

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA**

**UNAN-LEÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**



**MÉTODOS DE DIFERENCIAS FINITAS PARA  
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CLÁSICAS.**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**PRESENTA:**

**Br. NELSON FRANCISCO ROJAS REYES**

**Tutor:**

**Lic. LISSETTE del CARMEN QUINTERO VARGAS**

**LEÓN, NICARAGUA MAYO DE 2019.**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA  
UNAN-LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**

**MÉTODOS DE DIFERENCIAS FINITAS PARA  
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CLÁSICAS.  
T E S I S   P R O F E S I O N A L**

QUE PRESENTA

**Br. NELSON FRANCISCO ROJAS REYES**

APROBADO POR:

---

MSc. José Alberto Cerda Campos  
PRESIDENTE

---

MSc. Martín José Alonso Calderón

---

MSc. Felipe Santiago Campos Álvarez

SECRETARIO

1ER. VOCAL

## DEDICATORIA

A mis Padres: Favio Rojas y María Reyes, por ser piedra angular en el desarrollo de mi formación profesional y personal.

A mi hija Ismara Rojas Corea por su llegada.

## AGRADECIMIENTOS

A Dios agradezco, mi escudo y mi fortaleza, por la vida y la sabiduría que me ha dado.

A mi padres y hermanos, gracias por su apoyo incondicional y su gran esfuerzo que han hecho, venciendo obstáculos. ¡ Gracias por apoyarme !

Le doy las gracias a mi directora de tesis, Lic. Lissette del Carmen Quintero Vargas gracias por su interés, apoyo y ayuda constante.

A mi colega y compañera Jennifer Mercedes Corea Bolaños por ser parte de mi vida.

A todos los profesores de la carrera Licenciatura en Matemática, gracias por colaborar en mi formación como profesional.

Gracias a quienes en el proceso de mi formación académica plasmaron su huella en mi camino y para no olvidar alguna de estas personas no haré mención de sus nombres.

RESUMEN de Tesis de Nelson Francisco Rojas Reyes presentado como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemática. León, Nicaragua, mayo de 2019.

## DIFERENCIAS FINITAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CLÁSICA

El método diferencias finitas es un método numérico universal aplicable para la solución de ecuaciones diferenciales. Los métodos para la resolución de Ecuaciones Parciales que contienen diferencias finitas reemplazan las derivadas en la ecuación diferencial mediante una aproximación de cocientes de diferencias adecuadas. El método consiste en una aproximación de las derivadas parciales de la variable incógnitas usando la expansión de serie de Taylor. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraica, en términos de los valores de las variables dependiente en los puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones algebraica permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla. El método diferencia finita que se construyen tomando en consideración las series de Taylor en la variable  $x$  y en  $t$  se les denomina diferencias finitas exactas.

Esta investigación de tesis se realizará un enfoque deductivo y se aplicará el método de diferencias finitas para las ecuaciones de calor, onda y Poisson en una dimensión, además se implementará algoritmo computacional asistido con C++.

Resumen aprobado:

---

Lic. Lissette del Carmen Quintero Vargas

## Índice general

1.. <i>Introducción</i> . . . . .	VIII
2.. <i>Definiciones Básicas</i> . . . . .	2
2.1. Definición de Algebra Lineal . . . . .	4
2.2. Condiciones Iniciales y de Frontera . . . . .	6
2.3. Métodos de Solución numéricos para EDP . . . . .	6
2.4. Método de Diferencias Finitas . . . . .	7
2.5. Convergencia y Estabilidad . . . . .	7
 <i>Parte I Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales</i>	 8
3.. <i>Ecuación de Onda</i> . . . . .	9
3.1. Deducción de la ecuación de Onda . . . . .	9
4.. <i>Ecuación de Poisson-Laplace</i> . . . . .	16
4.1. Deducción de la ecuación de Poisson . . . . .	16
5.. <i>Ecuación de Calor</i> . . . . .	19
5.1. Deducción de la ecuación de Calor . . . . .	19
 <i>Parte II Diferencias Finitas (DF)</i>	 22
6.. <i>Método de Diferencias Finitas</i> . . . . .	23
6.1. Ecuación de Onda en Diferencias Finitas . . . . .	23
6.2. Ecuación de Calor en Diferencia Finitas . . . . .	29
6.3. Ecuación de Poisson en Diferencias Finitas . . . . .	31
7.. <i>Teorema de equivalencia de Lax</i> . . . . .	37
8.. <i>Conclusiones</i> . . . . .	46

9.. Recomendaciones . . . . .	47
<i>Parte III Anexos</i>	48
10..Método de Diferencias Finitas en el lenguaje de programación C++. . . . .	49
10.1. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de Poisson. . . . .	49
10.2. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de Calor . . . . .	58
10.3. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de onda . . . . .	64

## Índice de figuras

3.1. Cuerda1 . . . . .	10
3.2. Cuerda2 . . . . .	11
6.1. Representación de la ecuación de Onda . . . . .	28
6.2. Representación de la ecuación de Calor . . . . .	31
6.3. Representación de la ecuación de Poisson . . . . .	35



# 1. INTRODUCCIÓN

“Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor,  
la electricidad y la energía atómica:  
la voluntad.” Albert Einstein.

El Análisis ha constituido por más de trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las ecuaciones diferenciales constituyen una parte central de este, puesto que aparecen frecuentemente en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real.

En la ciencia y tecnología se presentan muchos fenómenos que habitualmente son modelados por medio de Ecuaciones Parciales, las cuales muchas veces no pueden ser resueltas mediante los métodos clásicos motivo por el cual acudimos a los métodos numéricos. Las Ecuaciones Diferenciales Parciales se clasifican en 3 grupos: Elípticas, Parabólicas, Hiperbólicas. Este tema abarca todo tipo de modelos, desde las leyes físicas como las ecuaciones de Maxwell en la electrodinámica, hasta las leyes conceptuales que describen la propagación de una especie invasora de las plantas en una sabana.

En 1990 Stephenson-Radmore crearon un método, el cual permite encontrar solución de una EDP de segundo orden sin calcular su forma canónica, pero dicho método es difícil de aplicarlo, y solo se aplica para EDPs de tipo hiperbólico. Por otro lado, en 1994 J. Harper desarrolla un método, el cual resuelve la ecuación de Black-Scholes en matemáticas financieras, esto permite encontrar nuevas soluciones para EDP de tipo parabólico.

Esta investigación se realizará sobre la base de un enfoque deductivo, el análisis y la solución numérica utilizando diferencias finitas asistido con C++, las cuales permiten discretizar dicha ecuación y llegar a la solución más aproximada de las ecuaciones:

1. La ecuación de ondas. Surge al describir fenómenos relativos a la propagación de ondas. Los estudios de ondas acústicas, ondas de agua, ondas electromagnéticas y vibraciones mecánicas están basados en esta ecuación.
2. La ecuación de calor. Constituye una herramienta de gran utilidad para dar solución a problemas de flujo de calor, también aparece en problema de concentración de material en difusión y en muchos otros problemas.

3. La ecuación de Poisson-Laplace. Modela la distribución de temperatura en estado estacionarios para una región, además, aparece en problemas de la física como: potenciales electrostáticos, potenciales de hidrodinámica, potenciales en teoría de elasticidad.

Centraremos nuestra atención en el estudio de: La ecuación de calor unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

la ecuación de Onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

y la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Las cuales se pueden resolver por métodos analíticos como lo es el de separación de variables donde plantea una solución del tipo  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , de manera que la ecuación diferencial parcial de segundo orden se transforma en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, pero cuando esto no es posible es conveniente usar métodos numéricos.

## OBJETIVOS

### **Objetivo General**

Aplicar el método en diferencias finitas para obtener una solución numérica de la Ecuación de Onda, Calor y Poisson.

### **Objetivos Específicos**

1. Describir la base de un enfoque deductivo de las ecuaciones en estudio.
2. Implementar algoritmo numéricos en diferencias finitas con discretización uniforme que permitan obtener una solución aproximada.
3. Implementación computacional en C++, para resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales mediante Diferencias Finitas.
4. Analizar la convergencia del método de Diferencias Finitas.

## 2. DEFINICIONES BÁSICAS

El presente capítulo está dirigido a definir aquellos conceptos e ideas que sirven de base para el desarrollo de este trabajo y en particular, serán conceptos de uso recurrente en el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.0.1.** (Ecuación diferencial en derivadas parciales) [3]. Una ecuación diferencial parcial (EDP) para la función  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $u : \Omega \subset R^n \rightarrow R$  es una relación de la forma

$$F \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n} \right) = 0 \quad (2.1)$$

**Definición 2.0.2.** (Función solución)[3] Una función es solución de una (EDP), si en alguna región  $\Omega \in R^n$  del espacio de sus variables independiente, la función y sus derivadas satisfacen a  $F$ , es decir, al sustituir la función solución y sus derivadas se obtiene una identidad.

El orden de una EDP es  $n$  si las derivadas de mayor orden que ocurre en  $F$  son de orden  $n$ .

**Definición 2.0.3.** (Linealidad) [3] Una EDP es lineal si  $F$  es lineal en la función incógnita y sus derivadas, y la EDP es cuasi-lineal, Si  $F$  es lineal en al menos una de las derivadas de más alto orden; de otra manera la EDP es no lineal.

**Definición 2.0.4.** (Ecuación en derivadas parcial de segundo orden)[4] La forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP) con dos variables independientes,  $x$  e  $y$ , es de la forma

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f = 0 \quad (2.2)$$

Dónde:

$$a_{ij} = a_{ij}(x, y), \quad b_i = b_i(x, y), \quad c = c(x, y), \quad f = f(x, y)$$

**Definición 2.0.5.** (Operador Diferencial)[6] Consideremos la EDP general de segundo orden para  $n$  variables definidas en  $\Omega \in R^n$  la forma de un operador diferencial definido en  $\Omega \in R^n$

$$\nu u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu \quad (2.3)$$

Si las funciones  $a_{ij}$ ,  $b_i$ , y  $c$  no dependen de  $\underline{x} \in R$ , se dice que la ecuación diferencial parcial es de coeficientes constante. Como  $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$  para cualquier función con segunda derivada continua, sin pérdida de generalidad podemos asumir la simetría de  $a_{ij} = a_{ji}$ . A la suma  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}$  se le conoce como la parte principal de la EDP, la cual se pueden escribir como

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

por la igualdad de las derivadas cruzadas podemos decir que la matriz de la EDP será real simétrica.

**Definición 2.0.6.** [6] Sea  $\Omega \subset R^n$  el dominio de una función  $u$ , además  $u \in C^2(R^n)$ , entonces se define el Laplaciano  $\Delta u$

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

**Definición 2.0.7.** (Clasificación de EDP's de Segundo Orden) [4] La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f = 0$$

donde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  y  $c$  son constantes reales, se dice que es:

1. **Hiperbólica** en  $\Omega$ , si  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  en  $\Omega$ .
2. **Parabólica** en  $\Omega$ , si  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$  en  $\Omega$ .
3. **Elíptica** en  $\Omega$ , si  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$  en  $\Omega$ .

