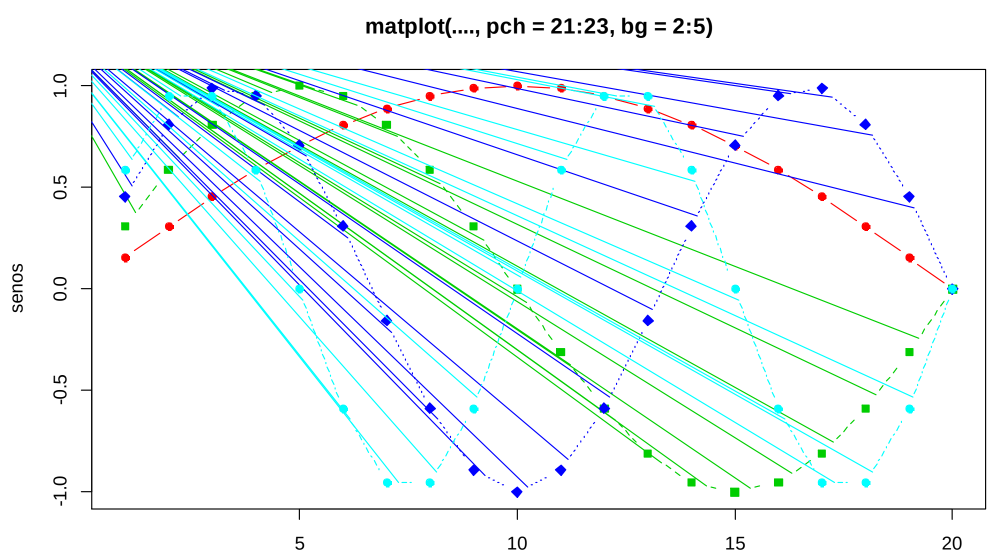
```
> grupo1
    resi sexo edad nota
1 urbana    h   15   15
2  rural    m   16   15
3  rural    h   17   14
4  rural    m   17   13
5 urbana    h   18   17
6 urbana    m   19   18
7 urbana    h   18   10
8 urbana    h   16   17
9  rural    m   15   12
```

Para obtener ayuda acerca de, por ejemplo, la función plot, se podrían utilizar los siguientes comandos *?plot, help(plot), help.search(plot).* Los dos primeros son equivalentes y el tercero permite realizar búsquedas más avanzadas. Además, también se pueden utilizar los correspondientes elementos del menú help[31].

Al iniciar el programa R se cargan por defecto unas librerías básicas. A veces es necesario cargar otras librerías para realizar ciertos análisis, o llamar a algunas funciones “no básicas”. Esto se hace a través del comando *library(nombre).*

Gráficos**:** Las órdenes gráficas de nivel alto están diseñadas para generar un gráfico completo a partir de unos datos pasados a la función como argumento. Una de las funciones gráficas más utilizadas en R es *plot*, que es una función genérica, esto es, el tipo de gráfico producido es dependiente de la clase del primer argumento. La función *plot(x), s*i x es una serie temporal, produce un gráfico temporal, si x es un vector numérico, produce un gráfico de sus elementos sobre el índice de los mismos, y si x es un vector complejo, produce un gráfico de la parte imaginaria sobre la real de los elementos del vector[24].

```
require(grDevices) ;  matplot((-4:5)^2, main = "Quadratic") # casi parecida a plot(*)
senos <- outer(1:20, 1:4, function(x, y) sin(x / 20 * pi * y))
matplot(senos, pch = 1:4, type = "o", col = rainbow(ncol(senos)))
matplot(senos, type = "b", pch = 21:23, col = 2:5, bg = 2:5,
                        main = "matplot(...., pch = 21:23, bg = 2:5)")
```



IV. DISEÑO METODOLOGICO

4.1 Tipo de estudio**:** Es de tipo cualitativo, descriptivo y de corte transversal.

4.1.1 Cualitativo*:* Se realizó las guías de laboratorio siguiendo procedimiento pedagógico para facilitar la enseñanza-aprendizaje de Procesos Aleatorios.

4.1.2 Descriptivo: Se describe los aspectos generales del componente Proceso Aleatorio tales como la situación actual en la carreras antes descritas y su contenido, con el fin de facilitar la realización y comprensión de las guías de laboratorio.

4.1.3 De corte transversal*:* Se realizó en el período comprendido enero – junio 2017.

4.2 Área de estudio**:** Procesos Aleatorios

4.3 Unidad de análisis**:** Guías de laboratorios elaboradas para los estudiantes y docentes de los Departamentos de Matemática-Estadística y Computación.

4.4 Criterios de inclusión**:**

Estudiantes que llevan los componentes Procesos aleatorios y docente que la imparten.

4.5 Criterios de exclusión**:**

Los que no tienen en su pensum académico el Componente Procesos Aleatorios o temas relacionados al mismo.

4.7 Fuente de la recolección de la información:

Secundaria: libros, tesis e informes y documentos de Internet.

4.8 Procesamiento de la información**:** Para procesar y analizar las Guías de Laboratorio se utilizó el lenguaje de programación R versión 3.2.4, Word y PowerPoint 2013, elaborándose gráficos, tablas y matrices para su presentación.

V. RESULTADOS Y ANALISIS DE RESULTADOS

A continuación se presentan las 12 guías de laboratorios elaboradas con el software R, con el siguiente esquema general.

GUIA PRÁCTICA Nº #
Temas:
Objetivo general:
Objetivos específicos:
Requerimientos: Software y hardware a utilizar.
Introducción de Temas:
Ejemplo Script: Programación en R

Se realizaron 12 guías de laboratorio como instrumentos que sirven de orientación con el fin de facilitar la comprensión del componente Procesos Aleatorios, donde se abarcan los contenidos referentes al mismo, agrupándolas según temas relacionados.

En las guías prácticas 01 a 03, se aborda en primer lugar una introducción a la probabilidad y variable aleatoria, en seguida se desarrolla la definición y el cálculo de los cuatro primeros momentos de una variable aleatoria para distribuciones discretas y continuas, enfatizando en distribuciones binomial, normal, exponencial y Erlang.

En la guía práctica 04, se aborda la Ley de los grandes números y algunos teoremas límites; se define y ejemplifica la ley fuerte y la ley débil de los grandes números, el teorema de Tchebyshef, la desigualdad de Markov, y el teorema central de límite.

En la guía práctica 05, se introduce a los procesos aleatorios o estocásticos, definiendo y ejemplificando los tipos de procesos estocásticos y se clasifican según tiempo y estado, y según sea discreto o continuo.

Guías prácticas 06 a la 10, se desarrollan las Cadenas de Markov en tiempo Discreto (CMTD), el comportamiento transitorio de una CMTD, clasificación de estados, el comportamiento límite de una CMTD irreducibles y reducible, y la sistematización práctica para una CDTD reducible.

Y por último se abordan en las Guías prácticas 11-12, los modelos de cola, análisis de costos y modelos de cola Markovianos M/M/S/FIFO.

GUIA PRÁCTICA #01: Resumen de Probabilidad

TEMAS: Probabilidad, Variables aleatorias. Valores Esperados: Cuatro Primeros Momentos Centrales. Función característica y Función generatriz de Momentos. Esperanza Condicional y Estimadores Bayes. Distribuciones Discretas y Continuas: Binomial, Poisson, Hipergeométrica, Normal, t-Student, Beta, Gamma, Erlang(k), Weibull, Exponencial. La distribución exponencial, Propiedad Pérdida de Memoria y Funciones de Índice de Riesgo. Desigualdades en Probabilidad. Teoremas de Limite. Procesos Estocásticos o Aleatorios.

Objetivo general

- Presentar las funciones de densidad estadística, y su importancia en el comportamiento de sistemas y de procesos. Determinar funciones de densidad en sus momentos centrales a través de integrales.

Objetivos específicos

- Encontrar la fórmula analítica de funciones de distribución y de densidad a partir de proposiciones matemáticas y sus cuatro primeros momentos centrales y su uso genérico.
- Resolver problemas de aplicación práctica haciendo uso de lenguaje de programación R para la visualización de funciones de densidad y de distribución, sus momentos y posterior análisis.

Requerimientos

- Formulas analíticas para el cálculo de integrales y derivadas entre otras.
- Hardware: Procesador con velocidad de 2.1 ghz, Memoria RAM de 1 GB. Una PC con Windows.
- Software (última versión): Lenguaje R versión 3.3.1, Scilab 5.5.2, MatLab. Maxima.

Introducción de Temas: Funciones de Densidad y Momentos

Variable Aleatoria: es una función de valores reales definida sobre el espacio muestral de un experimento, es cuantificable o medible. Por ejemplo al seleccionar al azar una persona de una población y medirle la estatura en centímetros; el experimento es Medir Personas y la Variable aleatoria es la medición de la estatura.
Una función de densidad $f_d(X)$ de una variable aleatoria continua X, se define como una función de valor real $f_d(X) \geq 0$, de área probabilística $A = \int f_d(X)*dX = 1$, sobre el dominio de X, real. La siguiente tabla muestra los primeros Momentos Centrales para una variable aleatoria X.

Media $E(X) = \mu$	Varianza $Var(X) = \sigma^2$	Asimetría $As(X) = \varsigma$	Curtosis $Kt(X) = \kappa$
$\int x*f_d(x)*dx$	$\int (x-\mu)^2 * f_d(x)*dx$	$\int [(x-\mu)/\sigma]^3 * f_d(x)*dx$	$\int [(x-\mu)/\sigma]^4 * f_d(x)*dx$

Los Primeros cuatro momentos estadísticos centrales (parámetros discriminantes) para un modelo de probabilidad son: El parámetro de localización μ, también llamado Media, es una medida de localización. En particular, se ha visto que el momento central de orden 2 es la varianza que es una medida de dispersión al igual que la Desviación estándar $\sigma = \sqrt{(\sigma^2)}$. El momento central de orden 3 es una medida de la asimetría de la distribución y el momento central de orden 4 mide el apuntamiento o curtosis de la distribución. Los coeficientes de sesgo y de curtosis, a ambos se los denomina como parámetros de forma para el modelo de probabilidad.

Una variable estandarizada Z, es aquella a la que se ha restado la media y dividido por su desviación típica $Z=(X-\mu)/\sigma$; y tiene media cero y varianza 1. Observe de la tabla anterior, que los Parámetros de Forma se calculan sobre variable estandarizada. Esta es una alternativa para trabajar con datos sin escala para datos X estén o no igualmente espaciados. Una transformación lineal de la forma $Y = (X-X_c)/d$; resta a cada valor X un centro arbitrario X_c, y lo divide por un valor de distancia fija d; para datos igualmente espaciados.

La Esperanza matemática de una v. a. discreta X con valores posibles $[X_1, X_2, X_3\ldots X_n]$ con probabilidades respectivas $[P_1, P_2, P_3\ldots P_n]$ su valor esperado es $E(X)= \mu = X_1*P_1+ X_2*P_2+ X_3*P_3+\ldots+ X_n*P_n$. Si todos los sucesos son equi-probables la esperanza es la media aritmética. Una Propiedad del Valor esperado, para dos variables aleatorias X y Y independientes es: $E[aX+bY+c]=aE[X]+bE[Y]+c$, donde a, b y c son constantes reales.

La Varianza de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad P, es una medida de la dispersión de X respecto de su valor esperado, y se calcula por: $Var[X] = E[X-E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2= E(X^2) - \mu^2$. Donde $E[X^2]= \Sigma(Xi)^2*P_i$ esto es, $E[X^2]= (X_1)^2*P_1+ (X_2)^2*P_2+ (X_3)^2*P_3+\ldots+ (X_n)^2*P_n$.

Propiedad de la Varianza $Var(a*X+b) = a^2*Var(X)$, donde a y b son constantes reales. La varianza está en unidades cuadradas de la medición de la variable aleatoria X, si por ejemplo X es dada en libras, el valor esperado estará dado en libras pero la varianza en libras cuadradas. Por esto se calcula la Desviación Típica extrayendo la raíz cuadrada a la Varianza: DT(X) = Raíz [Var(X)]; también DT(a*X+b) = |a|*DT(X).

Ejemplo 1: Las demandas diarias de un comprimido analgésico (de 3mg.) en una UCI que puede albergar hasta 5 pacientes, tiene registrado el siguiente comportamiento X= [0, 1, 2, 3, 4, 5] con frecuencias relativas P= [0.17, 0.25, 0.22, 0.15, 0.11, 0.10]. Dibuje el Diagrama de Barras de la Distribución. Calcule El Valor y la Varianza esperado de la demanda diaria de analgésicos. El siguiente recuadro muestra la solución en R.

```
X = scan( text = "0  1  2  3  4  5 " )    ;  P = scan( text = "0.17  0.25  0.22  0.15  0.11  0.10") # ingresar datos
Media = sum (X*P)  ; Varianza = sum(X^2*P) - Media^2 ; DT = sqrt(Varianza)   # Cálculo de estimadores
Z= (X-Media)/DT ;  sesgo = sum(Z^3*P) ; Kurt = sum(Z^4*P)      # Variable estandarizada y momentos 3º y 4º
data.frame( Media, Varianza, Desv.Tip = DT, Asim = sesgo, Kurtosis = Kurt )  # Mostrar cuadro de estadísticos
plot(X, P, type="h", lwd=10, col=4, main="Analgesico en UCI por dia")   #  Gráfico diagrama de barras
barplot(P, names.arg=X, col=4, main="Analgesico en UCI por dia")         # Gráfico diagrama de barras
```

Resultados: E(X)=2.08, $Var(X)=6.74-2.08^2=2.4136$, DT(X)=1.553577, As(X)=0.4107579, Kt(X)=2.127625

Ejemplo 2: Suponga que la función de densidad (fdp) de las ventas por día al menudeo de un producto (en quintales) es $f(X)=2(1-X)$ para $0<X<1$. Dibuje la fdp, la FDC y calcule los momentos a mano o en el computador. Tarea, calcule las probabilidades: $P(0 \le X \le 0.30)$, $P(X \ge 0.70)$, $P(0.20 \le X \le 0.80)$.

```
fd = function(x) 2*(1-x) ; Fd = function(x) x*(2-x) ; mux = integrate( function(x) x*fd(x), 0, 1) ;  str(mux) ;
M=mux$value ; varx = integrate( function(x) (x-M)^2*fd(x), 0, 1) ;  DT = sqrt(varx$value)
SG = integrate( function(x) ((x-M)/DT)^3*fd(x), 0, 1) ;  KT = integrate( function(x) ((x-M)/DT)^4*fd(x), 0, 1) ;
data.frame(Media=M, DesvT=DT, SG$value, KT$value)  ; par(mfrow=c(1,2)) ; curve(fd, 0, 1) ; curve(Fd, 0, 1)
```

Tarea: Una empresa de ventas en línea, dispone de 6 líneas telefónicas. Sea X el número de líneas en uso en un tiempo especificado. Suponga que la función de probabilidad masa es la que se da en la siguiente tabla. Dibuje el diagrama de barras. Calcule y analice los cuatro momentos centrales. Calcule las siguientes probabilidades: A lo sumo tres líneas están en uso. Menos de tres líneas en uso. Por lo menos tres líneas en uso. Entre una y cuatro líneas en uso. Entre dos y cinco líneas no están en uso.

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

GUIA PRÁCTICA #02: Distribuciones de Probabilidad Discretas y Continuas

La distribución Binomial con parámetros n y p es la distribución de probabilidad discreta del número de éxitos en una secuencia de n experimentos binarios independientes, cada uno de los cuales se obtiene éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad 1-p. Un experimento de éxito / fracaso también se llama un experimento de Bernoulli o ensayo de Bernoulli; cuando n = 1, la distribución binomial es una distribución de Bernoulli. El modelo de probabilidad es p(X) = C(n, X)*p^X*(1-p)^(n-X), para X = 0, 1, 2,… n. Tiene media E(X)=n*p y varianza Var(X) = n*p*(1-p). La función C(n, k) es la combinatoria de n en k: C(n, k)= n!/[k!*(n-k)!].

Ejemplo 1**:** Comparemos el comportamiento de la distribución Binomial en los parámetros n=10 con p=0.2 y, p=0.5.

```
n=10 ; X= 0:n ; P_0.5= dbinom(X, n, 0.50); P_0.2= dbinom(X, n, 0.20) ; Prob = paste("P=", c(5 , 2)/10)
X= cbind(X-0.1,X+0.1) ; P= cbind(P_0.5, P_0.2) ; matplot(X , P , type="h", col=4:3, lwd=5, lty=1) ; grid(col=3)
title("Distribuciones Binomiales con n=10, p=0.2 y p=0.5", cex.main=1) ; legend(7, 0.3, Prob, fill=4:3)
sum(dbinom(3:7, 10, 0.50)) ; sum(dbinom(1:4, 10, 0.20))    # P(3 ≤ X ≤ 7) = 0.890625 y P(3 ≤ X ≤ 7) =
0.8598323
```

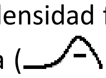
La Distribución Normal es un modelo probabilístico, fundamental en Estadística, tiene media E(X)= μ y varianza Var(X)= σ^2, su función de densidad es definida para X en todo el dominio Real, a como sigue: $f_d(X)= 1/(\surd(2\pi)*\sigma)*\exp[-½*((X-\mu)/\sigma)^2)]$

La distribución normal estándar, definida para X real, con media E(X)=0, y Var(X)=1, y su función de densidad: $f_d(X)= 1/\surd(2\pi)*e\text{^}(-½*X^2)$

Observe del gráfico que casi toda el área de probabilidad se concentra en [-3, 3], por lo cual se puede considerar el doble de este intervalo para sus límites. Los coeficientes de sesgo (skewness) y de curtosis (kurtosis) para la distribución normal estándar, son As(X)=0, y Kt(X)=3, y se calculan por integración directa:

- $As(X) = \int x^3 *f_d(x)*dx = 0$ $\quad Kt(X) = \int x^4 *f_d(x)*dx = 3.$

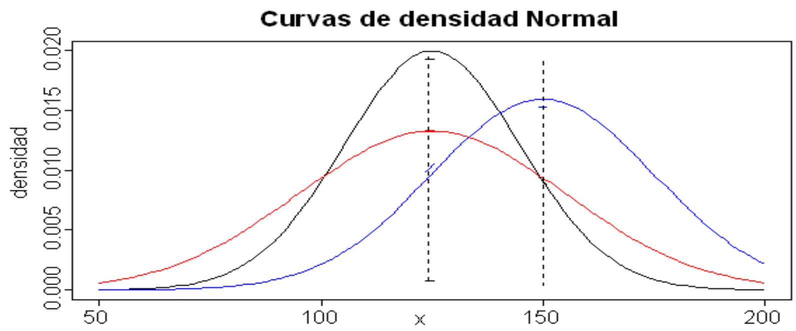
Ahora, cualquier otra función de densidad f_d con sesgo ς > 0, es asimétrica positiva (

) y con sesgo ς < 0, es asimétrica negativa (

). La curtosis para f_d, si κ > 3, la normal tendría mayor área de cola que la función dada (f_d leptocúrtica), y si κ < 3, la normal tendría menor área de cola que aquella (f_d platicúrtica).

