

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN - LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA



Tesis para optar al título de Licenciado en Matemática

**EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH
Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES
EN ESPACIOS MÉTRICOS**

Autores:

1. Br. Giuseppe Benito Bervis Quintero
2. Br. Luis Enmanuel Velásquez Chavarría

Tutora: M.Sc. Claudia Patricia Zepeda Altamirano

León, Nicaragua, enero, 2019

“A la libertad por la Universidad”

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Objetivos | 1 |
| Justificación | 2 |
| 1. Historia del teorema del punto fijo | 3 |
| 2. Conceptos preliminares | 6 |
| 2.1. Espacios métricos | 6 |
| 2.2. Espacios métricos completos | 13 |
| 2.3. Espacios métricos compactos | 15 |
| 3. Teorema del punto fijo de Banach | 20 |
| 3.1. Introducción | 20 |
| 3.2. Punto fijo | 20 |
| 3.3. Teorema del punto fijo de Banach | 22 |
| 4. Algunas aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach | 29 |
| 4.1. Aplicación a los fractales | 29 |
| 4.1.1. Introducción a los fractales | 29 |
| 4.1.2. El espacio $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff | 31 |
| 4.1.3. Completitud de $(\mathcal{H}(X), h)$ | 35 |
| 4.1.4. Contracciones en $(\mathcal{H}(X), h)$ | 40 |
| 4.1.5. Sistema Iterado de Funciones | 43 |
| 4.1.6. El conjunto de Mandelbrot | 49 |
| 4.2. Aplicación a las ecuaciones diferenciales | 53 |
| 4.2.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales | 53 |
| 4.2.2. Conceptos preliminares | 53 |
| 4.2.3. El problema de Cauchy | 56 |
| 4.2.4. Existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy | 57 |
| Conclusiones | 62 |
| Recomendaciones | 63 |
| Anexos | 64 |

Objetivos

Objetivo general

Demostrar el teorema del punto fijo de Banach y aplicarlo al estudio de fractales y al problema de Cauchy.

Objetivos específicos

1. Presentar la base teórica que sustenta al teorema del punto fijo de Banach.
2. Probar en espacios métricos el teorema del punto fijo de Banach y algunas proposiciones relacionadas.
3. Mostrar la aplicación del teorema del punto fijo de Banach en la demostración de la existencia y unicidad de un atractor y de la solución de una ecuación diferencial ordinaria dado un problema de Cauchy.

Justificación

Los teoremas del punto fijo nos garantizan, bajo determinadas condiciones, la existencia de un punto fijo de una función f , es decir, un punto x para el cual se cumple que $f(x) = x$. Estos teoremas, según lo hemos podido comprobar gracias a conferencias de especialistas o a la lectura de artículos publicados, tienen un sinnúmero de aplicaciones en distintas áreas de la ciencia: matemática pura o aplicada, ingeniería, economía...

Stefan Banach demostró su teorema del punto fijo en 1922 y desde entonces este resultado ha sido ampliamente utilizado en la resolución de diversos problemas de carácter práctico o teórico. Por ejemplo, se emplea para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones nos permiten crear modelos matemáticos para una gran variedad de fenómenos. El teorema también se aplica en el estudio de métodos numéricos, programación dinámica y dinámica compleja.

El teorema del punto fijo de Banach se asienta sobre una amplia base matemática. Sin embargo, los distintos libros de texto de Análisis Matemático o Análisis Funcional generalmente no abordan de forma detallada todo el fundamento teórico que respalda dicho teorema así como tampoco los importantes resultados que se deducen a partir de él, y, en la mayoría de los casos, se limitan a enunciar sus aplicaciones. Por otro lado, hasta el momento, ninguna de las tesis que se han elaborado en las dos universidades en las que se imparte la carrera de matemática en Nicaragua (UNAN - León y UNAN - Managua) se ha centrado en este tema tan importante.

Por esta razón, en este trabajo decidimos recopilar los principales aspectos teóricos relacionados con el teorema y exponer su aplicación al estudio de fractales y al problema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial. Asimismo, esta investigación será de mucha utilidad para los estudiantes que deseen centrar su tesis de grado en un problema particular en cuya resolución necesite emplearse el teorema del punto fijo de Banach.

Capítulo 1

Historia del teorema del punto fijo

El siglo XX fue, sin lugar a dudas, el siglo de la matemática. Durante este periodo se demostraron más teoremas que en todos los siglos precedentes, muchos de los cuales han encontrado aplicaciones en múltiples campos de la ciencia y otras áreas del conocimiento. Uno de los más destacados fue el teorema del punto fijo, que fue estudiado en gran medida por los matemáticos Luitzen Brouwer (1881-1966), Julius Schauder (1899-1943) y Stefan Banach (1892-1945).

Los primeros pasos para el acercamiento y formulación del teorema del punto fijo fueron dados por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) al probar, en la década de 1820, la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = T(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

donde T es una función continua y diferenciable. Posteriormente, en 1877, Rudolf Lipschitz (1832-1903) simplificó la prueba de Cauchy, y Giuseppe Peano, en 1890, llegó a un resultado más profundo suponiendo únicamente la continuidad de la función T .

Desarrollando la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática, Georg Cantor (1845-1918) descubrió varias propiedades perturbadoras. Una de las más sorprendentes, demostrada en 1874, se refiere a la noción geométrica de dimensión: espacios de distinta dimensión (una recta y un plano, por ejemplo) pueden tener la misma cantidad de puntos y ser, por lo tanto, indistinguibles desde el punto de vista de los conjuntos. Entre 1895 y 1900, Henri Poincaré (1854-1912) desarrolló una nueva rama de la matemática: la topología, la cual estudia las propiedades de los objetos geométricos que permanecen inalteradas cuando estos son deformados continuamente, sin romperlos. Las novedosas herramientas proporcionadas por Poincaré sirvieron como base para las primeras investigaciones matemáticas relacionadas con el teorema del punto fijo.

En 1910, Brouwer, en relación con el descubrimiento de Cantor, demostró que la topología es capaz de distinguir dimensiones distintas. Por ejemplo, tanto una recta como un plano están constituidos por una sola pieza, pero una recta se divide en dos partes si se le saca un punto, y un plano no. La propiedad topológica en cuestión se llama conexión.

Pero el mayor descubrimiento de Brouwer se relaciona con una de las propiedades de las transformaciones continuas, que constituyen el principal objeto de estudio de la topología. En

1909, presentó una demostración del teorema del punto fijo considerando un espacio métrico finito, con $n = 3$. En 1910, Jacques Hadamard (1865-1963) generalizó el teorema para un n arbitrario. En este mismo año, Brouwer publicó otra demostración generalizada del mismo.

En el caso unidimensional, el teorema de Brouwer se reduce al hecho de que una función continua que tenga como argumento y valores a todos los puntos de un intervalo debe mantener invariado por lo menos un punto, hecho intuitivamente evidente que significa simplemente que toda curva dentro de un cuadrado unitario, que se extienda de un lado a otro, debe atravesar la diagonal por lo menos una vez. En el caso bidimensional, el teorema establece que una función continua que tenga como argumentos y valores a todos los puntos de un círculo, debe mantener invariado por lo menos un punto. Por ejemplo, si se rastrilla en modo continuo la grava de un cantero circular, debe haber al menos una piedrita que no sea movida.

La formulación original del teorema de Brouwer demostraba la existencia de un punto fijo, pero no indicaba ningún método para encontrarlo. Irónicamente, años después, el mismo Brouwer desarrolló una filosofía de la matemática, denominada intuicionismo, que considera ilegítimo ese tipo de demostraciones no constructivas. En todo caso, en 1929, Emanuel Sperner (1905-1980) presentó una demostración constructiva, y con la llegada del ordenador, los cálculos que requería esta demostración se hicieron practicables, y hoy en día se pueden encontrar puntos fijos de manera efectiva.

En 1922, George David Birkhoff (1884-1944) y Oliver Dimon Kellogg (1878-1932), demostraron que el teorema de Brouwer podía ser extendido, siempre que se tomara un conjunto compacto y convexo. Su método fue adoptado y ampliado en gran medida por Julius Schauder, quien mostró que el teorema puede ser generalizado para cualquier espacio de Banach. Esto le permitió probar la existencia de una solución de la ecuación diferencial:

$$\Delta z = f \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Años más tarde, utilizando un enfoque más sofisticado, Schauder encontró la solución del problema de Cauchy local para ecuaciones hiperbólicas cuasi lineales:

$$\sum_{i,k} A_{ik} \left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = A \left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right).$$

En 1922, Stefan Banach, matemático autodidacta de origen polaco, publicó una disertación en la que demostraba el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas en espacios métricos completos (en los cuales, a diferencia de los espacios topológicos abstractos, existe una noción de distancia). En su demostración, Banach utilizó el método iterativo formulado en 1890 por Charles Émile Picard (1856-1941). De esta forma, la construcción de soluciones de ecuaciones integrales mediante sustituciones sucesivas, de acuerdo con la técnica anticipada ya en 1832 por Joseph Liouville (1809-1882), resultó ser un caso particular del teorema del punto fijo de Banach.

En el transcurso de los años, las condiciones para la existencia de puntos fijos se han generalizado de distintas maneras. En 1928, Bronisław Knaster (1893-1980) y Alfred Tarski (1902-1983), demostraron el teorema del punto fijo para funciones monótonas definidas en órdenes parciales completos. En 1928, Solomon Lefschetz (1882-1972), presentó una prueba para funciones continuas definidas en espacios topológicos compactos. Y en 1941, Shizuo Kakutani (1911-2004),

demostró el teorema para funciones semicontinuas cuyos conjuntos de imágenes sean todos convexos.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos que serán de gran utilidad para la comprensión del teorema del punto fijo de Banach y de sus aplicaciones.

2.1. Espacios métricos

Definición 2.1.1 (Función). Sean X y Y dos conjuntos. Una función f entre X y Y es una correspondencia o regla de asignación entre ellos tal que a cada punto x de un subconjunto de X se le asocia un único punto y de Y , denominado imagen de x y denotado por $f(x)$. Emplearemos la notación

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y,$$

donde X se denomina origen de f y Y recorrido o rango de f . El subconjunto de X en el que está definida f se denomina dominio y se denota por $\text{Dom}(f)$. El subconjunto de Y formado por todas las imágenes de elementos del dominio se denomina conjunto imagen y se denota por $\text{Im}(f)$.

Definición 2.1.2 (Conjunto imagen). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y sea $A \subset X$. El conjunto imagen de A por f , que denotaremos por $f(A)$, es el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los elementos de A , es decir:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}.$$

La función f restringida al subconjunto A se denomina la restricción de f a A y se denota por $f|_A$.

Definición 2.1.3 (Imagen inversa). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y sea $B \subset Y$. La imagen inversa de B por f , que denotaremos por $f^{-1}(B)$, es el subconjunto de X formado por todos los elementos cuya imagen pertenece a B , es decir:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Si B es un conjunto unipuntual, por ejemplo $B = \{y\}$, usamos la notación $f^{-1}(y)$ para referirnos a $f^{-1}(\{y\})$. También es importante tener en cuenta que $f^{-1}(B)$ no es más que una notación, y el símbolo f^{-1} no indica que exista una función entre Y y X que sea inversa de f .

Para construir nuevas funciones a partir de otras dadas, podemos restringir los conjuntos origen o modificar los rangos de las mismas. Otro mecanismo para formar nuevas funciones es componerlas.

Definición 2.1.4 (Composición de funciones). Sean las funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$. Se define la composición $g \circ f$ de f y g como la función $g \circ f : X \rightarrow Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo 2.1.1. La composición $g \circ f$ de las funciones siguientes

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= 3x^3 + 7 \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= 4x^2. \end{aligned}$$

es la función $(g \circ f)(x) = 4(3x^3 + 7)^2$

Proposición 2.1.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y consideremos los subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces se satisfacen:

- (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$
- (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y consideremos los subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$.

- (a) Sea $x \in A \subset X$. Luego, dado que

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para } x \in A\} \subseteq Y,$$

tenemos que

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X : f(x) \in f(A)\} \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)).$$

Por tanto,

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

- (b) Sea $y \in f(f^{-1}(B))$. Luego, $y = f(x)$ para algún $x \in f^{-1}(B)$. Así, por definición de $f^{-1}(B)$, tenemos que

$$f(x) \in B \Leftrightarrow y \in B.$$

Por tanto,

$$f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

□

Definición 2.1.5 (Métrica o distancia). Sea X un conjunto. Una métrica (o distancia) en X es una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

que posee las siguientes propiedades:

- (a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, (Propiedad de separación)
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$, (Propiedad de simetría)
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$. (Desigualdad triangular)

Observemos que la distancia entre x y y nunca es negativa.

Proposición 2.1.2. $d(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Demostración. Sea X un conjunto. Sean $x, y, z \in X$. De las propiedades de la distancia, considerando $x = z$ y aplicando la desigualdad triangular, la propiedad de separación, la propiedad de simetría, respectivamente, se obtiene que:

$$0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

Así,

$$0 \leq 2d(x, y).$$

En consecuencia,

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X.$$

□

Ejemplo 2.1.2. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Para los puntos $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ se definen las funciones:

- (a) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, (Distancia del taxi)
- (b) $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, (Distancia euclídea o usual)
- (c) $d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, (Distancia del ajedrez).

Las funciones anteriores miden la distancia de una forma distinta y son generalizaciones de la distancia usual que se acostumbra definir en \mathbb{R} .

Definición 2.1.6 (Espacio métrico). Un espacio métrico, denotado por (X, d) , es un conjunto X dotado de una distancia d .

Denotaremos al espacio métrico (X, d) por X cuando no haga falta especificar quién es la distancia.

A continuación enunciaremos algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 2.1.3. El conjunto \mathbb{R} de los números reales con la distancia usual

$$d(x, y) := |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y, \\ y - x & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

es un espacio métrico.

Ejemplo 2.1.4. El conjunto \mathbb{C} de los números complejos es un espacio métrico con la distancia dada por el módulo de la diferencia:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \text{ con } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 2.1.5. Sea l_∞ el conjunto de todas las sucesiones acotadas en \mathbb{R} , es decir, l_∞ contiene a todas las sucesiones $\bar{x} = (x_k)$ para las cuales existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) := \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k|, \quad \bar{x} = (x_k), \quad \bar{y} = (y_k) \in l_\infty$$

Entonces, d_∞ toma valores en \mathbb{R} y es una métrica en l_∞ .

Analícemos lo anterior con más detenimiento. Sean $\bar{x} = (x_k)$, $\bar{y} = (y_k)$ sucesiones acotadas, y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|x_k| < c_1$ y $|y_k| < c_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$: De la desigualdad del triángulo para números reales se sigue que

$$|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq c_1 + c_2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

es decir, la sucesión $(x_k - y_k)$ está acotada y, por tanto, admite un supremo. Así,

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k| \in \mathbb{R}$$

está bien definida. Es inmediato que d_∞ satisface las propiedades de separación y de simetría. Aplicando nuevamente desigualdad del triángulo para números reales obtenemos que, si $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in l_\infty$, entonces

$$|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \leq d_\infty(\bar{x}, \bar{z}) + d_\infty(\bar{z}, \bar{y}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

En consecuencia,

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_\infty(\bar{x}, \bar{z}) + d_\infty(\bar{z}, \bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in l_\infty,$$

es decir, d_∞ satisface la desigualdad triangular

Definición 2.1.7 (Subespacio métrico). Si $X = (X, d)$ es un espacio métrico y A es un subconjunto de X definimos

$$d_A(x, y) := d(x, y) \quad \forall x, y \in A.$$

Entonces d_A es una distancia en A , que se denomina distancia inducida por d . Al par (A, d_A) se le denomina subespacio métrico de X .