## 2.1. Definición de Algebra Lineal

**Definición 2.1.1.** Se dice que una matriz  $A$  de  $n \times n$  es invertible, si existe una matriz  $A^{-1}$  de  $n \times n$ , con  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad. La matriz  $A^{-1}$  se llama inversa de  $A$ . Una matriz que no tiene inversa se denomina singular.

**Definición 2.1.2.** Una matriz  $A$  es definida positiva si es simétrica y si  $X^tAx > 0$  para todo vector columna  $n$  dimensional  $x \neq 0$ .

**Definición 2.1.3.** (Matriz tridiagonal) Una matriz  $A = (a_{ij})$  de  $n \times n$  se dice tridiagonal si  $a_{ij} = 0$  siempre que  $|i - j| > 1$ , esto es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Definición 2.1.4.** (Regla de la cadena)[11] Si  $w = f(x, y)$  tiene derivadas parciales continuas  $f_x$  y  $f_y$  y si  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  son funciones diferenciables de  $t$ , entonces la composición  $w = f(x(t), y(t))$  es una función diferenciable de  $t$  y

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \quad (2.4)$$

o bien

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.5)$$

**Definición 2.1.5.** (Serie de Taylor)[11] Sea  $f$  una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga  $a$  como un punto interior. Entonces la **serie de Taylor** generada por  $f$  en  $x = a$  es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!} (x - a)^k = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n + \cdots$$

**Teorema 2.1.6.** (El principio del Máximo)[6] Sea  $u_0 \in L^2(\Omega)$  y sea  $u$  la solución de

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \quad \text{en } Q \\ u &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (Q = \Omega \times (0, \infty))\end{aligned}$$

Entonces se verifica

$$\min\{0, \inf_{\Omega} u_0\} \leq u(x, t) \leq \max\{0, \sup_{\Omega} u_0\} \quad \forall (x, t) \in Q.$$

**Teorema 2.1.7.** (Taylor)[9] Sea  $f$  una función que tiene derivada  $n$ -ésima finita  $f^{(n)}$  en todo el intervalo abierto  $(a, b)$  y supongamos que  $f^{(n-1)}$  es continua en el intervalo cerrado  $(a, b)$ . Consideremos un punto  $x_0 \in (a, b)$ . Entonces, para todo  $x$  de  $(a, b)$ ,  $x \neq x_0$  existe un punto  $x_1$  interior al intervalo que une  $x$  con  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**Teorema 2.1.8.** (Principio de delimitación uniforme) [6] Sea  $\{L_n\}$  una sucesión de operadores lineales acotados de un espacio de Banach  $V$  a otro espacio de Banach  $W$ . Se asume que para  $v \in V$  la sucesión  $\{L_n v\}$  es acotado. Entonces

$$\sup_n \|L_n\| < \infty.$$

**Definición 2.1.9.** (Función Continua)[11] Una función  $f(x, y)$  es continua en el punto  $(x_0, y_0)$  si

1.  $f$  está definida en  $(x_0, y_0)$ ,
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$  existe,
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x, y)$

Una función es **continua** si es continua en cada punto de su dominio.

**Definición 2.1.10.** (Punto interior)[11] Un punto  $(x_0, y_0)$  en una región (conjunto)  $R$  del plano  $xy$  es un punto interior de  $R$  si es el centro de un disco de radio positivo que está completamente dentro de  $R$ .

## 2.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

**Definición 2.2.1.** (Condición Inicial)[5] Las condiciones iniciales expresan el valor de la función al tiempo inicial  $t = 0$  (puede ser fijada en cualquier valor)

$$u(x, 0) = f(x)$$

**Definición 2.2.2.** (Condiciones de Frontera)[5] Las condiciones de frontera o de contorno de una ecuación diferencial ordinaria o parcial especifican los valores que las funciones  $u(x, t)$  o  $\frac{\partial u}{\partial t}$  tomarán en la frontera  $\partial\Omega$ , se suelen clasificar en tres tipos:

1. **Condiciones tipo Dirichlet.** Especifica los valores que la función  $u(x, t)$  toma en la frontera  $\partial\Omega$

$$u(0, t) = u(l, t) = f(x, t)$$

2. **Condiciones tipo Neumann.** Aquí se conoce el valor de la derivada de la función  $u(x, t)$  con respecto a la normal  $x$  a lo largo de la frontera  $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x)$$

3. **Condiciones tipo Robin.** Está condición es una combinación de las dos anteriores

$$\alpha(x)u(x, t) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = g\partial(x), \quad \forall x, t \in \partial\Omega$$

## 2.3. Métodos de Solución numéricos para EDP

Mientras las ecuaciones diferenciales pueden describir gran variedad de problemas, sólo una pequeña parte de ellas pueden ser resueltas de manera exacta por funciones elementales (Polinomios). Si la solución analítica no la conocemos, lo que se quiere encontrar es una aproximación de la solución con métodos numéricos, con los cuales se obtienen aproximaciones numéricas de la solución en ciertos puntos del dominio de la ecuación. Estos métodos se les conoce como Métodos de Discretización.

La idea de estos métodos consiste en aproximar las derivadas que aparecen en los problemas de ecuaciones diferenciales reduciendo al resolver un sistema algebraico de ecuaciones que representa la solución de la ecuación diferencial en algunos puntos. Una vez teniendo el sistema lineal  $Ax = b$ , se procede a resolver dicho sistema. Entre las diferentes formas de discretización posible están los siguientes métodos.

- Método de Diferencias Finitas



- Método Volumen Finito
- Método de Elemento Finito.

#### 2.4. Método de Diferencias Finitas

Este método es de carácter general que permite la solución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en un dominio finito. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para aproximar la solución de una ecuación en una, dos o tres dimensiones.

El método consiste en reemplazar las derivadas en la ecuación diferencial por aproximaciones discretas de las derivadas parciales centrada de la función  $u$ , con los valores de la variable dependiente en un número finito de puntos seleccionados en el dominio. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de las variables dependiente en los puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas en lugar de la distribución espacial continua de la variable dependiente. Entonces, en lugar de resolver una ecuación diferencial el problema se replanteó a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas, que para asegurar que su solución concuerde con la solución analítica de la ecuación diferencial, debe de satisfacer las condiciones de estabilidad y convergencia. La solución del sistema de ecuaciones algebraicas permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla.

#### 2.5. Convergencia y Estabilidad

La condición de convergencia no siempre es fácil de verificar, ya que en ella se establece que la solución numérica tienda a la solución analítica conforme incrementa el número de iteraciones en el esquema de recurrencia .

Para que un esquema de recurrencia sea estable se debe de cumplir que la solución numérica permanezca acotada conforme se incrementa el número de iteraciones en dicho esquema.

Cuando se trabaja con diferencias finitas una consecuencia inmediata de la condición de estabilidad es que los errores, intrínsecos en su construcción, deben permanecer acotados conforme el número de iteraciones tiende a infinito.

Parte I

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS  
PARCIALES

### 3. ECUACIÓN DE ONDA

“Todos los efectos de la Naturaleza son únicamente consecuencias matemáticas de un pequeño número de leyes Inmutables.” Laplace Pierre Simón.

El estudio de la cuerda vibrante llevó en forma natural a una ecuación diferencial parcial (**la ecuación de onda**). La investigación de los sonidos creados por la cuerda introdujo extra condiciones. El aire es un tipo de fluido de propagación (comprensible), los líquidos son otros tipos (incomprensible). Las leyes del movimiento de las ondas en tales fluidos llevaron a progresos importantes (hidrodinámica). El problema de la gravitación universal, iniciado por Newton, condujo, con Laplace, a un problema de ecuaciones en derivadas parciales.

Las primeras investigaciones respecto a la cuerda vibrante son debido a Euler (1734) y a D'Alembert (1743). La dificultad matemática que surgió en aquella época fue el paso al infinito.

#### 3.1. Deducción de la ecuación de Onda

En 1727, Jogn Bernoulli consideró la discretización de una cuerda que se mantiene tensa entre dos clavos fijos separados por una distancia  $l$ , la que reposa en el intervalo  $0 \leq x \leq l$ . La posición de equilibrio de la cuerda es la del segmento de la recta que une los clavos. En tal posición los clavos tiran de la cuerda con una fuerza  $T_0$ .

Introducimos un sistema de coordenadas rectangulares  $(x, y)$  de modo que un clavo esté en el origen  $(0, 0)$  y el otro en el eje  $0x$  en  $(l, 0)$ . Estudiaremos el movimiento de la cuerda originado por los desplazamientos iniciales, la velocidad inicial, y el conjunto de fuerza en la dirección del eje  $0y$ .

Sea  $s$  la coordenada  $x$  de un cierto punto (molécula) cuando la cuerda está en su posición. Supongamos que la cuerda es tan delgada que su sección es un punto. Entonces el movimiento de la cuerda puede estudiarse dando la coordenada  $(x, y)$  de cada punto  $s$  en cada instante  $t$ . Esto es, basta conocer las dos funciones

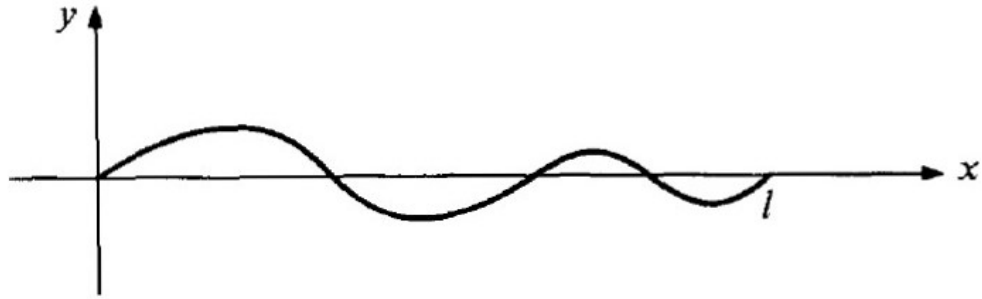


Fig. 3.1: Cuerda1

$$x = x(s, t) \quad \text{e} \quad y = y(s, t)$$

Supongamos que la cuerda es suficiente flexible para que no se precise esfuerzo ninguno para doblarlo. Supongamos también que tiene una densidad lineal continua  $\rho(s)$  tal que para cualquiera  $s_1$  y  $s_2$  que satisfagan  $0 \leq s_1 < s_2 \leq l$ , la masa de la porción de cuerda para la que  $s_1 < s < s_2$  venga dada por  $\int_{s_1}^{s_2} \rho(s) ds$ . Esto significa que consideramos la cuerda como un continuo, y no como un conjunto de moléculas.