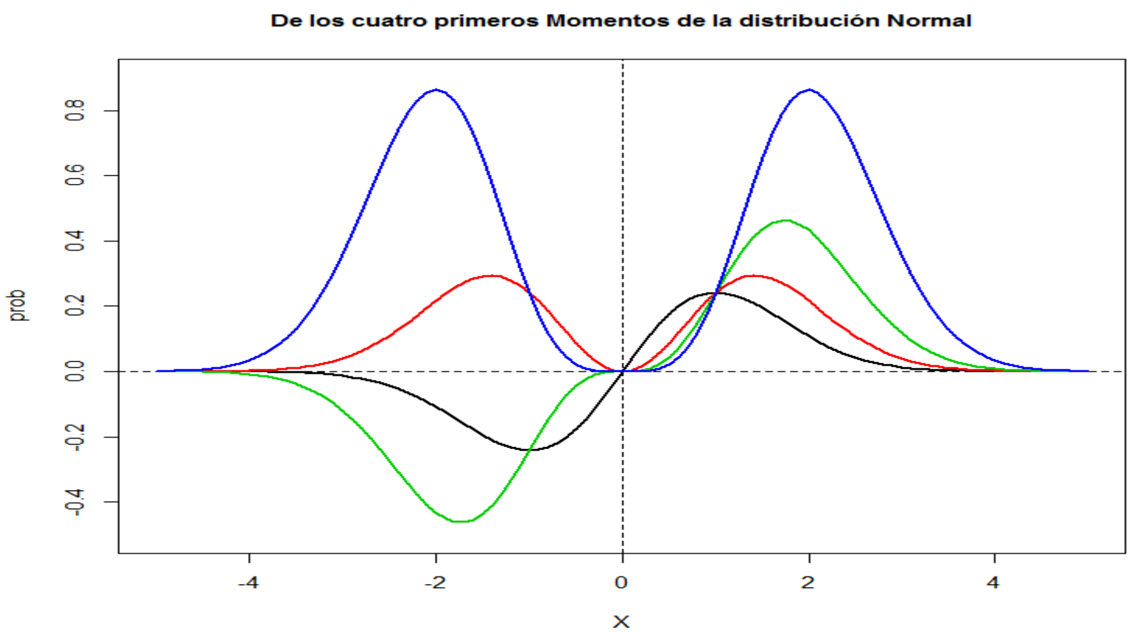
Ejemplo 2: Ejemplos de funciones de densidad normal con media 125 y 150; desv. típicas 20, 30 y 25:

```
curve(dnorm, -3,3, type="h", col=heat.colors(100))  # Se grafica la función de densidad normal estándar
curve(dnorm(x, 125, 20), 50, 200, ylab="densidad")  ;  curve(dnorm(x, 125, 30), add=TRUE, col=2)
curve(dnorm(x, 150, 25), add = TRUE, col = 4) ; title("Curvas de densidad Normal"); abline(v=c(125, 150),
lty=2)
alfa=c(1, 5, 10)/100 ; alfa ; qnorm(1-alfa/2) # Cuantiles de prob Normal; prob(-1.96 ≤ X ≤ 1.96) = 0.950
```



Ejemplo 3: Comprobemos en el computador los cuatro momentos para la distribución normal estándar.

```
for(k in 0:4)  print(integrate( function(x) x^k*dnorm(x), -Inf, Inf))  # La media es cero y varianza uno.
# Resultan los valores 0, 1, 0 y 3 para la media, varianza, coeficiente de sesgo y curtosis, respectivamente
fE = function(x) x^1*dnorm(x) ; fV = function(x) x^2*dnorm(x)     # Media y Varianza
fS = function(x) x^3*dnorm(x) ; fK = function(x) x^4*dnorm(x)     # Coef. De Asimetría y de Curtosis
plot(0, 0, xlim=c(-5,5), ylim=c(-0.5, 0.9), xlab= "X", ylab="prob" , type="n"); abline(h=0, v=0, lty=2)
curve(fE, col=1, lwd=2, add=TRUE); curve(fV, col=2, lwd=2, add=TRUE);
curve(fS, col=3, lwd=2, add=TRUE); curve(fK, col=4, lwd=2, add=TRUE);
title(main="De los cuatro primeros Momentos de la distribución Normal", cex.main=1)
```



Ejemplo 4: El tiempo requerido (en horas) para terminar una tarea tiene función de densidad a como sigue: $f(X) = X^2$ para $0 \le X < 1$ y $f(X) = \frac{1}{4}(7 - 3X)$ para $1 \le X \le \frac{7}{3}$

Grafique la función de densidad y la función de distribución acumulada (a mano) y en el computador.

Calcule las probabilidades: $P(0.5 \le X \le 2.0)$, $P(0 \le X \le 1.0)$, $P(1.0 \le X \le \frac{7}{3})$ # Resulta: $\frac{11}{12}$ ⅓ ⅔

Calcule los cuatro primeros momentos a mano o en el computador

```
fd = function(x) ifelse(x<1, x^2, (7-3*x)/4) ; curve(fd, 0, 2.5, lwd=2) ; abline(h=0, v=c(0, 1, 7/3), lty=2)
title(main="Tiempo para completar una tarea", sub="funcion de densidad definida por tramos")
fE = function(x) x^1*fd(x) ; M= integrate(fE, 0, 7/3)[[1]] ; M ;  fV = function(x) (x-M)^2*fd(x)
 V = integrate(fV, 0, 7/3)[[1]] ; V ;  DT=sqrt(V); fS = function(x) ((x-M)/DT)^3*fd(x)
fK = function(x) ((x-M)/DT)^4*fd(x) ; integrate(fS, 0, 7/3) ;  integrate(fK, 0, 7/3) ; integrate(fd, 0, 7/3)
# Resultados E(X) = 1.212963 ,  Var(X) = 0.1855108,   As(X) = 0.1649364 , Kt(X) = 2.50553  y Area≈1.
```

GUIA PRÁCTICA #03: Distribuciones Exponencial y Erlang de parámetro k.

La distribución de probabilidad exponencial se utiliza con frecuencia como modelo de los tiempos entre la ocurrencia de eventos sucesivos, tales como los tiempos de llegadas o tiempos entre servicios, de unidades o personas. La distribución exponencial está estrechamente relacionada con la distribución de Poisson en una relación dual: al hablar de K como el número de clientes atendidos por unidad de tiempo equivale a medir los tiempos transcurridos para atender los K clientes. La duración o vida útil de componentes es también modelizada por esta distribución y las funciones de riesgo la usan como un modelo natural con tasa constante.

La función de densidad probabilística exponencial para μ que representa el valor esperado o media.

$f(x\,;\,\mu) = 1/\mu * \exp(-x/\mu)$ $\quad$ $P(0 \le x \le X) = F(X\,;\,\mu) = 1 - \exp(-X/\mu)$ $\quad$ para $x \ge 0$, $X>0$

Media $E(X) = \mu$; Varianza $Var(X) = \mu^2$; Coeficiente de Asimetría $As(X) = 2$; Kurtosis $Kt(X) = 9$

<u>La Propiedad de "falta de memoria o amnesia"</u> de la distribución exponencial se cumple para X si:

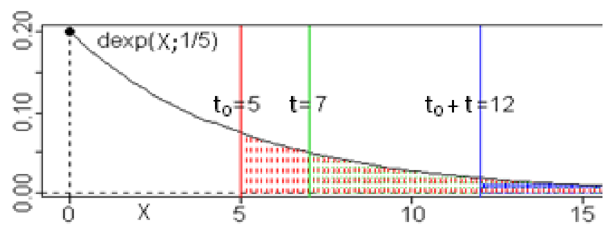
$P(X \ge t_0 + t \,/\, X \ge t_0) = P(X \ge t)$ para toda $t_0 > 0$ y $t > t_0$

Demostración por probabilidad condicional $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$:

$P(X \ge t_0 + t \,/\, X \ge t_0) = P(X \ge t_0 \cap X \ge t_0 + t)/P(X > t_0) =$

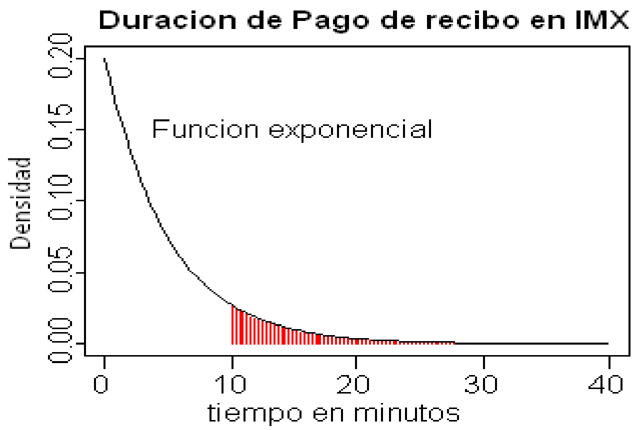
$P(X \ge t_0 + t)/P(X > t_0) = [1 - F_X(t_0 + t\,;\,\mu)] \,/\, [1 - F_X(t_0\,;\,\mu)]$

$= \exp[-(t_0+t)/\mu]/\exp[-(t_0)/\mu] = \exp[-(t)/\mu] = P(X \ge t)$.



Ejemplo 1: Describamos la función exponencial para μ = 5. Supongamos que el tiempo de servicio para pagos de recibos en IXIM, es de 5 minutos por cliente. Con que probabilidad un usuario pasa más de 10 minutos. Veamos cómo generar los resultados en R, por integrales y las funciones de probabilidad ya definidas:

```
fexp = function(x) dexp(x, 1/5) ; integrate(function(x) x*fexp(x), 10, Inf)  # ResultaP(X ≥ 10) = 0.1353353 = e(2)
# Verificamos ahora que la media esM = E(X) = 5 y la varianza Var(X) = (M)^2
integrate(function(x)  x*fexp(x), 0, Inf) ; integrate(function(x)  (x-5)^2*fexp(x), 0, Inf)
ejeX= "tiempo en minutos" ; ejeY="Densidad"# Se grafica la función de densidad exponencial
curve( fexp, 0, 40, xlab = ejeX,  ylab = ejeY ) ; curve(fexp, 10, 40,  add=TRUE, type="h", col=2) ; abline(v=0,h=0)
text(15, 0.15, "Funcion exponencial") ; title("Duracion de Pago de recibo en IXIM", cex.main=1)
# La función dual Poisson con λ=12 clientes por hora se grafica a continuación
X=0:24 ;titulo="Clientes atendidos por hora \n Distribución Poisson" ; ejeX="Número de clientes"
barplot(dpois(X, 12),  xlab=ejeX, ylab="Probabilidad", names.arg = X, main =titulo, cex.main=1)
sum(dpois(7:17, 12)) ; 1-sum(dpois(0:19, 12)) # Probabilidades discretas por intervalo: 0.94224 y 0.02128
```



Ejemplo 2: La magnitud X de los sismos registrados por mes en Japón puede representarse mediante una distribución exponencial con media λ=3.0 grados con la escala de Richter. Calcule la probabilidad de que un sismo cualquier: a) sea inferior a 2.5 grados en la escala de Richter. b) que rebase los 3 grados en la escala de Richter. c) que sean igual a 4 en la escala de Ritcher (¿cómo se distribuiría el número de sismos por mes?).

```
integrate(function(x) dexp(x, 1/3), 0, 2.5)  # Probabilidad P( X<=2.5) resulta  0.5654018
integrate(function(x) dexp(x,1/3), 3, Inf)   # Probabilidad acumulada( X>=3) resulta 0.3678794
pexp(2.5, 1/3, lower.tail = TRUE)  ; pexp(3, 1/3, lower.tail = FALSE)  # Resultados igual que los anteriores
e=0.5 ; integrate(function(x) dexp(x,1/3), 4-e, 4+e) # Probabilidad P(X = 4) ≈ P(3.5<= X <= 4.5) = 0.08827306
pexp(4+e, 1/3, lower.tail=TRUE)-pexp(4-e, 1/3, lower.tail=TRUE)  # Mismo resultado que el anterior
dexp(x=4,  1/3) #Valor de la función de densidad en x=4, que resulta  0.08786571 ¡Pero no es probabilidad!
```

La Función Índice de Riesgo (hazard/failureratedistribution): Supóngase que X representa la vida útil de un dispositivo complejo(electrónico, biológico, automotriz, alimenticio, etc.), con función de densidad f(x) y función de distribución acumulada F(x). La función índice de riesgo $h(X_t)$ se define como la probabilidad CONDICIONAL de la función de densidad de fallo; la condición es que dicho fallo no halla ocurrido al tiempo X_t. $h(X_t) = f(X_t)/[1 – F(X_t)]$ para $X_t > 0$ y $F(X_t) < 1$.

El denominador representa la función de probabilidad de supervivencia $R(Xt) = \int f(x)dx$en los límite $[X_t ,\infty)$. Así $h(X_t)$ también puede definirse por el cociente $h(X_t) = -R'(X_t)/R(X_t)$. Para la función de densidad exponencial, su función índice de riesgo se determina fácilmente que es constante $h(X_t)= 1/\mu$; el recíproco de la media.

Ejemplo 3: Suponga que la edad máxima de vida para cierta población es una variable aleatoria X con función de densidad f(X) = (100–X)/5000 para X en [0, 100]. La media es 33⅓ años, la varianza es $555^5/_9$ y la desviación típica es 23.57 años. Coeficientes de asimetría y de curtosis son 0.5656854 y 2.4, respectivamente. La función de distribución acumulativa es $F(X) = (200X–X^2)/10000$. La función de índice de riesgo es h(X) = 2/(100–X). Así para personas con edad de 60 años, tiene h(60)=0.05; luego hay un “riesgo” de 0.05 de sobrepasar aquella edad con vida (una de cada 20 personas). Realice los cálculos para f(X)=1/50*exp(-X/50) y compare.

La distribución Erlang de parámetro k: es un caso especial de la distribución gamma y más general que la exponencial de parámetro λ=1/μ, con función de densidad f(X) =1/(k-1)!*λ^k*X^(k-1)*exp(-λX) para X≥0 y k>0. Tiene sus cuatro primeros momentos: media E(X)=k/λ, varianza Var(X) = k/λ^2, DT(X) = √k/λ, As(X) = 2/√k,Kt(X)=6/k.
Los tiempos de espera entre k ocurrencias de un evento (espera, servicio,…) se distribuyen según Erlang(k). La distribución Erlang resulta de la suma de k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponenciales. Por ejemplo: Un sistema consiste de k=4 componentes conectados en serie. Tan pronto como un componente falla, todo el sistema fallará. Suponga que cada componente tiene tiempo de vida exponencial con λ=0.01 (μ = 100), y que los componentes fallan de forma independiente uno de otro (tiempo en horas).
Resultados Erlang(k=4, λ=0.01): Media 400 horas, Varianza 40000, Desv. Típica 200, Asimetría 1, Curtosis 1.5.

```
f =function(x) 1/6*10^(-8)*x^3*exp(-0.01*x)      # Se define la function Erlang(k=4)
integrate(function(x) x*f(x), 0, Inf) ; curve(f, 0, 1000)   # Se comprueba la media y se grafica la funcion
optimize(f,c(200,400), maximum=TRUE)  # Acotar el valor de máximopara f y se aproxima en Xmoda=300
abline(h=0, v=0, lty=2) ; grid(col=4); abline(v=c(300, 400), col=2) # Añadir cuadriculas y líneas verticales.
title("Suma de Exponenciales a DistribucionErlang") ; integrate(f, 775, Inf)$value    # Resulta 0.050122209
```

Ejercicios propuestos para Guías prácticas 01, 02 y 03

1. La oficina de impresión y grabado es la responsable de imprimir el papel de la moneda en un país. El departamento tiene una sorprendente baja frecuencia de errores de impresión; solo el 0.50% de los billetes presenta errores graves que no permiten su circulación. A) ¿Cuál es la probabilidad de que de un fajo de 1,000 billetes. Ninguno presente errores graves. B) Diez presentes errores que no permitan su circulación. C) Quince presenten errores que no permitan su circulación.

2. Los salarios de los trabajadores en cierta industria son en promedio 11.90 por hora y la desviación estándar es de 0.40, suponiendo que los salarios tienen distribución normal. A) ¿Qué porcentaje de trabajadores recibe entre 10.80 y 12.40 dólares? B) ¿Qué porcentaje de trabajadores reciben salarios inferiores a 11.00 dólares? C) ¿Qué porcentaje de trabajadores reciben salarios superiores a 12.95? D) ¿Qué porcentaje de trabajadores reciben salarios inferiores a 11.00 o supriores a 12.95?

3. Debido a las elevadas tasas de interés, una empresa reporta que el 30% de sus cuentas por cobrar de otras empresas están vencidas. Si un contador toma una muestra aleatoria de cinco de esas cuentas, determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos, utilizando la fórmula de la probabilidad binomial: a) ninguna de las cuentas está vencida, b) exactamente dos cuentas están vencidas, c) no más de dos cuentas están vencidas, d) exactamente el 20% de las cuentas están vencidas.

4. Un gerente selecciona al azar n=3 personas del conjunto de 10 empleados de su departamento, para asignarlos a un estudio de clasificación de sueldos. Suponiendo que anteriormente se asignó a 4 de los empleados a un proyecto similar, construya un diagrama de árbol de tres etapas que ilustren las selección de las tres personas en términos de si cada uno de ellos: tiene o no experiencia previa (E, EC), en clase de estudios. Además, anote los valores correspondientes de probabilidad en el diagrama y utilice la regla de multiplicación para eventos dependientes con el objeto de determinar la probabilidad de que ocurra cada una de las posibles secuencias de tres eventos.

5. En promedio seis personas esperan ante un cajero automático en cualquier instante, en el transcurso de la hora más concurrida en un centro comercial. Asumiendo el modelo Poisson en la fila de espera: A) grafique la función de probabilidad para X entre 0 y 15. B) Determine el valor modal y compárelo con la media. C) Calcule las siguientes probabilidades para cualquier momento elegido al azar de la “hora pico”: ¿5 ó 6 personas esperen ante el cajero automático? ¿No más de 5 personas esperando ante el cajero? ¿Nadie utilice el cajero automático? ¿Al menos 10 clientes esperando ante el cajero?

6. En una biblioteca, la cantidad de tiempo que dura el préstamo de un libro para consulta en sala, es una variable aleatoria con f.d.p. f(X)=½*X, para X entre cero y dos horas. A) Dibuje la función de densidad y la función de probabilidad acumulada. B) Determine y analice los cuatro primeros momentos. C) Construya el intervalo [μ-2σ, μ+2σ] donde μ es la media y σ la desviación típica respectiva, para la duración media de una consulta bibliográfica. D) De varios libros hay un solo ejemplar; si un usuario lleva 30 minutos leyendo uno y llega otro solicitando el mismo, calcule la probabilidad: a) no tener que esperar, b) esperar entre 20 y 40 minutos, c) no más de 20 minutos. E) (Opcional) Analice este mismo problema con f(X) = 0.75*X*(X-2)^2 .

GUIA PRÁCTICA #04: Ley de Grandes Números y Teoremas Límites

Ley fuerte de los grandes números: Sea $X_1, X_2, \dots X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media E(X) = μ y sea $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Entonces $Prob\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right) = 1$

La Ley débil de los grandes números establece que: Se puede determinar un n, de tal forma que al tomar una muestra aleatoria de tamaño n o mayor de una población con función de densidad f(X) y media finita E(X) = μ; la probabilidad de que la media muestral difiera de μ, en menos de una cantidad pequeña, puede aproximarse a 1 tanto como desee: $P(|S_n/n-\mu|< \varepsilon)> 1 - \delta$. Haciendo $\bar{X} = S_n/n$, queda $\boxed{P(-\varepsilon < \bar{X} - \mu < \varepsilon) \geq 1 - \delta}$.