Está claro que cualquier subespacio métrico, considerado de forma aislada es un espacio métrico y, por supuesto, todo espacio métrico es un subespacio de sí mismo. Esta es una nueva forma de construir nuevos espacios métricos, a partir de otros conocidos.

Los subconjuntos de un espacio métrico heredan su métrica.

A un subconjunto de un espacio métrico se le pueden dar otras métricas, distintas de la inducida.

Ejemplo 2.1.6. *El conjunto $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la distancia inducida por el valor absoluto es un subespacio métrico de \mathbb{R}*

Analícemos lo anterior con más detenimiento. Sea $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y sean $x, y \in A$. Sea $d(x, y) = |x - y|$ la distancia usual en \mathbb{R} . Luego,

$$d_{[0,1]}(x, y) = |x - y| = d, \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

Por tanto, $([0, 1], d_{[0,1]})$ es subespacio métrico en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.1.7. *La recta real puede comprenderse como un subespacio métrico del espacio bidimensional.*

Consideremos la recta real \mathbb{R} y el subconjunto de \mathbb{R}^2 , definido como $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, mediante la función $x \mapsto (x, 0)$. Es evidente que se trata de una biyección.

Si calculamos la distancia euclídea entre dos puntos de $(x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, tenemos

$$d_2((x, 0), (y, 0)) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = d(x, y),$$

y esta última es la distancia usual de \mathbb{R} . Esto significa que, en cierto modo, podemos considerar la recta real como un subespacio métrico del plano \mathbb{R}^2 .

Definición 2.1.8 (Distancia de un punto a un conjunto). *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto de X y x_0 un punto de X . La distancia de x_0 al subconjunto A se define como*

$$d(x_0, A) = \inf \{d(x_0, x) : x \in A\}.$$

Dado que $d(x, y) \geq 0$ para todo x, y que pertenecen a X , el conjunto de números reales $\{d(x_0, x)\}$ está acotado inferiormente, por lo tanto $d(x_0, A)$ está bien definido.

Intuitivamente, la definición (2.1.8) indica que la distancia entre un punto y un conjunto mide la distancia entre este punto y el punto del conjunto más cercano a aquel.

Definición 2.1.9 (Distancia entre dos conjuntos). *Sean A y B dos subconjuntos de X . La distancia del subconjunto A al subconjunto B se define como*

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Es evidente, que si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$ y si A y B no son conjuntos disjuntos, se verifica que $d(A, B) = 0$. El recíproco no es cierto, esto es, si $d(x_0, A) = 0$ no implica necesariamente que $x_0 \in A$. Análogamente, que $d(A, B) = 0$ no implica que $A \cap B \neq \emptyset$

Definición 2.1.10 (Bola abierta). Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto y $r > 0$ un número real. La bola abierta en X con centro en a y de radio r es el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

Definición 2.1.11 (Bola cerrada). Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto y $r > 0$ un número real. La bola cerrada en X con centro en a y de radio r es el conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

Definición 2.1.12 (Conjunto abierto). Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que A es un conjunto abierto, si para cada punto $a \in A$, existe una bola $B(a, r_a)$ contenida en A . Entenderemos que el conjunto vacío \emptyset es abierto.

Lema 2.1.1. La intersección de dos bolas abiertas en un espacio métrico (X, d) , es un abierto.

Demostración. Si la intersección de ambas bolas es vacía, el lema se satisface trivialmente.

Supongamos entonces que $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$ y veamos que tal intersección es un entorno de x . Se cumple que $d(x, a) < r$ y $d(x, b) < s$. Tomemos $\delta < \min\{r - d(x, a), s - d(x, b)\}$ y comprobemos que $B(x, \delta) \subset B(a, r) \cap B(b, s)$. En efecto, si $y \in B(x, \delta)$, entonces

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r.$$

Por tanto, $y \in B(a, r)$.

Observemos ahora que

$$d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b) < \delta + d(x, b) < s - d(x, b) + d(x, b) = s$$

Por tanto, $y \in B(b, s)$. Luego, $B(x, \delta) \subset B(b, s)$. Así,

$$B(x, \delta) \subset B(a, r) \cap B(b, s).$$

Con esto hemos probado que la intersección de dos bolas abiertas contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos y , por lo tanto es un abierto. \square

Teorema 2.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:

- (a) X y \emptyset son abiertos.
- (b) La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un abierto.
- (c) La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos también es un abierto.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Sea $x \in X$, entonces $B(x, r) \subseteq X$. Así, X es abierto. El conjunto vacío \emptyset cumple con la definición de conjunto abierto, pues no existe $x \in \emptyset$.

- (b) Sea $\{A_i\}$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos del espacio X . Si $x \in \cup_i A_i$, entonces $x \in A_{i_0}$ para algún i_0 . Como A_{i_0} es abierto, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \subset A_{i_0} \subset \cup_i A_i$ y por tanto este último conjunto es abierto puesto que contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos.
- (c) Si la intersección es vacía no hay nada que probar. Supongamos entonces que A_1 y A_2 son dos conjuntos abiertos cuya intersección es no vacía. Si $x \in A_1 \cap A_2$, existen $r_1, r_2 > 0$ de modo $B(x, r_1) \subset A_1$ y $B(x, r_2) \subset A_2$. Entonces, según el lema (2.1.1), hay una bola centrada en x contenida en la intersección de ambas bolas, lo que implica que dicha bola también está en $A_1 \cap A_2$ y que este último conjunto es abierto. Mediante un sencillo proceso de inducción se prueba que la intersección de cualquier familia finita de abiertos es un abierto.

□

Definición 2.1.13 (Topología asociada). *A la familia de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico (X, d) se le denomina topología asociada a la distancia d y se denota por τ_d .*

Definición 2.1.14 (Conjunto cerrado). *Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$ un subconjunto, diremos que C es un conjunto (o subconjunto) cerrado si su complementario $X - C = C^c$ es un abierto.*

Definición 2.1.15 (Función continua). *Sean dos espacios métricos (X, d) y (Y, d') , $f : X \rightarrow Y$ una función entre ellos y $a \in X$. Diremos que f es continua en $a \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$, implica $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. En otras palabras, para cada $B_Y(f(a), \varepsilon)$, existe $B_X(a, \delta)$ tal que $f(B_X(a, \delta)) \rightarrow B_Y(f(a), \varepsilon)$.*

Definición 2.1.16 (Continuidad global). *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función. Diremos que f es continua si lo es en todo punto de X .*

La continuidad de f depende de las métricas que estamos considerando en X y Y .

La proposición siguiente es una caracterización de la continuidad global en términos de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados.

Proposición 2.1.3. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces son equivalentes:*

- (a) f es continua.
- (b) Para todo abierto $A \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto en X .
- (c) Para todo cerrado $F \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

La demostración puede verse en [7].

2.2. Espacios métricos completos

Definición 2.2.1 (Sucesión). Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión en X es un subconjunto de X definido mediante una función $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, de modo que $x(n) = x_n \in X$. Denotaremos a la sucesión mediante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $(x_n)_n$; y a los elementos de la sucesión les llamaremos términos.

Definición 2.2.2 (Sucesión convergente). Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X . Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x en (X, d) , y lo denotaremos por $x_n \rightarrow x$ o $\lim_n x_n = x$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$. En este caso se dice que la sucesión es convergente hacia el punto x , o que x es el límite de la sucesión.

Teorema 2.2.1. Sean dos espacios métricos (X, d) y (Y, d') , $f : X \rightarrow Y$ una función entre ellos y $a \in X$. Entonces son equivalentes:

- (a) f es continua en a .
- (b) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X con límite a , entonces $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es $f(a)$.

La demostración puede verse en [7].

Definición 2.2.3 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es una sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $m, n \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición 2.2.4 (Conjunto acotado). Un conjunto está acotado si está contenido en una bola.

Definición 2.2.5 (Conjunto totalmente acotado). Sean (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es totalmente acotado si $\varepsilon > 0$, existe un ε -red (esto es, un número finito de bolas de radio ε) que recubre a S .

Proposición 2.2.1. Toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, en un espacio métrico (X, d) , está acotada.

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy y consideremos $\varepsilon = 1$.

Por la condición de Cauchy existe n_0 tal que si $m, n > n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < 1$, de modo que si $n > n_0$, entonces $x_n \in B(x_{n_0+1}, 1)$. Solo quedan un número finito de términos que pueden estar fuera de esta bola. Sea

$$r = \max\{d(x_1, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\}.$$

Para todo n se cumple que $d(x_n, x_{n_0+1}) \leq r$. Así, deducimos que

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(x_{n_0+1}, r + 1).$$

□

Proposición 2.2.2. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así pues, para todo $n, m > n_0$ se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración. □

Definición 2.2.6 (Espacio métrico completo). *Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .*

A continuación presentamos algunos resultados de los espacios métricos completos que servirán en el desarrollo de las aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach.

Definición 2.2.7 (Diámetro de un conjunto). *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto acotado. El diámetro de A , representado por $\text{diam}(A) = \delta(A)$, se define como*

$$\text{diam}(A) = \delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Teorema 2.2.2 (Teorema de encaje de Cantor). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de cerrados en X , no vacíos y tales que la sucesión de sus diámetros converge a 0. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es exactamente un punto.*

La demostración puede verse en [7]

Teorema 2.2.3 (Propiedad de Hausdorff). *Sea (X, d) un espacio métrico y sean dos puntos distintos $x, y \in X$. Entonces existen $r_x, r_y > 0$ tales que*

$$B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset.$$

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y sean dos puntos distintos $x, y \in X$. Sea $r = d(x, y)$, entonces las bolas abiertas

$$B\left(x, \frac{r}{2}\right) \quad \text{y} \quad B\left(y, \frac{r}{2}\right)$$

tienen intersección vacía. En efecto, veamos que ningún punto de la primera puede estar en la segunda.

Supongamos que $z \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$. Entonces, por la desigualdad triangular,

$$d(z, y) \geq d(x, y) - d(z, x) = r - d(z, x) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Así,

$$d(z, y) \geq \frac{r}{2}.$$

Por tanto,

$$z \notin B\left(y, \frac{r}{2}\right).$$

□

2.3. Espacios métricos compactos

Existen subconjuntos de un espacio métrico que tienen una propiedad interesante: cualquier sucesión de puntos en él contiene una subsucesión convergente. Esta propiedad no la cumple todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico. A los subconjuntos que poseen esta característica se les conoce como conjuntos **compactos**. Este término fue introducido por Maurice Fréchet (1878-1973) en 1906.

La característica de ser compacto tiene resultados importantes. Por ejemplo, tenemos el hecho de que toda función continua en un espacio métrico compacto alcanza su máximo y su mínimo. También nos permite concluir la existencia de una solución de una ecuación diferencial.

Definición 2.3.1 (Recubrimiento). Sea X un conjunto y sea $A \subset X$. Un cubrimiento o recubrimiento de A es una familia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ de subconjuntos de X tales que $A \subset \bigcup_i A_i$.

Definición 2.3.2 (Subrecubrimiento). Un subcubrimiento o subrecubrimiento es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ que es también un recubrimiento de A .

Definición 2.3.3 (Recubrimiento finito). Un recubrimiento se dice que es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos.

Definición 2.3.4 (Recubrimiento abierto). Cuando (X, d) es un espacio métrico y cada A_i es un abierto de X , se dice que \mathcal{A} es un recubrimiento abierto de A .

Ejemplo 2.3.1. Sea $X = \mathbb{R}$, entonces la familia $\mathcal{A} = \{[-n, n]\}_{n=1}^{\infty}$ constituye un recubrimiento de \mathbb{R} , pero no es un recubrimiento abierto para la distancia usual.

Ejemplo 2.3.2. Un ejemplo de un subrecubrimiento es la familia $\mathcal{D} = \{[-2n, 2n]\}_{n=1}^{\infty}$. Evidentemente $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ y es también un recubrimiento de $X = \mathbb{R}$.

Definición 2.3.5 (Espacio métrico compacto). Un espacio métrico (X, d) es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito. Esto es, si $X \subset \bigcup_i A_i$, donde A_i es abierto para toda i , entonces $X \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Ejemplo 2.3.3. La recta real \mathbb{R} no es compacta, pues el recubrimiento de \mathbb{R} por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ningún subrecubrimiento de \mathbb{R} . En efecto, si suponemos que la familia $\{(n, n+2) : n \in H\}$, con $H \subset \mathbb{Z}$ finito, es un subrecubrimiento finito, entonces tomando

$$n_1 = \min\{n : n \in H\} \quad y \quad n_2 = \max\{n : n \in H\}$$

$$\bigcup_{n \in H} (n, n+2) \subset (n_1, n_2+2),$$

que no coincide con \mathbb{R} .

Definición 2.3.6 (Conjunto secuencialmente compacto). Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es secuencialmente compacto si cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en K posee una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto de K .

Proposición 2.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ que converge a x , entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x .

Demostración. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que para todo $n, m > n_1$ se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, la subsucesión $(x_{n_k})_k$ es convergente a x , luego existe k_0 tal que si $n_k > n_{k_0}$ se cumple que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ y tomemos $n > n_0$ y k tal que $n_k > n_0$, entonces

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de modo que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x . □

Proposición 2.3.2. Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X . Como X es compacto, también es secuencialmente compacto, luego existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, convergente. Como consecuencia de la proposición (2.3.1) la sucesión inicial $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es convergente. □

Definición 2.3.7 (Topología relativa). Si A es un subconjunto de X y τ' es la colección de todas las intersecciones $A \cap U$, con $U \in \tau$, entonces τ' es una topología sobre A . A τ' se le llama topología inducida (o relativa) en A por τ .

Definición 2.3.8 (Subespacio compacto). Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto. Diremos que K es un conjunto compacto en (X, d) si (K, d_K) , con la topología relativa, es un espacio compacto. En este caso se dice que (K, d_K) es un subespacio compacto.

Proposición 2.3.3. Sea K un subespacio de un espacio métrico (X, d) . Entonces K es compacto si, y solo si, para toda familia $\{A_i\}_i$ de abiertos en X tal que $K \subset \bigcup_i A_i$, existe una subfamilia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que K es compacto y sea $K \subset \bigcup_i A_i$, donde $\{A_i\}_i$ es una familia de abiertos de (X, d) . Entonces, según la definición de topología relativa, la familia $\{A_i \cap K\}$ es un recubrimiento de K por abiertos de (K, d_K) . Como este subespacio es compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito de modo que

$$K = (A_{i_1} \cap K) \cap \cdots \cap (A_{i_n} \cap K).$$

De aquí se deduce que $K \subset A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$.

(\Leftarrow) Veamos que (K, d_K) es compacto. Para ello, sea $\{A_i\}_i$ una familia de abiertos de (K, d_K) que recubren K . Entonces cada abierto A_i se puede escribir de la forma $A_i = B_i \cap K$, donde B_i es un abierto en (X, d) y así se tiene que $K \subset \bigcup_i B_i$. Por hipótesis, existirán B_{i_1}, \dots, B_{i_n} tales que $K \subset B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}$ de forma que

$$K = (B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}) \cap K = (B_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (B_{i_n} \cap K) = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$$

y, por tanto, K es compacto. □

Teorema 2.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces se verifican:*

- (a) K es cerrado.
- (b) K es acotado.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Probaremos que si $K \subset X$ es compacto, su complementario K^c es abierto, demostrando que es entorno de todos sus puntos. Sea $a \notin K$, si $x \in K$, $x \neq a$, la propiedad de Hausdorff, que cumplen los espacios métricos, nos asegura que existen bolas abiertas disjuntas $B(a, r_x)$ y $B(x, r_x)$.