Nuestro problema lo formulamos como sigue. Para un cierto de  $t$ , que tomamos como  $t = 0$ , conocemos el desplazamiento inicial

$$y(s, 0) = f(s)$$

y la velocidad inicial

$$\frac{\partial y}{\partial t}(s, 0) = g(s) \tag{3.1}$$

en la dirección del eje  $0y$ . Tenemos por tanto

$$\begin{aligned} x(s, 0) &= s, \\ \frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para  $t > 0$  existe una fuerza externa  $F(x, t)$  por unidad de masa que actúa en la dirección del eje  $0y$  sobre la porción de cuerda que en el instante  $t$  está situada en  $x$ .

Debido a que la cuerda no ofrece resistencia a la flexión, las fuerzas que unas partes ejercen sobre cada una de las otras deben ser tangenciales a la cuerda; esto es, sólo tenemos

la tensión  $T(s, t)$  en el punto  $s$  en el instante  $t$ . (Esto implica la hipótesis adicional de que las moléculas actúan únicamente sobre las moléculas próximas. Dicho de otro modo, prescindimos de las fuerza de largo alcance).

Consideremos ahora una porción arbitraria  $s_1 \leq s \leq s_2$  de cuerda. Tomando los



Fig. 3.2: Cuerda2

componentes de las tensiones en las dirección del eje  $0x$ , hallamos que la fuerza total en esa dirección que actúa en la citada porción es

$$\frac{T(s_2, t) \frac{\partial x}{\partial s}(s_2, t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} - \frac{T(s_1, t) \frac{\partial x}{\partial s}(s_1, t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}}$$

Igualando esta fuerza a la masa por la aceleración, encontramos que

$$\frac{T(s_2, t) \frac{\partial x}{\partial s}(s_2, t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} - \frac{T(s_1, t) \frac{\partial x}{\partial s}(s_1, t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} = \int_{s_1}^{s_2} \rho(s) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(s, t) ds$$

Esta relación es cierta para todos los valores de  $s_2$  y  $s_1$ . Derivemos ambos miembros respecto a  $s_2$ . Por que es conveniente, reemplazar el símbolo  $s_2$  por  $s$ . Obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial x}{\partial s} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Análogamente, si consideramos los componentes de las fuerzas en la dirección del eje  $0y$  encontramos

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial y}{\partial s} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho F(x, t). \quad (3.4)$$

Suspongamos que la cuerda es perfectamente elástica; esto es, que la tensión en cualquier punto  $s$  esta determinada por el alargamiento local por unidad de longitud

$$e = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1 \quad (3.5)$$

de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio:

$$T(s, t) = \mathcal{B}(e(s, t), s). \quad (3.6)$$

La función  $\mathcal{B}(e, s)$  nos describe la propiedad elástica de la cuerda en  $s$ .

Puesto que la posición  $x = s, y = 0$  es de equilibrio, las funciones  $x(s, t) = s$  y  $y(s, t) = 0$  deben satisfacer las ecuaciones 3.4 y 3.5 cuando  $F = 0$ . En virtud de 3.4 vemos que  $T$  debe ser la constante. Ya que  $e = 0$  en este caso, deberá ser

$$\mathcal{B}(0, s) = T_0.$$

La tensión  $T$  puede encontrarse a partir de las funciones  $x(s, t)$  e  $y(s, t)$  mediante 3.5 y 3.6. De este modo 3.4 y 3.5 constituyen un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales con dos funciones incógnitas  $x(s, t)$  e  $y(s, t)$ . Disponemos además de las condiciones iniciales 3.1, 3.2 y 3.3, y de las condiciones de contorno

$$x(0, t) = 0, \quad x(l, t) = l, \quad y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad (3.7)$$

Esta última expresan que los extremos de la cuerda permanecen fijos.

La resolución del problema anterior es extremadamente difícil, de modo que introduciremos otras hipótesis para simplificar. Consideraremos únicamente pequeñas vibraciones respecto a la posición de equilibrio.

Suspongamos que durante el movimiento  $\frac{\partial x}{\partial s} \neq 0$  (esto es, que la cuerda nunca está vertical), de modo que podemos expresar  $s$  como función de  $x$  y  $t$ , y por tanto  $y$  como función de  $x$  y  $t$ :

$$y = v(x, t)$$

donde

$$v(x(s, t), t) = y(s, t)$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\end{aligned}$$

De este modo 3.4 se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial x} / \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2} \right) = \rho \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right] - \rho F.$$

Desarrollando el primer miembro y utilizando 3.4 y 3.6 resulta

$$\frac{\mathcal{B}(e, s)}{e+1} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right] - \rho F$$

o

$$\left[ \frac{\mathcal{B}(e, s)}{e+1} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 - \rho \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\rho \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho F. \quad (3.8)$$

Ésta es una sola ecuación en derivadas con la función incógnita  $v$ . No obstante, los coeficientes dependen de la función incógnita  $x(s, t)$ , ya que  $\frac{\partial x}{\partial t}$  aparece explícitamente y

$$e = \frac{\partial x}{\partial s} \sqrt{1 - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} - 1.$$

Con el fin de eliminar esta dependencia suponemos que la pendiente  $\frac{\partial v}{\partial x}$  es pequeña, que  $\frac{\partial x}{\partial t}$  es pequeña, y que  $\frac{\partial x}{\partial s} - 1 \cong 0$  de modo que  $x \cong s$ . Con mayor precisión, suponemos

que las cantidades no dimensionales

$$\frac{\mathcal{B}(e, s)}{(e+1)T_0} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right), \quad \frac{\rho}{T_0} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2, \quad \text{y} \quad \frac{\rho(x)}{\rho(s)} - 1.$$

pueden despreciarse. (La primera de estas hipótesis requiere que la función  $\mathcal{B}(e, s)$  sea continua en  $e = 0$ , y que

$$e = \frac{\partial x}{\partial s} \sqrt{1 - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} - 1.$$

es suficiente pequeño).

Entonces la ecuación en derivadas parciales

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho(x) F(x, t) \quad (3.9)$$

tienen los coeficientes y el segundo miembro que se aproxima a los de 3.8. Luego podemos esperar que la función  $u(x, t)$  que satisfice 3.10 y las condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}$$

también se aproxima a la solución  $v(x, t)$  de 3.9 que satisfice las misma condiciones. Esto es,

$$y \cong u(x, t).$$

Si definimos

$$c(x) = \sqrt{\frac{T_0}{\rho(x)}}$$

y dividimos los dos miembros de 3.10 por  $-\rho(x)$ , obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (3.10)$$



El problema de valores iniciales y de contornos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F(x, t), \text{ para } 0 < x < l, t > 0, \\
 u(x, 0) &= f(x), \\
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \\
 u(0, t) &= 0, \\
 u(l, t) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

para la función aproximada  $u$  se denomina el **problema de la cuerda vibrante**.

Si en el problema de la cuerda vibrante en las condiciones iniciales suponemos que la fuerza inicial es cero obtenemos el problema de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \text{ para } 0 < x < l, t > 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq l \\
 \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq l \\
 u(0, t) &= 0, \text{ para } t \geq 0 \\
 u(l, t) &= 0, \text{ para } t \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

a la ecuación  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  es llamada ecuación de **Onda** en una dimensión.

También, problemas de vibraciones en dimensiones superiores a uno, conducen a la ecuación de ondas  $n$ - dimensionales

$$\frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i^2}$$

## 4. ECUACIÓN DE POISSON-LAPLACE

“No todo lo que cuentas puede ser contado. No todo lo que puede ser contado cuenta.”  
Albert Einstein.

Las ecuaciones de tipo elíptico aparecen cuando se estudian problemas estacionarios, o sea, problemas que no cambian con el tiempo. La ecuación elíptica más simple es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Esta ecuación aparece en distintos contextos, como en problemas de gravitación y de electrostática, para describir el potencial de velocidades de un fluido no turbulento, para describir la distribución estacionaria de temperatura, etc.

En el caso de problemas bidimensionales, la ecuación de Laplace es la expresión 4.1. De este modo, las soluciones de la ecuación de Laplace para un recinto bidimensional son funciones armónicas.

Otra ecuación elíptica muy usual es la ecuación de Poisson.

### 4.1. *Deducción de la ecuación de Poisson*

Para la deducción de la ecuación de Poisson puede aplicarse el mismo método al problema bidimensional análogo al de la cuerda, que es el de una membrana. Se define una membrana como un continuo elástico de dos dimensiones tal que las únicas fuerzas de interacción entre sus partes son tangentes al mismo.

La masa por unidad de area es una función continua  $\rho(x, y)$ . El contorno de la membrana está sujeto a un marco o bastidor rígido consistente en una curva cerrada  $C$  situada en el plano  $xy$ . La membrana tiene una posición de equilibrio en la cual está situada en el plano  $xy$  y el bastidor ejerce una fuerza de tensión constante  $T_0$  por unidad de longitud en la dirección de la normal a  $C$  en el plano  $xy$ .

Los desplazamientos y velocidades iniciales en la dirección del eje  $z$  están dados para  $t = 0$ , y a partir de este instante se aplica una fuerza  $F(x, y, t)$  por unidad de masa en la

dirección del eje  $z$ .

Hacemos hipótesis parecidas a las que se hicieron en la deducción de la ecuación de la cuerda vibrante (desplazamientos y velocidades pequeña en la dirección de los ejes  $x$  e  $y$ ). Entonces el movimiento queda descritos aproximadamente por

$$z = u(x, y, t),$$

en donde  $u$  es una solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x, y) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = F(x, y, t),$$

con adecuadas condiciones iniciales y de contorno. Aquí  $c^2 = T_0/\rho(x, y)$ .

Consideramos ahora la forma de equilibrio de la membrana. Esto es, damos una fuerza  $F(x, y)$  independiente de  $t$ , y establecemos un desplazamiento vertical fijo  $u = f(x, y)$  sobre el contorno  $C$ . Deseamos hallar una función  $u(x, y)$  independiente de  $t$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F(x, y) \quad \text{en } D \\ u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{sobre } C, \end{aligned} \tag{4.2}$$

en donde  $D$  es el dominio interior a  $C$ . (Por conveniencia, hemos tomado  $c = 1$ ). Únicamente es preciso que  $f$  esté definida sobre la curva  $C$ .

Al decir una curva cerrada  $C$  significamos un conjunto de puntos expresado en función de un solo parámetro  $\tau$  mediante ecuaciones de la forma

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad \text{para } \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$$

con

$$x(\tau_1) = x(\tau_0), \quad y(\tau_1) = y(\tau_0)$$

siendo las funciones  $x(\tau)$  e  $y(\tau)$  continuas. Suponemos que la curva no se corta a si misma; esto es, que  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$  nunca corresponden dos valores distintos de  $\tau$  para el mismo punto  $(x, y)$ . Si  $x$  e  $y$  son funciones de  $\tau$  derivables siendo  $x^2 + y^2 > 0$  y  $x'(\tau_0)y'(\tau_1) - x'(\tau_1)y'(\tau_0) = 0$ , decimos que  $C$  es **derivable con continuidad**. Si son continuas y estas condiciones se cumplen salvo en un número finito de valores de  $\tau$ , se dice que  $C$  es **derivable con continuidad a trozos**. Una curva cerrada  $C$  separa el plano  $xy$  en dos regiones una exterior y otra interior.