El Teorema de Tchebyshef: guarda una fuerte relación con la ley de los grandes números, demuestra que para una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2, y toda constante k positiva, $P(-k\sigma<X - \mu <k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$ que equivale a $P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$ o bien $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. También para la media muestral se tiene $\boxed{P(|\bar{X} - \mu|\leq k\sigma/\sqrt{n}) \geq 1 - 1/k^2}$ o bien $P(|\bar{X} - \mu | \geq k\sigma/\sqrt{n}) \leq 1/k^2$. Así para el cuantil k=2, se tiene una probabilidad mínima de 0.75 de que X este a dos desviaciones típicas de la media. Un mínimo del 75% de los valores deben caer dentro de dos desviaciones típicas de la media y un 88.9% de los valores a tres desviaciones típicas de la media, sin importar la forma de la distribución y si la variable es discreta o continua.En la práctica, para distribuciones normales a una, dos y tres desviaciones típicas de la media se tiene las probabilidades exactas de 0.6827, 0.9545 y 0.9973. Los percentiles Normales más utilizados son <u>0.90, 0.95 y 0.99</u> con valores de cuantil normal respectivos: <u>1.645, 1.960 y 2.576</u>.

La desigualdad de Markov: Sirve de fundamento a la anterior para su demostración. Sea X una variable aleatoria no negativa y sea k>0, entonces $\boxed{P(X> k) \leq E(X)/k}$. La desigualdad de Tchebyshef también puede expresarse desde esta en la forma $P(|X-\mu|\geq k) \leq E[(X-\mu)^2]/k^2 = Var(X)/k^2$ o bien $P(|X-\mu|\leq k) \geq 1-Var(X)/k^2$.

Ejemplo 1: al asumir los ingresos mensuales no negativos; no más de 1/5 de la población puede tener más de 5 veces el ingreso promedio P(X > 5*E(X)) ≤ E(X)/(5*E(X)) = 1/5. Para otro ejemplo, suponga que el número de artículos producidos semanalmente en una fábrica es una variable aleatoria de media 500. La probabilidad de que la producción exceda el doble de la producción media es P(X>1000) ≤ 500/1000 = 0.50. Y si la varianza semanal es de 100, y tomando el valor k=100, se tiene que P(400 <X< 600)>0.99 por semana.

Ejemplo 2: Los tiempos de descarga de un programa de los cuales se desconoce la media pero su desviación típica es de 8 segundos, se quiere determinar el tamaño n necesario de descargas para acotar la probabilidad de al menos 0.96 y que la diferencia entre las medias $|\bar{X} - \mu|$ sea de 4 segundos.

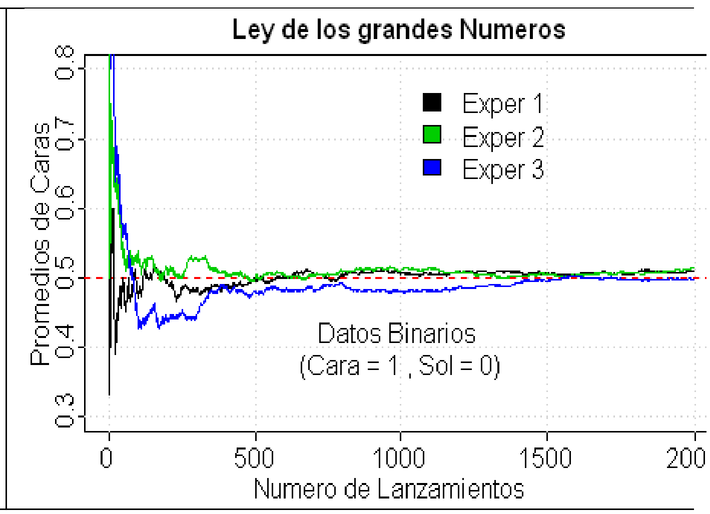
Solución: $1-1/k^2=0.96 \to k=5$, $\varepsilon=4$, $\sigma=8 \to k\sigma/\sqrt{n} = \varepsilon \to n=(k*\sigma/\varepsilon)^2 = (5*8/4)^2 = 100$ descargas.

Ejemplo 3: El dinero mensual en gastos de impresiones en una oficina es una v. a. con distribución desconocida de promedio \$44.50 y desviación típica \$1.54. Acote un intervalo de costo mensual para el 75% de las veces.
Solución: $1–1/k^2 = 0.75 \rightarrow k = 2$, $\mu = 44.5$, $\sigma = 1.54 \rightarrow [\mu–2\sigma = \$41.42,\ \mu+2\sigma = \$47.58]$. Si estos gastos fueran normales, tendríamos 95% en lugar del 75%en los límites→ $[\mu–1.96\sigma = \$41.4816,\ \mu+1.96\sigma = \$47.5184]$.

Teorema del límite central: Sea $[X_1, X_2, X_3\ldots X_n]$ una muestra de variables aleatorias idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2. El promedio muestral $\bar{X}$ tiene una distribución aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n. También la suma $S_n = \Sigma X_i$ es aproximadamente normal con $\mu*S_n = n\mu$, $\sigma^2*S_n= n\sigma^2$.
Se aplica tanto en distribuciones discretas como continuas. Mientras más grande es el tamaño n, mejor es la aproximación. La distribución de $Z = (\bar{X}–\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ se aproxima a la Normal estándar de media 0 y varianza 1.

Ejemplo 4: Un caso especial es el de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p, sea $X_j=1$ si el resultado j es un éxito y $X_j=0$ si es un fracaso. Entonces $S_n= X_1+X_2+\ldots+X_n$; con $S_0=0$, es el número de éxitos en n ensayos. $\mu=E(X_1)=p$. Para un gran número de repeticiones de ensayos de Bernoulli, se espera que la proporción de veces que el evento tendrá lugar esté cerca de p. Al lanzar una moneda equilibrada n veces y contar el número de caras como éxito; a la larga la proporción de éxitos converge al valor p=0.5.
Evidencia de la ley de los grandes números. Tres simulaciones de 2000 lanzamientos de una moneda

```
"Ley de los grandes Numeros" ->Titulo ; n=2000;
k=3; N=1:n; p=0.5; YL = "Promedio de Caras"
XL = "Numero de Lanzamientos"
plot(NA, NA, xlim=c(0, n), ylim = c(0.3, 0.8), type="n",
xlab=XL, ylab=YL, main=Titulo, cex.main=1)
grid() ; color=c(1,3,4) ; abline(h=0.5, col=2, lty=2) ;
title(Titulo, cex.main=1) ; label = paste("Exper",1:k)
legend(1000, 0.8, label , fill=color, box.col=0)
RB = rbinom ; CS = cumsum; set.seed(12357);
x= RB(n, 1, p); y= CS(x); y.m= y/N; lines(N, y.m, col=1)
x= RB(n, 1, p); y= CS(x);y.m= y/N;lines(N, y.m, col=3)
x= RB(n, 1, p); y= CS(x);y.m= y/N;lines(N, y.m, col=4)
text(1000, 0.4, "Datos Binarios \n (Cara=1 , Sol=0) " )
```



Ejemplo 5: Sea una población en la que se mide una v.a. X con distribución Binomial B(1,p), es decir, toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad 1-p, tiene una media p y una varianza p(1-p). Una distribución B(n,p) puede entenderse como la suma de n binomiales B(1,p), al aplicar el TCL, para n grande, la distribución B(n,p) se puede aproximar por una normal que tiene media np y varianza np(1-p). Por ser el conjunto de datos una serie aleatoria de ceros y unos, la distribución de la proporción media $h(\bar{x})$ es discreta con $h(\bar{x}) = C(n, n*\bar{x})*p\text{^}(n*\bar{x})*(1-p)\text{^}(n*(1-\bar{x}))$ y la $\bar{x}$ solo puede tomar los valores {0, 1/n, 2/n, …, n/n=1}. Así con una Binomial para n=30 y p=0.20 se tiene $h(\bar{x})$ =

C(30, 30*$\bar{x}$)*0.20^(30*$\bar{x}$)*0.80^(30*(1-$\bar{x}$)) que se programa en las siguientes líneas. La función C(n, k) es la combinatoria de n en k.

```
"Bernoulli y Binomial por el TCL (Media entre 0 y 1)" ->Titulo ; Xb = expression(bar(X) == widehat(p)) ;
h = function(n,p, x) choose(n, n*x )*p^(n*x)*(1-p)^(n*(1-x))  ; n=30 ; p=0.20 ;  x = (0:n)/n ; MASS::fractions(x)
plot(x, h(n,p,x), lwd=5, type="h", col=3, main=Titulo, cex.main=1) ; grid(col=4); text(0.7, 0.175, Xb)
curve(dnorm(x, 0.2, sqrt(2/375) ), add=TRUE, col=4 ) ;       # Revisar parametros media y varianza
text(0.7, 0.10, expression(over(1, sqrt(2*pi))*e^(-over(1,2)*(x-0.2)^2)) )
```

Ejemplo 6: Aproximación de la distribución binomial a la distribución Poisson

```
x=0:10    ;   x0 = dpois(x, lambda=2) ;x1 = dbinom(x, size=10,prob=0.2)   ; x2 = dbinom(x, size=20,prob=0.1)
TablaP = rbind(x0,x1,x2)  ; barplot(TablaP, beside=T, names.arg=x) ; grid() ; # rbindcombinaobjetosporfila
barplot(TablaP,beside=T, col = 4:2, names.arg=x, add=T) ; Azul= "Pois(lambda=2)" ; Verde=
"Bin(n=10,p=0.2)"; Rojo = "Bin(n=20, p=0.1)" ; Colores = cbind(Azul,Verde,Rojo) #
cbindcombinaobjetosporcolumna
legend(22,.25, Colores , box.lty=0, fill = 4:2) ; DBP="Distribuciones Binomiales y Poisson"
STL="¿Cuales dos son mas parecidas?" ;title(main=DBP, sub=STL)
```

Ejercicio 1: Suponga que en las calificaciones obtenidas por 100 estudiantes en un examen de estadística básica, la media es 70 y desviación estándar es 5. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron puntuaciones entre 60 y 80?, ¿cuántos tuvieron puntuaciones entre 58 y 82? Aplique y compare TCL y Tchebyshef.

Ejercicio 2: investigue la regla de Bayes aplicada a la distribución exponencial.

GUIA PRÁCTICA #05: Procesos Aleatorios o Estocásticos (P. A.)

"Un día emite palabra a otro día, Y una noche a otra noche declara conocimiento." El rey David

TEMAS: Procesos estocásticos o aleatorios, definiciones y conceptos básicos. Cadenas de Markov en Tiempos Discretos (CMTD) y Ejemplos de aplicación. Clasificación de estados, Accesibilidad y comunicación, clases recurrentes y transitorias, CMTD irreducibles, estados transitorios y absorbentes. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Probabilidades límite. Probabilidades de Absorción.

Objetivo general

- Formula los procesos estocásticos para calcular sus probabilidades de transición y distribución estacionaria, mediante métodos probabilísticos.

Objetivos específicos

- Clasificar los distintos estados en una Cadena de Markov, enfocados a la resolución de problemas reales aplicando fórmulas de procesos estocásticos.

Requerimientos

- Operaciones con Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- Hardware: Una PC con Procesador con velocidad de 2.1 ghz, Memoria RAM de 1 GB.
- Software (última versión): Lenguaje R versión 3.3.1, Scilab 5.5.2, MatLab, Maxima.

Introducción de Temas

Un **proceso estocástico** es una sucesión o conjunto de variables aleatorias { $X_{(t)}$; $t \in T$} definidas sobre un espacio de probabilidad común (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$): espacio muestral Ω, Conjunto de Eventos $\mathcal{F}$ y Probabilidades de eventos $\mathbb{P}$. Para el proceso aleatorio, *t* es el parámetro de tiempo (o espacio), el cual toma valores en un conjunto T denominado conjunto índice. Según sea T un conjunto numerable o no, el proceso estocástico será de parámetro discreto o continuo. Para el caso discreto un Proceso Aleatorio lo denotamos por $\{X_n, n \in T\}$ para T = {0, 1, 2,…}. En el caso de espacio de estados discreto, una secuencia de variables que indique el valor del proceso en instantes sucesivos suele representarse por: $\{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{n-1}= x_{n-1}, X_n = x_n\}$

Ejemplo 1: Considere el fenómeno aleatorio de lanzar al aire una moneda equilibrada. Los componentes del espacio (Ω, $\mathcal{F}$, *P*) son: Ω= {cara, sol}; $\mathcal{F}$={ø, {cara}, {sol}, {cara, sol}}; P= {0, ½, ½, 1}; así P(ø)=0 y P({cara, sol})=1.

Variable de Estado	Tiempo Discreto	Tiempo Continuo
Discreta	Sucesión de v. a.	P. A. de saltos puros
Continua	Serie Temporal	P. A. Continuo

Clasificación de procesos estocásticos: → Dada la estructura del conjunto paramétrico T y del Espacio de estados S. A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominaran estados, por lo que se puede tener un espacio de estados discreto o un espacio de estados continúo. Por otro lado, la variable tiempo puede ser de tipo discreto o de tipo continuo. → Dadas las características probabilísticas de las variables aleatorias: Existen dos clases de procesos estacionarios: estacionario débil y estacionario estricto. Es Estacionario débil en el sentido amplio, si tiene momentos finitos de segundo orden, si $m_t(t)$=m es constante para todo t, y $Cov(X_{(t)}, X_{(t+h)}) = E[X_{(t)}*X_{(t+h)}] - m^2$ es la covarianza con $E[X_{(t)}]*E[X_{(t+h)}] = m*m = m^2$; que depende de toda h para cada t. Se dice que $\{X_{(t)} ; t \in T\}$ es un proceso estacionario estricto de orden *n* si la distribución conjunta de un par de vectores aleatorios de dimensión n arbitraria $(X_{(t_1)}, X_{(t_2)},\ldots, X_{(t_n)})$ y $(X_{(t_1+h)}, X_{(t_2+h)},\ldots, X_{(t_n+h)})$ es la misma para todo $t_1, t_2,\ldots, t_n$ y h en T.

→ Procesos Markovianos: su característica principal es que la distribución de X_{n+1} sólo depende de la distribución de X_n y es independiente de las anteriores (X_{n-1}, X_{n-2},...). Se puede resumir diciendo que el estado futuro del proceso, sólo depende del estado presente, y no del resto de estados pasados.

→ Procesos de incrementos independientes: son aquellos en los cuales las variables aleatorias que contabilizan el número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes; verifican que la covarianza de dos estados X_t y X_s es la varianza del mínimo de los índices t o s, con la condición $0 < t < s$; así $Cov(X_t , X_s) = Var(X_{min(t, s)})$.

Una Serie Temporal, es el caso discreto de un Proceso aleatorio, el más simple, y resulta en muestras secuenciales de tamaño uno. Por ejemplo, la temperatura de una ciudad a lo largo del día es de tipo continua, pero se puede discretizar en periodos digamos de cada tres horas para la toma de datos. Otros ejemplos de Procesos estocásticos son: Ruido Blanco, Caminata Aleatoria, el Movimiento Browniano y la Teoría de Colas.

Momentos más utilizados para caracterizar un Proceso Aleatorio de una S. T.: De primer orden, la Media $\mu_t=E[Y_t]$. De segundo orden respecto a la media: Varianzas $Var(Y_t)=E[(Y_t-\mu_t)^2]= E(Y_t)-(\mu_t)^2$, Covarianzas $\gamma(t, s) = Cov(Yt,Y_s)= E[(Y_t-\mu_t)*(Y_s-\mu_s)]= E(Y_t*Y_s)-\mu_t*\mu_s$ y correlaciones $\rho(t, s)= Corr(Y_t, Y_s)= Cov(Y_t, Y_s)/\sqrt{[Var(Y_t)*Var(Y_s)]}$. Las covarianzas y correlaciones referidas a distintos períodos de tiempo t y s en una misma variable aleatoria se denotan como autocovarianzas y autocorrelaciones. Las autocorrelaciones no dependen de la escala de las variables aleatorias; son valores relativos que caen en el intervalo [-1, 1].

Ejemplos 2: Crecimiento de una población tal como una colonia bacterial, el número de clientes en una cola de una estación cliente/servidor, la recepción de señales en presencia de perturbaciones o ruido, los precios de un bien en un lapso de tiempo, las fluctuaciones de entrada (+) salida (-) de unidades a un sistema alrededor de un valor fijo M, y el movimiento browniano de una partícula que aquí se muestra

```
"Distance Between Brownian Motions (Martingale)" -> Titulo; par(bg="white") ;  n <- 100  ; set.seed(7*1357)
x <- c(0,cumsum(rnorm(n))) ; y <- c(0,cumsum(rnorm(n)))  ; xx <- c(0:n, n:0) ; yy <- c(x, rev(y)) ;
 plot(xx, yy, type="n", xlab="Time", ylab="Distance") ;  polygon(xx, yy, col="darkblue", main=Titulo)
```

Ejemplo 3: Sea $\{X_n ; n \geq 0\}$ una secuencia de v. a. IID con la misma distribución conocida. Sea $S_0 = 0$ y sea $S_n = \sum X_i$ para i=1,2,…,n, con n≥1. El P. A. $\{S_n ; n \geq 0\}$ es Caminata Aleatoria; su modelo en serie temporal es $\boxed{Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t}$, y el de Ruido blanco es $\boxed{Y_t = \varepsilon_t}$ donde $\varepsilon_t \sim NIID(0, \sigma_\varepsilon)$. El P. A. $\{X_{(t)}, t \geq 0\}$, donde $X_{(t)}$ cuenta el número de eventos en el intervalo (0, t] = {s; 0 < s ≤ t}, con $X_{(0)}$=0, es llamado Proceso de conteo. Veamos algunas realizaciones continuación.

```
"Trayectorias generadas por Simulación de Caminata Aleatoria" -> Titulo; K=8 ; XL ="Nmuestras"; YL="Salto"
CS = cumsum ; RB = rbinom ; n=100 ; # Función Genera Random Walk  añadiendo una binomial en cada paso
GRW <- function(k=250, p=0.5, valor.ini=0) { S= RB(k, 1, p) ; S[S==0] = -1 ; valor.ini + c(0, CS(S)) }  # Muestra S
plot(NA, NA, type="n",  ylim=c(-15, 15), xlim=c(0,n), xlab=XL, ylab= YL , main = Titulo, cex.main=1 )
set.seed(12745) ; grid(col= "darkblue") ; for(i in 1:K) lines(GRW(n), col=i , lty=7, lwd=8-i/2)
```

```
Titulo= "Proceso de conteo o de Bernoulli" ;  XL = "tiempo\n(t)" ;  YL = expression(X[(t)]) ; pe = 0.35 ; K = 20
set.seed(112223) ;  b = sample(size = K, c(0,1), prob = c(1-pe, pe), replace = TRUE)  ;  s = c(0, cumsum(b))
tiempo = 0:K ; plot(tiempo, s, type = "s", xlab= XL, main= Titulo,  cex.main=1, ylab= YL, lwd= 2, axes= FALSE)
ejeX = 0:K ;  ejeY = 0:max(s)  ;  axis(1, at = ejeX, labels = ejeX, pos = 0) ; axis(2, at = ejeY, labels = ejeY, pos = 0)
abline(v = 1:20, h = 1:max(s), lty = 3, col = 1)   ;  abline(a=0, b=pe, col=3, lwd=2)  # Compare con pe=0.65.
```

GUIA PRÁCTICA #06: Cadena de Markov en Tiempo Discreto

Un proceso aleatorio { X_t ; t = 0, 1, 2,…} que toma valores en un conjunto finito o numerable (infinito); la variable aleatoria discreta X_t representa una característica de interés medible al tiempo t. Se tiene una Cadena de Markov homogénea o Cadena de Markov en Tiempo Discreto (CMTD) con probabilidades de transición estacionarias si y solo si se verifica que P{ X_{t+1}= j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, …, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i } = P { X_{t+1} = j / X_t = i} = p_{ij} para toda n≥0 y todo estado [i_0, i_1, …, i_{t-1}, i, j]. Las variables aleatorias [X_1, X_2,…, X_{t-1}, X_t,…] son independientes con distribución común dada y X_0 fijo. En palabras condicional del estado FUTURO es independiente de todo su PASADO y depende únicamente de estado PRESENTE. La matriz construida con las probabilidades condicionales de un paso entre estados i y j se llama matriz de transición estocástica, y se la denota por P = [p_{ij}]; la suma por cada fila es 1, y se accede de filas hacia columnas. P es doblemente estocástica es si la suma por cada columna es 1.