Entonces la familia $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ obtenidas de esta manera, son un recubrimiento abierto del compacto K , por tanto, se puede extraer un subrecubrimiento finito $B(x_1, r_{x_1}), \dots, B(x_n, r_{x_n})$, para ciertos puntos $x_1, \dots, x_n \in K$ (recordemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple $B(x_i, r_{x_i}) \cap B(a, r_{x_i}) = \emptyset$). Entonces si tomamos $r_a = \min\{r_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$, la bola $B(a, r_a)$ está contenida en cada $B(x_i, r_{x_i})$ y tiene intersección vacía con $K = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$, lo que significa que $B(a, r_a) \subset K^c$ y, por tanto, que K^c es entorno de $a \in K$. Como esto puede hacerse para todo $a \in K^c$, entonces K^c es abierto. Así, K es cerrado.

- (b) Si $a \in K$ la colección de bolas $\{B(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de K que, como es compacto, admite un subrecubrimiento finito $\{B(a, n_i)\}_{i=1}^k$. Como se trata de bolas concéntricas, si $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ se tiene

$$K \subset \bigcup_{i=1}^k B(a, n_i) = B(a, m),$$

por lo que K está acotado. □

Teorema 2.3.2. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios métricos y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y .*

Demostración. Supongamos que $\{A_i\}_i$ es un recubrimiento abierto de $f(K)$ en Y . Entonces

$$\{f^{-1}(A_i)\}_i$$

es un recubrimiento abierto de K . Por la compacidad de K , existe un subrecubrimiento finito:

$$K \subset f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cup \dots \cup A_n),$$

lo que implica que $\{A_1, \dots, A_n\}$ es un subrecubrimiento finito de $f(K)$. □

Proposición 2.3.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y $G \subseteq S$. G es abierto en el subespacio S si y solo si $G = O \cap S$ para algún O abierto de X .

La demostración puede verse en [10].

Proposición 2.3.5. Si (X, d) es espacio métrico compacto, $F \subseteq X$ y F es cerrado, entonces F es compacto.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y $F \subseteq X$. Sea $\{O_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de F . Entonces

$$X = F \cup (X - F) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cup (X - F)$$

Así,

$$\{O_i\}_{i \in I} \cup \{X - F\}$$

es un recubrimiento abierto de X , y como X es compacto, este recubrimiento se puede reducir a un subrecubrimiento finito, de lo cual podemos concluir que debe existir un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^N O_{i_k}$$

Luego, F es compacto. □

Proposición 2.3.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:

- (a) La unión finita de compactos es un compacto;
- (b) La intersección arbitraria de compactos es un compacto.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Basta hacer la prueba para dos compactos y luego aplicar inducción matemática.
Sean A_1 y A_2 compactos y sea $\{O_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $A_1 \cup A_2$. Tenemos que

$$A_1, A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Luego, $\{O_i\}_{i \in I}$ es recubrimiento abierto tanto de A_1 como de A_2 . Por tanto existen

$$\{O_{i_k}\}_{k=1}^N \quad \text{y} \quad \{O_{j_k}\}_{k=1}^M$$

que son subrecubrimientos finitos de A_1 y de A_2 , respectivamente, de modo que

$$\{O_{i_k}\}_{k=1}^N \cup \{O_{j_k}\}_{k=1}^M$$

es un subrecubrimiento finito de $A_1 \cup A_2$. Por tanto, $A_1 \cup A_2$ es un compacto. Consideremos ahora una cantidad finita de compactos, esto es, A_1, A_2, \dots, A_n . Sea $\{O_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Tenemos que

$$A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$$

Por inducción matemática, tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ es un compacto.

- (b) Sea $\{K_i\}_{i \in I}$ una familia de compactos. Entonces, dado que cada K_i es compacto, por el teorema (2.3.1), cada K_i es cerrado, de modo que

$$\bigcap_{i \in I} K_i$$

es también un cerrado. Además,

$$\bigcap_{i \in I} K_i \subset K_j \quad \text{para cada } j \in I$$

y $\bigcap_{i \in I} K_i$ sigue siendo cerrado como subconjunto de K_j si $A \subseteq K \subseteq X$ y A es cerrado en X , entonces A también es cerrado en K porque

$$K - A = (X - A) \cap K,$$

$X - A$ es abierto en X , y se puede entonces aplicar la proposición (2.3.4) para concluir que $K - A$ es abierto en K). Se tiene entonces que $\bigcap_{i \in I} K_i$ es un cerrado en K_j y K_j es compacto, luego, en virtud de la proposición (2.3.5), se concluye que $\bigcap_{i \in I} K_i$ es compacto.

□

Capítulo 3

Teorema del punto fijo de Banach

3.1. Introducción

Cuando hablamos del teorema del punto fijo no nos referimos en realidad a un único teorema sino a toda una teoría matemática.

A grandes rasgos, un teorema del punto fijo es un teorema que especifica las propiedades que debe cumplir una función para garantizar la existencia y unicidad de un punto fijo.

Existen varios teoremas del punto fijo, cada uno de los cuales se encuentra definido en espacios matemáticos diferentes y considera distintas condiciones (hipótesis) bajo las cuales se puede afirmar que la función estudiada posee un punto fijo.

Brouwer demostró el teorema para funciones continuas en una bola cerrada de un espacio euclídeo. Schauder generalizó el teorema para funciones continuas en un conjunto convexo y compacto no vacío de un espacio de Banach. Stefan Banach lo demostró para funciones contractivas en un espacio métrico completo. Lefschetz presentó una prueba para funciones continuas definidas en espacios topológicos compactos. Kakutani consideró funciones multivaluadas definidas en un subconjunto compacto y convexo de un espacio euclídeo.

En este capítulo nos centramos en el teorema del punto fijo de Banach, que es uno de los que tiene mayor aplicabilidad tanto dentro de la matemática pura como en otras áreas de la ciencia.

A continuación introduciremos las herramientas teóricas necesarias para la comprensión del teorema y presentaremos una detallada demostración del mismo.

3.2. Punto fijo

Desde un punto de vista intuitivo, cuando hablamos de un punto fijo de una función determinada, nos referimos a un punto que satisface el hecho de que su imagen bajo la función sea igual al mismo punto. Es decir, se trata de un punto que no varía al ser evaluado en la función. De aquí que tenga sentido atribuirle la propiedad de fijeza a los puntos que cumplen con esta condición.

Para un espacio métrico cualquiera, la idea anterior puede formalizarse de la siguiente manera.

Definición 3.2.1 (Punto fijo). Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Un punto $x^* \in X$ se llama un punto fijo de la función $f : X \rightarrow X$ si $f(x^*) = x^*$.

Ejemplo 3.2.1. Consideremos la función $f(x) = x^3$. Observemos que para esta función las imágenes de los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ se corresponden con ellos mismos, esto es,

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Así, de acuerdo con la definición (3.2.1), $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ representan puntos fijos de la función $f(x) = x^3$.

Asimismo, de la definición (3.2.1) podemos deducir un método analítico para determinar si f posee al menos un punto fijo x . Éste consiste en encontrar los valores de x que satisfacen la igualdad

$$x = f(x).$$

Retomando la función del ejemplo anterior, para encontrar los puntos fijos de ésta, debemos resolver la ecuación

$$x = x^3.$$

Así,

$$x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0.$$

Luego,

$$x = 0 \vee x^2 - 1 = 0.$$

Por tanto,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \quad y \quad x_3 = 1$$

son los puntos fijos de $f(x) = x^3$.

Ejemplo 3.2.2. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{x}{x})$. Para determinar si f posee puntos fijos debemos verificar si existen valores de x tal que $x = \frac{1}{2}(x + \frac{x}{x})$. Resolviendo esta ecuación, tenemos que

$$x - \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Observemos que

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad y \quad f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

$\therefore f$ tiene los puntos fijos $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

Ejemplo 3.2.3. Sea $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$. Para determinar si f posee puntos fijos, debemos verificar si existen valores de x tal que $x = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$. Resolviendo esta ecuación, tenemos que

$$x^2 + \frac{x}{2} = 1 \implies 2x^2 + x - 2 = 0.$$

Luego,

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}.$$

Observemos que

$$f\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad y \quad f\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right) = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}.$$

$$\therefore f \text{ tiene los puntos fijos } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad y \quad x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}.$$

Proposición 3.2.1. *No todas las funciones tienen puntos fijos.*

Demostración. Supongamos que todas las funciones tienen puntos fijos. Consideremos la función $f(x) = x + 1$, definida sobre \mathbb{R} . Sea x un punto fijo de f . Luego, por la definición (3.2.1),

$$x = x + 1.$$

Dado que lo anterior no se cumple para ningún valor $x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$x \neq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

f no tiene ningún punto fijo, y esto contradice lo que habíamos supuesto. Por tanto, concluimos que no todas las funciones tienen puntos fijos. \square

3.3. Teorema del punto fijo de Banach

En esta sección se desarrollará el teorema del punto fijo de Banach, también conocido como principio de contracción de Banach. El teorema garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos para funciones contractivas de un espacio métrico completo en sí mismo.

Antes veremos algunos conceptos y resultados que nos ayudarán a la comprensión del mismo.

Definición 3.3.1 (Función lipschitziana). Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es lipschitziana, si existe $c > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

La constante c se llama una **constante de Lipschitz** para f .

Ejemplo 3.3.1. La función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = |x|$ es lipschitziana en toda la recta real para $c = 1$. Observemos que

$$|\phi(x) - \phi(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.3.2. La función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = \sqrt{x}$ no es lipschitziana. Supongamos que $y = 0$. Así,

$$|\phi(x) - \phi(0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq c|x - 0|.$$

Luego,

$$|\sqrt{x}| \leq c|x| \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x}}{x} \right| \leq c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq c \Rightarrow \sqrt{x} \geq \frac{1}{c}.$$

En el ejemplo anterior podemos observar una función uniformemente continua, pero no contractiva.

Proposición 3.3.1. Si f es lipschitziana, entonces f es continua.

Demostración. Sea $c > 0$ una constante de Lipschitz para f . Entonces se cumple la desigualdad

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq cd_X(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Luego, dada $\varepsilon > 0$, para $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$ se cumple que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{\delta} d_X(x, y)$$

De manera que, si $d_X(x, x_0) < \delta$,

$$d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \delta = \varepsilon.$$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Por tanto, f es continua. □

Ejemplo 3.3.3. Es fácil probar que toda función uniformemente continua es continua, pero el recíproco no es cierto: basta considerar la función $f(x) = x^2$ del ejemplo anterior. No obstante lo podemos hacer de forma más general. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, para todo $\delta > 0$ siempre podemos encontrar dos números x e y en \mathbb{R} tales que $|x - y| < \delta$ y, sin embargo, $|x^2 - y^2| > \varepsilon$. Observemos que

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Dados ε y δ , tomamos x y y tales que $|x - y| = \delta/2$ y $|x + y| > 2\varepsilon/\delta$, entonces

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| > \varepsilon$$

Definición 3.3.2 (Contracción). Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Una función $\phi : X \rightarrow X$ se llama una contracción si existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Es decir, una contracción es una función de un espacio métrico en sí mismo que es lipschitziana con constante de Lipschitz estrictamente menor que 1.

Es importante observar que el que $\phi : X \rightarrow X$ sea o no contracción depende de la métrica que le demos a X .

Teorema 3.3.1 (Teorema del punto fijo de Banach). Sea X un espacio métrico completo, no vacío, y sea $\phi : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces se cumple lo siguiente:

(a) ϕ tiene un único punto fijo x^* .

(b) Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x^* en X ; y se cumple que

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(\phi(x_0), x_0),$$

donde α es la constante de contractividad de la función ϕ .

Demostración. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico completo, no vacío. Sea $\phi : X \rightarrow X$ una contracción.

(a) Sea x_0 un punto cualquiera de X . Denotemos por x_k la sucesión de funciones iteradas $\phi^k(x_0)$, esto es,

$$x_k := \phi^k(x_0),$$

donde $\phi^k := \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{k \text{ veces}}$ es una composición de ϕ consigo misma.

Existencia. Demostraremos primero que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X . Observemos que

$$x_{k+1} = \phi^{k+1}(x_0) = (\phi^k \circ \phi^1)(x_0) = \phi^k(\phi^1(x_0)) = \phi^k(x_1).$$

Dado que ϕ es una contracción, tenemos que

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) \leq \alpha^k d(x_1, x_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo anterior y por la desigualdad triangular, tenemos que, para cualesquiera $x, y, z \in X$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(y, z) &\leq d(y, \phi(y)) + d(\phi(y), \phi(z)) + d(\phi(z), z) \\ d(y, z) &\leq d(y, \phi(y)) + \alpha d(y, z) + d(\phi(z), z) \\ d(y, z) - \alpha d(y, z) &\leq d(y, \phi(y)) + d(\phi(z), z) \\ (1 - \alpha)d(y, z) &\leq d(y, \phi(y)) + d(\phi(z), z) \\ d(y, z) &\leq \frac{d(y, \phi(y)) + d(\phi(z), z)}{(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

Es claro que $1 - \alpha > 0$.

Tomando $y := x_k$ y $z := x_j$ obtenemos

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{j+1}, x_j)}{1 - \alpha}$$

Como ϕ es una contracción y por la manera en que está definida,

$$\begin{aligned}
 d(x_k, x_j) &\leq \frac{d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{j+1}, x_j)}{1 - \alpha} \\
 &= \frac{d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) + d(\phi^j(x_1), \phi^j(x_0))}{1 - \alpha} \\
 &\leq \frac{\alpha^k d(x_1, x_0) + \alpha^j d(x_1, x_0)}{1 - \alpha} \\
 &= \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)
 \end{aligned}$$

Así,

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\alpha \in (0, 1)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 d(x_k, x_j) &\leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \\
 &= \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) + \frac{\alpha^j}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall k, j \geq k_0.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$d(x_k, x_j) < \varepsilon \quad \forall k, j \geq k_0.$$

Por tanto, (x_k) es una sucesión de Cauchy en X .

Como X es completo, entonces existe $x^* \in X$ tal que $x_k \rightarrow x^*$ en X y, dado que ϕ es continua por ser una contracción, tenemos que

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \rightarrow \phi(x^*)$$

en X . Como el límite de una sucesión es único, concluimos que

$$\phi(x^*) = x^*,$$

es decir, x^* es un punto fijo de ϕ .

Unicidad. Probemos ahora que x^* es único. Haremos la prueba por reducción al absurdo. Supongamos que x_1^* y x_2^* son puntos fijos de ϕ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 d(x_1^*, x_2^*) &= d(\phi(x_1^*), \phi(x_2^*)) \leq \alpha d(x_1^*, x_2^*) \\
 d(x_1^*, x_2^*) &\leq \alpha d(x_1^*, x_2^*).
 \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0, 1)$, entonces la desigualdad anterior solo se cumple cuando

$$d(x_1^*, x_2^*) = 0.$$

Por las propiedades de la distancia,

$$x_1^* = x_2^*.$$

Por tanto, ϕ tiene un único punto fijo.

(b) Haciendo tender $j \rightarrow \infty$ en la desigualdad

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} d(x_k, x^*) &= \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_k, x_j) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Esto concluye la demostración. □

El teorema anterior no solo afirma la existencia de un único punto fijo para una contracción $\phi : X \rightarrow X$. También nos dice cómo encontrarlo, o cómo encontrar una buena aproximación de él: basta tomar cualquier punto $x_0 \in X$ y considerar la sucesión $(\phi^k(x_0))$. La desigualdad

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

nos da una estimación del error en cada paso de la iteración, es decir, nos dice qué tan cerca está $\phi^k(x_0)$ del punto fijo. A este método se le conoce como *método de aproximaciones sucesivas*.