El interior  $D$  es un conjunto acotado, éste no incluye la curva  $C$ . Si  $C$  es derivable con continuidad a trozos,  $D$  es un **conjunto abierto**. Esto es, para cada punto  $(x, y)$  de  $D$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que todo punto que diste de  $(x, y)$  menos de  $\epsilon$  pertenece también a  $D$ .

---

Un tal conjunto  $D$  se llama **dominio**. La ecuación diferencial en derivadas parciales 4.2 obtenida se llama **ecuación de Poisson**.

En el caso que en la ecuación en derivada parciales 4.2  $F = 0$ , obtenemos la ecuación 4.1, la que se denomina **ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

## 5. ECUACIÓN DE CALOR

“El estudio a fondo de la naturaleza es el terreno más importante para los descubrimientos matemáticos.”

Joseph Fourier

La ecuación del calor describe como se distribuye la temperatura en un cuerpo sólido en función del tiempo y el espacio. El interés de su estudio radica en las múltiples aplicaciones que tiene en diversas ramas de la ciencia. Matemáticamente, representa una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico.

Para el planteamiento de la ecuación del calor, es necesario recurrir a ciertas leyes de la física. Es por esta razón que se enuncian algunas leyes de la física.

**Teorema 5.0.1.** (*Conservación de la Energía*) Cuando cierta cantidad de calor  $Q$  es absorbida o cedida por un sistema, y un trabajo  $T$  es realizado por el sistema o sobre él, la variación de la energía interna,  $\Delta U$  del sistema está dada por

$$\Delta U = Q - T$$

**Teorema 5.0.2.** (*Conductividad Térmica*) El flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección.

$$Q = -k\nabla T$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad, **Conductividad térmica**.

### 5.1. Deducción de la ecuación de Calor

Se pretende deducir una expresión final para la ecuación del calor en una dimensión. Imaginemos que se tiene una vara fina de longitud  $L$ , sección transversal  $S$ , completamente aislada del exterior y compuesta del mismo material.

A partir de estas condiciones y empleando algunas leyes física, deduciremos una expresión para la temperatura que depende del tiempo y la posición.

Para el proceso de deducción de la ecuación del calor, definiremos las siguientes magnitudes:

$u(x, t) \equiv$  Temperatura de la barra en una posición  $x$  y un instante de tiempo  $t$

$Q(x, t) \equiv$  Flujo de calor en una dirección positiva para la posición  $x$  y tiempo  $t$

Si aplicamos la primera ley de la termodinámica sobre el segmento  $x + \Delta x$ , la variación de energía interna está dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q(x, t)S - Q(x + \Delta x, t)S \quad (5.1)$$

donde  $Q(x, t)$  es el flujo de calor entrante y  $Q(x + \Delta x, t)$  el flujo de calor saliente. Por otro lado, el calor absorbido por un cuerpo está dado por:

$$Q(x, t) = \lambda \mu(x, t)$$

donde  $m$  es la masa y  $\lambda$  el calor específico. Derivando con respecto al tiempo y reemplazando la masa  $m = \rho S \Delta x$  se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.2)$$

donde  $S \Delta x$  es el volumen y  $\rho$  la densidad.

Igualando las expresiones 5.1 y 5.2 se obtiene:

$$\lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = S(Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t))$$

Dividiendo por  $S \Delta x$ ,

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)}{\delta x}$$

Si se toma el signo menos como factor común del miembro de la derecha nos queda,

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\delta x}$$

Haciendo tender  $\Delta x$  a 0

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\delta x}$$

El resultado es la derivada parcial de  $Q(x, t)$  respecto a  $x$ , lo que nos da la siguiente

expresión,

$$\lambda\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5.3)$$

Por su parte, la ley de conducción de calor, señala que el flujo de calor se traslada en dirección opuesta al gradiente y es proporcional a él, esto es:

$$Q(x, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.4)$$

donde  $k$  es conductividad térmica y  $u(x, t)$  depende de una variable espacial. Finalmente, sustituyendo la ecuación 5.4 en la ecuación 5.3, nos quedará:

$$\lambda\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -k\frac{\partial u}{\partial x} \right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Agrupando todas las constantes en un miembro de la ecuación, llegamos a una expresión para **la ecuación del calor unidimensional**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

## Parte II

### DIFERENCIAS FINITAS (DF)



## 6. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

“El tratamiento numérico efectivo de las ecuaciones diferenciales parciales no es una artesanía, sino un arte”.  
Folklore

Este método permite encontrar una solución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en un dominio finito. Es de gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación en una, dos o tres dimensiones.

### 6.1. Ecuación de Onda en Diferencias Finitas

La ecuación de onda está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (6.1)$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante. Para establecer el método de diferencias finitas, se selecciona un entero  $m > 0$  y el tamaño de paso de tiempo  $k > 0$ . Con  $h = l/m$  los puntos de red  $(x_i, t_j)$  son

$$x_i = ih, \quad \text{y} \quad t_j = jk,$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $j = 0, 1, \dots$ . En cualquier punto de red interior  $(x_i, t_j)$  la ecuación de onda se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0. \quad (6.2)$$

El método de diferencias se obtiene usando el cociente de diferencias centradas en las segundas derivadas parciales dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

donde  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$  y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j),$$

donde  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ . Al sustituir estas expresiones en la ecuación 6.2 obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - c^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[ k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - c^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right]. \end{aligned}$$

Si ignoramos el término de error

$$\tau_{ij} = \frac{1}{12} \left[ k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - c^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right].$$

obtenemos la ecuación en diferencias

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - c^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

Si  $\lambda = ck/h$ , podemos escribir la ecuación de diferencias como

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1} = 0$$

y resolver para  $w_{i,j+1}$ , o sea, la aproximación más avanzada del paso de tiempo, para obtener

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}, \quad (6.3)$$

Esta ecuación es aplicable para toda  $i = 1, 2, \dots, m-1$  y  $j = 1, 2, \dots$ . Las condiciones de frontera nos dan

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad \text{para cada } j = 1, 2, 3, \dots \quad (6.4)$$

y la condición inicial implica que

$$w_{i,0} = f(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (6.5)$$

Al escribir este conjunto de ecuaciones en forma matricial, obtenemos

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{1,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{1,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Las ecuaciones 6.4 y 6.5 implican que  $j+1$ -ésimo paso de tiempo requiere valores de los  $j$ -ésimo pasos. Esto produce un pequeño problema inicial, por que los valores de  $j=0$  están dados por la ecuación 6.5, para los valores de  $j=1$ , que se necesitan en la ecuación 6.3 para calcular  $w_{i,2}$ , deben obtenerse de la condición de velocidad inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

El procedimiento consiste en reemplazar  $\frac{\partial u}{\partial t}$  por una aproximación de diferencias progresivas,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i), \quad (6.7)$$

para cierta  $\bar{\mu}_i$  en  $(0, t_1)$ . Al resolver para  $u(x_i, t_1)$  obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m-1 \quad (6.8)$$

Sin embargo, esto da una aproximación con un error de sólo  $O(k)$ . Podemos obtener una mejor aproximación a  $u(x_i, 0)$ . Consideremos la ecuación

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i)$$

para cierta  $\widehat{\mu}$  en  $(0, t_1)$ , que proviene de desarrollar  $u(x_i, t_1)$  con el segundo polinomio de Maclaurin en  $t$ . Si  $f''$  existe, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = c^2 + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = c^2 f''(x_i)$$

y

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{c^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \widehat{\mu}_i)$$

lo que produce una aproximación con error  $O(k^3)$ :

$$w_{i1} = w_{i0} + kg(x_i) + \frac{c^2 k^2}{2} f''(x_i)$$

Si  $f \in C[0, 1]$  pero no disponemos de  $f''(x_i)$ , podemos usar la ecuación en diferencias

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$
 para escribir

$$f''(x_1) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_j) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\bar{\xi}_i)$$

para alguna  $\bar{\xi}_i$  en  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ . Esto implica que

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2 c^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_j) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2 k^2).$$

Si  $\lambda = (kc/h)$ , entonces

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_j) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2 k^2) \\ &= (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2 k^2) \end{aligned}$$

Así, podemos usar la ecuación en diferencias

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) \quad (6.9)$$

para calcular  $w_{i,1}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, m - 1$

**Ejemplo 6.1.1** (Ejemplo Numérico). Considérese el problema hiperbólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$

y con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Solución:

Empleamos el algoritmo 10.3.1 de diferencias finitas con  $m = 10$ ,  $T = 1$ , y  $N = 20$ , se puede verificar fácilmente que la solución a este problema es  $u(x, t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$ . En la tabla 1 se muestra los valores de solución numérica

x	w(i,20)
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

Tab. 1: Tabla de iteraciones ecuación de Onda

**Ejemplo 6.1.2** (Ejemplo Numérico). Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$

y con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

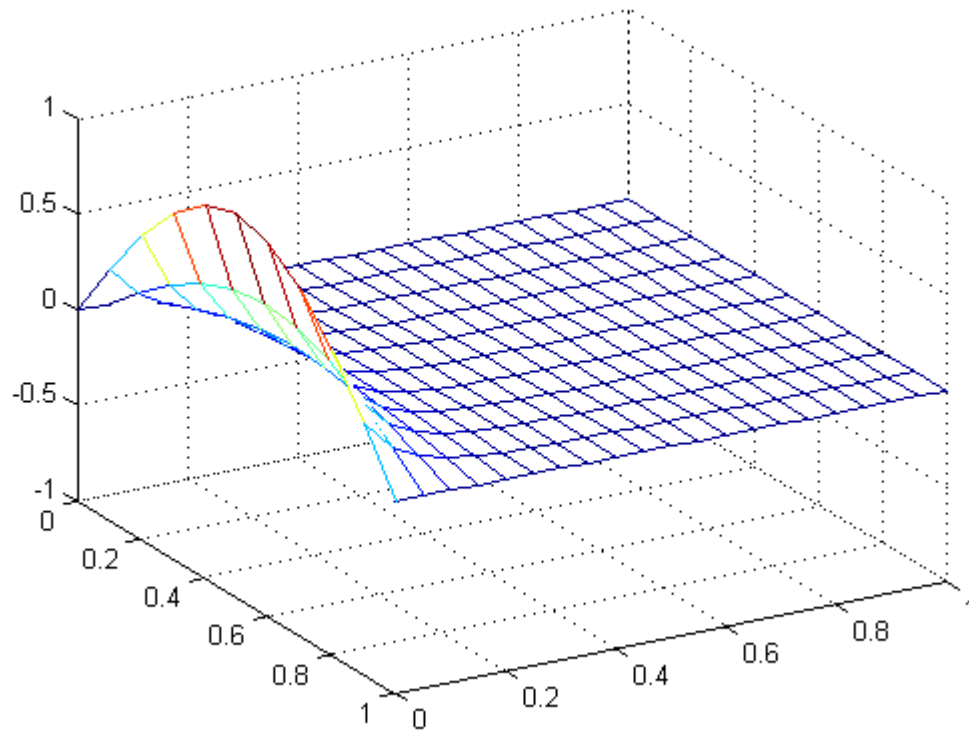


Fig. 6.1: Representación de la ecuación de Onda

Use los datos de entradas  $m = 4$ ,  $N = 4$  y  $T = 1$

Solución:

Empleamos el algoritmo 10.3.1 con los datos de entrada, los resultados se muestran en la tabla 2

x	w(i,20)
0.0	0.0000000000
0.2	0.7071067812
0.5	1.0000000000
0.8	0.7071067812
1.0	0.0000000000

Tab. 2: Tabla de iteraciones ecuación de Onda ejemplo 2

## 6.2. Ecuación de Calor en Diferencia Finitas

La ecuación diferencial parcial parabólica que estudiaremos es la de calor o difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6.10)$$

sujeta a las condiciones

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

y

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Primero seleccionamos un entero  $m > 0$  y sea  $h = l/m$ . Después seleccionamos un tamaño de paso de tiempo  $k$ . Los puntos de red para este caso son  $(x_i, t_j)$ , donde  $x_i = ih$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ , y  $t_j = jk$ , para  $j = 0, 1, \dots$ . El método de diferencias se obtiene al usar la Serie de Taylor en  $t$  para formar el cociente de diferencias

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (6.11)$$

para alguna  $\mu \in (t_j, t_{j+1})$  y la serie de Taylor en  $x$  para formar el cociente de diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (6.12)$$

donde  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . La ecuación diferencial parcial parabólica 6.10 implica que en los puntos de red interiores  $(x_i, t_j)$  para toda  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  y  $j = 1, 2, \dots$ , tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0 \quad (6.13)$$

Si reemplazamos los cocientes de diferencias 6.11 y 6.12 en la ecuación 6.13 se obtiene:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - c^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} - w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad (6.14)$$

la expresión 6.14 representa la ecuación de Calor en diferencias finitas, donde  $w_{ij}$  aproxima a  $u(x_j, t_j)$ .

**Ejemplo 6.2.1** (Ejemplo Numérico). Utilice el método de diferencias finitas con  $h = 0,1$  y con  $k = 0,001$  para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

sujeta a las restricciones

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \text{sen}\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Solución:

Utilizamos el algoritmo 10.2.1 con  $l = 1$ ,  $T = 0,5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $m = 10$  y  $N = 50$ . Los resultados se muestran en la tabla 3, las solución analítica es  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

i	$x_i$	$w(x_i, 0.50)$	$u(x_i, 0,5)$
0	0	0	0
1	0.1	0.00289802	0.00222241
2	0.2	0.00551236	0.00422728
3	0.3	0.00758711	0.00581836
4	0.4	0.00891918	0.00683989
5	0.5	0.00937818	0.00719188
6	0.6	0.00891918	0.00683989
7	0.7	0.00758711	0.00581836
8	0.8	0.00551236	0.00422728
9	0.9	0.00289802	0.00222241
10	1	0	0

Tab. 3: Tabla de iteraciones ecuación de Calor

**Ejemplo 6.2.2** (Ejemplo Numérico). Aproxime la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{1}{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

sujeta a las restricciones

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 2 \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Use  $m = 3$ ,  $T = 0,1$  y  $N = 2$ .

Solución:

Introducimos los datos  $m = 3$ ,  $T = 0,1$  y  $N = 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{16}$  en el código del algoritmo 10.2.1, el resultado se muestra en la tabla 4



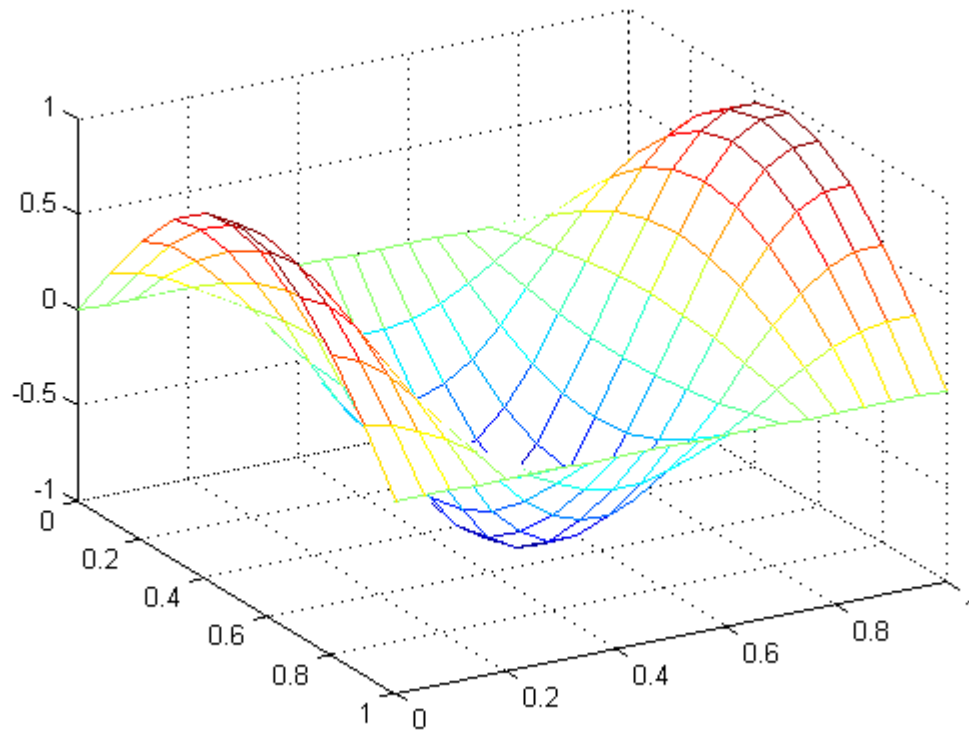


Fig. 6.2: Representación de la ecuación de Calor

$i$	$x_i$	$w(x_i, 0.10)$
0	0	0
1	0.3	0.968218
2	0.7	-0.968218
3	1	0

Tab. 4: Tabla de iteraciones ecuación de Calor ejemplo 2

### 6.3. Ecuación de Poisson en Diferencias Finitas

Ecuación diferencial parcial elíptica llamada ecuación de **Poisson**.

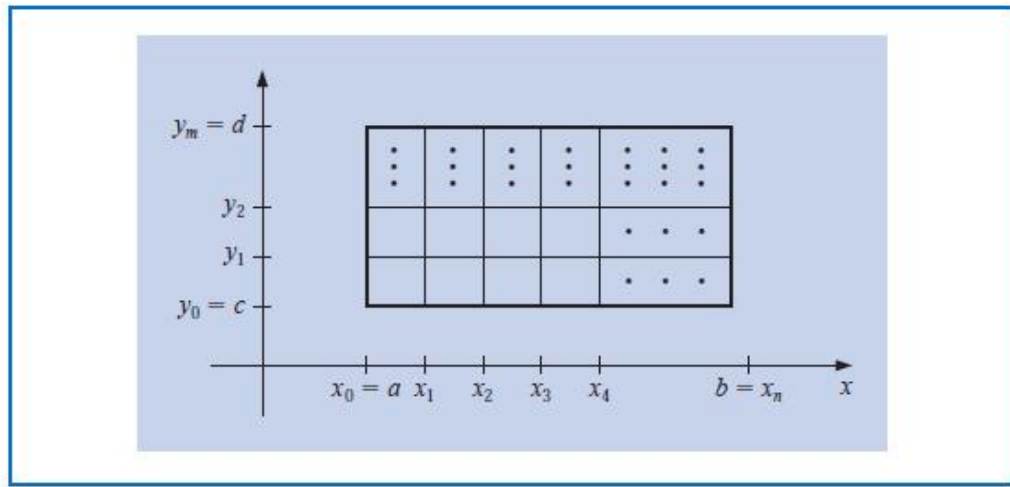
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y) \quad (6.15)$$

en  $R = (x, y) | a < x < b, c < y < d$ , con

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in S.$$

donde  $S$  denota la frontera de  $R$ . Para este análisis, suponemos que tanto  $f$  como  $g$  son continuas en sus dominios y que se garantiza una solución única.

El primer paso consiste en seleccionar los enteros  $n$  y  $m$ , y en definir los tamaños de paso  $h$  y  $k$  mediante  $h = (b - a)/n$  y  $k = (d - c)/m$ . La división del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales de ancho  $h$ , y del intervalo  $[c, d]$  en  $m$  partes iguales de ancho  $k$ , ver la 6.3, como resultado una cuadrícula



en el rectángulo  $R$  al trazar líneas verticales y horizontales a través de los puntos con coordenada  $(x_i, y_j)$ , donde

$$x_i = a + ih, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n,$$

y

$$x_j = c + jk, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, m,$$

Las líneas  $x = x_i$  y  $y = y_j$  son líneas de cuadrícula, y sus intersecciones son los puntos de red de la cuadrícula. En cada punto de red del interior de la cuadrícula  $(x_i, y_j)$  con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ , utilizamos la serie de Taylor en la variable  $x$  alrededor de  $x_i$  para generar la fórmula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \quad (6.16)$$

donde  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . También usamos la serie de Taylor en la variable  $y$  alrededor de

$y_j$  para generar la fórmula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j), \quad (6.17)$$

donde  $\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$ .