<u>La distribución marginal</u> de una CMTD con espacio de estado S={0, 1, 2, …, M} para X_t con matriz de transición P, considera además un vector de probabilidad a = [a_0, a_1, a_2, a_M], con a_j = P{ X_0 = j}, que al no proporcionarse del comportamiento del sistema, se debe asumir uniforme con a_J= 1/k, para k=M+1 y todo j ϵ S. Según tenga sentido sobre X_t, del sistema analizado, se pueden calcular medias y varianzas. La distribución marginal de X_t en n pasos es $(a_j)^{(n)}$ = Σa_J*P{X_n=j / X_0=i} = Σa_J*$[p_{ij}]^{(n)}$. Para n=1 es inmediato $(a_j)^{(1)}$ = Σa_J*P{X_1=j / X_0=i} = Σa_J*p_{ij}, pero para n>1, es a través de las Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov que veremos después. Para cálculos sencillos sobre P, asumiendo uniformidad en a: se suma cada columna y divide este total por k; también puede razonarse esta distribución inicial como porcentaje.

Ejemplo 1: En períodos electorales X_t es el estado de opinión de votantes al tiempo t, en los sondeos de preferencia hacia un candidato: X_0=0 (Desfavorable), X_1=1 (Menos que Regular), X_2=2 (Regular), X_3=3 (Mas que Regular), X_4=4 (Favorable). Se construiría P de dimensión 5x5, de los resultados de opinión.

Ejemplo 2: De cada paciente en una clínica, por las mañana se percibe su estado de humor según se encuentre: Alegre o de buen ánimo (0); Tranquilo e impasible (1); Deprimido, triste o enojado (2). Se estiman la matriz de transición a dos pacientes (A y B) en mañanas nubladas según la distribución del día:
Paciente A: Si amanece alegre, la mitad de las veces continúa así la siguiente mañana, y uno de cada 10 día pasa a Deprimirse. Si amanece tranquilo, uno de cada 5 días pasa a deprimirse a la mañana siguiente, y el resto de días se mantiene tranquilo o pasa alegrarse. Si amanece triste permanece igual la mitad de las veces al día siguiente, y tres de cada 10 días pasa a estar tranquilo para la mañana siguiente.
Paciente B: Si amanece alegre, dos de cada 5 veces pasa a estar tranquilo a la mañana siguiente, y lo demás se distribuye equitativo entre los otros estados. Si amanece tranquilo, la mitad de las veces permanece igual a la mañana siguiente, y una de cada 5 veces pasa alegrarse a la mañana siguiente. Si amanece triste, de cada 10 días, uno pasa a estar alegre y tres a estar tranquilo a la mañana siguiente. P_B = [[0.3, 0.4, 0.3] [0.2, 0.5, 0.3] [0.1, 0.3, 0.6]]
¿Cuál paciente tiende a estar enojado? ¿Cuántos días se espera que pase en un estado antes de pasar a otro?

```
datosA=c(0.5,0.4,0.1,0.4,0.4,0.2,0.2,0.3,0.5); PA=matrix(datosA, ncol=3, byrow=TRUE); apply(PA, 2, sum)/ncol(PA)*100
```

La distribución inicial para P_A es [36.7%, 36,7%, 26.7%] y para P_B es [20%, 40%, 40%].

Ejemplo 3: El tiempo atmosférico o clima de una ciudad, puede encontrarse entre días en dos estado: despejado o seco (0) y nublado o con lluvia (1). Sea p la probabilidad de continuar en lluvia en la transición de un día a otro y sea q la probabilidad correspondiente para clima seco. Matriz de transición P=[[q, 1-q] [1-p, p]]. Analice para un mes de abril en Masaya con p=0.25 y q=0.82, y en León con p=0.10 y q=0.96.
La distribución inicial para Masaya es [78.5%, 21.5%] y para León es [93%, 7%] para despejado y nublado.

Clasificación de Estados en una CMTD y Diagrama de Transición ⥮ ⇄ ⟶ ⟳ ⟵ ↻ ↷ ⤻ ↶ ↺

Corresponde a los conceptos de irreducibilidad y periodicidad para estudiar el comportamiento transitorio y límite de una CMTD. A partir de una matriz de transición P, veremos cómo construir clases y diferenciar entre estados y clases, a partir de un Diagrama de Transición (dígrafo), en el cual cada estado representa un nodo y cada arco o arista se forma desde un estado i hacia un estado j si hay probabilidad positiva estricta $p_{ij}>0$.

Definiciones de la relación entre estados

Accesibilidad (→): un estado j es accesible desde el estado i, si para algún n≥0, se tiene probabilidad positiva estricta, esto es, si $[p_{ij}]^{(n)}>0$, entonces i → j.
Comunicación (↔): un estado i comunica con otro estado j, si se puede acceder a j desde i y también se pueda acceder a i desde j, luego si i → j, j → i, entonces i ↔ j.

Propiedades de la relación comunicación

*Reflexibilidad: i ↔ i. *Simetría: i ↔ j si y solo si, j ↔ i. *Transitividad: i ↔ j, j ↔ k entonces i ↔ k.

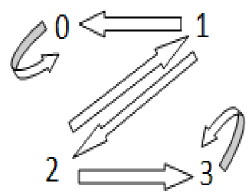
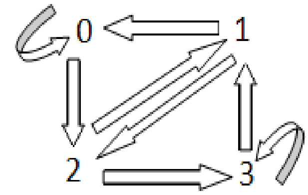
Definiciones sobre clases comunicantes

*Un conjunto C de estados forman una clase comunicante bajo las dos condiciones:

i ∈ C, además j ∈ C, entonces i ↔ j. i ∈ C, además i ↔ j, entonces j ∈ C.

*Una clase C es cerrada si i ∈ C, y además j ∉ C, implica que i ↛ j. Si i ∈ C, y además i ↮ j, entonces j ∉ C.
*Una CMTD es Irreducible si todos los estados pertenecen a una única clase comunicante, sino es Reducible.
*Una clase es recurrente si no se accede a otra clase o estado fuera de ella, en caso contrario es transitoria.
*Para una clase recurrente formada por un solo estado, este es absorbente con $p_{jj} = Prob\{X_{t+1} = j / X_t = j\} = 1$; siendo j un estado relacionado de la diagonal principal de P, en otro caso el estado es transitorio.

Ejemplos 4: Matrices de transición 4x4 y sus dígrafos en R: "de cada fila i se accede a cada columna j"

<table>
<tr>
<td>$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & Q & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
<td>$P_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">e = 0.1 ; x = c(1-e, 2+e) ; x1 = c(1, 1, 2, 2) ; x2 = c(1-e, 1, 2-e, 2) ; plot(x, x, type= "n", axes = FALSE, xlab= NA, ylab= NA)
y1 = c(2, 2-e, 1+e, 1) ; y2 = c(1-e, 2-e, 1, 2) ; text(rep(x, 2) , c(1-e,1-e,2,2) , c(3,4,1,2) , cex=2) ; bucles= c("\\DE", "\\AS")
text(x, c(2-2*e,1+2*e), bucles, vfont = c("sans serif", "plain"), cex=5); for(i in 1:4) arrows(x1[i], x2[i], y1[i], y2[i], lwd=2)</td>
</tr>
</table>

P_1 tiene dos clases recurrentes: C_1= {0} y C_3= {3}, y una transitoria: C_2= {1, 2}. Estados transitorios: 1 y 2, Estados absorbentes: 0 y 3; es CMTD Reducible. Para P_2 hay una sola clase recurrente: C_1= {0, 1, 2, 3}; es una CMTD Irreducible.

Ejercicio 1: (P_1 anterior): Dos jugadores con cantidades de dinero \$A y \$B respectivas de que disponen, comienzan a apostar. Estado absorbente es cuando un jugador pierde todo su dinero y el otro jugador se lo queda todo. Así, estados absorbentes son X_0=\$0 y X_n=\$A+\$B, en los que el juego termina. Determine estados y matriz de transición.
Dados los dineros de cada jugador A y B y se apuestan \$5 en cada jugada, con ventajas A:B según cada inciso siguiente:

a. A=\$20 y B=\$10, A:B ≡ 1:1. (p_A=½)	b. A=\$20 y B=\$10, A:B ≡ 2:1. (p_A=⅔)	A=\$10 y B=\$20, A:B ≡ 2:1. (p_A=⅔)

Ejercicios 2: Dibuje el dígrafo de cada matriz de transición dada y analice sus clases y estados. Determine aquella matriz no estocástica y calcule las probabilidades pendientes en alguna matriz.

P_1 = [[0.2 0.8] [0.3 0.7]]
P_2 = [[1 0] [0.5 0.5]]
P_3 = [[P_2 [0 0]^t] [0 0 1]]
P_4 = [[0 1 0] [0.5 0 0.5] [0 1 0]]
P_5 = [[0 1] [1 0]]
P_6 = [[½ 0 0 0 0 ½] [0 ⅓ 0 0 p 0] [h h h h h h] [0 0 0 k 0 0] [0 1-p 0 0 p 0] [½ 0 0 0 0 ½]]
P_7 = [[0 1 0] [0 k 1e-3] [0 1 0]]

Ejercicios propuestos para Guías prácticas 04-06

Ejercicio 1: Una oficina de crédito clasifica las cuentas de sus clientes como pagadas (estado 0), con retraso de 1 a 90 días (estado 1), con retraso de 91 a 180 días (estado 2), e impagable con 181 días o más (estado 3). Las cuentas se revisan cada mes y se determinan el estado de cada cliente. Los créditos no se extienden y se espera que los clientes paguen sus cuentas dentro de los primeros 3 meses. A veces los clientes pagan solo parte de su cuenta adeudada; si esto sucede al cliente se le ubica en un estado 1 ya que no ha cancelado aunque haya pagado una parte. Si un cliente paga solo una parte estando en el estado 2, dicho cliente pasa al estado 1. Los clientes con 6 meses o más de retraso (más de 181 días) se clasifican como mala paga o cuenta impagable (estado 3). Las cuentas que estén en el estado 3 se demandan sobre hipoteca de valores. De experiencias de años anteriores se tiene la siguiente matriz de transición.

Ejercicio 2: Una mujer con esposo sano y hermano hemofílico, inicialmente tiene una probabilidad de ½ de ser portadora. Cada vez que tiene un hijo sano la probabilidad de ser portadora va disminuyendo; pero si una sola vez que tiene un hijo con hemofilia tiene probabilidad Prob(mujer portadora/hijo hemofílico)=1, sin importar el orden en que va teniendo sus hijos, quedando en el estado de portadora permanentemente. Formule este como un proceso aleatorio en los estados 0 (sana) y 1 (portadora) y construya la matriz de transición en tiempos no uniformes cada vez que tiene un hijo.

Ejercicio 3: Una tienda vende cámaras fotográficas que puede pedir por cada semana e iniciar con X_0 = 3 cámaras a la venta, X1 = cámaras al final de la primer semana, X2= cámaras al final de la segunda semana, etc. Sean D1, D2,… las ventas hechas en la semana respectiva. La tienda realiza un de hasta 3 cámaras si las han vendido todas al final de la semana; en otro caso no hace pedido. →Si no hay cámaras (X_t=0 = X_t < 1) al final de la semana t se hace pedido de 3: luego final de la semana siguiente t+1 habrá una cantidad Xt+1 de 3 cámaras menos las que se venden durante la semana D_{t+i}; además si la demanda D_t es mayor que la existencias es demanda satisfecha. Asi si X_t < 1 → Xt+1 = max {(3- D_{t+i}) = 0} si Dt+1 >3 se pierde de vender. →Si hay una cámara o más al final de la semana t (Xt≥1); en la semana siguiente habrán X_{t+1} cámaras que es la diferencia entre X_t menos las que se vendan durante esa semana D_{t+i}

GUIA PRÁCTICA #07: Comportamiento Transitorio de una CMTD

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (EChK): Las probabilidades de transición en n pasos de una CMTD, satisfacen las ecuaciones: $[p_{ij}]^{(n)}=\sum [p_{ir}]^{(k)}*[p_{rj}]^{(n-k)}$; en estados i, j de S, donde k es entero fijo tal que $0 \leq k \leq n$.
Estas ecuaciones proporcionan un método para obtener las probabilidades de transición en n pasos, tanto por el cálculo de Potencia de matrices (cuadradas) o a partir de relaciones recursivas con vectores de probabilidad inicial. El ahorro de cálculos debe ser considerado a la hora de aplicar el método sea directo o iterativo. La notación de multiplicar un escalar k por un vector V (o matriz), se hará por acomodo: $k*V=V*k$ ó ${}^{1}/_{k}*V = V/k$.

En notación matricial, veremos que la matriz de transición en n pasos $P^{(n)} = P^n$, donde P^n es la n-ésima potencia de la matriz estocástica P. Las EChK en notación matricial son $P^{(n)} = P^{(n-k)}*P^{(k)}$. Al hacer $P\{ X_0 = j / X_0 = i \} = \delta_{ij}$, que toma valor $\delta_{ij}=1$, para i=j, y valor de cero en cualquier otro caso, se tiene que $P^{(0)}$ es la matriz identidad. También por definición para n=1 se tiene que $P^{(1)} = P$; así para n=0: $P^{(0)} = P^0 = I$, y para n=1: $P^{(1)} = P^1 = P$. Al asumir que se cumple para n de 0 a k, hay que ver si se cumple para k+1: $P^{(k+1)} = P^{(k+1-k)}*P^{(k)}= P^{(1)}*P^{(k)}$;por hipótesis de inducción $P^{(k+1)} = P^1*P^k$, y por álgebra de matrices $P^{(k+1)} = P^{1+k} = P^{k+1}$, por lo cual sí se cumple.

Mínimo de operaciones directas para la potencia de una matriz A; símbolo de producto matricial $\otimes$:

Potencia	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	A^9	A^{10}	A^{11}	A^{12}
Producto	$A\otimes A$	$A\otimes A^2$	$A^2\otimes A^2$	$A\otimes A^4$	$A^2\otimes A^4$	$A\otimes A^6$	$A^4\otimes A^4$	$A\otimes A^8$	$A^2\otimes A^8$	$A^3\otimes A^8$	$A^4\otimes A^8$
Operaciones	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	4

¿Por qué el mínimo de operaciones para calcular A^{20} es 5? ¿Cuántas operaciones requiere $A^{11} = A^4\otimes A^7$?

Otra forma de calcular la potencia de una matriz Aes a través de su descomposición espectral $A = Q\cdot D\cdot Q^{-1}$, donde D es matriz diagonal con los valores propios λ de A que resuelven la ecuación polinómica $\det(A-\lambda\cdot I)=0$, y Q es matriz ortogonal formada por los vectores propios normalizados de A. Resulta $A^n = Q\cdot D^n\cdot Q^{-1}$, donde en D^n, se eleva cada valor propio a la potencia n. Veamos el caso de una matriz 2x2,P= [[p 1-p] [1-q q]], con $p\neq q$:
Valores y vectores propios: $\lambda_1=1 \rightarrow V_1 = [1,\ 1]/\sqrt{2}$; $\lambda_2=p+q-1 \rightarrow V_2 = [-(1-p),\ (1-q)]/\sqrt{[(1-p)^2+(1-q)^2]}$

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \rightarrow P^n = \frac{1}{(1-p)+(1-q)} \begin{bmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{bmatrix} + \frac{(p+q-1)^n}{(1-p)+(1-q)} \begin{bmatrix} 1-p & -(1-p) \\ -(1-q) & 1-q \end{bmatrix}$$

Observe que cuando n tiende a infinito el término $(p+q-1)^n$ se hace cero, quedando cada columna con los valores de probabilidad límite (que abordaremos luego) para cada estado: $[\pi_0 , \pi_1] = [1-q , 1-p]/(1-p+1-q)$. Si p=½ y q=½, las potencias de P no cambian, igual sucede con q=1-p. Si p=q, resulta el único valor propio $\lambda=1$ de multiplicidad 2, luego D no es posible de obtener, aunque de las potencias de P, de forma directa, se converge a $[\pi_0 , \pi_1] = [½, ½]$. Analiza las combinaciones (p, q):

(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).Veamos el caso de p=0.25 y q=0.10. Se genera un gráfico de los elementos de la diagonal en cada paso, pero no lo mostramos aquí; observe del mismo lo lento de la convergencia. Para p=0.25 y q=0.90, la convergencia es rápida.

```
M = matrix ;fmat = function(p,q) M(c(p, 1-q, 1-p, q), ncol=2) ;  P = fmat(0.25, 0.10)  ; P  # ConstruirP2x2
fi = function(x,y) M(c(x,x,y,y), ncol=2) ; fj = function(x,y) M(c(x,-y,-x,y), ncol=2)    # Submatrices de P2x2 a la n
Pn = function(p,q,n) 1/(1-p+1-q)*(fi(1-q,1-p)+(p+q-1)^n*fj(1-p,1-q)) ; Pn(0.25, 0.10, 3)   # Potencia n de P2x2
p=0.25 ; q=0.10; pn=0 ; qn=0 ; n=1:12 ; for(i in n) { pn[i] <- Pn(p,q, i)[1,1] ; qn[i] <- Pn(p,q, i)[2,2]}
matplot(cbind(pn, qn), type="l", xlab="n", ylab=expression(p[jj]), main="TransiciónndenPasos") # Gráficopjj
```

Tarea: agregue los valores de probabilidad de posiciones [1, 2] y [2, 1] al gráfico matplot

Potencia de una matriz $_{MxM}$: La siguiente función PotM calcula la potencia n de la matriz P en el ambiente R, los argumentos de entrada son la matriz P y el valor entero n (n=1 por omisión). Para potencia cero resulta la matriz identidad, también calcula potencias negativas, para valores propios positivos. ¿Qué sucede en valores propios encero o repetidos (multiplicidad m>1)?
Tarea: calcule P^4 para P=[[0.2 0.7 0.1][0.5 0 0.5][0.3 0.7, 0]]

```
PotM = function(P, n=1) { P0 = P ;  ValPropios = eigen(P)$values ; Qpre = eigen(P)$vectors
Qpost = solve(Qpre); D = diag((ValPropios)^n) ; Ppot = Qpre %*% D %*% Qpost ; (Ppot) }
K=3 ; Xmin=0 ; Xmax= 9 ; (A = matrix( sample( Xmin:Xmax, K^2), ncol=K))  ;for(i in 0:4 ) print(PotM( A, i))
```

Ejemplo 1: En una universidad estatal, profesores contratados permanentes, sin importar su profesión, están en uno de tres estados, por período de dos años: 0 (docente e investigador), 1 (oficial de postgrado e innovación) y 2 (oficial de extensión y cultura). Por política de la institución, profesores en estado 2 ó 3 no pueden permanecer en el mismo por más de un período. La contratación actual es de 200 profesores distribuidos por cada estado respectivo en $A^{(0)}$ = [130, 50, 20]; de haber retiros o jubilaciones se repone cada puesto con nueva contratación en el estado 0. Determine la transición para n=4 pasos, si de registros históricos de 12 años se tiene construida la matriz de transición P. Razone el diagrama de transición y la clasificación de estados.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 2 & 0.9 & 0.1 & 0 \end{array}$$

Solución: Debemos calcular AP, AP^2, AP^3 y AP^4. De estar interesados solo en n=4, se puede omitir AP^3. En la tercera línea se utiliza la función PotM anterior para calcular la potencia de la matriz P (transición a n pasos):

```
A=c(130, 50, 20) ; datos = c(8,7,9,2,0,1,0,3,0)/10; P=matrix(datos, ncol=3) ; A %*% P  # A(1)=[157 28  15]
for (n in 1:4) print( A <- A %*% P  ) # Los vectores resultantes se muestran a continuación
for(i in 1:4) print(round(Re(PotM(P, i)),4))  # Se toma la parte Real (si resulta matriz compleja) y se redondea.
```

$A^{(1)}$= [157 28 15], $A^{(2)}$= [158.7 32.9 8.4], $A^{(3)}$= [157.55 32.58 9.87], $A^{(4)}$= [157.729 32.497 9.774]≈[158, 32, 10]

A largo plazo para los cargos, se debería disponer de 32 plazas para el estado 1 y 10 plazas para el estado 2; siempre que se mantenga el total de 200 contratados, y la matriz de transición no varíe mucho. Al necesitar el vector de probabilidad de cada paso, se divide el vector A por el número de profesores 200, teniendo de inicial $\mathbf{a}^{(0)}$ = A/200 = [0.65, 0.25, 0.10], y a 4 pasos $\mathbf{a}^{(4)}$ = $A^{(4)}$/200 = [0.788645 0.162485 0.048870]≈[0.79, 0.16, 0.05]; el 5% de los profesores están en puesto de dirección a 4 pasos. Abajo se muestran las potencias de P para n de 1 a 4, observe los valores similares por columna de P^4.Para n=2, observe la transición $[p_{11}]^{(1)}$=0 → $[p_{11}]^{(2)}$=0.17; además $[p_{12}]^{(1)}$=0.3 → $[p_{12}]^{(2)}$=0 → $[p_{12}]^{(3)}$=0.051. En P^4, la probabilidades por columna son prácticamente las mismas; compare estas con el vector $\mathbf{a}^{(4)}$. Si dada la relación de pagos medios por estado para n=4, es con ventaja 3:3.5:4; se combina esta información con $A^{(4)}$, para estimar 3*158+3.5*32+4*10= $626*.