Corolario 3.3.1. *Sea X un espacio métrico completo y $\phi : X \rightarrow X$ una función. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces ϕ tiene un único punto fijo.*

Demostración. Sea $\phi : X \rightarrow X$, donde X es un espacio métrico completo. El teorema del punto fijo de Banach asegura que ϕ^k tiene un único punto fijo $x^* \in X$. Aplicando ϕ a la igualdad $\phi^k(x^*) = x^*$ obtenemos que

$$\phi^k(\phi(x^*)) = \phi((\phi^k(x^*))) = \phi(x^*),$$

es decir, $\phi(x^*)$ es también un punto fijo de ϕ^k . Como el punto fijo es único, obtenemos que

$$\phi(x^*) = x^*.$$

En consecuencia, x^* es también un punto fijo de ϕ . Y es el único, ya que todo punto fijo de ϕ es también un punto fijo de ϕ^k . \square

Una aplicación interesante del teorema del punto fijo de Banach la encontramos en el Cubo de Hilbert, objeto que, bajo una función continua sobre sí mismo, posee un punto fijo.

Definición 3.3.3 (Cubo de Hilbert). Sea $(e_n)_n$ la base canónica en ℓ^2 (todas las coordenadas de e_n son 0 salvo la coordenada n -ésima, que es 1). Si $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^2$, tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - P_n x\| = 0,$$

donde $P_n x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, para $n \in \mathbb{N}$, y la norma considerada es la canónica de ℓ^2 dada por $\|x\|^2 = \|(x_i)_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$. En lo que sigue, utilizaremos la notación

$$R_n x = x - P_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i$$

Entonces, para cada $x \in \ell^2$ se tiene que

$$\|x\|^2 = \|P_n x\|^2 + \|R_n x\|^2.$$

El cubo de Hilbert es el subconjunto de ℓ^2 definido por

$$Q := \{x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^2 : |x_i| \leq \frac{1}{2^{i-1}}, i = 1, 2, \dots\}$$

Corolario 3.3.2. Sea X un espacio vectorial real finito-dimensional. Entonces:

- (a) Si $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en X , B_X es la bola unidad cerrada de X y $\phi : B_X \rightarrow B_X$ es continua, entonces existe $x \in B_X$ tal que $\phi(x) = x$.
- (b) Si $X = \mathbb{R}^n$, $a = (a_i)_{i=1}^n$ es tal que $a_i > 0$, $B_a = \{x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq a_i\}$ y $\phi : B_a \rightarrow B_a$ es continua, entonces existe $x \in B_a$ tal que $\phi(x) = x$.

La demostración puede verse en [4].

Lema 3.3.1. Si $x, y \in Q$, entonces, para cada $n = 1, 2, \dots$, se tienen las desigualdades

$$\|R_n x\|^2 \leq \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}, \tag{3.1}$$

$$\|x - y\|^2 \leq \|P_n(x - y)\|^2 + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}. \tag{3.2}$$

Demostración. La desigualdad ((3.1)) se deduce directamente de la definición de Q , sumando la serie geométrica $\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} + \dots$. Utilizando ahora la igualdad $\|x\|^2 = \|P_n x\|^2 + \|R_n x\|^2$ y ((3.1)), obtenemos

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|P_n(x - y)\|^2 + \|R_n(x - y)\|^2 \\ &\leq \|P_n(x - y)\|^2 + (\|R_n x\| + \|R_n y\|)^2 \\ &\leq \|P_n(x - y)\|^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3 \cdot 2^{n-2}}}\right)^2 = \|P_n(x - y)\|^2 + \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.2. Sean $Q \subset \ell^2$ el cubo de Hilbert y $\phi : Q \rightarrow Q$ una función continua. Entonces, existe $y \in Q$ tal que $\phi(y) = y$

Demostración. Consideremos de nuevo las proyecciones definidas por la expresión $P_n x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, $n \in \mathbb{N}$. En el espacio $P_n(\ell^2)$ de dimensión n , el conjunto $P_n(Q)$ es la bola unidad para una norma que se identifica, mediante el isomorfismo natural, con la bola de \mathbb{R}^n dada por $\bar{B}_{a_n} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : |x_i| \leq a_i, i = 1, 2, \dots\}$, para $a_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n = P_n \circ \phi \circ P_n : P_n(Q) \rightarrow P_n(Q)$ es continua. Por el corolario (3.3.2), existe $y_n \in P_n(Q)$ tal que $\phi_n(y_n) = y_n$. Como $y_n \in P_n(Q)$, entonces $P_n y_n = y_n$, y así, $P_n(\phi(y_n)) = y_n$. Además, cada y_n lo podemos ver como un elemento de Q , que es compacto, por lo que existirán $y \in Q$ y una subsucesión $(y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$, tales que $\|y_{n_m} - y\| \rightarrow 0$. Dado que ϕ es continua, obtenemos $\|\phi(y_{n_m}) - \phi(y)\| \rightarrow 0$. Por otro lado, como $P_n^2 = P_n$, la desigualdad ((3.1)) nos asegura que

$$\|\phi(y_n) - y_n\|^2 = \|\phi(y_n) - P_n(\phi(y_n))\|^2 \leq \frac{1}{3 \cdot 4^{n-3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En consecuencia, $\phi(y) = y$, y la demostración termina. □

Capítulo 4

Algunas aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach

El teorema del punto fijo de Banach es uno de los teoremas más potentes y trascendentes de la matemática moderna. Este teorema tiene muchas aplicaciones tanto dentro de la matemática pura como en otras áreas del conocimiento.

En este capítulo se exhibirán dos aplicaciones notables del teorema del punto fijo de Banach. Una de ellas es su aplicabilidad en la determinación de fractales, generados por una familia de funciones contractivas, como el punto fijo de una función contractiva en un espacio métrico completo de conjuntos compactos no vacíos, con la distancia de Hausdorff. La otra aplicación del teorema es su papel fundamental en el clásico problema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial verificando ciertas condiciones iniciales.

4.1. Aplicación a los fractales

En este acápite se pondrá de manifiesto que un fractal es un conjunto en un espacio métrico completo de conjuntos compactos no vacíos, $(\mathcal{H}(X), h)$, dotado de la distancia de Hausdorff, que resulta del límite de una sucesión de funciones en este espacio. Este conjunto fractal es único y también es conocido como *atractor* de un Sistema Iterado de Funciones (SIF), que no es más que una familia de funciones contractivas definidas sobre un espacio métrico completo (X, d) .

4.1.1. Introducción a los fractales

La geometría fractal, llamada también *geometría de la naturaleza*, es un conjunto de estructuras irregulares y complejas descritas a través de algoritmos matemáticos y computacionales, los cuales reemplazan a los puntos, rectas, circunferencias y demás figuras provenientes de la geometría tradicional. Estos objetos tienen como característica fundamental las propiedades de *autosimilitud* y la de convivir en extraños paisajes formados por dimensiones fraccionarias.

Entre 1870 y 1920, un grupo variopinto de matemáticos heterodoxos inventaron una serie

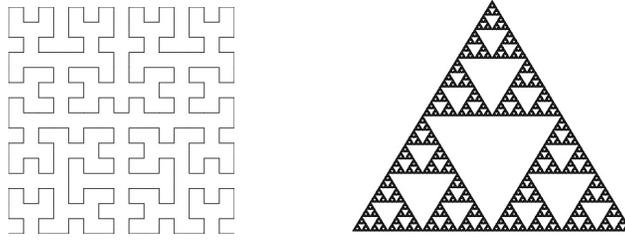


Figura 4.1.1.1: Curva de Hilbert (4 iteraciones) y triángulo de Sierpinski (7 iteraciones).

de formas extrañas cuyo único propósito era poner de manifiesto las limitaciones del análisis clásico. Durante el desarrollo inicial del cálculo infinitesimal, los matemáticos habían supuesto que cualquier cantidad que variara de forma continua debía tener una tasa de cambio bien definida *casi por doquier*. Sin embargo, en 1872, Karl Weierstrass (1815-1917) demostró la falsedad de esta hipótesis.

Otras aportaciones a este extraño zoo de anomalías incluían, por ejemplo, el conjunto de Cantor (1890), una curva que llena toda la región del espacio (una encontrada por Giuseppe Peano (1858-1932) en 1890 y otra por David Hilbert (1862-1943) en 1891) y el triángulo de Sierpinski (1915).

En 1906, Helge von Koch (1870-1924) descubrió que es posible que una región del plano tenga un área finita pero un perímetro infinito. Basta considerar un triángulo equilátero, dividir cada lado en tres partes iguales, considerar el tercio central de cada uno como la base de un nuevo triángulo equilátero, y repetir el proceso al infinito. El resultado final es una figura con forma de *copo de nieve*, que precisamente tiene un área finita, pero un perímetro infinito (en cada paso el largo del borde se multiplica por $\frac{3}{4}$).

A causa de la simétrica repetitividad del procedimiento que lo define, el borde de la figura de Koch tiene la propiedad de ser *autosimilar*: si se transforman dos segmentos cualesquiera de las varias aproximaciones, por ejemplo un lado del triángulo original y un lado de los triángulos obtenidos en el primer paso, se obtiene siempre la misma curva al límite, solo que en una escala diferente.

En el momento de aparecer este tipo de conjuntos y fenómenos, muchos de ellos fueron subestimados y sencillamente “dejados a un lado”.

Dado que estas curvas no pueden medirse de la manera habitual, ya que tienen una longitud infinita, en 1918, Félix Hausdorff (1868-1942) propuso medir al menos el grado de *auto semejanza* de la curva, extendiendo la noción de dimensión.

A las figuras que tienen dimensión fraccionaria se les llama *fractales* (del latín *fractus*: fragmentado o irregular), y existen en gran cantidad.

En 1918, Gaston Julia (1893-1978) publica sus trabajos sobre sistemas dinámicos complejos, y lo mismo hace en 1926 Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929). En los años veinte los trabajos de Julia y Fatou fueron de reconocida importancia, pero posteriormente quedaron en el olvido. No fue hasta en los años sesenta del siglo XX cuando, frente a toda expectativa, esta galería de monstruos teóricos recibió un impulso inesperado en la dirección de la ciencia aplicada.

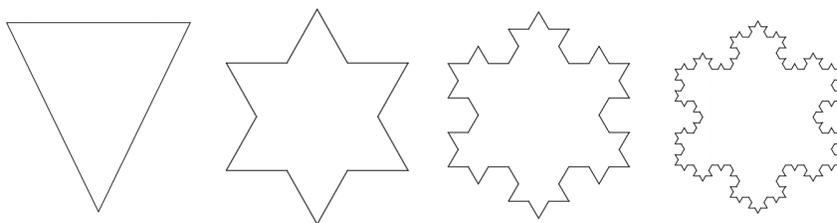


Figura 4.1.1.2: Copo de Koch (0, 1, 2 y 3 iteraciones, respectivamente).

Benoit Mandelbrot (1924-2010), el padre de la geometría fractal, rescata los trabajos de Julia y de Fatou, valiéndose de la importante ayuda de los ordenadores. Hasta entonces, la ciencia se había contentado con atenerse a formas geométricas tradicionales como rectángulos y esferas, pero Mandelbrot insistía en que esta aproximación era demasiado restrictiva. El mundo natural está plagado de estructuras complejas e irregulares —líneas de costa, montañas, nubes, árboles, glaciares, sistemas hidrológicos, ondas oceánicas, cráteres, coliflores— sobre las que la geometría tradicional permanece muda. Era, pues, necesaria una nueva geometría de la naturaleza.

Mandelbrot logra detectar ciertas características comunes (autosemejanza, dimensión extraña), en objetos, situaciones y fenómenos de naturaleza muy diversa: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el movimiento browniano, las curvas de Peano, la medición de la longitud de una costa (en este caso fueron importantes los trabajos de Lewis Fry Richardson (1881-1953)), las fluctuaciones en las líneas de transmisión de datos entre ordenadores, la turbulencia en fluidos, la distribución de las galaxias en el universo, las variaciones de los precios en la bolsa de valores. . . Crea entonces el término fractal para agrupar bajo él esta gran variedad de fenómenos, y expone sus ideas y teorías al respecto, principalmente en dos libros que son quizá sus dos obras más importantes en lo que se refiere a la geometría fractal: *Les Objets Fractals: Forme, hasard et dimension* y *The Fractal Geometry of Nature*.

La geometría fractal se enmarca dentro de las áreas del análisis matemático, la geometría, la topología y la matemática aplicada.

Existen esfuerzos importantes de formalización matemática y elaboración de una teoría unificada de los fractales. En particular, en relación con la noción de *autosemejanza*, John E. Hutchinson publica, en 1981, su artículo *Fractals and Self-Similarity*, en el cual, a partir de las ideas de Mandelbrot, expone una teoría muy formal y bien fundamentada de los que él llama conjuntos estrictamente autosimilares.

Los fractales sirven para modelar objetos que exhiben una estructura a muchos niveles de escala, desde costas marítimas hasta cadenas montañosas, y se utilizan en la gráfica computarizada para reproducirlas con imágenes realistas. Justamente, a causa de las variadas aplicaciones de los fractales, Mandelbrot obtuvo el premio Wolf en 1995, no en matemática, sino en física.

4.1.2. El espacio $\mathcal{H}(X)$ y la métrica de Hausdorff

En esta sección se mostrará que un espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ que consiste en los subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico completo (X, d) , dotado de una determinada distancia, h , llamada distancia de Hausdorff, entre dos conjuntos de este espacio, es un espacio

métrico completo.

Definición 4.1.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Denotaremos por $\mathcal{H}(X)$ el espacio de los subconjuntos compactos no vacíos K de X , esto es,

$$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}$$

Una característica importante de $\mathcal{H}(X)$ es que la continuidad preserva la compacidad, lo cual se establece en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2.1. Sean dos espacios métricos (X, d) y (Y, m) y $f : X \rightarrow Y$ continua. Si $K \in \mathcal{H}(X)$ entonces $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$.

Demostración. Sean (X, d) y (Y, m) dos espacios métricos y consideremos una función continua $f : X \rightarrow Y$. Sean $K \in \mathcal{H}(X)$ y $(y_n)_n$ una sucesión en $f(K)$. Debemos probar que $(y_n)_n$ admite una subsucesión convergente en $f(K)$. Tenemos que

$$f(K) = \{y \in Y \mid y = f(k) \text{ para algún } k \in K\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(k_n)$ para algún $k_n \in K$. Dado que $(k_n)_n$ es una sucesión en K , y que K es compacto, entonces existe una subsucesión $(k_{n_t})_t$ de $(k_n)_n$ tal que

$$(k_{n_t})_t \rightarrow k \text{ para un } k \in K. \quad (4.1)$$

Luego, $(f(k_{n_t}))_t$ es una subsucesión de $(y_n)_n$ y $(f(k_{n_t}))_t \rightarrow f(k) \in f(K)$ por (4.1) y porque f es continua (teorema (2.2.1)). Así, $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$. \square

Definición 4.1.2.2 (Distancia de punto a compacto). Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $d(x, B)$ por:

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Definición 4.1.2.3 (Distancia de compacto a compacto). Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $d(A, B)$ por:

$$d(A, B) := \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

Debemos aclarar que d no es una métrica, ya que en general, no se cumple que $d(A, B) = d(B, A)$, es decir, la propiedad de simetría.