El uso de estas fórmulas en la ecuación 6.15 nos permite expresar la ecuación de **Poisson** en los puntos  $(x_i, y_j)$  como

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \\ & = f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j), \end{aligned}$$

para toda  $i = 1, 2, \dots, n-1$  y  $j = 1, 2, \dots, m-1$ , y las condiciones de fronteras como

$$\begin{aligned} u(x_0, y_j) &= g(x_0, y_j) \quad \text{y} \quad u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j), \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m; \\ u(x_i, y_0) &= g(x_i, y_0) \quad \text{y} \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

En la forma de la ecuación de diferencias, esto da como resultado el **Método de las diferencias centrales** con un error local de truncamiento del orden  $O(h^2 + k^2)$ :

$$2 \left[ \frac{h^2}{k} + 1 \right] w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left( \frac{h}{k} \right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j) \quad (6.18)$$

para toda  $i = 1, 2, \dots, n-1$  y  $j = 1, 2, \dots, m-1$ , y

$$\begin{aligned} w_{0j} &= g(x_0, y_j) \quad \text{y} \quad w_{nj} = g(x_n, y_j), \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, m \\ w_{i0} &= g(x_i, y_0) \quad \text{y} \quad w_{im} = g(x_i, y_m), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde  $w_{ij}$  aproxima  $u(x_i, y_j)$ . La ecuación común en 6.18 contiene aproximaciones a  $u(x, y)$  en los puntos

$$(x_{i-1}, y_j), \quad (x_i, y_j), \quad (x_{i+1}, y_j), \quad (x_i, y_{j-1}) \quad \text{y} \quad (x_i, y_{j+1}).$$

**Ejemplo 6.3.1** (Ejemplo Numérico.). Consideremos la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = e^y, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Solución:

Utilizaremos el algoritmo 10.1.1 para aproximar la solución exacta  $u(x, y) = xe^y$  con  $n = 6$  y  $m = 5$ , con una  $Tol = 10^{-10}$  con un total de 80 iteraciones. El resultado, junto con los valores correctos, se incluye en la tabla 5

i	j	x[i]	y[j]	w(i, 61)	u(x <sub>i</sub> , y <sub>j</sub> )
1	1	0.333	0.200	0.40726	0.40713
1	2	0.333	0.400	0.49748	0.49727
1	3	0.333	0.600	0.60760	0.60737
1	4	0.333	0.800	0.74201	0.74185
2	1	0.667	0.200	0.81452	0.81427
2	2	0.667	0.400	0.99496	0.99455
2	3	0.667	0.600	1.21518	1.2147
2	4	0.667	0.800	1.48401	1.4837
3	1	1.000	0.200	1.22177	1.2214
3	2	1.000	0.400	1.49240	1.4918
3	3	1.000	0.600	1.82274	1.8221
3	4	1.000	0.800	2.22599	2.2255
4	1	1.333	0.200	1.62896	1.6285
4	2	1.333	0.400	1.98978	1.9891
4	3	1.333	0.600	2.43023	2.4295
4	4	1.333	0.800	2.96793	2.9674
5	1	1.667	0.200	2.03604	2.0357
5	2	1.667	0.400	2.48696	2.4864
5	3	1.667	0.600	3.03751	3.0369
5	4	1.667	0.800	3.70972	3.7092

Tab. 5: Tabla de iteraciones ecuación de Poisson

El método converge después de 61,0 iteraciones.

**Ejemplo 6.3.2** (Ejemplo Numérico.). Aproxíme la solución de la ecuación parcial elíptica,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

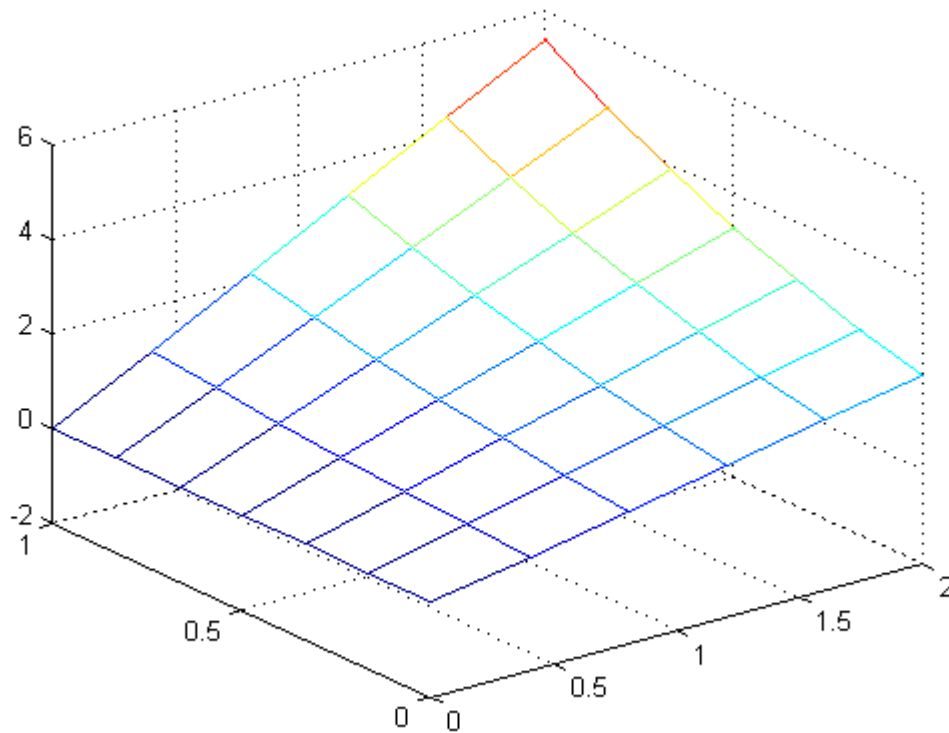


Fig. 6.3: Representación de la ecuación de Poisson

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, y) &= y^2, & u(1, y) &= (y - 1)^2, & 0 \leq y \leq 2, \\ u(x, 0) &= x^2, & u(x, 2) &= (x - 2)^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Use  $h = k = \frac{1}{2}$

Solución:

Utilizaremos el algoritmo 10.1.1 para aproximar la solución exacta con  $h = k = 0,5$  y los datos de entradas  $n = 2$  y  $m = 4$ , con una  $Tol = 0,0000001$  con un total de 30 iteraciones. El resultado, se incluye en la tabla 6.

El método converge después de 12,0 iteraciones.

---

i	j	x[i]	y[j]	w(i, 61)
1	1	0.250	1.000	3.37887
2	1	0.500	1.000	3.18011
3	1	0.750	1.000	3.37888

Tab. 6: Tabla de iteraciones ecuación de Poisson ejemplo 2

## 7. TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAX

“Se requiere una mente muy inusual para  
acometer el análisis de lo obvio”  
Withehead, Alfred North.

En este apartado presentamos el conocido Teorema de equivalencia de Lax y los resultados teóricos relacionados aplicados al análisis convergente de métodos de diferencias en la solución con condiciones de valor inicial o de problemas de valor de frontera. La teoría rigurosa se desarrolla en un marco abstracto. Para ayudar entender la teoría, se utiliza el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{en } (0, \pi) \times (0, T), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,\end{aligned}\tag{7.1}$$

con  $f(x, t) = 0$  para ilustrar la notación, suposición, definiciones y el resultado de equivalencia.

En primer lugar, presentamos un marco abstracto. Sea  $V$  un espacio de Banach,  $V_0 \subset V$  un subespacio denso de  $V$ . Sea  $L : V_0 \subset V \rightarrow V$  un operador lineal. El operador  $L$  es generalmente no acotado y puede ser pensado como un diferencial. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= Lu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0) &= u_0,\end{aligned}\tag{7.2}$$

Este problema también representa un problema de valor de frontera con condiciones de contornos homogéneas cuando se incluyen en las definiciones del espacio  $V$  y el operador  $L$ . La siguiente definición da el significado de una solución del problema 7.2.

**Definición 7.0.3.** Una función  $u : [0, T] \rightarrow V$  es una solución del problema de valor

inicial 7.2 si para cualquier  $t \in [0, T]$ ,  $u(t) \in V_0$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\nabla t} [u(t + \nabla t) - u(t)] - Lu(t) \right\| = 0, \quad (7.3)$$

y  $u(0) = u_0$

En la definición anterior, el límite 7.3 se entiende que es el límite por la derecha en  $t = 0$  y el límite por la izquierda en  $t = T$ .

**Definición 7.0.4.** El problema de valor inicial 7.2 está bien planteado si para cualquier  $u_0 \in V_0$ , existe una única solución  $u = u(t)$  y la solución depende de forma continua en el valor inicial: Existe una constante  $c_0 > 0$  tal que si  $u(t)$  y  $\bar{u}(t)$  son las soluciones para los valores iniciales  $u_0, \bar{u}_0 \in V_0$ , entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_V \leq c_0 \|u_0 - \bar{u}_0\|_V \quad (7.4)$$

A partir de ahora, asumimos que el problema de valor inicial 7.2 está bien planteado. Se denota la solución como

$$u(t) = S(t)u_0, \quad u_0 \in V_0.$$

Usando la linealidad del operador  $L$ , se ve que el operador solución  $S(t)$  es lineal. De la propiedad de dependencia continua 7.4, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_V &\leq c_0 \|u_0 - \bar{u}_0\|_V \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)u_0\|_V &\leq c_0 \|u_0\|_V, \quad \forall u_0 \in V_0. \end{aligned}$$

El operador  $S(t) : V_0 \subset V \rightarrow V$  se puede extender de forma única a un operador lineal continuo  $S(t) : V \rightarrow V$  con

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)u_0\|_V \leq c_0$$

**Definición 7.0.5.** Para  $u_0 \in V \setminus V_0$ , llamamos  $u(t) = S(t)u_0$  la solución generalizada del problema de valor inicial 7.2.

**Ejemplo 7.0.6.** Utilizamos el siguiente problema y sus aproximaciones en diferencias



finitas para ilustrar el uso del marco abstracto de la sección:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en } (0, \pi) \times (0, T), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Tomamos  $V = C_0[0, \pi] = \{v \in C[0, \pi] | v(0) = v(\pi) = 0\}$ , con la norma  $\| \cdot \|_{C[0, \pi]}$ . Y elegimos

$$V_0 = \left\{ v | v(x) = \sum_{j=1}^n a_j \sin(jx), \quad a_j \in R, n = 1, 2, \dots \right\}\tag{7.6}$$

Si  $u_0 \in V_0$ , entonces para cualquier entero positivo  $n \geq 1$  y  $b_1, \dots, b_n \in R$

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sin(jx).\tag{7.7}$$

Para este  $u_0$ , se verifica directamente que la solución es

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n b_j e^{-vj^2 t} \sin(jx).\tag{7.8}$$

Al utilizar el principio del máximo para la ecuación de calor

$$\min \left\{ 0, \min_{0 \leq x \leq \pi} u_0(x) \right\} \leq u(x, t) \leq \max \left\{ 0, \max_{0 \leq x \leq \pi} u_0(x) \right\}$$

vemos que

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |u(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} |u_0(x)| \quad \forall t \in [0, T]$$

Así, el operador solución  $S(t) : V_0 \subset V \rightarrow V$  es acotado.

Entonces, para  $u_0 \in V$  general, el problema 7.5 tiene una solución única. Si  $u_0 \in V$  tiene una derivada continua a trozos en  $[0, \pi]$ , entonces,

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx)$$

y la solución  $u(t)$  puede ser expresada como

$$u(x, t) = S(t)u_0(x) = u_0(x) = \sum_{j=1}^n b_j e^{-vj^2 t} \sin(jx).$$

Regresamos al problema abstracto 7.2. Presentamos dos resultados, el primero es la continuidad en el tiempo de la solución generalizadas y el segundo muestra que el operador solución  $S(t)$  forma un semigrupo.