P[0] [1] [2] [0] 0.8 0.2 0.0 [1] 0.7 0.0 0.3 [2] 0.9 0.1 0.0	P^2[0] [1] [2] [0] 0.78 0.16 0.06 [1] 0.83 0.17 0.00 [2] 0.79 0.18 0.03	P^3[0] [1] [2] [0] 0.790 0.162 0.048 [1] 0.783 0.166 0.051 [2] 0.785 0.161 0.054	P^4 [0] [1] [2] [0] 0.7886 0.1628 0.0486 [1] 0.7885 0.1617 0.0498 [2] 0.7893 0.1624 0.0483
$a^{(1)}$ = [0.7850, 0.1400, 0.0750]	$a^{(2)}$=[0.7935, 0.1645, 0.0420]	$a^{(3)}$=[0.7878, 0.1629, 0.0494]	$a^{(4)}$=[0.7886, 0.1625, 0.0489]

*Pago "mensual" proporcional al real, por algún factor, digamos $200 (de no facilitar información de pagos reales).

Ejercicio 1: Una institución categoriza a sus empleados en 4 grados {1, 2, 3, 4}. Los nuevos empleados siempre entran en grado 1. Dada la matriz de transición de estados P: ¿Es posible aplicar la función PotM, para el cálculo de P^n? Compare P^2, P^4, P^8. Use el vector $A^{(0)}$=[80, 40, 25, 15] y calcule $a^{(n)}$ y $P^{(n)}$para n=1:5

$$P=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Potencia de la matriz P del ejemplo anterior para n = {2, 5, 7} y analizarlas de acuerdo a las EChK. El determinante para la matriz de Hilbert H(m) tal que H[i, j] = 1/(i+j-1) para m={2, 3, 4, 5}

GUIA PRÁCTICA #08: Comportamiento Límite de una CMTD Irreducible

Del ejemplo de cargos académicos en la práctica anterior, vimos que las filas de P^n son casi iguales, siendo los valores de convergencia [97, 20, 6]/123 = [0.7886179, 0.1626016, 0.0487805] para cada fila, que ahora veremos cómo calcular de forma directa. Teniendo el vector de probabilidades $a^{(n)} = a^{(0)}*\mathbf{P}^n$, se analiza el comportamiento límite de $a^{(n)}$ a través de $\mathbf{P}^n$, en las situaciones de ser o no Cadena de Markov Irreducible.

PL.CMTD: Sea $\{X_n\ ;\ n\geq 0\}$ una CMTD con espacio de estado $\mathbb{S}=\{1, 2,\dots, M\}$ y matriz de transición $\mathbf{P}_{MxM} =[p_{i,j}]$. Para una CM irreducible, las probabilidades límite se determinan por $\boxed{\lim_{n\to\infty}\text{Prob}\{X_n = j / X_0 = i\} = \pi_j}$; la letra griega "π" representa, no el número real enseñado en el preuniversitario, sino la distribución de probabilidad para el espacio de estado $\mathbb{S}$ en su transición al límite (a corto o a largo plazo, a dependencia de **P**), se representa por el vector de probabilidad incondicional $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3,\dots \pi_M]^t$ resolviendo las ecuaciones:

(*) $\pi_j = \pi_1*p_{1,j}+ \pi_2*p_{2,j}+ \pi_3*p_{3,j} + \dots + \pi_j*p_{j,j} +\dots + \pi_M*p_{M,j}$; $\pi_j\geq 0$; $\pi_1+ \pi_2 +\pi_3+\dots+ \pi_j + \dots + \pi_M = 1$; $j \in \mathbb{S}$

PROB.LIM: Procedimiento para calcular el vector de probabilidades límite $\boldsymbol{\pi}$: Trasponer la matriz de transición **P**, y restarle la identidad $\mathbf{P}^t - \mathbf{I}$, sustituir la primer fila por el vector unidad [1, 1, 1,…,1] y denotar esta matriz A. Resolver el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) $A*\boldsymbol{\pi}=ⓔ$; ⓔ$= [1,0,0,..., 0]^t$; $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3,\dots \pi_M]^t$

La siguiente línea de instrucciones incorpora PROB.LIM, en lenguaje R con el Ejemplo Cargos Académicos

```
PROB.LIM=function(P)  {m=ncol(P);  A=t(P)-diag(m);  A[1,]  <-  1;  e=c(1,  rep(0,m-1))  ;  print("Prob.  límite"); solve(A,e)}
P=matrix(c(8,7,9,2,0,1,0,3,0)/10, ncol=3); P ; PROB.LIM(P) # Resulta matriz estocástica y probabilidades limite
```

Tarea: A partir de definir P, realice cada acción dentro de la función y que genere cada resultado del procedimiento

Ejemplo 1:(de Guía práctica 7): Se muestra a continuación cada matriz y el S.E.L.

P	P^t	$P^t - I$	A	$\boldsymbol{\pi}$	ⓔ
$\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0\\0.7 & 0 & 0.3\\0.9 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.8 & 0.7 & 0.9\\0.2 & 0 & 0.1\\0 & 0.3 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.2 & 0.7 & 0.9\\0.2 & -1 & 0.1\\0 & 0.3 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0.2 & -1 & 0.1\\0 & 0.3 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\pi_0\\\pi_1\\\pi_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

Ahora queda resolver $A*\boldsymbol{\pi}$ =ⓔ, lo haremos por Cramer, aunque no siempre es la mejor opción, pues depende dela matriz de transición y su dimensión. Se calculan los determinantes asociados a cada variable π_0, π_1, π_2.

$\Delta_0 = 0.97$	$\Delta_1 = 0.20$	$\Delta_2 = 0.06$	$\Delta = 1.23$
$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0.1\\0 & 0.3 & -1\end{vmatrix} = + \begin{vmatrix}-1 & 0.1\\0.3 & -1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0.2 & 0 & 0.1\\0 & 0 & -1\end{vmatrix} = - \begin{vmatrix}0.2 & 0.1\\0 & -1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0.2 & -1 & 0\\0 & 0.3 & 0\end{vmatrix} = + \begin{vmatrix}0.2 & -1\\0 & 0.3\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0.2 & -1 & 0.1\\0 & 0.3 & -1\end{vmatrix}$

No es necesario calcular el determinante para A, det(A) = Δ, pues resulta ser la suma de los determinantes de cada una de las tres variables. Por lo cual se calculan las probabilidades limite en $[\pi_0, \pi_1, \pi_2]$ = [97, 20, 6]/123 ≈ [0.7886, 0.1626, 0.0488]. A la larga casi el 78.9% de académicos están en el cargo de docente e investigador. Luego se verá cómo deducir los tiempos esperados de recurrencia **μ**, que son los recíprocos de probabilidades límite **μ**= [1.27 6.15 20.5]; en promedio pasan 6.15 bienios para que un profesor vuelva al estado 2.

Probabilidades límite en matrices 2x2: Si P= [[p , 1-p] [1-q , q]], entonces$[\pi_0 , \pi_1]$ = [1-q , 1-p]/(1-p+1-q).

En matrices 3x3: Si P = $[[p_{00}, p_{01}, p_{02}]\ [p_{10}, p_{11}, p_{12}][p_{20}, p_{21}, p_{22}]]$ entonces $[\pi_0, \pi_1, \pi_2] = [\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2]/\Delta$, donde:

$\Delta_0 = (1-p_{11})*(1-p_{22})-p_{12}*p_{21}$	$\Delta_1 = p_{01}*(1-p_{22})+p_{02}*p_{21}$	$\Delta_2 = p_{02}*(1-p_{11})+p_{01}*p_{12}$	$\Delta = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2$

De tarea determine las probabilidades límite para P = $[[p_1q_1 1-p_1-q_1][p_2q_2 1-p_2-q_2][p_3q_3 1-p_3-q_3]]$.

Periodo de estados: Sea $\{X_n ; n\geq 0\}$ una CMTD con $\mathbb{S}=\{1, 2,\ldots, M\}$ y matriz de transición $\mathbf{P}_{MxM}=[p_{i,j}]$.El periodo del estado i es un número d que satisface la condición $[p_{ii}]^n=\text{Prob}\{X_n = i / X_0 = i\} > 0$, para n ∊ {d, 2d, 3d,…}; al aplicar las EChK a n pasos, d es el máximo común divisor de los enteros positivos n que satisfacen la condición $P^n[i,i] > 0$. Si d=1, el estado es aperiódico, (luego ampliarla situación a las clases). Un estado es periódico si partiendo de ese estado hacia otros estados, es probable volver a él en un número finito de pasos d> 1. Además si $[p_{ij}]^n> 0$ para alguna potencia n de P, decimos que es una CMTD regular o ergódica; si $[p_{ij}]^n> 0$, para n=1, se tiene recurrencia positiva, esto es, una sola clase comunicante de estados recurrentes, aperiódica.

Ejemplo 2: Dada abajo la matriz de transición P_A, sobre la diagonal principal de $P_{\mathbf{A}}$, se cumple que $[p_{ii}]^1>0$, por lo cual cada estado tiene periodo d=1, y forman una sola clase irreducible aperiódica; abajo se muestra P_A y a la par sus probabilidades límite. Para la matriz de transición **P**, mostrada abajo, se ubican a continuación sus potencias pares e impares. Vemos para potencias n impares $[p_{ii}]^n=0$, pero para potencias pares $[p_{ii}]^n>0$, n ∊ {2, 4, 6,…}, así d=2; cada estado tiene periodo 2 y forman una sola clase irreducible periódica, de periodo 2.$\mathbf{P}_A$ es ergódica, en cambio **P** no lo es, ni alguna potencia de ella. En el límite $\mathbf{P}^{(n)}$ alterna en dos matrices que no cumplen la condición de ser iguales las filas, pero sí, al calcular el promedio de ambas. Para matrices estocásticas aperiódicaso no, coinciden los resultados con aquellos de las PL.CMTD o usando el procedimiento PROB.LIM. Para P_A: $\boldsymbol{\pi}_A$= [97, 20, 6]/123 y para **P**: $\boldsymbol{\pi}^*$=[0.25, 0.50, 0.25].

$\mathbf{P}_A$	$\lim_{n\to\infty}[\mathbf{P}_A]^n$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{P}^{(2n)}$	$\mathbf{P}^{(2n+1)}$	$\mathbf{P}^{(n)*} = ½[\mathbf{P}^{(2n)}+\mathbf{P}^{(2n+1)}]$
$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{91}\begin{bmatrix} 12 & 29 & 50 \\ 12 & 29 & 50 \\ 12 & 29 & 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ¼ & ½ & ¼ \\ ¼ & ½ & ¼ \\ ¼ & ½ & ¼ \end{bmatrix}$

Tarea: Dibuje ambos diagramas de transición para la matriz P de potencias par e impar y compare.

Del ejemplo anterior, si la matriz de transición **P** fuera la resultante de potencias pares $^{(2n)}$, esta no es irreducible, por lo cual no deberíamos determinar las PL.CMTD, ni aplicar el procedimiento PROB.LIM.

Tiempos de Markov: Sea $\{X_n ; n\geq 0\}$ una CMTD con espacio de estado $\mathbb{S}$. Una variable aleatoria T es llamada tiempo de Markov si el evento $\{T \leq n\}$ es completamente determinado por la historia del proceso hasta el tiempo n: $\{X_0, X_1, X_2 ,\dots X_n\}$. Entonces $Prob\{X_{T+1} = j / X_T = i, X_{T-1} ,\dots X_0\} = \sum p_{ij} * Prob\{T = n / X_n = i, X_{n-1} ,\dots X_0\}= p_{ij}$

La Propiedad de Markov rige sobre un tiempo aleatorio T, si T es un tiempo de Markov.

Sea $T_j = \min\{n > 0 : X_n = j\}$, entonces T_j es el primer tiempo que la CMTD accede al estado j, siendo T_j tiempo de Markov. Entonces para n≥1, $[p_{jj}]^n = Prob\{X_n = j / X_0 = j \} = \sum [p_{ij}]^{(n-k)} \cdot Prob\{T_j = k / X_0 = j\}$, la suma de k = 1, 2,…, n.

Tiempos esperados de Recurrencia μ_{jj}: Un estado j de una CMTD es positivo recurrente si $E_j(T_j) = m_j$ es finito; este m_j es el tiempo medio de recurrencia del estado j. Veamos qué sucede en el límite para el estado j en CMTD irreducible cuando $m_j = E(T_j / X_0 = j)$: (Revisar el Teorema fundamental de Renovación “Key Renewal Theorem”):

a. $\lim_{n\to\infty}[p_{jj}]^{(n)} = 1/m_j$ si j es aperiódico. b. $\lim_{n\to\infty}[p_{jj}]^{(n*d)} = d/m_j$ si j es periódico de período d.

Si relacionamos las probabilidades límite de una CMTD irreducible se tiene que (denotando $\mu_{jj} = m_j$):

a. $\pi_j= 1/m_j$ si j es aperiódico $\rightarrow \mu_{jj}= 1/\pi_j$. b. $\pi_j = d/m_j$ si j es periódico de período d $\rightarrow \mu_{jj}= d/\pi_j$.

Ejemplo aperiódico: Para una máquina que puede estar en dos estados 0: descompuesta y 1: funcionando, por hora. Si m_0=5 horas y m_1=1.25 horas, la fracción de visitas a largo plazo a cada estado debe ser 1/5=0.20 y 4/5=0.80, respectivamente. Para ejemplos previos con $\boldsymbol{\pi}_A$= [97, 20, 6]/123 se tiene los tiempos esperados de recurrencia en [1.27, 6.15, 20.5] y para $\boldsymbol{\pi}^*$=[¼ ½ ¼] se tiene 2*[4, 2, 4] = [8, 4, 8], por ser de período 2.

Tarea: modifique la función PROB.LIM de R, que genere tiempos esperados de recurrencia y rotule el tiempo.

GUIA PRÁCTICA #09: Comportamiento Límite de una CMTD Reducible

En procesos aleatorios con matrices de transición reducibles, se tienen clases recurrentes y clases transitorias. Una clase recurrente formada por un solo estado ϱ, este es absorbente, el cual se identifica fácil en la matriz de transición sobre la diagonal principal la probabilidad $p_{\varrho\varrho}$= 1, y en la filaϱ las demás probabilidades $p_{\varrho j}$ = 0; donde j es cualquier estado de otra clase; puede haber más de un estado absorbente en una CMTD.

Ejemplo 1: Personas que entran en Emergencias de un Hospital, pasan a observación por diversos malestares (estado 1), dos de cada tres se atienden a lo inmediato y se les da de alta (estado 2), el resto son internados (estado 4). Los que llegan en ambulancia (estado 3) se asignan al estado 1. De pacientes que son internados, el 25% pasa a sala de recuperación (estado 4) y el resto queda en estado delicado (5). Por último, la mitad de los que están en estado delicado mejoran y pasan a recuperación, el resto permanece en el mismo estado. No se facilitó la distribución inicial del número N de individuos por estado. Conformar P.

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \tfrac{2}{3} & 0 & \tfrac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{4} & \tfrac{3}{4} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}$$

→ Para la matriz conformada P que se muestra a la derecha (tiempo de transición dado en días), del dígrafo se comprueba que es una CMTD Reducible. De los 5 estados,=2 es absorbente pues p_{22}=1 (sobre la diagonal principal). Hay cuatro clases: $\mathcal{C}_1=\{4, 5\}$ y $\mathcal{C}_2=\{2\}$ son recurrentes; $\mathcal{C}_3=\{1\}$ y $\mathcal{C}_4=\{3\}$ son transitorias. Nos preguntamos (asumiendo con optimismo, que los pacientes quedan internos o son dados de alta) si a la larga: ¿A qué porcentaje se les da de alta? ¿Qué porcentaje permanece interno? ¿Cuántos días pasan internos? ¿A qué otras preguntas se podría responder si se estimaran los costos por día para cada estado por paciente? ¿En un estudio de costos convendría conformar los estados 1 y 3 en uno solo?

Tarea: Para un Hospital local, construya la matriz de transición, llevándolo a la realidad: ¿Qué otro estado absorbente se omitió este ejemplo? El estado 3, sepárelo según procedencia, en rural y urbano.

Disquisición de matrices de transición en CMTD Reducible: Se puede asumir que una CMTD Reducible tiene R clases comunicantes cerradas: $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$,…, $\mathcal{C}_R$, y que los restantes estados forman el conjunto $\mathcal{T}$. Los estados se etiquetan de forma que la matriz de transición P se arregle de la forma que se muestra a la derecha. Las sub-matrices $P_{[1]}$, $P_{[2]}$, hasta $P_{[R]}$ son matrices estocásticas, en cambio la matriz Q es sub-estocástica. La n-ésima potencia de P, resulta en la potencia de cada sub-matriz; así $P^n_{[\circ]}$ se comporta tal como una CMTD Irreducible, pero como en la matriz Q todos los estados son transitorios, Q^n tenderá a cero a medida que n aumenta. Así el límite de P^n se reduce a estudiar el comportamiento de las probabilidades de transición de Da n pasos, esto es, cuando n tiende a infinito; denotar a esta por D_n, veamos esto ahora.