Ejemplo 4.1.2.1. Considere en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ los siguientes conjuntos

$$A = [0, 1] \times [0, 1] \text{ y } B = [1, 7] \times [0, 8].$$

Al calcular se obtiene

- $d([0, 1] \times [0, 1], [1, 7] \times [0, 8]) = 1.$

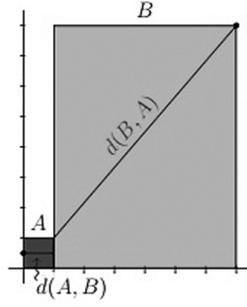


Figura 4.1.2.1: $d(A, B) \neq d(B, A)$.

$$\blacksquare d([1, 7] \times [0, 8], [0, 1] \times [0, 1]) = \sqrt{(7-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{85}.$$

Claramente, $d(A, B) \neq d(B, A)$.

Definición 4.1.2.4 (Distancia de Hausdorff). Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces la distancia de Hausdorff entre A y B en $\mathcal{H}(X)$ está definida por

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Ejemplo 4.1.2.2. En $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$,

$$h([0, 1] \times [0, 1], [1, 7] \times [0, 8]) = \max\{1, \sqrt{85}\} = \sqrt{85}.$$

Lema 4.1.2.1. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Entonces

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Sea $a \in A$. Entonces para todo $c \in C$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} \\ &= d(a, c) + d(c, B). \end{aligned}$$

Por tanto, como esto es cierto para cada $c \in C$,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{d(c, B) : c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Como a es un punto cualquiera de A , tenemos que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

□

Proposición 4.1.2.2. h es una distancia en el espacio $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$.

(a) *Propiedad de separación.* Supongamos que $B = A$. Luego,

$$\begin{aligned} h(A, A) &= \max\{d(A, A), d(A, A)\} \\ &= d(A, A) = \max\{d(x, A) : x \in A\} = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $A \neq B$, podemos suponer que existe un $a \in A$ tal que $a \notin B$. Así,

$$h(A, B) \geq d(a, B) > 0.$$

(b) *Propiedad de simetría.* Observemos que

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = \max\{d(B, A), d(A, B)\} = h(B, A).$$

(c) *Desigualdad triangular.* Por el lema anterior, tenemos que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A).$$

Luego,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \\ &\leq \max\{d(B, C), d(C, B)\} + \max\{d(A, C), d(C, A)\} \\ &= h(B, C) + h(A, C) \end{aligned}$$

□

Proposición 4.1.2.3. $h(A, B) \geq 0$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}(X)$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Dado que A y B son compactos, tenemos que

$$h(A, B) = d(a, b)$$

para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Por tanto, $h(A, B) \geq 0$. □

El espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ es conocido como *el espacio de los fractales*. Como los elementos de $\mathcal{H}(X)$ son subconjuntos de X (es decir, son elementos que a la vez son conjuntos), también se suele decir que $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X .

4.1.3. Completitud de $(\mathcal{H}(X), h)$

A continuación pondremos de manifiesto que el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$, que consiste en los subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico completo (X, d) , dotado de la distancia de Hausdorff, h , es un espacio métrico completo.

Definición 4.1.3.1. Sea $S \subset X$ y sea $\Gamma \geq 0$. Entonces

$$S + \Gamma = \{y \in X : d(x, y) \leq \Gamma \text{ para algún } x \in S\}.$$

$S + \Gamma$ es llamado dilatación de S por una bola de radio Γ .

Lema 4.1.3.1. Sean A y B conjuntos pertenecientes a $\mathcal{H}(X)$, donde (X, d) es un espacio métrico. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$h(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon \quad \text{y} \quad B \subset A + \varepsilon.$$

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que A y B son dos conjuntos pertenecientes a $\mathcal{H}(X)$. Sea $\varepsilon > 0$. Empezaremos mostrando que

$$d(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon.$$

Supongamos $d(A, B) \leq \varepsilon$. Entonces $\max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \varepsilon$ implica $d(a, B) \leq \varepsilon$ para toda $a \in A$. Así, para cada $a \in A$ tenemos $a \in B + \varepsilon$. Por lo tanto,

$$A \subset B + \varepsilon$$

Sabemos que

$$d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Sea $a \in A$. Ya que $A \subset B + \varepsilon$, existe un $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq \varepsilon$. Esto es verdad para cada $a \in A$. Así que $d(A, B) \leq \varepsilon$. Esto completa la prueba. \square

Consideremos que $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de Cauchy de conjuntos en $(\mathcal{H}(X), h)$. Si, dado un $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n, m \geq N$, entonces

$$A_n + \varepsilon \supset A_m \quad \text{y} \quad A_m + \varepsilon \supset A_n,$$

es decir,

$$h(A_n, A_m) \leq \varepsilon.$$

Estamos interesados en sucesiones de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con la propiedad de que $x_n \in A_n$, para cada n . En particular, necesitamos la siguiente propiedad, la cual permite la *extensión* de una subsucesión de Cauchy $\{x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, a una sucesión de Cauchy $\{x_n : x_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lema 4.1.3.2 (Lema de la extensión). Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), h)$. Sea $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ una secuencia infinita de enteros tal que

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Supongamos que tenemos una sucesión de Cauchy

$$\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, 3, \dots\}$$

en (X, d) . Entonces existe una sucesión de Cauchy

$$\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$$

tal que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, para toda $j = 1, 2, 3, \dots$

Demostración. Consideremos la construcción de la sucesión

$$\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$$

Para cada $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ escojamos

$$\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}.$$

Esto es, \tilde{x}_n es el punto más cercano (o uno de los puntos más cercanos) en A_n a x_{n_1} . La existencia de un punto tan cercano es asegurada por la compacidad de A_n .

Similarmente, para cada $j \in \{2, 3, \dots\}$ y cada $n \in \{n_j + 1, \dots, n_{j+1}\}$ escojamos

$$\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}.$$

Ahora demostraremos que $\{\tilde{x}_n\}$ tiene la propiedad deseada, es decir, que es una extensión de $\{x_{n_j}\}$ a A_n . Claramente,

$$\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j} \quad y \quad \tilde{x}_{n_j} \in A_n,$$

por la construcción. Para mostrar que es una sucesión de Cauchy tomemos $\varepsilon > 0$. Existe N_1 tal que $n_k, n_j \geq N_1$ implica que

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Existe N_2 tal que $m, n \geq N_2$ implica

$$\begin{aligned} h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} &\Leftrightarrow A_m + \frac{\varepsilon}{3} \supset A_n \\ &A_n + \frac{\varepsilon}{3} \supset A_m. \end{aligned}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y notemos que, para $m, n \geq N$,

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

donde

$$m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\} \quad y \quad n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}.$$

Dado que $h(A_m, A_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$ existe

$$y \in A_m \cap \left(\{x_{n_j}\} + \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

tal que

$$d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Similarmente,

$$d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon$ para todo $m, n > N$. Esto completa la prueba. \square

Teorema 4.1.3.1 (Complejitud de $(\mathcal{H}(X), h)$). Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{H}(X), h)$ es un espacio métrico completo. Además, si $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$$

puede ser caracterizado como sigue:

$$A = \{x \in X : \text{existe una sucesión de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ que converge a } x\}.$$

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y supongamos que A está definido como en el enunciado del teorema. La demostración la dividiremos en

- (a) $A \neq \emptyset$;
- (b) A es cerrado;
- (c) Para $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $n \geq N$, $A \subset A_n + \varepsilon$;
- (d) A está totalmente acotado y así por b es compacto;
- (e) $\lim A_n = A$

Prueba de (a). Debemos probar la existencia de una sucesión de Cauchy $\{a_i \in A_i\}$ en X . Para ello debemos buscar una sucesión creciente de enteros positivos

$$N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$$

talque

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \text{ para } m, n > N_i.$$

Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Entonces, dado que $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, podemos encontrar un $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}.$$

Asumamos que hemos seleccionada una sucesión finita

$$x_{N_i} \in A_{N_i}; i = 1, 2, \dots, k \text{ tales que } d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Entonces dado que

$$h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k} \text{ y } x_{N_k} \in A_{N_k},$$

podemos encontrar $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tal que

$$d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Por ejemplo, sea $x_{N_{k+1}}$ el punto en $A_{N_{k+1}}$, el cual es más cercano a x_{N_k} . Por inducción podemos encontrar una sucesión infinita $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ tal que

$$d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$$

Para ver que x_{N_i} es una sucesión de Cauchy en X , sea $\varepsilon > 0$ y escogemos N_ε tal que

$$\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

Entonces para $m > n \geq N_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por el lema de extensión, existe una subsucesión convergente $\{a_i \in A_i\}$ para la que $a_{N_i} = x_{N_i}$. Entonces $\lim_i a_i$ existe y, por definición, está en A . Así, $A \neq \emptyset$.

Prueba de (b). Para demostrar que A es cerrado, supongamos que $\{a_i \in A_i\}$ es una sucesión que converge hacia un punto a .

Mostraremos que $a \in A$, por lo tanto A es cerrado. Para cada entero positivo i , existe una sucesión $\{x_{i_n} \in A_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = a_i$. Existe una sucesión creciente de números positivos $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}.$$

Además, existe una subsucesión de enteros $\{m_i\}$ tal que

$$d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}.$$

Así,

$$d(x_{N_i, m_i}, a) \leq d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} < \frac{2}{i}$$

Si hacemos $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$, vemos que $y_{m_i} \in A_{m_i}$, y $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$. Luego, por el lema de extensión, $\{y_{m_i}\}$ puede ser extendida a una sucesión convergente $\{z_i \in A_i\}$, y entonces $a \in A$. Así, hemos mostrado que A es cerrado.

Prueba de (c). Sea $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que para $m, n \geq N$,

$$h(A_m, A_n) \leq \varepsilon.$$

Ahora, sea $n \geq N$. Entonces para $m \geq n$,

$$A_m \subset A_n + \varepsilon.$$

Necesitamos demostrar que

$$A \subset A_n + \varepsilon.$$

Para hacer esto, sea $a \in A$. Existe una sucesión $\{a_i \in A_i\}$ que converge a a . Podemos suponer que N es también lo suficientemente grande de modo que para $m \geq N$,

$$d(a_m, a) < \varepsilon.$$

Entonces $a_m \in A_n + \varepsilon$ dado que $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Ya que A_n es compacto, nos permite inferir que $A_n + \varepsilon$ es cerrado. Así, dado que $a_m \in A_n + \varepsilon$ para todo $m \geq N$, a también pertenece a $A_n + \varepsilon$. Esto completa la prueba de que $A \subset A_n + \varepsilon$ para n suficientemente grande.

Prueba de (d). Por contradicción, supongamos que A no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ para la cual no existe un ε -red que recubra a A . Podremos encontrar una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en A tal que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \text{ para } i \neq j.$$

Mostraremos que eso genera una contradicción. Por (c) existe un n suficientemente grande que

$$A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para cada x_i , existe una correspondiente $y_i \in A_n$ para la cual

$$d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ya que A_n es compacto, alguna subsucesión $\{y_{n_i}\}$ de $\{y_i\}$ es convergente. Entonces podemos encontrar puntos en la sucesión $\{y_{n_i}\}$ tan cercanos como lo deseemos. En particular podemos encontrar dos puntos y_{n_i} y y_{n_j} tal que

$$d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pero, entonces

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

y tenemos una contradicción para la manera en que x_{n_i} fue escogida. Así, A está totalmente acotada y por (b) es compacto.

Prueba de (e). De la prueba de (d), $A \in \mathcal{H}(X)$. Entonces por (c) y el lema (4.1.3.1) la prueba de que $\lim A_i = A$ estará completa si demostramos que para $\varepsilon > 0$, existe un N tal que para $n \geq N$, $A_n \subset A + \varepsilon$. Para mostrar esto, sea $\varepsilon > 0$ y un N tal que para $m, n \geq N$,

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces para $m, n \geq N$, $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n \geq N$. Demostraremos que

$$A_n \subset A + \varepsilon.$$

Sea $y \in A_n$. Existe una sucesión creciente $\{N_i\}$ de enteros tal que

$$n < N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_k < \cdots$$

y para $m, k \geq N_j$,

$$A_m \subset A_k + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Note que $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ya que $y \in A_n$, existe un $x_{N_1} \in A_{N_1}$, tal que

$$d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ya que $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe un punto $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$$

De manera similar podemos usar inducción para encontrar una sucesión $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \cdots$ tal que

$$x_{N_j} \in A_{N_j} \text{ y } d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Usando la desigualdad del triángulo un número de veces, podemos deducir que

$$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon \text{ para todo } j,$$

y también que $\{x_{N_j}\}$ es una sucesión de Cauchy. $\{x_{N_j}\}$ converge a un punto x , el cual está en A . Además, $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$ implica que $d(y, x) \leq \varepsilon$. Tenemos así demostrado que

$$A_n \subset A + \varepsilon \text{ para } n \geq N.$$

Esto completa la prueba de que $\lim A_i = A$. Luego, $(\mathcal{H}(X), h)$ es un espacio métrico completo. \square

4.1.4. Contracciones en $(\mathcal{H}(X), h)$

En esta sección demostraremos que toda función en el espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ es contractiva.

Lema 4.1.4.1. *Sea $\phi : X \rightarrow X$ una contracción en el espacio métrico (X, d) . Entonces ϕ es continua.*

Demostración. Supongamos que $\phi : X \rightarrow X$ es una contracción en el espacio métrico (X, d) . Sea $\varepsilon > 0$. Sea $s > 0$ el factor de contractividad para ϕ . Entonces

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq sd(x, y) < \varepsilon$$

siempre que $d(x, y) < \delta$ cuando $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$. Esto completa la demostración. \square

Lema 4.1.4.2. Sea $\phi : X \rightarrow X$ una función continua en el espacio métrico (X, d) . Entonces ϕ mapea $\mathcal{H}(X)$ en sí mismo.

Demostración. Sea S un subconjunto compacto no vacío de X . Entonces, claramente,

$$\phi(S) = \{\phi(x) : x \in S\}$$

es no vacío.

Queremos probar que $\phi(S)$ es compacto. Sea $\{y_n = \phi(x_n)\}$ una sucesión infinita de puntos de $\phi(S)$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión infinita de puntos en S . Dado que S es compacto existe una subsucesión $\{x_{N_n}\}$ la cual converge a un punto $\hat{x} \in S$. Pero entonces la continuidad de ϕ implica que

$$\{y_{N_n} = \phi(x_{N_n})\}$$

es una subsucesión de $\{y_n\}$ la cual converge a

$$\hat{y} = \phi(\hat{x}) \in \phi(S)$$

□

En el siguiente lema veremos cómo trasladar una función contractiva sobre (X, d) al espacio (\mathcal{H}, h) .

Lema 4.1.4.3. Sea $\phi : X \rightarrow X$ una contracción en el espacio métrico (X, d) con factor de contractividad s . Entonces $\phi : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por

$$\phi(B) = \{\phi(x) : x \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

es una contracción en $(\mathcal{H}(X), h(d))$ con factor de contractividad s .

Demostración. Supongamos que $\phi : X \rightarrow X$ es una contracción en el espacio métrico (X, d) con factor de contractividad s .

Del lema (4.1.4.1) se sigue que $\phi : X \rightarrow X$ es continua. Entonces, por el lema (4.1.4.2), tenemos que ϕ mapea $\mathcal{H}(X)$ en sí mismo.

Sean $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\phi(B), \phi(C)) &= \max\{\min\{d(\phi(x), \phi(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{sd(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = sd(B, C). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$d(\phi(C), \phi(B)) \leq sd(C, B).$$

Entonces

$$\begin{aligned} h(\phi(B), \phi(C)) &= d(\phi(B), \phi(C)) \vee d(\phi(C), \phi(B)) \\ &\leq sd(B, C) \vee sd(C, B) \\ &\leq sh(B, C). \end{aligned}$$

□

Un conjunto fractal vendrá definido por más de una función. Los siguientes lemas muestran cómo al combinar varias aplicaciones contractivas obtenemos otra aplicación contractiva.