**Proposición 7.0.7.** Para cualquier  $u_0 \in V$ , la solución generalizada del problema de valor inicial 7.2 es continua en  $t$ .

*Demostración.* Sea  $\{u_{0,n}\} \subset V_0$  una sucesión que converge a  $u_0$  en  $V$ :

$$\|u_{0,n} - u_0\|_V \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Sea  $t_0 \in [0, T]$  fijo, y  $t \in [0, T]$ . Escribimos

$$\begin{aligned} u(t) - u(t_0) &= S(t)u_0 - S(t_0)u_0 \\ &= S(t)(u_0 - u_{0,n}) + [S(t) - S(t_0)]u_{0,n} - S(t_0)(u_0 - u_{0,n}) \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u(t) - u(t_0)\|_V \leq 2c_0 \|u_{0,n} - u_0\|_V + \|[S(t) - S(t_0)]u_{0,n}\|_V$$

Dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , elegimos  $n$  suficientemente grande tal que

$$2c_0 \|u_{0,n} - u_0\|_V < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para este  $n$ , usando 7.3 de la definición de la solución, tenemos un  $\delta > 0$  de tal forma que

$$\|[S(t) - S(t_0)]u_{0,n}\|_V < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad |t - t_0| < \delta.$$

Entonces para  $t \in [0, T]$  con  $|t - t_0| < \delta$ , tenemos que  $\|u(t) - u(t_0)\|_V \leq \varepsilon$ . □

**Proposición 7.0.8.** Suponga que el problema 7.2 está bien planteado. Entonces, para todo  $t_1, t_0 \in [0, T]$  tal que  $t_1 + t_0 \leq T$ , tenemos  $S(t_1 + t_0) = S(t_1)S(t_0)$ .

*Demostración.* Las solución del problema 7.2 es  $u(t) = S(t)u_0$ . Tenemos que  $u(t_0) = S(t_0)u_0$  y  $S(t)u(t_0)$  es la solución de la ecuación diferencial en  $[t_0, T]$  con la condición inicial  $u(t_0)$  en  $t_0$ . Por la unicidad de la solución,

$$S(t)u(t_0) = u(t + t_0),$$

es decir,

$$S(t_1)S(t_0)u_0 = S(t_1 + t_0)u_0,$$

Como  $u_0 \in V$  es arbitraria,  $S(t_1 + t_0) = S(t_1)S(t_0)$ .  $\square$

Ahora introducimos un método de diferencias finitas definido por un parametro de la familia de los operadores lineales uniformemente acotados

$$C(\Delta t) : V \rightarrow V, \quad 0 < \Delta t < \Delta_0$$

Aqui  $\Delta_0 > 0$  es un número fijo. La familia  $\{C(\Delta t)\}_{0 < \Delta t < \Delta_0}$  se dice que es uniformemente acotada si existe una constante  $c$  tal que

$$\|C(\Delta t)\| \leq c \quad \forall \Delta t \in (0, \Delta_0].$$

La solución aproximada se define entonces por

$$u_{\Delta t}(m \Delta t) = C(\Delta t)^m u_0, \quad m = 1, 2, \dots$$

**Definición 7.0.9.** (Consistencia) El método en diferencias es consistente si existe un subespacio denso  $V_c$  de  $V$  tal que para todo  $u_0 \in V_c$ , para la correspondiente solución  $u$  del problema de valor inicial 7.2, tenemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\Delta t} [C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)] \right\| = 0 \quad \text{uniformemente en } [0, T].$$

**Ejemplo 7.0.10.** (continuación del ejemplo 7.0.6) Consideremos ahora el método hacia delante y el método hacia atrás del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{en } (0, \pi) \times (0, T), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

para el mismo problema 7.5. Para el método hacia delante, definimos el operador  $C(\Delta t)$  por la fórmula

$$C(\Delta t)v(x) = (1 - 2r)v(x) + r[v(x + \Delta x) + v(x - \Delta x)],$$

donde  $\Delta x = \sqrt{v \Delta t / r}$  y si  $x \pm \Delta x \notin [0, \pi]$ , entonces la función  $v$  se extiende con singularidad con periodo  $2\pi$ . Identificamos  $\Delta t$  con  $h_t$  y  $\Delta x$  con  $h_x$ . Entonces  $C(\Delta t) :$

$V \rightarrow V$  es un operador lineal y cumple que

$$\| C(\Delta t)v \|_v \leq (|1 - 2r| + 2r) \| v \|_V \quad \forall v \in V$$

Así

$$\| C(\Delta t) \|_v \leq |1 - 2r| + 2r, \quad (7.9)$$

y la familia  $\{C(\Delta t)\}$  es uniformemente acotada. El método en diferencias es

$$u_{\Delta t}(t_m) = C(\Delta t)u_{\Delta t}(t_{m-1}) = C(\Delta t)^m u_0$$

o

$$u_{\Delta t}(\cdot, t_m) = C(\Delta t)^m u_0(\cdot).$$

Observe que en esta forma, el método de diferencias genera una solución aproximada  $u_{\Delta t}(x, t)$  que está definida para  $x \in [0, \pi]$  y  $t = t_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N_t$ . Dado que

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(x_j, t_{m+1}) &= (1 - 2r)u_{\Delta t}(x_j, t_m) + r[u_{\Delta t}(x_{j-1}, t_m) + u_{\Delta t}(x_{j+1}, t_m)], \\ &\quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1 \\ u_{\Delta t}(0, t_m) &= u_{\Delta t}(N_x, t_m) = 0, \quad 0 \leq m \leq N_t, \\ u_{\Delta t}(t_j, 0) &= u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq N_x \end{aligned}$$

vemos que la relación entre la solución aproximada  $u_{\Delta t}$  y la solución  $v$  por el esquema de diferencias ordinario (con  $f_j^m = 0$ ) es

$$u_{\Delta t}(x_j, t_m) = v_j^m \quad (7.10)$$

En cuanto a la consistencia, tomamos  $V_c = V_0$ . Para la función de valor inicial 7.7, tenemos la fórmula 7.8 para la solución la cual es infinitamente suave. Ahora, utilizamos la expansión de Taylor en  $(x, t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} C(\Delta t)u(x, t) - u(x, t + \Delta t) &= (1 - 2r)u(x, t) + r[u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)] - u(x, t + \Delta t) \\ &= (1 - 2r)u(x, t) + r[2u(x, t) + u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2] \\ &\quad + \frac{r}{4!}[u_{xxxx}(x + \theta_1 \Delta x, t) + u_{xxxx}(x - \theta_2 \Delta x, t)](\Delta x)^4 \\ &\quad - u(x, t) - u_t(x, t) \Delta t - \frac{1}{2}u_{tt}(x, t + \theta_3 \Delta t)(\Delta t)^2 \\ &= -\frac{1}{2}u_{tt}(x, t + \theta_3 \Delta t)(\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{v^2}{24r}[u_{xxxx}(x + \theta_1 \Delta x, t) + u_{xxxx}(x - \theta_2 \Delta x, t)](\Delta x)^2, \end{aligned}$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 1)$ . Entonces

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} [C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)] \right\| \leq c \Delta t$$

y tenemos la consistencia del esquema.

Volviendo al caso general.

**Definición 7.0.11.** (Convergencia) El método de diferencias finitas es convergente si para cualquier  $t$  fijo en  $[0, T]$  y cualquier  $u_0 \in V$ , tenemos

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \| [C(\Delta t_i)^{m_i} - S(t)u_0] \| = 0$$

donde  $\{m_i\}$  es una sucesión de enteros y  $\{\Delta t_i\}$  es una sucesión de tamaño de paso tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i \Delta t_i = t$

**Definición 7.0.12.** (Estabilidad) El método de diferencias finitas es estable si los operadores

$$\{C(\Delta t)^m \mid 0 < \Delta t < \Delta_0, \quad m \Delta t \leq T\}$$

son uniformemente acotados, es decir, existe una constante  $M_0 > 0$  tal que

$$\| C(\Delta t)^m \|_{V \rightarrow V} \leq M_0 \quad \forall m : m \Delta t \leq T, \forall \Delta t \leq \Delta_0$$

.

Veamos el resultado central.

**Teorema 7.0.13. (Teorema de Equivalencia de Lax)** Supongamos que el problema de valor inicial 7.2 está bien planteado. Entonces, para un método de diferencias consistente, la estabilidad es equivalente a la convergencia.

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Consideremos el error

$$C(\Delta t)^m u_0 - u(t) = \sum_{j=1}^{m-1} C(\Delta t)^j [C(\Delta t)u((m-1-j)\Delta t) - u((m-j)\Delta t)] u(m\Delta t) - u(t).$$

Primero asumimos que  $x_0 \in V_c$ . Entonces como el método es estable,

$$\| C(\Delta t)^m u_0 - u(t) \| \leq M_0 m \Delta t \sup \left\| \frac{C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)}{\Delta t} \right\| + \| u(m\Delta t) - u(t) \| \quad (7.11)$$

Por la continuidad,  $\|u(m \Delta t) - u(t)\| \rightarrow 0$  y por la consistencia,

$$\sup_t \left\| \frac{C(\Delta t)u(t) - u(t + \Delta t)}{\Delta t} \right\| \rightarrow 0,$$

por tanto tenemos la convergencia por 7.11. Consideremos ahora la convergencia para el caso general donde  $u_0 \in V$ . Tenemos la secuencia  $\{u_{0,n}\} \subset V_0$  tal que  $u_{0,n} \rightarrow u_0$  en  $V$ . Escribimos

$$C(\Delta t)^m u_0 - u(t) = C(\Delta t)^m (u_0 - u_{0,n}) + [C(\Delta t)^m - S(t)]u_{0,n} - S(t)(u_0 - u_{0,n}),$$

y obtenemos

$$\|C(\Delta t)^m u_0 - u(t)\| = \|C(\Delta t)^m (u_0 - u_{0,n})\| + \|[C(\Delta t)^m - S(t)]u_{0,n}\| + \|S(t)(u_0 - u_{0,n})\|.$$

Dado que el problema de valor inicial 7.2 está bien planteado y el método es estable,

$$\|C(\Delta t)^m u_0 - u(t)\| = c \|u_0 - u_{0,n}\| + \|[C(\Delta t)^m - S(t)]u_{0,n}\|$$

Dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $n$  suficientemente grande de tal manera que

$$c \|u_0 - u_{0,n}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Para este  $n$ , sea  $\Delta t$  suficientemente pequeño,

$$\|[C(\Delta t)^m - S(t)]u_{0,n}\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \Delta t \text{ pequeño, } |m \Delta t - t| < \Delta t$$

Entonces obtenemos la convergencia.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que el método no es estable. Luego existen sucesiones  $\{\Delta t_k\}$  y  $\{m_k\}$  tal que  $m_k \Delta t_k \leq T$  y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C(\Delta t_k)^{m_k}\| = \infty$$

Como  $\Delta t_k \leq \Delta_0$ , podemos asumir que la sucesión  $\{\Delta t_k\}$  es convergente. Si la sucesión  $\{m_k\}$  es acotada, entonces

$$\sup_k \|C(\Delta t_k)^{m_k}\| \leq \sup_k \|C(\Delta t_k)\|^{m_k} \leq \infty$$

Esto es una contradicción. Así  $m_k \rightarrow \infty$  y  $\Delta t_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Por la convergencia del método,

$$\sup_k \|C(\Delta t_k)^{m_k} u_0\| \leq \infty \quad \forall u_0 \in V.$$

---

Aplicando el teorema 2.1.8 y asumiendo que para todo  $v \in V$  y que la secuencia  $\{L_n v\}$  es acotada entonces  $\sup_n \|L_n\| < \infty$ , tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C(\Delta t_k)^{mk}\| < \infty$$

contradiciendo la suposición que el método no es estable. □

## 8. CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación se desarrollo uno de los métodos clásicos de discretización como es el Método de Diferencias Finitas, para aplicarlo a la resolución de las ecuaciones de Onda, Calor y Poisson en una dimensión. Es necesario que la distancia entre los puntos de la malla sean muy pequeños para obtener una mejor aproximación a la solución analítica.