<table>
<tr><td>P_[1]</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>P_[2]</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>⋱</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>P_[R]</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">D</td><td>Q</td></tr>
</table>

Teorema de probabilidades de transición entre clases (TPTC): Para i∈$\mathcal{T}$, y para $1 \le r \le R$, la probabilidad de iniciar en el estado i y ser absorbido por la clase recurrente$\mathcal{C}_r$ se define por$a_i(r)$ = P{ $X_n \in \mathcal{C}_r$;∃ n≥0 / X_0 = i }. Cuando n tiende a infinito $a_i(r) = \sum_{[j\,\in\,\mathcal{C}r]} p_{ij} + \sum_{[j\,\in\,\mathcal{T}]} p_{ij} \cdot a_j(r)$. El comportamiento límite de D_n es a como sigue:

(a) Si $\mathcal{C}_r$ es transitoria: sí existe $\lim_{n\to\infty} D_n(i, j) = 0$.

(b) Si $\mathcal{C}_r$ es recurrente aperiódica con probabilidades límite (p.lím) π_j: sí existe $\lim_{n\to\infty} D_n(i, j) = \pi_j \cdot a_i(r)$; $j \in \mathcal{C}_r$.

(c) Si $\mathcal{C}_r$ es recurrente periódica con p.lím π_j: no existe $\lim_{n\to\infty}(^1/_{(n+1)})\sum_{[m=0:n]} D_m(i, j) = \pi_j \cdot a_i(r)$; $j \in \mathcal{C}_r$.

Las probabilidades de absorción$a_i(r)$ pueden expresarse de forma matricial, a como veremos y para mejor comprensión se continúa con el ejemplo previo.

Ejemplo 2: (continuación): A la matriz con que iniciamos esta guía práctica, abajo a la derecha se muestra el arreglo partido de P, según sus clases, con $P_{[1]}$, $P_{[2]}$, D y Q extraídas a continuación y sus matrices límite cuando n tiende a infinito. Para las matrices estocásticas $P_{[1]}$, $P_{[2]}$, procedemos a como en los casos de CMTD Irreducible. Para Q, que no es estocástica, es fácil verificar que Q^n tiende a la matriz cero.

Para la matriz D, con las ecuaciones del teorema TPTC, se conforma la matriz Adyacente límite (A_ℓ), denotando cada columna por la clase recurrente en sus estados colapsados a una sola celda y sumadas sus probabilidades por fila; las celdas que corresponden a estados transitorios, contienen las incógnitas de cada probabilidad de absorción $a_i(r)$ cuya matriz se denota por $A_R = [a_i(r)]$. Se resuelve el SEL $A_R = [[D]\ [Q]] * A_\ell$ y se aplica la parte (b) del Teorema TPTC; por ser ambas $\mathcal{C}_r$ recurrentes aperiódicas ($_{\{4,5\}}$ y $_{\{2\}}$):

P	4	5	2	1	3
4	¼	¾	0	0	0
5	½	½	0	0	0
2	0	0	1	0	0
1	⅓	0	⅔	0	0
3	0	0	0	1	0

$$\begin{bmatrix} a_4(1) & a_4(2) \\ a_5(1) & a_5(2) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{D} \quad\quad\quad \text{Q} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} ⅓ & 0 & ⅔ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} * \begin{array}{c|cc} A_\ell & \mathcal{C}_{\{4,5\}} & \mathcal{C}_{\{2\}} \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & a_4(1) & a_4(2) \\ 3 & a_5(1) & a_5(2) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} a_4(1) & a_4(2) \\ a_5(1) & a_5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ⅓ & ⅔ \\ ⅓ & ⅔ \end{bmatrix}$$

Se verifica [A] = [[D] [Q]*[[E] [A]] → [A] = [D]*[E] + [Q]*[A] → [**I** – [Q]] [A] = [D]*[E] → [A] = [**I** – [Q]]$^{-1}$ [D]*[E]   Con [A] se conforma para obtener $\lim_{n\to\infty} P^n$, la que se muestra abajo a la derecha. Dibuje nuevamente el diagrama de transición en sus cuatro clases y ubique las probabilidades límite logradas.

$P_{[1]}$	$P_{[1]}$	$P_{[2]}$	Q	D	P^n
Sub-matriz	$\begin{bmatrix} ¼ & ¾ \\ ½ & ½ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ⅓ & 0 & ⅔ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} ⅖ & ⅗ & 0 & 0 & 0 \\ ⅖ & ⅗ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ^2/_{15} & ^1/_5 & ⅔ & 0 & 0 \\ ^2/_{15} & ^1/_5 & ⅔ & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$
Sub-matriz en el límite $n\to\infty$	$\begin{bmatrix} \pi_4 & \pi_5 \\ \pi_4 & \pi_5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ⅖ & ⅗ \\ ⅖ & ⅗ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \pi_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ⅖\cdot a_4(1) & ⅗\cdot a_4(1) & 1\cdot a_4(2) \\ ⅖\cdot a_5(1) & ⅗\cdot a_5(1) & 1\cdot a_5(2) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ⅖\cdot⅓ & ⅗\cdot⅓ & 1\cdot⅔ \\ ⅖\cdot⅓ & ⅗\cdot⅓ & 1\cdot⅔ \end{bmatrix}$	

Observe que a la larga, de ambos estados transitorios 1 y 3, el 67% son dados de alta, el 20% pasa a estar en estado delicado y el restante 13% pasa en la sala de recuperación. Intente deducir los tiempos esperados.

Programa en R para probabilidades de transición entre clases (PTC) en CMTD Reducibles: Aunque se puede ingresar toda la matriz P o Q, esto no es necesario. Del ejemplo previo de cuatro clases, con dos de ellas recurrentes, se crea la función con datos de entrada P1, P2, D y Q. Se llama a la función PROB.LIM de la Guía 8:

```
PROB.LIM = function(P) {m0 <<- ncol(P); A <<- t(P)-diag(m0); A[1,] <<- 1; e <<- c(1, rep(0,m0-1))
P_lim = solve(A, e) ; P.lim<<- t(matrix(P_lim, nrow=m0, ncol=m0)) ; P.lim }
TPTC = function(P1, P2, D, Q) { m1 <<- ncol(P1) ; m2 <<- ncol(P2) ; L <<- nrow(Q) ; IL <<- diag(L)
E1 <<- c(rep(1, m1), rep(0, m2)) ; E2 <<- c(rep(0, m1), rep(1, m2))  ;  E <<- cbind(E1, E1, E2) ; AL <<- solve(Q-IL,
-D%*%E)
P.1 <<- PROB.LIM(P1) ; P.2 <<- PROB.LIM(P2) ; D.n = AL * cbind(P.1, rbind(P.2,P.2) )
print("Las matrices límite son: ") ; list(P.1=P.1, P.2=P.2, D.n= D.n )}
d1 = c(1, 2, 3, 2)/4 ; d2 = c(1) ; d3 = c(1, 0, 0, 0, 2, 0)/3 ; d4 = c(0,1,0,0)# Los datos de cada sub-matriz del
Ejemplo
P1 = matrix(d1, ncol=2) ; P2 = matrix(d2, ncol=1) ; D= matrix(d3, nrow=2) ; Q = matrix(d4, ncol=2) ; TPTC(P1,
P2, D, Q)
```

Tarea: Deduzca las ecuaciones del SEL solve(Q-I, -D*E). Agregue etiquetas a los estados.

Al evaluar las dos funciones previas, se generan los siguientes resultados equivalentes a los de P^n:

```
[1] "Las matrices límite son: "
$P.1
     [,1] [,2]
[1,]  0.4  0.6
[2,]  0.4  0.6
$P.2
     [,1]
[1,]    1
$D.n
            E1   E1        E2
[1,] 0.1333333  0.2 0.6666667
[2,] 0.1333333  0.2 0.6666667
```

Ejercicios propuestos para Guías prácticas 07-09

1- Una CMTD tiene dos estados: 0 y 1, con matriz de probabilidades de transición P. Suponga que la cadena tiene una distribución inicial dada por a = (3/5, 2/5).

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1 & 1/2 & ½ \end{array}$$

Calcule P (X_1=0), P(X_1=1), P(X_2=0), P(X_2=1), P(X_3=0), P(X_3=1). P(X_3=0 / X_2=1), P(X_3=1 / X_2=1)

2- Para una matriz de HilbertH(m) con H[i, j] = 1/(i+j-1) de rango m=3, compruebe que el vector de la suma por fila es w=(110, 65, 47)/60. Construya P = H(m)/w, compruebe que P es estocástica y analice el comportamiento límite. Utilice el computador y calcule P a partir de H(m) para m={2, 3, 4, 5}. Averigüe cuál procedimiento es más rápido para m=2200:apply(Hm, 1, sum) ó bien: Hm %*% U, con U = $[1, 1, \ldots, 1]^t$

3- Consideremos el proceso aleatorio $X_{(t)}$ = At + B donde A es una variable aleatoria que toma los valores 3 y 4 con probabilidades ¼ y ¾, respectivamente y B es una variable aleatoria con función de probabilidad: P(B=1)= P(B=2) = ½, y además A y B son variables aleatorias independientes.(a) Hallar la distribución de probabilidad de $X_{(0)}$, su esperanza y varianza.(b) Dibuja las realizaciones del proceso y calcula la probabilidad de cada etapa, para t en { 0, 1, 2}. (c) Obtén la media y varianza del proceso.

4- Un colegio técnico vocacional con duración de dos años para cada carrera, se interesa en saber el número de alumnos que se graduaran cada año, cuántos se retirarán o transfieren a otros centros. A los alumnos se les permite repetir el mismo año 1° y 2° pero si aprueban 2° se gradúan (estado 3), asumido que no estudiarían más en el colegio; esto 0 son los retirados.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0 \\ 2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La matriz P se construye de registros históricos. Dibuje y analice el diagrama de transición. Calcule y compare las matrices de transición de 2, 4 y 8 pasos.

5- Empresas de gran número de empleados categoriza a estos en M niveles entre los cuales se puede promover, considerando la Antigüedad, el Rendimiento y Disponibilidad de puestos, asimismo los empleados pueden abandonar la empresa desde cualquier categoría. El estado de la empresa cambia de forma dinámica en el tiempo e interesa modelizar su evolución como proceso aleatorio. El número de empleados N se mantiene constante, contratando nuevos si hay puestos vacantes por abandono o por jubilación; un nuevo empleado es contratado en la categoría j con probabilidad a_j. Los cambios entre los M categoría se dan en tiempos discretos n = 0, 1, 2,…; si un empleado está en la categoría i al tiempo n, se cambia a la categoría j en el tiempo n+1, con probabilidad $r_{i,j}$ o deja la empresa de forma definitiva con probabilidad r_i. Así para cada estado i de 1 a M: $r_i + r_{i,1} + r_{i,2} + r_{i,3} + \ldots + r_{i,M} = 1$. Sea $X_n(r)$ la categoría en la que el r-ésimo empleado está al tiempo n, entonces {$X_n(r)$, n≥0} es una CMTD con probabilidades de transición:
$p_{i,j}$ = Prob{ $X_{n+1}(r) = j / X_n(r) = i$ } = $r_{i,j} + r_i * a_j$; r_{ij} es matriz ${}_{MxM}$; r_i es vector columna ${}_{Mx1}$, a_j es vector fila ${}_{1xM}$.

El primer sumando es la probabilidad de que el r-ésimo empleado pase de la categoría i a la j, y el segundo sumando es la probabilidad de que aquel abandone estando en la categoría i y sea reemplazado por otro nuevo r-ésimo empleado en la categoría j.
Suponga que una empresa tiene cuatro categorías y los nuevos empleados siempre entran en la categoría 1. Los demás valores son: $r_1=r_2=r_3=r_4=0.2$, $r_{11}= 0.6$, $r_{12}=0.2$, $r_{22}=0.6$, $r_{23}=0.2$, $r_{33}=0.6$, $r_{34}=0.2$, $r_{44}=0.8$. Construya la matriz de Transición a este sistema, calcule probabilidades límite y tiempos esperados de recurrencia.

6- Analice las siguientes matrices estocásticas, para la última matriz suponga que $p_i>0$, $q_i>0$, $p_i+q_i<1$, para todo i, y demuestre que: $\Delta_1 = p_2q_3 + p_3 (1+q_2)$, $\Delta_2 = p_3q_1 + q_3(1-p_1)$, $\Delta_3 = (1-p_1)(1-q_2)-p_2q_1$ y $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$

M_1	M_2	P_A	P_B	P_C	P	$P_{PMO} = r_{i,j} + r_i{*}a_j$
$\begin{vmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1-p_1-q_1 \\ p_2 & q_2 & 1-p_2-q_2 \\ p_3 & q_3 & 1-p_3-q_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \end{vmatrix}$

Resuelva la matriz P para $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\mu}$, tomando $p_1=0.8$, $p_2=0.7$, $p_3=0.5$, $q_1=0.15$, $q_2=0.20$, $q_3=0.30$.

GUIA PRÁCTICA #10: Sistematización práctica para una CMTD Reducible

Procedimiento de Probabilidades de absorción (PPA): En matrices de transición Q con clases recurrentes conformadas por solo estados absorbentes, a largo plazo, estos concentrarán toda la probabilidad, por lo cual estas en el límite, pueden calcularse con el siguiente procedimiento práctico.

P_0:En la matriz de transición Q identificar y eliminar filas asociadas a estados absorbentes.

P_1: formar la matriz $Q_{\mathcal{T}}$con las columnas asociadas a estados transitorios (filas de estados transitorios).

P_2: formar la matriz Q_{R}con las columnas asociadas a estados absorbentes (filas de estados transitorios).

P_3: calcular la matriz de tiempos esperados de transición$\mu_{\mathcal{T}.R} = [\mathbf{I} - Q_{\mathcal{T}}]^{-1}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

P_4: calcular las probabilidades de absorción $\pi_{\mathcal{T}.R} = \mu_{\mathcal{T}.R} * Q_R$.

Ejemplo 1: Aplicando el procedimiento PPA sobre Q, que resulta de tomar la clase {4, 5} como un solo estado absorbente se tienen las matrices:

Q

	4,5	2	1	3
4,5	1	0	0	0
2	0	1	0	0
1	⅓	⅔	0	0
3	0	0	1	0

$Q_{\mathcal{T}}$

	1	3
1	0	0
3	1	0

$\mathbf{I} - Q_{\mathcal{T}}$

	1	3
1	1	0
3	-1	1

$\mu_{\mathcal{T}.R}$

	1	3
1	1	0
3	1	1

Q_R

	4,5	2
1	⅓	⅔
3	0	0

$\pi_{\mathcal{T}.R}$

	4,5	2
1	⅓	⅔
3	⅓	⅔

Suponiendo los tiempos de transición dados en días, y analizando sobre el dígrafo el dato sombreado: un paciente que llega en ambulancia, pasa un día en observación antes de ser dado de alta o de ser ingresado.

Resolución con dos estados absorbentes y dos clases transitorias formadas por un solo estado: En procesos aleatorios con matrices de transición reducibles con dos estados absorbentes y dos estados transitorios de clases distintas (fijada la escala de tiempo), la matriz estocástica$Q$ es 4x4, y la podemos expresar a como se presenta a la derecha. Abajo se muestra las matrices que resultan de aplicar el procedimiento de probabilidades de absorción PPA, donde el determinante para la segunda matriz es $\Delta=(1-a)\cdot(1-d)-b\cdot c$. La tercera matriz $\mu_{\mathcal{T}.R}$contiene los tiempos de permanencia entre estados transitorios antes de pasar a estados absorbentes y la quinta matriz $\pi_{\mathcal{T}.R}$contiene la probabilidad de que cada estado transitorio sea absorbido por cada estado absorbente.

Q

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	a	b	p	q
4	c	d	r	s

$Q_{\mathcal{T}}$

	3	4
3	a	B
4	c	D

$\mathbf{I} - Q_{\mathcal{T}}$

	3	4
3	1-a	-b
4	-c	1-d

$\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{T}.R}$

	3	4
3	(1-d)/Δ	b/Δ
4	c/Δ	(1-a)/Δ

Q_R

	1	2
3	p	q
4	r	s

$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{T}.R}$

	1	2
3	$\pi_{3.1}=(b\cdot r+pd\cdot p)/\Delta$	$\pi_{3.2}=(b\cdot s+q-\cdot q)/\Delta$
4	$\pi_{4.1}=(c\cdot p+r-a\cdot r)/\Delta$	$\pi_{4.2}=(c\cdot q+s-a\cdot s)/\Delta$

Ejemplo 2: Un colegio técnico vocacional con duración de dos años en cada una de sus carreras, se interesa en conocer el número de alumnos que se graduaran cada año (3º), cuántos se retira no transfieren a otros centros (0º). A los alumnos se les permite repetir el mismo año 1º y 2º pero si aprueban 2º se gradúan y se supone que no estudiarían más en

Q

	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	0.10	0.15	0.75	0
2	0.05	0	0.12	0.83
3	0	0	0	1

el colegio. De los registros históricos, de cinco años previos se estima esta matriz de transición Q. El número promedio de alumnos por año es de 850.

→ Fácilmente se identifican las matrices $Q_{\mathcal{T}}$ y Q_R, se calcula el determinante Δ=0.748, y los resultados:

$Q_{\mathcal{T}}$

	1	2
1	0.15	0.75
2	0	0.12

$\mu_{\mathcal{T}.R}$

	1	2
1	88/74.8=1.176471	75/74.8=1.002674
2	0	85/74.8=1.136364

Q_R

	0	3
1	0.10	0
2	0.05	0.83

$\pi_{\mathcal{T}.R}$

	0	3
1	$\pi_{1.0}$=0.1677808	$\pi_{1.3}$=0.83222
2	$\pi_{2.0}$=0.0568182	$\pi_{2.3}$=0.943182

Para los tiempos, un alumno en 1º pasa 1.176471 años en ese estado antes de acceder a otro estado y pasa 1.002674 años en 2º antes de graduarse o retirarse. Para alumnos en 2º pasan 0 años en 1º antes de graduarse o retirarse y pasan 1.136364 años en 2º antes de graduarse o retirarse.

Valores fraccionarios para las probabilidades de absorción son: [[125.5, 622.5][42.5, 705.5]]/748. Al multiplicar estas por 850, resulta que 143 alumnos de 1º se retiran y 707 se gradúan; de los alumnos que están en 2º, 48 se retiran y 802 se gradúan. Convendría disponer de información desagregada por carrera y año académico.

Para programar en R el procedimiento de probabilidades de absorción y el ejemplo previo:

```
PPA = function(Qt, Qr) { m = nrow(Qt) ; m.tr <<-solve(diag(m)-Qt) ; pi.tr <<- m.tr %*% Qr ; list(m.tr, pi.tr) }
Qt= matrix(c(15, 0, 75, 12)/100, ncol=2); Qr= matrix(c(10, 5, 0, 83)/100, ncol=2); PPA(Qt, Qr); round(850*pi.tr)
```

Modifique la función PPA, que solicite de entrada el tiempo de transición y muestre los resultados. Etiquete los estados de cada matriz.

Tarea: Compare resultados con la información de otro colegio:= [[0.1 0.7][0 0.2]] y Q_R = [[0.2 0][0.2 0.6]].