Lema 4.1.4.4. Para todos A, B, C en $(\mathcal{H}(X), h)$,

$$d(A \cup B, C) = \text{máx}\{d(A, C), d(B, C)\}.$$

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$.

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \text{máx}\{d(x, C) : x \in A \cup B\} \\ &= \text{máx}\{d(x, C) : x \in A \vee x \in B\} \\ &= \text{máx}\{\text{máx}\{d(x, C) : x \in A\}, \text{máx}\{d(x, C) : x \in B\}\} \\ &= \text{máx}\{d(A, C), d(B, C)\}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.4.5. Para todos A, B, C y D , en $\mathcal{H}(X)$

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \text{máx}\{h(A, C), h(B, D)\},$$

donde h es la métrica de Hausdorff.

Demostración. Por la demostración del lema (4.1.2.1),

$$d(A, C \cup D) \leq d(A, C) + d(C, C \cup D);$$

como $d(C, C \cup D) = 0$, ya que $C \subseteq C \cup D$, entonces

$$d(A, C \cup D) \leq d(A, C).$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} d(B, C \cup D) &\leq d(B, D) + d(D, C \cup D) \Rightarrow d(B, C \cup D) \leq d(B, D) \\ d(C, A \cup B) &\leq d(C, A) + d(A, A \cup B) \Rightarrow d(C, A \cup B) \leq d(C, A) \end{aligned}$$

y

$$d(D, A \cup B) \leq d(D, B) + d(B, A \cup B) \Rightarrow d(D, A \cup B) \leq d(D, B).$$

Por la definición de h , el lema (4.1.4.4) y las desigualdades anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned} h(A \cup B, C \cup D) &= \\ &= \text{máx}\{d(A \cup B, C \cup D), d(C \cup D, A \cup B)\} \\ &= \text{máx}\{\text{máx}\{d(A, C \cup D), d(B, C \cup D)\}, \text{máx}\{d(C, A \cup B), d(D, A \cup B)\}\} \\ &= \text{máx}\{d(A, C \cup D), d(B, C \cup D), d(C, A \cup B), d(D, A \cup B)\} \\ &\leq \text{máx}\{d(A, C), d(B, D), d(C, A), d(D, B)\} \\ &= \text{máx}\{\text{máx}\{d(A, C), d(C, A)\}, \text{máx}\{d(B, D), d(D, B)\}\} \\ &= \text{máx}\{h(A, C), h(B, D)\}, \end{aligned}$$

esto es,

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}.$$

□

Lema 4.1.4.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ un conjunto de funciones contractivas en $(\mathcal{H}(X), h)$. Sea s_n el factor de contractividad para cada w_n . Si definimos $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por*

$$\begin{aligned} W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) \\ &= \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \text{para cada } B \in \mathcal{H}(X) \end{aligned}$$

entonces W es una función contractiva con factor de contractividad

$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Demostración. Observemos que W está bien definida en virtud de la proposición (4.1.2.1).

Para probar que W es contracción basta considerar el caso $N = 2$ (luego se aplica inducción matemática). Sea $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= \\ &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq h(w_1(B), w_1(C)) \vee h(w_2(B), w_2(C)) \quad (\text{por el lema (4.1.4.5)}) \\ &\leq s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \quad (\text{por el lema (4.1.4.3)}) \\ &\leq s(h(B, C) \vee h(B, C)) \\ &= s \max\{h(B, C), h(B, C)\} \\ &= sh(B, C), \end{aligned}$$

donde

$$s = \max\{s_1, s_2\}.$$

Razonando inductivamente, tenemos que

$$h(W(B), W(C)) = s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \vee \dots \vee s_N h(B, C) \leq sh(B, C).$$

Por tanto,

$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}.$$

□

4.1.5. Sistema Iterado de Funciones

El mecanismo más utilizado para la construcción de fractales es el Sistema Iterado de Funciones. Dentro de este tipo de sistemas, el teorema del punto fijo de Banach juega un papel primordial,

ya que se emplea en la demostración de la existencia y unicidad de un atractor, el cual garantiza la *auto semejanza* o *autosimilitud* de un determinado conjunto.

La *auto semejanza* es una de las principales características de los fractales. Intuitivamente, podemos decir que un objeto es auto semejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo.

Definición 4.1.5.1 (Sistema Iterado de Funciones). *Un Sistema Iterado de Funciones (SIF) es una estructura de la forma $\{X; \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N\}$, donde X es un espacio métrico completo y cada $\phi_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$, es una función contractiva en X .*

Hemos probado que $(\mathcal{H}(X), h)$ es un espacio métrico completo y que la unión de un conjunto de funciones contractivas es contractiva, por lo tanto, se puede aplicar el **teorema del punto fijo de Banach**, al caso particular de un SIF, el cual garantiza la existencia y unicidad de un conjunto fractal en el espacio $(\mathcal{H}(X), h)$; conocido como *atractor* de un SIF.

Teorema 4.1.5.1. *Dado un SIF $\{X : \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N\}$, se define*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H}(X) &\mapsto \mathcal{H}(X) \\ K &\rightarrow \Phi(K) := \bigcup_{i=1}^N \phi_i(K) \end{aligned}$$

Entonces existe un único $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\Phi(A) = A = \bigcup_{i=1}^N \phi_i(A).$$

Además, para cualquier $K \in \mathcal{H}(X)$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(K) = A.$$

*Al conjunto A lo llamaremos el **atractor** del SIF.*

Demostración. En primer lugar, observemos que Φ está bien definida en virtud de las proposiciones (2.3.6) y (4.1.2.1) Además, por el lema (4.1.4.6), Φ es una contracción en $\mathcal{H}(X)$.

Por otra parte, dado que X es completo, por el teorema (4.1.3.1), tenemos que $\mathcal{H}(X)$ es completo, de modo que podemos aplicar el **teorema del punto fijo de Banach** a la función

$$\Phi : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

para concluir que existe un único

$$A \in \mathcal{H}(X)$$

tal que

$$\bigcup_{i=1}^N \phi_i(A) = \Phi(A) = A.$$

Finalmente, **aplicando el segundo inciso del teorema del punto fijo de Banach**, se obtiene que para cualquier $K \in \mathcal{H}(X)$, la sucesión $(\Phi^n(K))$ converge a A , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(K) = A.$$

□

Lema 4.1.5.1. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ tal que

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots ;$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración. Por el teorema (4.1.3.1) sabemos que $\mathcal{H}(X)$ es completo, y que

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : \text{existe una sucesión de Cauchy } (x_n \in A_n) \text{ que converge a } x\}$$

Probemos entonces que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea $x \in A$. Existe $(x_n)_n$, sucesión en X , tal que

$$(x_n)_n \rightarrow x \quad \text{y} \quad x_n \in A_n, \quad \forall n.$$

Supongamos que

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

es decir, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_M$. Como A_M es compacto, por el teorema (2.3.1), A_M es cerrado. Luego,

$$A_M = \overline{A_M},$$

Así que $x \notin \overline{A_M}$, lo cual significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \cap A_M = \emptyset.$$

Ahora bien, como $(x_n)_n \rightarrow x$, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

siempre que $n \geq N$. Sea $T = \max\{M, N\}$. Se tiene

$$d(x_T, x) < \varepsilon,$$

luego $x_T \in B(x, \varepsilon)$. Como $T \geq M$, $A_T \subset A_M$; y como $x_T \in A_M$, de modo que

$$x_T \in B(x, \varepsilon) \cap A_M = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. Recíprocamente, sea

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces $x \in A_n$ para toda n , y basta entonces considerar la sucesión constante

$$(x, x, \dots, x, \dots) \rightarrow x$$

para concluir que $x \in A$. □

Ejemplo 4.1.5.1 (Construcción del conjunto de Cantor). Consideremos el SIF $\{\mathbb{R}; \phi_1, \phi_2\}$, donde

$$\phi_1(x) = \frac{1}{3}x \quad y \quad \phi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

En este caso $\Phi : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ está definida por

$$\Phi(K) := \phi_1(K) \cup \phi_2(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Tomemos como conjunto inicial (llamado también semilla) el conjunto $C_0 = [0, 1]$. Es intuitivamente claro que el atractor de este SIF es el conjunto de Cantor \mathcal{C} . Para probarlo formalmente basta observar que $(C_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ que cumple

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

Así,

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= \Phi(C_0) = \phi_1([0, 1]) \cup \phi_2([0, 1]) \\ &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 = \Phi(C_1) &= \phi_1(C_1) \cup \phi_2(C_1) \\ &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos aplicar el lema (4.1.5.1) y el teorema (4.1.5.1), para obtener

$$\text{Atractor del SIF} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C}.$$

A este conjunto \mathcal{C} se le denomina *conjunto ternario de Cantor*.

Analizando la expresión

$$\bigcup_{i=1}^N \phi_i(A) = \Phi(A) = A.$$

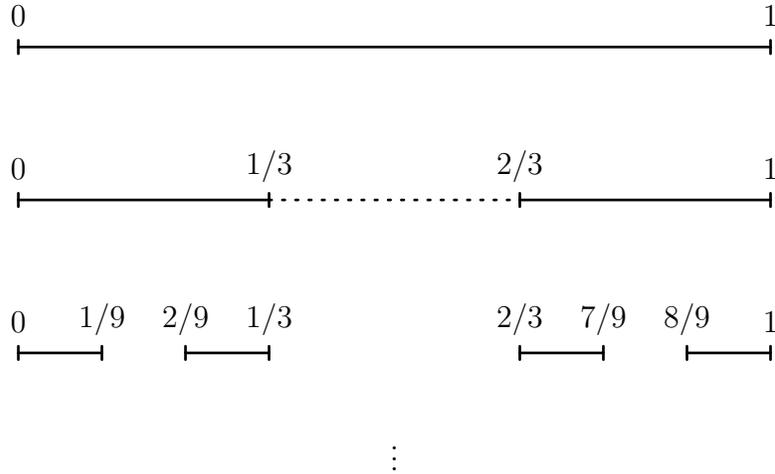


Figura 4.1.5.1: Construcción del conjunto de Cantor.

y recordando que cada ϕ_i es una contracción, de modo que cada $\phi_i(A)$ podría interpretarse como una “copia reducida” de A , entonces la igualdad anterior podría también expresarse informalmente, diciendo que el conjunto A es la unión de un número finito de copias reducidas de sí mismo. Esto se establece formalmente en la siguiente definición.

Definición 4.1.5.2 (Conjunto autosemejante). Diremos que un conjunto es autosemejante (o autosimilar) si es el atractor de un SIF.

Ejemplo 4.1.5.2 (Construcción del triángulo de Sierpinski). Consideremos el SIF

$$\{\mathbb{R}^2; \phi_1, \phi_2, \phi_3\},$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \phi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si se parte por ejemplo de

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

esto es, la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Desarrollando las operaciones

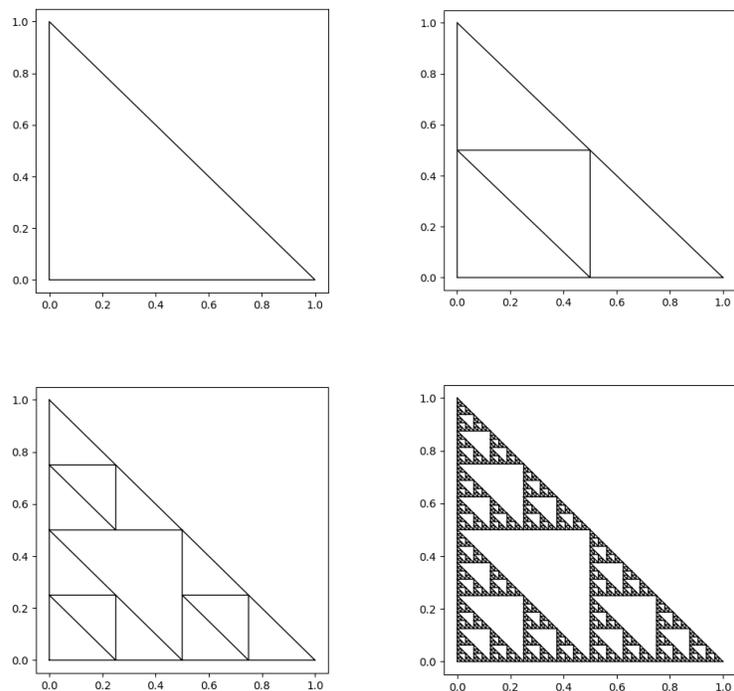


Figura 4.1.5.2: Triángulo de Sierpinski: iteraciones 0, 1, 2 y 6.

matriciales, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \\ \phi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \\ \phi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= (0, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 0) \\ \Phi_1 &= \phi_1(\Phi_0) \cup \phi_2(\Phi_0) \cup \phi_3(\Phi_0) \\ \phi_1(\Phi_0) &= (0, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \phi_2(\Phi_0) &= \left(\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 0) \\ \phi_3(\Phi_0) &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (0, 1) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Notemos que $\phi_1(\Phi_0)$ corresponde al triángulo inferior izquierdo, $\phi_2(\Phi_0)$ al triángulo inferior derecho y $\phi_3(\Phi_0)$ al triángulo superior. Podemos aplicar las tres contracciones a Φ_1 para obtener

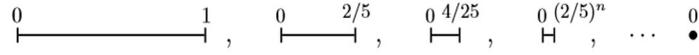


Figura 4.1.5.3: Construcción del atractor del SIF $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$.

Φ_2 , que está formada por nueve triángulos. Y así sucesivamente... La figura límite que se obtiene se denomina triángulo de Sierpinski.

Ejemplo 4.1.5.3. *Tomemos ahora el SIF*

$$\left\{ [0, 1]; \frac{2}{5}x \right\}.$$

Su atractor es $A = \{0\}$.

En efecto, según el teorema (4.1.5.1), basta demostrar que A es el punto fijo de la contracción $\Phi : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$ definida por

$$\Phi(K) = \phi_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}([0, 1]), \quad \phi_1(x) = \frac{2}{5}x.$$

Tenemos:

$$\Phi(\{0\}) = \phi_1(\{0\}) = \{\phi_1(0)\} = \{0\}.$$

4.1.6. El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales y, a su vez, uno de los de mayor complejidad.

Para definir el conjunto de Mandelbrot es necesario primero definir el *conjunto de Julia*. El conjunto de Julia es, básicamente, una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el funcionamiento de los números complejos al ser iterados por una función.

Sea \mathbb{C} el conjunto de los números complejos. Consideremos los polinomios $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grados $n \geq 2$ y coeficientes complejos, esto es,

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n.$$

Definición 4.1.6.1. *Sea w un punto periódico de período p , con $(f^p)'(w) = \lambda$.*

- (a) Si $\lambda = 0$, decimos que w es un punto superatractivo.
- (b) Si $0 \leq |\lambda| < 1$, decimos que w es un punto atractivo.
- (c) Si $|\lambda| = 1$, decimos que w es un punto indiferente.
- (d) Si $|\lambda| > 1$, decimos que w es un punto repelente.

Definición 4.1.6.2 (Punto adherente). Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X . Se dice que $x \in X$ es un punto adherente de A si todo entorno U de x cumple que $U \cap A \neq \emptyset$, es decir, no hay ningún entorno de x totalmente contenido en $X - A$.

Definición 4.1.6.3 (Clausura). El conjunto de puntos adherentes de A se llama la adherencia o la clausura de A y se denota por \bar{A} .

Definición 4.1.6.4 (Conjunto de Julia). El conjunto de Julia de f , denotado por $J(f)$, puede definirse como la clausura de los puntos repelentes de f .