Costos o Pagos en CMTD: Asuma para una CMTD que cada vez que se visita el estado i se incurre en un costo c(i), (o pago de recompensa p(i)); como este costo puede ser una variable aleatoria se tomaría el costo esperado para el estado i. Sea φ(i) el costo total de descuento esperado a la tasa α (0≤α<1), incurrido en el horizonte infinito iniciando en el estado i; en términos matemáticos es φ(i) = $\boldsymbol{E}[\sum\alpha^n \cdot c(X_n) / X_0 = i]$, la suma de n=0 a ∞.Así {φ(i), i ∈ S} satisface la ecuación $\varphi(i) = c(i) + \alpha\cdot\sum p_{ij}\cdot\varphi(j)$, la suma para j∈ S. En notación matricial puede escribirse de la forma $(\mathbf{I}-\alpha\cdot P)\cdot\varphi = c$, para los vectores φ=[φ(i)]y c=[c(i)]. La matriz $(\mathbf{I}-\alpha\cdot P)$ es invertible pues |α|< 1. Por lo cual se resuelve $\varphi = (\mathbf{I}-\alpha\cdot P)^{-1}\cdot c$. No es necesario cumplir supuestos de irreductibilidad ni de periodicidad, y es válido para cualquier matriz de transición P.

Ejemplo 3: Tres marcas de refrescos A, B y C, comparten el mercado y los clientes cambian entre ellas de forma aleatoria por día según la siguiente matriz de transición P. El costo en córdobas del refresco es según cada marca [10, 15, 20] respectivamente para A, B y C. Calcule el costo total de descuento esperado para un cliente suponiendo un factor de descuento α = 0.90. El programa en R siguiente facilita los cálculos y hallar la solución:

P	A	B	C
A	0.1	0.2	0.7
B	0.2	0.4	0.4
C	0.1	0.3	0.6

```
Datos=c(1,2,1,2,4,3,7,4,6)/10 ; P = matrix(Datos, ncol=3); Costo=c(10,15,20);  solve(diag(3)-0.90*P, Costo)
# 164.7478 167.7432174.1695
```

Tarea: calcule los costos para cada potencia n de P con n={2, 4, 8, 16}

De los tres costos resultantes, si el cliente elije la marca B al tiempo 0, su gasto total de descuento sobre todas las marcas es 167.74 córdobas. Cambie el valor de α por 0.5 y luego por 0.1 y compare los tres resultados.

Tarea: Sea el espacio de estado S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} con matriz de transición P dada a continuación. Dibuje el diagrama de transición y extraiga las clases transitorias y recurrentes. Reordene la matriz de la forma sugerida en la Guía 9. Calcule la potencia P^n para n = {2, 4, 8}. Calcule a mano el límite $\lim_{n\to\infty} P^n$. Realice la función TPTC de forma que genere los resultados de esta matriz de transición.

P	1	2	3	4	5	6
1	½	0	0	0	0	½
2	0	⅓	0	0	⅔	0
3	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙	⅙
4	0	0	0	1	0	0
5	0	⅔	0	0	⅓	0
6	½	0	0	0	0	½

GUIA PRÁCTICA #11: Modelos de Colas (queue theory models)

TEMAS: Modelos de cola, características de un sistema de cola, Clasificación de Kendall A/B/C/D/E/F, Medida de rendimiento de un sistema de colas, Modelos Markovianos y de distribución General, Análisis de Costos.

Objetivo general

- Formular y resolver problemas de congestión mediante modelización de procesos estocásticos, con el fin de contribuir al manejo óptimo de los recursos en la atención a clientes o en el procesamiento de unidades en los sectores: servicios público, empresarial o de manufactura y telecomunicaciones.

Objetivos específicos

- Clasificar un sistema de cola de forma adecuada basándose en la llegada, la disciplina en el orden de atención en el servicio y la capacidad de sistema.
- Estimar medidas de rendimiento de un sistema de colas en correspondencia con su tipo, usando fórmulas matemáticas o bien con aplicación de software.

Requerimientos

- Fórmulas analíticas para el cálculo de medidas de rendimientos de cada modelo de colas analítico propuesto según la distribución de cada parámetro en los procesos de llegada y servicio.
- A falta de bondad de ajuste a modelo analítico, se requiere la descripción de las interrelaciones de la llegada y del servicio que permita simular por Método de Montecarlo el comportamiento del sistema.
- Hardware: Procesador con velocidad de 2.1 ghz, Memoria RAM de 1 GB. Una computadora personal con Windows u otra plataforma que soporte el software a utilizar.
- Software (última versión): Lenguaje R 3.3.1 (queuing.R), winQSB, Scilab 5.5.2, MatLab, Máxima.

Introducción de Temas:

Un Modelo de cola o Modelo de Congestión, consiste en acoplar apropiadamente parámetros de los procesos de llegada y de servicio para un Sistema de Colas que permita describir el comportamiento del mismo y a la vez generar medidas de rendimiento.

Se identifican como datos de entrada: la tasa de servicio μ y la tasa de llegadas λ. Cliente: unidad en espera que llega requiriendo la realización de al menos un servicio. Se identifica en un sistema de colas los procesos de nacimiento y muerte, al darse entrada y salida del mismo mediante la correspondencia entre aquellos parámetros. Los clientes pueden ser personas, maquinas, partes, ítems, etc. La cola es la línea de espera; el número de clientes que esperan ser atendidos en lo cotidiano, la cola no incluye a clientes que están siendo atendidos. La capacidad del Sistema de colas incluye tanto a unidades en espera como atendiéndose.

Aplicaciones de la teoría de colas se perciben en aspectos cotidianos de la vida diaria, que incluyen: servicio, banca, comercio, transporte, manufactura, telecomunicaciones, sistemas informáticos entre otros. En la actualidad, la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) considera a la teoría de colas y los métodos analíticos matriciales como una herramienta fundamental para el manejo del flujo de la información.

Ejemplos 1: Los aficionados que esperan comprar boletos para un juego de béisbol. Compra de entradas para el cine o teatro. Mensaje común de un remitente a acoplar por computador según lista de destinatarios y envío de las mismas. Los depósitos bancarios nocturnos a procesar. Entrada de vehículos a un parqueo de un centro comercial. Pila de tarjetas de crédito en espera debe ser habilitadas según cuentahabiente (tarjetas son los clientes, habilitador o analista de crédito es el servidor o unidad de servicio).

Parámetros de entrada en un sistema de colas: Tasa de llegada: tasa a la cual llegan clientes para ser atendidos. Los supuestos respecto a la distribución de este valor tienen un efecto en el modelo matemático. En general se supone que la tasa media de llegada (λ) estará distribuida de acuerdo a Poisson. Tasa de servicio: tasa a la cual un canal de servicio puede suministrar el servicio requerido por el cliente. Se observa que esta es la tasa que podría alcanzarse si el canal de servicio siempre estuviera ocupado, es decir, sin tiempo ocioso. La distribución de este valor es útil para determinar el modelo matemático. Habitualmente se supone la distribución de la tasa de servicio ser Poisson con media μ. Disciplina de la cola o Prioridad: método de decidir cuál será el próximo cliente a ser atendido. La suposición más frecuente consiste en que el primero que llega, es el primero que se atiende. Tamaño de la población: tamaño del grupo que proporciona la población fuente de clientes potenciales; puede ser finita (pocos clientes), si hay un gran número de clientes potenciales, (de 30 ó 50 a más) generalmente se dice que la población es infinita. Otra regla empírica es que la suposición de una población infinita que generalmente es válida cuando la población de clientes potenciales es lo suficientemente grande como para significar que la llegada de un cliente no afecta apreciablemente la probabilidad de la otra llegada. En todo caso el análisis da resultados debe ser de valores promedios o esperados. Además, se asume que la tasa de servicio y la tasa de llegadas permanecen constantes con el tiempo. Realmente, esto puede no ser verdadero, ya que frecuentemente se emplea tiempo o esfuerzo extra cuando hay una cola muy grande, esto representa un cambio temporal de μ. Veamos el siguiente esquema.

<table>
<tr><td>Población fuente de clientes
[N finita] ó [N infinita]</td><td>Servidores en Paralelo</td><td>Servidores en Serie</td><td>Capacidad del sistema</td></tr>
<tr><td>Una sola fila distribuidora →</td><td rowspan="2">[S = 1] ó [S > 1]</td><td rowspan="2">[S1] → [S2] → … [Sr]</td><td rowspan="2">[K finita]
ó [K infinita]</td></tr>
<tr><td>Varias filas independientes →</td></tr>
</table>

Ejemplo 1: M/M/1: A Informática-Estadística de una empresa llegan a digitalizar en promedio 24 informes en una hora. El escaneado de cada informe dura en promedio dos minutos. Asuma que la distribución de ambos procesos son Poisson-Exponencial y el orden de atención es Primero en llegar es al primero que se atiende.
Solución: El modelo de colas es markoviano M/M/S=1/FIFO, por lo cual las medidas de rendimiento son:

Llegadas: λ = 24 informes cada hora → λ = 24/60 = 0.4 informes/minuto (24/60 = 24 informes/hora)
Servicio: μ = 1 informe cada dos minutos → μ = 1/2 = 0.5 informes/minuto (30/60 = 30 informes/hora)
Factor de utilización: $\varphi = \lambda/\mu = 0.4/0.5 = 0.8$ → $\varrho = \varphi/S = 0.8$ → $P_n = 0.2*0.8^n = \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^n$; $P_W = 0.8$.
Tiempos en el sistema: $W = 1/(0.5-0.4) = 10$ minutos; $Wq = 0.8*10 = 8$ minutos en la cola.
Unidades en el sistema: $L = 0.4*10 = 4$ unidades; $Lq = 4-0.8 = 3.2$ unidades en la cola.

Ejemplo 2: M/M/S: Del ejemplo previo suponga que los informes son más voluminosos, tal como revistas, capítulos de libros o monografías y dura en promedio 8 minutos digitalizar cada tomo y el orden de llegadas es de 15 informes por hora. Observe que ahora λ = 0.25 ítems/mín.; μ = 0.125 ítems/mín. → $\varphi = 2$. Por lo cual al asumir el modelo M/M/S, hay que incrementar el número de escáner a S=3, para tener $\varrho = \frac{2}{3} < 1$. Es el siguiente modelo que aplicaremos (sin restringir la capacidad del sistema).

GUÍA PRÁCTICA #12: Modelos de Colas Markovianos M/M/S/K/FIFO

TEMAS: Modelo de colas Markovianos y de distribución General, Programa de software. Análisis de Costos.

Para implementar software sobre Líneas de Espera: **winQSB**© es desarrollado en 1986 por Yih-Long Chang, y dispone los módulos [Queuing Analysis] y [Quieuing System Simulation]; es muy amigable al usuario, incluye ejemplos al instalar el software, y dispone además de buena información de las bases teóricas de cada modelo. Puede descargarse la versión 2.0 del sitio en la web: https://winqsb.uptodown.com/windows.

Para la programación puede realizarse a como se ha avanzado construyendo script en R o bien se puede bajar el programa **queuing.R**, este es un paquete diseñado por Pedro Canadilla (versión 0.2.8, noviembre 2016) para modelos de colas diversos, tales como: M/M/1, M/M/S, M/M/Infinito, M/M/1/K, M/M/S/K, entre otros. Para instalarlo desde la web, con el Ambiente R activo: Menú Paquetes → Instalar Paquetes → De lista desplegada elegir (HTTP mirrors) → OCLOUD → buscar el programa de Lista desplegada → botón OK. Una vez instalado el paquete [queuing.R], para utilizarlo debe cargarse con: Menú Paquetes → Cargar paquete (Load packages) → buscar en la lista desplegada el paquete queuing → botón OK. Veamos dos ejemplos cargados desde el manual: Package “queueing” Title “Analysis of Queueing Networks and Models”:

```
summary( QueueingModel( NewInput.MM1( lambda=1/4, mu=1/3, n=0)))    ## modelo M/M/S=1
summary( QueueingModel( NewInput.MMC( lambda=1/4, mu=1/3, c=3)))  ## modelo M/M/S=3
```

Resultados de la realización de las dos líneas previas a dos modelos markovianos

Modelo M/M/S	M/M/S=1	M/M/S = 2
INPUTS: lambda = 0.25, mu = 0.33333333, c=S, n : 0, method: Exact	c = 1	c = 2
The probability (p0, p1, ..., pn) of the n = 0 clients in the system are:	0.25	0.4545455
The traffic intensity is : (The server use is:)	0.75 (0.75)	0.75 (0.375)
Length: The mean number of clients in the system is: (L in the queue is:)	L = 3 (Lq = 2.25)	L = 0.873 (Lq = 0.123)
The mean number of clients in the server is :	0.75	0.75
Waiting: The mean time spend in the system is : (W in the queue is:)	W = 12 (Wq = 9)	W= 3.491 (Wq = 0.491)
The mean time spend in the server is :	3	3
The mean time spend in the queue when there is queue is: (The throughput is:)	12 (0.25)	2.4 (0.25)

Veamos un programa sencillo en R a partir del formulario para el modelo M/M/S, con S ≥e 1.

```
MMS = function(tasa.lleg, tasa.serv, nserv) {s = nserv ; fi = tasa.lleg/tasa.serv ; rho = fi/s ; t = rho/(1-rho) ;
 th = t*fi**s/factorial(s) ; x = 0:s ; p0 = 1/(sum(fi**x/factorial(x)) + th ) ; pw = th*p0/rho ; lq = t*pw; l = lq+fi ;
wq=lq/tasa.lleg; w=wq+1/tasa.serv ; print("Modelo Markov. M/M/S"); data.frame(rho, p0, pw, lq, l, wq, w)}
MMS(24/60, 30/60, 1) ; MMS(15/60, 1/8, 3) # Ejemplos de Modelos Markovianos para sistema estable.
```

Tarea: Modifique este script para que no permita datos negativos y que dé el mensaje “Sistema inestable” para factor de utilización mayor o igual que uno.

Uso de fórmulas del modelo M/M/S=3 para λ=0.250, μ = 0.125 □ ϕ = 2 □ ϱ = ϕ/S = ⅔ □ 1–ϱ = ⅓
□ t = ϱ/(1–ϱ) = 2 □ P0 = 1/[1+ ϕ + ½*ϕ2 + ⅙*ϕ3 + ⅙*t*ϕ3] = 1/9 ; PW = ⅙*ϕ3*P0/(1–ϱ) = 4/9
Unidades o ítems: En la cola: Lq = t*PW = 8/9; en el sistema: L = Lq + s*ϱ = 2+8/9.
Tiempos esperados (minutos): Wq = Lq/ λ = 3+5/9 en la cola; W = Wq+1/μ = 11+5/9 en el sistema.

Modelos MMS en sistema de colas con filas independientes y una sola fila distribuidora

Supongamos un banco con cuatro cajeros activos y que cada uno atiende con una tasa de 21 clientes por hora. La tasa de llegadas es de 60 clientes por hora para períodos de mayor congestión. Tanto el proceso de llegada como el de servicio es markoviano y el orden de atención es FIFO. Veamos dos casos de este sistema de colas

CASO 1: Modelo M/M/S=1, con cuatro filas independientes.

De 60/4= 15 clientes/hora → λ= 0.25 cliente/minuto. Servicio: μ=21 clientes/hora → μ = 0.35 clientes/minuto.

Factor de utilización: $\phi = 0.25/0.35 = 5/7 \rightarrow \varrho = \phi/1 = 5/7 \rightarrow 1-\varrho = 2/7 \rightarrow t = \varrho/(1-\varrho) = 5/2 = 2.5$

$P0 = 1-\varrho = 2/7 = 0.2857$; $PW = \varrho = 5/7 = 0.7142857$. Pn =

Tiempos en el sistema: $W = 1/(0.35-0.25) = 10$ minutos; $Wq = (5/7)*10 = 7.142857$ minutos en la cola.

Unidades en el sistema: $L = 0.25*10 = 2.5$ unidades; $Lq = 2.5-5/7 = 1.785714$ unidades en la cola.

CASO 2: Modelo M/M/S=4, con una sola fila distribuidora.

Llegadas: λ=60 clientes/hora → λ = 1 cliente/minuto. Servicio: μ=21 clientes/hora → μ = 0.35 clientes/minuto.

Factor de utilización: $\phi = 1/0.35 = 20/7 \rightarrow \varrho = \phi/S = 5/7 \rightarrow 1-\varrho = 2/7 \rightarrow t = \varrho/(1-\varrho) = 5/2 = 2.5$

$P0 = 1/[1+\phi+ ½*\phi2+⅙*\phi3 +1/24*\phi4+1/24*t*\phi3]= 147/3167$; $PW = 1/24*\phi4*P0/(1-\varrho) = 1/2.2169$.

Clientes o ítems en la cola: $Lq=t*PW = 25/22.169= 1.1277$; en el sistema: $L=Lq + s*\varrho = 3.984844$.

Tiempos esperados (minutos): $Wq=Lq/\lambda=1.1277$ en la cola; $W = Wq+1/\mu = 3.984844$ en el sistema.

*Al comparar las medidas de rendimiento, vemos que el Caso 1 es mejor que el Caso 2. Además es menos congestionado pues L=3.985 del Caso 1, es menor que 4L = 4*2.5 = 10 clientes para el Caso2.

Análisis de Costo en un sistema de colas MMS:

Un modelo de colas es en principio descriptivo, al realizar análisis de sensibilidad o incluir costos se lo vuelve normativo. En un sistema de colas los costos involucrados se relacionan con las medidas de rendimiento, para simplificar, asumamos el tiempo en horas: Costos por servidor (ocupado CSB, desocupado CSD), Costo de cliente o usuario por hora (esperando en la cola CUWQ, siendo atendido por el servidor CUS, por cliente frustrado que se va CUF); también puede incluirse el costo por capacidad limitada del sistema (CC).

Ejemplo 1: Un restaurante dispone de tres meseros, al mismo llegan los clientes a razón de 36 clientes por hora en el intervalo [11:20 am., 2:20 pm.] y reciben sus pedidos a la carta o ejecutivo de comidas con tiempo medio de 4 minutos (asuma mesas suficiente para los clientes). El costo por mesero/servicio por hora es CS= $22.00 estando ocupado y de CSD= $20.00 si está desocupado. Al restaurante, el costo para cada cliente por hora es CUWQ= $8.50 esperando y CUS= $4.50 siendo atendido. Aproxime el modelo M/M/S=3.

λ=36/60=0.60 clientes/minuto. μ=1/4=0.25 clientes/minuto. → ϕ=2.4 → $\varrho=\phi/S=0.8$ → $1-\varrho=0.2$.

t=0.8/0.2=4 → P0 =5/89; PW = 288/445; Lq = t*Pw = 2.588764, L = 4.988764. Wq = 4.314607, W = 8.314607.

Costos Totales promedios: Por servidor ocupado = CS*(L-Lq) = 22*2.4 = $52.80

Por servidor desocupado = CSD(S–S*ϱ) = 20*(3-2.4) = 20*0.6 = $12.00

Por cliente esperando por minuto = CUWQ*Wq*(S–S*ϱ) = 8.50*4.314607*0.6 = $22.0045

Por cliente siendo atendido = CC*(W-Wq)*(S–S*ϱ) = 4.50*4*0.6 = $10.80

Por cliente frustrado que abandona = $0.00. Por capacidad Q de espacio restringido = $0.00

Costo total para el Restaurante en el periodo de almuerzo = 52.80+12.00+22.0045+10.80 = $97.6045.

Tarea 1: Modifique el programita MMS, de la página anterior y agregarle costos, verificando los mismos. Compare resultados con mismos datos de entrada, con los propios del winQSB u otro software.

Modelos de Teoría de Colas o Modelos de Congestión: Fórmulas de Modelos M/M/S y M/M/S/K.