Ejemplo 4.1.6.1. Sea $f(z) = z^2$. Los puntos periódicos de f son los z tales que

$$f^k(z) = z^{2^k} = z,$$

donde $k \geq 1$. Si $z \neq 0$, entonces

$$z^{2^k-1} = z^{1-1} = 1.$$

Luego, z es una raíz de 1 y por consiguiente $|z| = 1$. Falta ver si los puntos z son repelentes.

$$\lambda = (f^k)'(z) = (z^{2^k})' = 2^k z^{2^k-1}.$$

Observemos que

$$|\lambda| = |(f^k)'(z)| = 2^k |z|^{2^k-1} = 2^k > 1$$

Luego, los puntos z son repelentes. Si $z = 0$, entonces z es un punto superatractivo puesto que

$$\lambda = 2^k z^{2^k-1} = 0.$$

Así,

$$J(f) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y sea $U(z)$ un entorno cualquiera de A . La clausura de A está dada por

$$\bar{A} = \{\forall z \in A \forall U(z) : U(z) \cap A = A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \neq \emptyset\}.$$

Por tanto,

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Esto es, el conjunto de Julia de $f(z) = z^2$ es el círculo unitario.

Definición 4.1.6.5 (Conjunto conexo). Un conjunto A es conexo si no puede ser descrito como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos.

Definición 4.1.6.6 (Conjunto de Mandelbrot). Sea $f_c(z) = z^2 + c$ y sea $J_c = J(f_c)$. El conjunto de Mandelbrot M se define como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\}.$$

No abordaremos aquí los aspectos teóricos del conjunto. Los interesados en esto pueden consultar el capítulo 14 de [11] y el capítulo 4 de [12]. Nos limitaremos a presentar las herramientas que permiten generar el conjunto a través de un ordenador.

Para calcular el conjunto de Mandelbrot no se usa la definición formal que acabamos de dar, ya que esta resulta ser prácticamente inmanejable desde un punto de vista computacional. Para ello se utiliza una propiedad que caracteriza el conjunto y que le da por tanto una definición equivalente.

Si empezamos a iterar la función

$$f_c(z) = z^2 + c$$

para distintos valores de c , a partir siempre del valor inicial $z_0 = 0$, esto es, consideramos la familia de iterados

$$f_c^n(0) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots,$$

entonces el conjunto de Mandelbrot M son justamente los valores de $c = c_1 + ic_2$ que hacen que esta sucesión sea acotada. Luego dado un valor c del plano complejo decidimos que está en el conjunto de Mandelbrot o no según que la iteración anterior esté acotada o no.

Ejemplo 4.1.6.2. *Consideremos:*

a) $c = 1$

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 26 \end{aligned}$$

La sucesión no está acotada. Por tanto, $c = 1 \notin M$.

b) $c = -1$.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= (-1)^2 + (-1) = -1 \\ z_2 &= (-1)^2 + (-1) = 0 \\ z_3 &= (-1)^2 + (-1) = -1 \\ z_4 &= (-1)^2 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

La sucesión está acotada. Por tanto, $c = -1 \in M$.

Para obtener computacionalmente el gráfico correspondiente al conjunto de Mandelbrot se utiliza el siguiente algoritmo:

1. Seleccionamos un conjunto de puntos K del plano complejo \mathbb{C} .

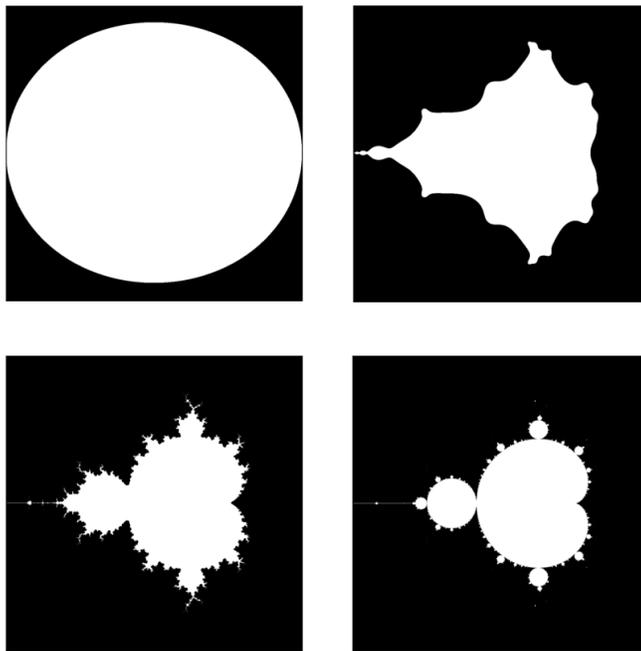


Figura 4.1.6.1: El conjunto de Mandelbrot: iteraciones 1, 5, 15 y 1000.

2. Indicamos el número de iteraciones n .
3. Para cada $c \in K$, iteramos la función $f_c(z) = z^2 + c$.
4. Si en algún momento de la iteración $|f_c(z)| > 2$, entonces $c \notin M$.
5. Si después de haberse realizado las n iteraciones $|f_c(z)| \leq 2$, entonces $c \in M$.

Ejemplo 4.1.6.3 (Funcionamiento del algoritmo). *Analizaremos dos puntos con el número de iteraciones fijado en 2.*

a) Sea $c = (-2 + 2i)$.

■ *Primera iteración:*

$$\begin{aligned} z_1 &= (0 + 0i)^2 + (-2 + 2i) = (-2 + 2i) \\ |z_1| &= |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} > 2 \end{aligned}$$

Dado que $|z_1| > 2$, no hay necesidad de seguir iterando. Concluimos inmediatamente que $c = (-2 + 2i) \notin M$.

b) Sea $c = (-1 + i)$.

■ *Primera iteración:*

$$\begin{aligned} z_1 &= (0 + 0i)^2 + (-1 + i) = (-1 + i) \\ |z_1| &= |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \approx 1.4142 \end{aligned}$$

- *Segunda iteración*

$$\begin{aligned} z_2 &= (-1 + i)^2 + (-1 + i) = -2i + (-1 + i) = (-1 - i) \\ |z_2| &= |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \approx 1.4142 \leq 2 \end{aligned}$$

Por tanto, $c = (-1 + i) \in M$.

4.2. Aplicación a las ecuaciones diferenciales

En esta sección presentamos la aplicación del teorema del punto fijo de Banach al problema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución de una Ecuación Diferencial (ED) verificando ciertas condiciones iniciales.

4.2.1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

El cálculo diferencial e integral fue desarrollado a partir del siglo XVII, impulsados por la necesidad de describir leyes de la naturaleza.

Cuando se desea modelar algún problema de las ciencias sociales, la ingeniería o la física, se necesita encontrar una función que satisfaga una ecuación en la que intervienen una o más derivadas de una función desconocida. A este tipo de ecuaciones se les denomina *ecuaciones diferenciales* (ED).

El primer registro documentado de una ED es una ecuación estudiada por Isaac Newton (1642-1727) en el año 1671, mientras desarrollaba el cálculo diferencial:

$$y'(t) = 1 - 3t + y(t) + t^2 + ty(y); \quad y(0) = 0$$

En 1674, Gottfried Leibniz (1646-1716) estudió el siguiente problema geométrico:

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{\sqrt{a}}.$$

Este problema ya había sido estudiado por Pierre de Fermat (1601-1665). Leibniz pudo obtener una representación implícita de la solución. La ecuación actualmente puede ser calculada de forma analítica.

Otros matemáticos que contribuyeron en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales fueron Leonard Euler (1707-1783), que introdujo el concepto de *ecuación diferencial parcial* en 1734, y Jean d'Lambert (1717-1783), que realizó trabajos sobre ellas en 1743 y con la ayuda de algunos resultados de Bernoulli logró dar respuesta al problema de la forma de una cuerda en el instante t .

4.2.2. Conceptos preliminares

Antes de hablar sobre el problema de Cauchy, necesitamos saber algunos conceptos que intervienen en el mismo. Así, primeramente, debemos saber que una ED es una ecuación que

involucra derivadas de una función desconocida que depende de una o más variables. Existen varios tipos de ED, entre ellos tenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que es una ED en la cual la función desconocida depende solamente de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias).

También es importante saber que el orden de una ED es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación; así mismo, el grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación diferencial esté dada en forma polinomial.

Definición 4.2.2.1 (Solución de una ED). *Una solución de una ED es cualquier función que satisface la ecuación, esto es, la reduce a una identidad.*

Ejemplo 4.2.2.1. *Encuentre una función $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación*

$$y' = 6y.$$

En el ejemplo anterior, de la sustitución directa deducimos que cualquier función de la forma $y = ae^{6t}$, $a \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo. Es obvio que la solución existe, pero no es única.

Más adelante se mostrará un problema en el que la solución es única, imponiendo condiciones iniciales.

Respecto a las soluciones de una ED, tenemos que dicha solución puede ser: general, esta es la función que satisface a la ecuación; particular, que consta de la función que satisface la ecuación y cuyas constantes arbitrarias toman valores específicos.

Así mismo, **un problema de valor inicial** es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman *condiciones iniciales*.

Por último, tenemos al **Espacio de Banach** que es un espacio normado y completo con la métrica inducida por su norma.

Definición 4.2.2.2 (Función acotada). *Una función $f : S \rightarrow X$ es acotada si existen $c \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ tales que*

$$d(f(z), x_0) \leq c \quad \forall z \in S$$

Sean S un conjunto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Si S es un conjunto y $V = (V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in Z} \|f(z)\|$$

es un espacio vectorial normado. Si Z es un espacio métrico, $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(S, V)$

Proposición 4.2.2.1. *Sea (f_k) una sucesión $\mathcal{B}(S, X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y solo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$.*

La demostración puede verse en [6].

Teorema 4.2.2.1. Sean $Z = (Z, d_Z)$ y $X = (X, d_X)$ espacios métricos. Si $f_k : Z \rightarrow X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ y (f_k) converge uniformemente a f en Z , entonces $f : Z \rightarrow X$ es continua.

La demostración puede verse en [6].

Proposición 4.2.2.2. Sea A un subconjunto de X y sea $x \in X$. Entonces $x \in \bar{A}$ si y solo si existe una sucesión (x_k) tal que $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \rightarrow x$ en X .

Demostración. Si $x \in \bar{A}$ entonces existe $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_k \in A$ y $0 \leq d(x_k, x) \leq \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_k \rightarrow x$ en X . Inversamente, sea (x_k) una sucesión de puntos en A tal que $x_k \rightarrow x$ en X . Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. En particular, $x_{k_0} \in B_X(x, \epsilon) \cap A$. Por tanto, $x \in \bar{A}$. \square

Corolario 4.2.2.1. Sean Z y X espacios métricos. Entonces $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(Z, X)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_b^0(\bar{Z}, X)$. Por la proposición (4.2.2.2) existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ tal que $f_k \rightarrow f$ en $\mathcal{B}(Z, X)$. Por la proposición (4.2.2.1) y el teorema (4.2.2.1) aseguran entonces que $f \in \mathcal{C}_b^0(Z, X)$. Esto prueba que $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es cerrado en $\mathcal{B}(Z, X)$. \square

Teorema 4.2.2.2 (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy). Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \rightarrow X, k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S si y solo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S .

La demostración puede verse en [6].

Proposición 4.2.2.3. Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio métrico A de X es completo si y solo si es cerrado en X .

Demostración. \Leftarrow): Supongamos que A es cerrado en X . Sea (a_k) una sucesión de Cauchy en A . Entonces (a_k) es una sucesión de Cauchy en X y, como X es completo, $a_k \rightarrow x$ en X . Por la proposición (4.2.2.2) se tiene que $x \in \bar{A} = A$. Esto prueba que A es completo.

\Rightarrow): Supongamos ahora que A es completo. Sea $x \in \bar{A}$. Por la proposición (4.2.2.2), existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \rightarrow x$ en X . Dado que toda sucesión convergente en X es de Cauchy, entonces (a_k) es de Cauchy y, como A es completo, se tiene que $a_k \rightarrow a$ en A . De la unicidad del límite se sigue que $x = a \in A$. En consecuencia, A es cerrado. \square

Teorema 4.2.2.3. Sean S un conjunto y Z un espacio métrico. Si X es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ son completos. Si V es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ son espacios de Banach.

Demostración. Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S, V)$. Claramente (f_k) es uniformemente de Cauchy en S y, por la proposición (4.2.2.1) y el teorema (4.2.2.2), (f_k) converge en $\mathcal{B}(S, V)$. Esto prueba que $\mathcal{B}(S, V)$ es completo. Por el corolario (4.2.2.1), $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(S, V)$. La proposición (4.2.2.3) asegura entonces que $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ es completo. \square

Proposición 4.2.2.4. Si K es un subconjunto compacto de X , entonces K es cerrado y acotado.

La demostración puede verse en [6].

Corolario 4.2.2.2. Si K es un espacio métrico completo y $\phi : K \rightarrow X$ es continua, entonces ϕ es una función acotada.

Demostración. Por la proposición anterior, $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de X . La proposición (4.2.2.4) asegura entonces que $\phi(K)$ es acotado, es decir, ϕ es una función acotada. \square

4.2.3. El problema de Cauchy

El problema de Cauchy, también llamado problema del valor inicial, consiste en encontrar una solución a una ecuación diferencial que posee ciertas condiciones iniciales.

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un campo vectorial en Ω es una función continua de Ω en \mathbb{R}^n .

Consideraremos campos vectoriales que cambian continuamente con el tiempo, es decir, funciones continuas $\chi : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. El intervalo abierto (a, b) puede ser infinito.

Definición 4.2.3.1 (Problema de Cauchy). Sea una función continua $\chi : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un problema de Cauchy consiste en encontrar una función u en Ω definida para valores $t \in (a, b)$ que sea solución de la ecuación diferencial $u' = \chi(t, u)$ y que en un punto t_0 tome el valor de x_0 .

El problema anterior se representa, usualmente, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u' &= \chi(t, u) \\ u(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Definición 4.2.3.2 (Solución del problema de Cauchy). Una solución del problema de Cauchy es una función continuamente diferenciable $u : J \rightarrow \Omega$, definida en un subintervalo J de (a, b) que contiene a t_0 , que satisface

$$u'(t) = \chi(t, u(t)) \quad \forall t \in J \quad \text{y} \quad u(t_0) = x_0$$

El punto (t_0, x_0) se llama *condición inicial* del problema de Cauchy.

Empezaremos mostrando que el problema de Cauchy es equivalente a una ecuación integral. Dada una función $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f .

Lema 4.2.3.1. $u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \Omega$ es solución del problema de Cauchy si y solo si u es continua y satisface

$$u(t) = \int_{t_0}^t \chi(s, u(s)) ds + x_0 \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad (4.2)$$

Demostración. Esta afirmación es consecuencia inmediata de los teoremas fundamentales del cálculo, aplicados a cada componente. En efecto, si $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$, entonces u_i es continua y satisface

$$u_i(t) = \int_{t_0}^t \chi_i(s, u(s)) ds + x_{0,i}$$

si y solo si u_i es continuamente diferenciable y satisface

$$u_i'(t) = \chi_i(t, u(t)), \quad u_i(t_0) = x_{0,i}$$

para cada $i = 1, \dots, n$ □

4.2.4. Existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy

Una de las más importantes aplicaciones teóricas del teorema del punto fijo de Banach es la prueba de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta aplicación, el espacio métrico completo X es un conjunto de funciones, y la función ϕ transforma una función en otra función (por lo cual decimos que ϕ es un operador). El truco es mostrar que una solución de la ecuación diferencial, si esta existe, es un punto fijo del operador ϕ .

Para poder demostrar la existencia y unicidad del problema de Cauchy necesitamos expresar la ecuación integral (4.2) como un problema de punto fijo. Para ello requerimos una condición adicional sobre el campo χ . Denotemos por

$$\bar{B}(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

a la bola cerrada de radio δ y centro x_0 en \mathbb{R}^n con la norma usual.

Definición 4.2.4.1 (Función localmente Lipschitz continua en la segunda variable). Una función $\chi : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz continua en la segunda variable si para cada $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \Omega$, existen $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ (que depende de t_0 y x_0) tales que $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset (a, b)$, $\bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ y

$$\|\chi(t, x_1) - \chi(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|, \text{ si } |t - t_0| \leq \delta_0 \text{ y } x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0, \delta_0).$$

En el resto de esta sección supondremos que $\chi : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz continua en la segunda variable. Para la condición inicial (t_0, x_0) del problema de Cauchy escogemos $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ como en la definición (4.2.4.1). Escogemos además $M \geq 1$ tal que

$$\|\chi(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}(x_0, \delta_0).$$

Tal M existe gracias al corolario (4.2.2.2). Finalmente, escogemos $\delta \in (0, \min\{\frac{1}{C}, \frac{\delta_0}{M}\})$.

Definimos

$$X := \{u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : \|u - x_0\|_\infty \leq \delta M\}$$

donde x_0 es la función constante con valor x_0 y

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|u(t)\|$$

es la norma uniforme en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Recuerda que $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach (teorema (4.2.2.3)). Le damos a X la métrica inducida por esta norma.

Lema 4.2.4.1. (a) X es un espacio métrico completo.

(b) Si $u \in X$, entonces $u(t) \in \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración. (a) Observa que X es la bola cerrada con centro en la función constante x_0 y radio δM en el espacio $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ con la norma uniforme. Por tanto, X es un subconjunto cerrado

$$\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n).$$

De la proposición (4.2.2.3) se sigue que X es un espacio métrico completo.

(b) Si $u \in X$ entonces

$$\|u(t) - x_0\| \leq \delta M < \delta_0 \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

En consecuencia, $u(t) \in \bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

□

Para cada $u \in X$ definimos la función $\phi(u) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^t \chi(s, u(s)) ds + x_0$$

Notemos que el integrando está bien definido porque, de acuerdo con el lema anterior, $u(s) \in \Omega$ para todo $s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Requerimos la siguiente desigualdad.

Lema 4.2.4.2 (Desigualdad de Young). Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Entonces, para cualquier par de números reales $a, b \geq 0$ se cumple que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

La demostración puede verse en [6].

Proposición 4.2.4.1 (Desigualdad de Hölder para integrales). Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Entonces, para cualquier par de funciones continuas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple que

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

es decir,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración. La afirmación es trivial si $f = 0$ o si $g = 0$. Supongamos pues que ambas funciones son distintas de cero. Para cada $x \in [a, b]$, definimos

$$a_x := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{y} \quad b_x := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Aplicando la desigualdad de Young (lema (4.2.4.2)) a estos números obtenemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}$$

e integrando ambos lados de esta desigualdad concluimos que

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)|dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por $\|f\|_p\|g\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada. \square

Lema 4.2.4.3. Para cualquier función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b-a| \|f\|_\infty$$

Demostración. Consideremos una función continua $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f . Necesitamos probar que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b-a| \|f\|_\infty$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en \mathbb{R}^n y $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|$ es la norma uniforme en $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Ahora, por la desigualdad de Hölder (lema (4.2.4.1)), tenemos que

$$\int_a^b |f_i|dt = \int_a^b |1 \cdot f_i|dt \leq \left(\int_a^b |1|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f_i|^2 dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |f_i|^2 dt \right)^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|f_i\|_1 &= \int_a^b |f_i|dt \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |f_i|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f_i|^2 dt \right)^{1/2} \leq |b-a| \|f_i\|_\infty \end{aligned}$$

entonces

$$\|f_i\| \leq |b - a| \|f_i\|_\infty$$

por ende

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq |b - a| \|f\|_\infty$$

□

Ahora probaremos que ϕ es una función de X en sí mismo.

Lema 4.2.4.4. $\phi(u) \in X$ para todo $u \in X$

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo, la i -ésima función componente de $\phi(u)$,

$$\phi(u)_i(t) := \int_{t_0}^t \chi_i(s, u(s)) ds + x_{0,i}$$

es continuamente diferenciable. En particular, $\phi(u) \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Usando el lema (4.2.4.3) obtenemos además que

$$\|\phi(u)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \chi(s, u(s)) ds \right\| \leq |t - t_0| M \leq \delta M$$

En consecuencia, $u \in X$

□

El siguiente teorema es uno de los resultados fundamentales de la teoría de ecuaciones diferenciales. Fue publicado por primera vez en 1890 por Ernst Lindelöf (1870-1946). Simultáneamente, Charles Picard (1856-1941) desarrolló un método de aproximación sucesiva de soluciones. El método de iteración de Picard es justamente el método iterativo del **teorema del punto fijo de Banach** para este caso particular.

Teorema 4.2.4.1 (Picard-Lindelöf). Sea $\chi : (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente Lipschitz continua en la segunda variable. Entonces, dados $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que el problema de Cauchy tiene una única solución en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración. El lema (4.2.4.4) asegura que ϕ es una función de X en sí mismo. Observemos que $u \in X$ satisface la ecuación integral (4.2) si y solo si

$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^t \chi(s, u(s)) ds + x_0 = u(t) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

es decir, si y solo si u es un “punto fijo” de $\phi : X \rightarrow X$.

Probaremos que ϕ es una contracción. Sean $u, v \in X$. Usando el lema (4.2.4.3) obtenemos que, para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, se cumple que

$$\begin{aligned} \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\chi(s, u(s)) - \chi(s, v(s))) ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \max_{|s-t_0| \leq \delta} \|\chi(s, u(s)) - \chi(s, v(s))\| \\ &\leq |t - t_0| \max_{|s-t_0| \leq \delta} C \|u(s) - v(s)\| \\ &\leq \delta C \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| \leq \delta C \|u - v\|_\infty$$

y, como hemos elegido δ tal que $\delta C < 1$, se tiene que ϕ es una contracción. Como X es completo, ϕ tiene un único punto fijo. Es decir, que existe una única $u^* \in X$ que satisface la ecuación integral (4.2). Del lema (4.2.3.1) se sigue que u^* es la única solución del problema de Cauchy en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. \square

Conclusiones

El teorema del punto fijo de Banach, uno de los más sofisticados de la matemática moderna, se sustenta en una amplia base teórica que abarca áreas como el análisis matemático, el análisis funcional, la topología, entre otras.

Este teorema (también conocido como principio de contracción) fue demostrado por el matemático polaco Stefan Banach en el año 1922. Garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de funciones contractivas definidas de un espacio métrico completo en sí mismo. Proporciona, además, un método para encontrar estos puntos, el cual puede apreciarse en su ingeniosa y a la vez elegante demostración.

Mediante el presente trabajo investigativo hemos tomado conciencia del impacto teórico y práctico que tiene el teorema del punto fijo de Banach. Así, logramos mostrar su aplicación en la demostración de la existencia y unicidad de conjuntos fractales denominados atractores, que se construyen a través de un Sistema Iterado de Funciones (conjunto finito de funciones contractivas de un espacio métrico completo en sí mismo), y en la prueba de la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria dado un problema de Cauchy.

Recomendaciones

Al finalizar esta tesis, consideramos oportuno brindar algunas recomendaciones.

A los estudiantes de Matemática, recomendamos considerar otras aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach como tema de investigación para su tesis de licenciatura. El teorema también se aplica en:

- La demostración del teorema de la función implícita
- El método de Newton-Rhapson
- Métodos iterativos (numéricos) para la solución de sistemas lineales
- La existencia de soluciones de ecuaciones integrales
- Sistemas de Sturm-Liouville.

Otro tema que podría resultar atractivo para este fin es el de la geometría fractal y sus aplicaciones. En este trabajo nos hemos limitado a presentar las generalidades sobre los fractales, ya que nuestro propósito era establecer la relación que tienen estos con el teorema del punto fijo de Banach. Invitamos al lector a estudiar de forma detallada estos objetos geométricos.

Para generar la mayoría de fractales que aparecen en este trabajo utilizamos el lenguaje de programación Python, tanto por la sencillez de su sintaxis como por la calidad de las imágenes obtenidas. Recomendamos al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN - León) considerar la posibilidad de incluir este potente lenguaje dentro del componente de Software Matemático.

ANEXOS

CÓDIGOS EN PYTHON

Triángulo de Sierpinski

```
# Triangulo de Sierpinski

# Modulos requeridos
from math import sin, cos, pi, sqrt
from pylab import *

# Definicion del triangulo inicial
def trianguloinicial(s, n):
    # Vertices
    v1x = 0
    v1y = 0

    v2x = s * cos(pi/3)
    v2y = s * sin(pi/3)

    v3x = s * cos(0)
    v3y = s * sin(0)

    Sierpinski(v1x, v1y, v2x, v2y, v3x, v3y, n)

# Definicion del triangulo de Sierpinski
def Sierpinski(xi, yi, xm, ym, xf, yf, n):
    if n == 0:
        plot([xi, xm, xf, xi], [yi, ym, yf, yi], lw=1,
             color = 'black')

    elif n > 0:
        # Puntos medios
        pm1x = (xi + xm)/2
        pm1y = (yi + ym)/2

        pm2x = (xm + xf)/2
        pm2y = (ym + yf)/2

        pm3x = (xf + xi)/2
        pm3y = (yf + yi)/2

        Sierpinski(xi, yi, pm1x, pm1y, pm3x, pm3y, n-1)
        Sierpinski(xm, ym, pm2x, pm2y, pm1x, pm1y, n-1)
        Sierpinski(xf, yf, pm3x, pm3y, pm2x, pm2y, n-1)

# Menu del programa
```

```

print('\nTRIANGULO DE SIERPINSKI\n')
s = float(raw_input('Longitud del segmento: '))
n = int(raw_input('\nNumero de iteraciones: '))
figure('Triangulo de Sierpinski') # Nombre de la ventana de Windows
title('Triangulo de Sierpinski') # Titulo del grafico
trianguloinicial(s, n)
show()

```

Curva de Koch

```

# Curva de Koch

# Modulos requeridos
from math import sin, cos, pi, atan2, hypot
from pylab import *

# Definicion de la curva de Koch
def curva_koch(xi, yi, xf, yf, n):
    if n == 0:
        plot([xi, xf], [yi, yf], lw=1, color='black')
    elif n > 0:
        x1 = xi + (xf - xi)/3
        y1 = yi + (yf - yi)/3

        x3 = xf - (xf - xi)/3
        y3 = yf - (yf - yi)/3

        radio = hypot(x3 - x1, y3 - y1)
        alpha = atan2((y3 - y1), (x3 - x1))
        alpha += pi/3
        x2 = x1 + radio * cos(alpha)
        y2 = y1 + radio * sin(alpha)

        curva_koch(xi, yi, x1, y1, n-1)
        curva_koch(x1, y1, x2, y2, n-1)
        curva_koch(x2, y2, x3, y3, n-1)
        curva_koch(x3, y3, xf, yf, n-1)

def trazar(s, n):
    xlim(0, s)
    curva_koch(0, 0, s, 0, n)

# Menu del programa
print('\nCURVA DE KOCH\n')
s = float(raw_input('Longitud del segmento: '))
n = int(raw_input('\nNumero de iteraciones: '))

```

```

figure('Curva de Koch') # Nombre de la ventana de Windows
title('Curva de Koch') # Titulo de la figura
trazar(s, n)
show()

```

Copo de Koch

```

# Copo de Koch

# Modulos requeridos
from math import sin, cos, pi, atan2, hypot
from pylab import *

# Definicion de la curva de Koch
def curva_koch(xi, yi, xf, yf, n):
    if n == 0:
        plot([xi, xf], [yi, yf], lw=1, color='black')
    elif n > 0:
        x1 = xi + (xf - xi)/3
        y1 = yi + (yf - yi)/3

        x3 = xf - (xf - xi)/3
        y3 = yf - (yf - yi)/3

        radio = hypot(x3 - x1, y3 - y1)
        alpha = atan2((y3 - y1), (x3 - x1))
        alpha += pi/3
        x2 = x1 + radio * cos(alpha)
        y2 = y1 + radio * sin(alpha)

        curva_koch(xi, yi, x1, y1, n-1)
        curva_koch(x1, y1, x2, y2, n-1)
        curva_koch(x2, y2, x3, y3, n-1)
        curva_koch(x3, y3, xf, yf, n-1)

# Definicion del copo de Koch
def copo_koch(s, n):
    v1x = 0
    v1y = 0

    v2x = s * cos(2 * pi/3)
    v2y = s * sin(2 * pi/3)

    v3x = s * cos(pi/3)
    v3y = s * sin(pi/3)

```

```

    curva_koch(v1x, v1y, v2x, v2y, n)
    curva_koch(v2x, v2y, v3x, v3y, n)
    curva_koch(v3x, v3y, v1x, v1y, n)

def trazar(s, n):
    xlim(-s, s)
    copo_koch(s, n)

# Menu del programa
print('\nCOPO DE KOCH\n')
s = float(raw_input('Longitud del segmento: '))
n = int(raw_input('\nNumero de iteracion: '))
figure('Copo de Koch') # Nombre de la ventana de Windows
title('Copo de Koch') # Titulo de la figura
trazar(s, n)
show()

```

Conjunto de Mandelbrot

```

# Conjunto de Mandelbrot

from numpy import array, zeros
from matplotlib.pyplot import imshow, xticks, yticks, show
from pylab import *

# Definicion del conjunto de Mandelbrot
def mandelplot(size, limit, xint, yint):

    img = zeros([size, size], int)

    xamp = xint[1] - xint[0]
    yamp = yint[1] - yint[0]

    for y in range(size):
        for x in range(size):
            c = complex(x/float(size)* xamp +
                xint[0],y/float(size)*yamp + yint[0])
            z = c
            for i in range(limit):
                z = z**2 + c
                img[y,x] += 1
                if abs(z) > 2:
                    break
            else:
                img[y,x] = 0

```

```
img = array(img/float(img.max()))

asp = yamp / xamp
imshow(img, interpolation = 'bilinear', origin = 'lower',
       cmap = 'binary', aspect = asp)

xticks([])
yticks([])
show()

return

puntos = 1000
iteraciones = 1000
xint = [-2,1]
yint = [-1.5,1.5]

figure('Conjunto de Mandelbrot') # Nombre de la ventana de Windows
suptitle('Conjunto de Mandelbrot') # Titulo del grafico

mandelplot(puntos,iteraciones,xint,yint)
```

Bibliografía

- [1] Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX*.
- [2] Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*.
- [3] Dieudonné, J. (1981). *History of Functional Analysis*.
- [4] Cascales B., Troyanski S. (2007). *Fundamentos de análisis matemático*.
- [5] Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*.
- [6] Clapp, M. (2013). *Análisis Matemático*.
- [7] Herrero Piñeyro, P. (2010). *Topología de espacios métricos*.
- [8] Muscat, J. (2014). *Functional analysis. An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Malta: Springer.
- [9] Barnsley, F. (1988). *Fractals Everywhere*.
- [10] Sabogal S., Arenas G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*.
- [11] Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application*. Great Britain.
- [12] Peitgen H., Saupe D. (1988). *The Science of Fractal Images*.
- [13] Anton, H. (2012). *Introducción al álgebra lineal*. 5ª ed. Editorial Limusa.
- [14] Aranda, E. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones y Python*. 1ª ed.
- [15] Marzal A., Gracia I., García P. (2014). *Introducción a la programación con Python 3*.
- [16] Hernández, A. (2013). *Aplicaciones del teorema del punto fijo: fractales*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Murcia.