Ejercicios Propuestos para guías 11-12

1) Suponga que en una estación con un solo servidor llegan en promedio 45 clientes por hora, si tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora. Se sabe que los clientes esperan en promedio 3 minutos en la cola. se solicita: a) Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema. b) Numero promedio de clientes en la cola. c) Numero promedio de clientes en el sistema en un momento dado. Resp. a) 4 Minutos, b) 2.25 clientes, c) 3 clientes.
2) Suponga un restaurante de comidas rápidas al cual llegan en promedio 100 clientes por hora, durante un periodo de mayor tráfico. Se tiene capacidad para atender en promedio 100 clientes por hora durante el periodo de mayor tráfico. Se tiene capacidad para atender en promedio a 150 clientes por hora se sabe que los clientes esperan en promedio 2 minutos en la cola calcule las medidas de desempeño del sistema. a) ¿Cuál es la probabilidad del que el sistema este ocioso? b) ¿Cuál es la probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar, porque el sistema este ocupado? c) ¿Cuál es el numero promedio de clientes en la cola? d) ¿Cuál es la probabilidad que hayan clientes en la cola? Resp. a) 33.3%, b) 22.22%, c) 4 Clientes, d) 0.58%
3) Un lavo carro puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 por hora. Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/M/1. Además de la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema, la probabilidad de tener una cola de Más de 3 clientes y la probabilidad de esperar más de 30 minutos en la cola y el sistema. Resp. a) 75% del tiempo está ocupado el sistema y un 25 % ocioso, b) 0.3162, c) 16.7%, d) 22.3%
4) Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de servicio promedio por cada cliente es de 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Conteste las siguientes preguntas: a) ¿Cuál es la probabilidad que el cajero este ocioso? b)¿Cuál es el numero promedio de automóviles que están en la cola del cajero(se considera que un automóvil que está siendo atendido no está en la cola esperando), c) ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco,(incluyendo el tiempo de servicio), d)¿Cuántos clientes atenderá en promedio por hora? Resp. a) 33.33%, b) 1.33, c) 12 minutos, d) 10 clientes.

VI. CONCLUSIONES

- Procesos aleatorios es un componente medular para la formación profesional donde se usa la simulación de variables aleatorias que conforman procesos de sistemas que permitan apoyar a la toma de decisiones.
- Para las carreras del departamento de Computación existe la problemática de no existir ruta lógica que enlace al componente Procesos Aleatorios, para la carrera de Ciencias Actuariales y Financieras la temática que se aborda es un condensado de Procesos Aleatorios y Series de Tiempo lo que con lleva a que no se aborda el contenido completo de Procesos Aleatorios.
- Las guías de laboratorios facilitan la enseñanza-aprendizaje del componente, ya que, a nuestro criterio, son herramientas de fácil elaboración y compresión. Además a través de las guías se puede estandarizar la didáctica en las distintas carreras que lo ameritan.
- La aplicación de software R, además de la ventaja de ser gratuito, facilita la resolución de las guías de laboratorio, por su amplia disponibilidad de rutinas, funciones y paquetes, proporciona una alta capacidad de almacenamiento de información, velocidad en los cálculos y produce gráficos de calidad.

VII. RECOMENDACIONES

- Revisar la macro-programación de las carreras de Ingeniería en Sistema y Telemática para determinar la ruta lógica que enlace el componente Procesos Aleatorios con componentes previos proponiendo la Estadística Introductoria y Estadística Aplicada o bien Estadística Analítica y posteriores al mismo, Simulación de Sistema o Minería de datos. Para carrera de Ciencias Actuariales y Financieras se recomienda se imparta Series Temporales en un componente posterior a Procesos Aleatorios, para que se pueda abordar todo el contenido de sin ningún inconveniente.
- Los trabajos investigativos y monográficos deberían ser en correspondencia con problemas existentes actuales y locales para cada tema, que permitan asimilar y afianzar los conocimientos abstractos en los alumnos, alentando en estos el deseo de nuevas propuestas de aplicación.
- Para una asimilación satisfactoria, se deben impartir cursos donde a los estudiantes se les enseñe las funciones básicas del lenguaje de R y demás programas para que les sirva de fortalecimiento en el futuro profesional.
- Ya que este trabajo es producto de la dedicación y autoaprendizaje, como tal queremos despertar el interés de estudiantes, profesores y profesionales a realizar investigaciones en temas relacionados al componente o bien que se aborden desde otras perspectivas, ya que por experiencia propia sabemos que la recompensa es gratificante.

VIII. BIBLIOGRAFIA

1. Vide Javier Martin, Procesos Estocásticos Aplicado en Geografía Física, [Internet], 2016 [Citado el 23 de septiembre del 2016]; 15 paginas(1) Disponible en: http:// www.dialnet.uniroja.es/descarga/articulo/109725.pdf
2. Aguilar Donaire José Ernesto, Modelo de Series Temporales Aplicado a las Enfermedades Diarreicas Agudas, [Tesis]; León, Nicaragua; 1995, 03 de Mayo de 2017 disponible en: http:// www.sibul.unanleon.edu.ni
3. Lacayo Sandino Conny, Series Temporales Aplicadas a la producción de camarones,[Tesis]; León, Nicaragua;1997, [03 de Mayo de 2017]
4. Zepeda Paz Marcela, Simulación de Variable Aleatoria para computadora, [Tesis], León,Nicaragua;2000, [03 de Mayo de 2017]
5. www.sigacad.unanleon.edu.ni
6. Sheldon M. Ross, Stochastic Process, Scond Edition, united States of America 1976.
7. López Leovigildo Leandro, Aplicación de los Procesos Estocásticos a la Vida Diaria, publicada el 31 de mayo 2012, México. Disponible en: http://blog.udlap.mx/blog/2012/05/aplicaciodeprocesoestocasticos/
8. Ruiz Guarneros Emmanuel, Introducción a los Procesos Estocásticos y la Aplicación a la Actuaría, publicada el 03 de diciembre de 2012. disponible en: https://es.slideshare.net/mpbole/EmmanuelRuizG/introduccin-a-los-procesos-estocsticos-y-sus-aplicaciones-en-la-actuara
9. Valderrama Bonnet Mariano J., Modelos Estocásticos Dinámicos, pagina 27, Granda 2009.
10. Kai Lai Chung, Teoría Elemental de la Probabilidad y de los Procesos Estocásticos, edición original en lengua inglesa publicada por Springer-Verlang, New York-Heidelberg-Berlin, Editorial Reverte, S.A, 1993.
11. M. Mood Alexandre y Graybill Franklin A, Introducción a la Teoría de la Estadística, 4ta edición, España; 1978. , [Internet], 1978, [14 de abril del 2017]; disponible en www.listinet.com/biografia.comuna/eduu311-3EBD.Pdf
12. J.Kazmier Leonard Ph.D y Díaz Alfredo, Estadística Aplicada a la Administración y Economía, 2da edición, México; 1991.

13. Websber Allen L, Estadística Aplicada a los Negocios y a la Economía, 3era edición, Colombia, 2000.
14. Kazmier Leonard J Ph.D, Estadística Aplicada a la Administración y la Economía, 4ta edición.
15. Romero Palma José Loreto, Introducción a los Procesos Estocásticos.
16. Vélez Ibarrola Ricardo y Prieto Rumeau Tomás, Procesos Estocásticos, 1ra edición 2013, impreso en España.
17. Rincón Luis, Introducción a Procesos Estocásticos, versión enero 2011. Disponible: http://www.matematicas.unam.mx/lars
18. Sales Valles, Cálculo de Probabilidad II, Universidad Nacional de Educación a Distancia-Madrid.
19. https://es.slideshare.net/eddyguerrero05/cadenas-de-markov-34726886
20. http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lem/garduno_a_f/capitulo2.pdf
21. Ihaka R. & Gentleman R. 1996. R: A Language For Data Analysis And Graphics. Journal Of Computational And Graphical Statistics 5: 299–314.
22. Ahumada Jorge A., R para Principiantes, la versión en español de “R for Beginners”, Disponible en: http://cran.r-project.org/doc/contrib/rdebuts_es.pdf
23. González Silvia y González Andrés, Versión en español de An Introduction to R. Disponible en http://cran.r-project.org/doc/contrib/R-intro-1.1.0-espanol.1.pdf
24. Correa Juan Carlos y González Nelfi , Gráficos Estadísticos con R. Disponible en: http://cran.r-project.org/doc/contrib/grafi3.pdf
25. Risk Marcelo R Cartas sobre Estadística de la Revista Argentina de Bioingeniería Disponible en http://cran.r-project.org/doc/contrib/Risk-Cartas-sobre-Estadistica.pdf
26. Díaz Uriarte Ramón, Introducción al uso y programación del sistema estadístico R , transparencias preparadas para un curso de 16 horas sobre R, dirigido principalmente a biólogos y especialistas en bioinformática (PDF).
27. N. Ibáñez Escriche, Introducción Al Lenguaje De Programación R, Valencia 2009.
28. Francés Carmona, Curso básico de R, 2007.

29. Santana Julio Sergio y Mateos Farfan Efraín; El Arte De Programar En R Un Lenguaje Para La Estadística, Mexico, 2014
30. Charpentier Arthur, Computational Actuarial science with R, Canada 2015.
31. Bande Manuel, Galeano Pedro, González Días Julio, Patero López Beatriz; Practicas estadísticas en R, Ingeniería técnica en información de sistemas.

IX. ANEXOS

Formulario 1. Distribuciones de Variables Aleatorias Discretas y Continuas

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Bernoulli

Función de Probabilidad:

$$P_x(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & x \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Función Generadora:

$$g(z) = q + pz$$

Valores Esperados:

$E(x)\ p\ ;\ V(x) = pq$

Función Característica:

$\varphi_x(u) = q + pe^{iu}$

Binomial

Función de Probabilidad:

$$P_x(x) \begin{cases} \binom{n}{k} p^x q^{n-x} & si\ x \in \{0,\dots,n\} \\ o & si\ x \notin \{0,\dots,n\} \end{cases}$$

Función Generadora:

$$g(z) = (q + pz)^n$$

Valores Esperados:

$E(x) = np\ ;\ V(x) = npq$

Función Característica:

$\varphi_x(u) = (q + pe^{iu})^n$

Geométrica

Función de Probabilidad:

$$P_x(x) = \begin{cases} pq^{x-1} & si\ x \in N^+ \\ o & si\ x \notin N^+ \end{cases}$$

Función Generadora:

$$g(x) = \frac{pz}{1-qz}$$

Valores Esperados:

$E(x) = \frac{1}{p}\ ;\ V(X) = \frac{q}{p^2}$

Función Característica:

$\varphi_x(u) = \frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}$

Binomial Negativa

Función de Probabilidad:

$$P_x(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-1} & si\ x \geq r \\ o & si\ x < r \end{cases}$$

Función Generadora:

$$g(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r$$

Valores Esperados:

$E(x) = \frac{r}{p}\ ;\ V(x) = \frac{rq}{p^2}$

Función Característica:

$\varphi_x(u) = \left(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}\right)^r$

Poisson

Función de Probabilidad:

$$P_x(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & si\ x \in N \geq 0 \\ o & si\ x < 0 \end{cases}$$

Función Generadora:

$$g(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Valores Esperados:

$E(x) = \lambda\ ;\ V(x) = \lambda$

Función Característica:

$\varphi_x(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS	
Uniforme	
Función de Densidad: $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a < x < b \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ **Función Característica:** $\varphi_x(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu\,(b-a)}$	**Valores Esperados:** $E(x) = \frac{a+b}{2}$;$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	
Función de Densidad: $f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ **Función Característica:** $\varphi_x(u) = \exp\left(iup - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)$	**Valores Esperados:** $E(x) = \mu$;$V(x) = \sigma^2$
Exponencial	
Función de Densidad: $f_x(x) \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & si\ x > 0 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ **Función Característica:** $\varphi_x(u) = (1 - \frac{iu}{\lambda})^{-1}$	**Valores Esperados:** $E(x) = \frac{1}{\lambda}$;$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	
Función de Densidad: $f_x(x) \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(x)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ **Función Característica:** $\varphi_x(u) = (1 - \frac{iu}{\lambda})^{-r}$	**Valores Esperados:** $E(x) = \frac{r}{\lambda}$;$V(x) = \frac{r}{\lambda^2}$

Formulario 2: Modelos de colas M/M/S y M/M/S/k

Notación General de Medidas de rendimiento y valores esperados

λ: Tasa media de llegadas de unidades por unidad de tiempo.	μ: Tasa media de servicio en unidades por unidad de tiempo.	s: Número de servidores.
ϱ: Factor de utilización del sistema o intensidad del tráfico.		$\varphi=\lambda/\mu$; $\varrho = \varphi/s$
P_n: Probabilidad de que haya exactamente n clientes en el sistema		
L: Número de unidades en el sistema.	W: Tiempo de espera en el sistema.	
Lq: Número de unidades en la fila.	Wq: Tiempo de espera en la fila.	
Ls: Número de servidores desocupados en cualquier instante.		

Ecuaciones de Balance; Resultados al límite.	$L=\sum_{n=0}^{\infty} n * P_n$	$Lq=\sum_{n=s}^{\infty}(n-s) * P_n$	$Ls=\sum_{n=0}^{s-1}(s-n) * P_n$

Fórmulas relacionales:	L = λ*W	Lq = λ*Wq	W = Wq + 1/μ	t = ϱ /(1– ϱ)

Modelos M/M/s

S =1	$P_n=(1-\varrho)\varrho^n$	$P_0=1-\varrho$	$P_W=\varrho$	W = 1/(μ – λ)	Wq = ϱW	L = λW	Lq = L – ϱ
S >1	$P_0=\left\{\left[1+\varphi+\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{3!}\varphi^3+\ldots+\frac{1}{s!}\varphi^s\right]+\frac{t}{s!}\varphi^s\right\}^{-1}$; $P_W=\frac{1}{s!}*\frac{\varphi^s \cdot P_0}{(1-\rho)}$					Lq = t *P_W L = Lq + s*ϱ	Wq = Lq/λ W = Wq + 1/μ

Modelos M/M/s/k

S=1	$P_0=\frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{k+1})}$; $P_n=\rho^n P_0$	L = t [1–(k+1)$\rho^k \cdot P_0$] Lq = L + P_0 –1	W = L/ [λ·(1– P_k)] Wq = Lq / [λ·(1– P_k)]
S>1	$P_0=\left\{\left[1+\varphi+\frac{1}{2!}\varphi^2+\frac{1}{3!}\varphi^3+\ldots+\frac{1}{s!}\varphi^s\right]+\frac{\vartheta}{s!}\varphi^s\right\}^{-1}$ $Lq=\frac{t^2}{\rho * s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left[1-\rho^{k-s}-(1-\rho)(k-s)\rho^{k-s}\right]$ L = Lq + S + Ls Wq = Lq/[λ·(1– P_k)] W = L/[λ·(1– P_k)]		$\vartheta=\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^{k-s}$ $P_n=\begin{cases}\frac{P_0}{n!}\varphi^n si\ 1\le n\le s\\ \frac{s^{s-n}P_0}{s!}\varphi^n si\ s\le n\le k\end{cases}$

Costos Totales promedios: Por servidor ocupado = C_S*(L-Lq). Por servidor desocupado = C_{SD}(S–S*ϱ).

Por cliente esperando por minuto = C_{UWQ}*Wq*(S–S*ϱ). Por cliente siendo atendido = C_C*(W-Wq)*(S–S*ϱ).

Por cliente frustrado que abandona = C_{UF}*F. Por capacidad K de espacio restringido = C_Q*K.

Glosario

- **Aleatorio:** Procede del vocablo latino aleatorius. Aleatorio es cuando no sigue un patrón particular que se pueda describir directamente por ecuaciones. Se basa más en la probabilidad. Al azar, estocástico. Este término representa una idea que debe ser expresada en términos del concepto de probabilidad.
- **Accesibilidad:** Se refiere tanto a la facilidad con la que los usuarios pueden establecer la existencia de la información estadística requerida y precisar su localización, como a la sencillez de los procedimientos que les permitan acceder a ella.
- **Amplitud:** La diferencia entre el valor máximo y mínimo de los valores de una variable se encuentran comprendidos el 100% de los valores muéstrales.
- **Asimetría:** Asimetría de una distribución de frecuencias es la característica por la que los datos pierden su simetría respecto a la media. Expresado de otra forma, es el mayor o menor grado de desviación que existe entre la media (reparto equitativo) y la mediana (punto medio de la distribución).
- **Caótico:** Que está muy desordenado y confuso.
- **Conceptualización:** es una perspectiva abstracta y simplificada del conocimiento que tenemos del mundo y que por cualquier razón querremos representar.
- **Continua:** Una variable se llama continua si entre cada dos valores suyos pueden existir infinitos otros, como el peso, la estatura, etc.
- **Costo:** El valor monetario o precio de una actividad o componente del proyecto que incluye el valor monetario de los recursos necesarios para realizar y terminar la actividad o el componente, o para producir este.
- **Covarianza:** Es la varianza conjunta en una distribución bidimensional X-Y. Se calcula como el cociente de los productos de las diferencias de X y de Y respecto a sus medias, entre el número de pares de la distribución.
- **Cualitativo**: El término se emplea para nombrar aquello vinculado a la cualidad (el modo de ser o las propiedades de algo)

- ✓ Se aplica a la variable (o dato, o medida) que sólo admite una medida nominal
- ✓ **Curtosis:** Grado de apuntamiento de la distribución de frecuencias. Si es alto, se denomina distribución leptocúrtica y si es bajo platicúrtica
- ✓ **Esperanza Matemática:** Suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de este acontecimiento, cuando la variable aleatoria es discreta (es decir, si el conjunto de resultados está formado por un número finito de elementos, o si sus elementos se pueden enumerar en secuencia). Representa la cantidad media esperada como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un número elevado a veces. En el supuesto de que todos los sucesos sean de la misma probabilidad, la esperanza es igual a la media aritmética de los valores que puede tomar la variable aleatoria.
- ✓ **Estocástico:** Equivale a Aleatorio o al azar.
- ✓ **Independencia:** Son datos que no están ligados entre sí.
- ✓ **Lenguaje de programación:** notación utilizada por los programadores para escribir programas, un lenguaje tiene una sintaxis, palabras y símbolos utilizados para escribir códigos de programa, una gramática y semántica.
- ✓ **Leptocurtica:** Distribución de frecuencias con gran Curtosis.
- ✓ **Matriz de correlación:** Forma de organizar los datos en filas y columnas que permite conocer con facilidad el valor de las correlaciones de Pearson entre J variables (en este caso en la diagonal principal de la matriz R hay unos).
- ✓ **Media:** Es una medida de centralización para una variable continua. Se obtiene sumando todos los valores muéstrales y dividendos por el tamaño muestral.
- ✓ **Mesocurtica:** Distribución de frecuencias con Curtosis media
- ✓ **Modelos estadísticos:** Permiten predecir los valores de la variable de respuesta de un sistema, de acuerdo con las condiciones específicas de entrada. Las entradas y salidas del modelo estadístico son valores numéricos de determinadas variables.
- ✓ **Platicurtica:** Distribución de frecuencias con poca Curtosis.

- **Probabilidad:** Es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.
- **Probabilidad clásica:** Número de resultados favorables a la presentación de un evento dividido entre el número total de resultados posibles.
- **Probabilidad condicional:** Es la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que también sucede otro evento B. La probabilidad condicional se escribe P, y se lee la probabilidad de A dado B
- **Proceso:** El conjunto de medidas y actividades interrelacionadas realizadas para obtener un conjunto específico de productos, resultados o servicios.
- **Procesos estocásticos:** Secuencia de experimentos aleatorios. Por ejemplo, tirar 10 veces seguidas un dado.
- **Programa:** Un conjunto de instrucciones (o sentencia) que describen alguna aplicación o actividad ejecutada en una computadora.
- **Regresión:** Proceso general que consiste en predecir una variable a partir de otra mediante modelos estadísticos.