Se desarrollo los algoritmos y su codificación para cada ecuación en el lenguaje C++. Los programas realizados permiten encontrar la solución de distintos casos de las ecuaciones de Onda, Calor y Poisson.

Los método numéricos tienen una gran funcionalidad para resolver ecuaciones diferenciales parciales, por su rapidez y confiabilidad dentro de sus rangos de aplicación.

En el transcurso de esta investigación he tenido conocimiento que el aprendizaje de método numéricos aumenta la habilidad de programar o codificar, en el lenguaje de programación C++, este permite elaborar programas a medida de cualquier problema que enfrente sin importar el área de aplicación.



## 9. RECOMENDACIONES

Al finalizar, esta tesis recomendamos lo siguiente:

1. A los estudiantes de la carrera de Lic. Matemática, retomar la importancia del dominio de los métodos numéricos y adoptar la implementación computacional de dichos métodos, con el fin de familiarizarse con la programación computacional.
2. A los futuros tesisistas de la carrera Lic. Matemática, es posible ampliar el método de diferencias finitas a ecuaciones diferenciales no lineales como futura investigación.

Parte III

ANEXOS

## 10. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN C++.

### 10.1. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de Poisson.

Para aproximar la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, c \leq y \leq d,$$

sujeta a las condiciones de fronteras

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{si } x = a \quad 0 \quad x = b \quad y \quad c \leq y \leq d$$

y

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{si } y = c \quad 0 \quad y = d \quad y \quad a \leq x \leq b.$$

**Algoritmo 10.1.1. ENTRADA:**

- Extremos a, b, c, d;
- Enteros  $m \geq 3, n \geq 3$ ;
- Tolerancia Tol;
- Número máximo de iteraciones N.

**SALIDA:** Aproximaciones  $w_{i,j}$  a  $u(x_i, y_j)$  para toda  $i = 1, \dots, n - 1$ , y para toda  $j = 1, \dots, m - 1$  o un mensaje de que se excedió el número máximo de iteraciones.

1. Tome  $h = (b - a)/n$ ;  
 $k = (d - c)/m$ ;
2. Para  $i = 1, \dots, n - 1$ , tome  $x_i = a + ih$ . (En los siguiente dos pasos se construye puntos de red(malla)).
3. Para  $j = 1, \dots, m - 1$ , tome  $y_j = c + jk$ .

4. Para  $i = 1, \dots, n - 1$ ,

para  $j = 1, \dots, m - 1$ , tome  $w_{i,j} = 0$

5. Tome  $\lambda = h^2/k^2$ ;

$\mu = 2(1 + \lambda)$ ;

$l = 1$ .

6. Mientras  $l \leq N$  hacer los pasos 7 – 20

7. Tome  $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1})/\mu$ ;

$NORM = \text{abs}(z - w_{1,m-1})$ ;

$w_{1,m-1} = z$ ;

8. Para  $i = 0, \dots, n - 2$

Tome  $(z = -h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2})/\mu$ ;

Si  $|w_{i,m-1} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{i,m-1} - z|$ ;

tome  $w_{i,m-1} = z$

9. Tome  $(z = -h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2,m-1} + \lambda w_{n-1,m-2})/\mu$ ;

Si  $|w_{n-1,m-1} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{n-1,m-1} - z|$ ;

tome  $w_{n-1,m-1} = z$

10. Para  $j = m - 2, \dots, 2$ , haga los pasos 11, 12 y 13.

11. Tome  $(z = -h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1,j+1} + \lambda w_{1,j-1} + w_{2,j})/\mu$ ;

Si  $|w_{1,j} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{1,j} - z|$ ;

tome  $w_{1,j} = z$

12. Para  $i = 2, \dots, n - 2$

Tome  $(z = -h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1,j} + \lambda w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + \lambda w_{i,j-1})/\mu$ ;

Si  $|w_{i,j} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{i,j} - z|$ ;

tome  $w_{i,j} = z$

13. Tome  $(z = -h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2,j} + \lambda w_{n-1,j+1} + \lambda w_{n-1,j-1})/\mu$ ;

Si  $|w_{n-1,j} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{n-1,j} - z|$ ;

tome  $w_{n-1,j} = z$

14. Tome  $(z = -h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1,2} + w_{2,1})/\mu$ ;

Si  $|w_{1,1} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{1,1} - z|$ ;

tome  $w_{1,1} = z$

15. Para  $i = 2, \dots, n - 2$ 
  - Tome  $(z = -h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, y_1) + w_{i-1,1} + \lambda w_{i,2} + \lambda w_{i+1,1})/\mu$ ;
  - Si  $|w_{i,1} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{i,1} - z|$ ;
  - tome  $w_{i,1} = z$
16. Tome  $(z = -h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2})/\mu$ ;
- Si  $|w_{n-1,1} - z| > NORM$ , entonces tome  $NORM = |w_{n-1,1} - z|$ ;
- tome  $w_{n-1,1} = z$
17. Si  $NORM \leq Tol$ , entonces hacer los paso 18 – 19
  18. Para  $i = 1, \dots, n - 1$ 
    - para  $j = 1, \dots, m - 1$  Salida  $(x_i, y_j, w_{i,j})$
  19. Parar (Procedimiento terminado con éxito)
20. Tome  $l = l + 1$ ;
21. Salida (se excedió el número máximo de iteraciones);  
(Procedimiento terminado sin éxito.)  
PARAR.

Código en C++, de el algoritmo para la ecuación de Poisson en Diferencias Finitas.

```

#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <stdio.h>
#include <windows.h>

#define pi 3.141592653589793
#define true 1
#define falso 0
#define C 100

using namespace std;
double M1 , M2 , N1 , N2 ;

double f (double , double );
double g (double , double );
double algoritmo();
double datos_entrada(int * , double * , double * , double * ,
    double * , double * , double * , int * , int * );
double datos_Salida(int , int , double [C] , double [C] ,
    double [C][C], double);

double t,l,alfa,h, k,lam,a,b,c,d,Tol,Ni;
int N,m,m1,m2,i1,i,j,OK;
double w[C][C],y[C],x[C],z,mu,NORM,x1,y1;

int main(int argc, char *argv[])
{
    cout<<"ECuacion de Poisson en diferencias finitas "<<endl;
    cout<<" Bienvenido "<<endl;

    f ( x1,y1 );
    g ( x1,y1 );
    algoritmo();
    datos_entrada(& OK , & a, & b, & c, & d,& Tol,& Ni,& N,& m);
    datos_Salida(m,N,x,y,w,l);

    system("PAUSE");
    return 0;
}

double algoritmo(){
    /*Esta funcion describe el algoritmo de la ecuacion de Poisson
    tomado de Burden Faires*/
    datos_entrada(& OK, & a, & b, & c, & d, & Tol,& Ni,& N,& m);
    if(OK){
        M1 = m-1;
        M2 = m-2;
        N1 = N-1;
        N2 = N-2;
        m1=m-1;
        m2=N-1;
        // PASO 1
        h=(b-a)/N;
        k=(d-c)/m;

        //PASO 2
        for(i=1;i<=N-1;i++){

```

```

    x[i]=a+i*h;

}
//PASO 3
for(j=1;j<=m-1;j++){
    y[j]=c+j*k;

}
//PASO 4

for(i=1;i<=N-1;i++){
    for(j=1;j<=m-1;j++){
        w[i][j]=0;
    }
}

//PASO 5
lam = pow(h,2)/pow(k,2);
mu = 2*(1+lam);
l=1;
//PASO 6
while(l<=Ni){
    //PASO 7

    z=(-pow(h,2)*f(x[1],y[m-1])+g(a,y[m-1])+lam*g(x[1],d)+lam*w[1][m-2]+
w[2][m-1])/mu;
    NORM = abs(z-w[1][m-1]);
    w[1][m-1]=z;
    //PASO 8
    for(i=2;i<=N-2;i++){
        z=(-pow(h,2)*f(x[i],y[m-1])+lam*g(x[i],d)+w[i-1][m-1]+w[i+1][m-1]+
lam*w[i][m-2])/mu;
        if(abs(w[i][m-1]-z)>NORM){
            NORM = abs(w[i][m-1]-z);
        }
        w[i][m-1]=z;
    }
    // PASO 9
    z=(-pow(h,2)*f(x[N-1],y[m-1])+g(b,y[m-1])+lam*g(x[N-1],d)+w[N-2][m-1]+
lam*w[N-1][m-2])/mu;
    if(abs(w[N-1][m-1]-z)>NORM){
        NORM = abs(w[N-1][m-1]-z);
    }
    w[N-1][m-1]=z;
    // PASO 10
    for(j=m-2;j>=2;j--){
        //PASO 11
        z=(-pow(h,2)*f(x[1],y[j])+g(a,y[j])+lam*w[1][j+1]+lam*w[1][j-1]+
w[2][j])/mu;
        if(abs(w[1][j]-z)>NORM){
            NORM = abs(w[1][j]-z);
        }
        w[1][j]=z;
        //PASO 12
        for(i=2;i<=N-2;i++){
            z=(-pow(h,2)*f(x[i],y[j])+w[i-1][j]+lam*w[i][j+1]+w[i+1][j]+lam*w[i][j-1])/mu;
            if(abs(w[i][j]-z)>NORM){
                NORM = abs(w[i][j]-z);
            }
            w[i][j]=z;
        }
    }
}

```

```

//PASO 13
z=(-pow(h,2)*f(x[N-1],y[j])+g(b,y[j])+w[N-2][j]+lam*w[N-1][j+1]+
lam*w[N-1][j-1])/mu;
if(abs(w[N-1][j]-z)>NORM){
    NORM = abs(w[N-1][j]-z);
}
w[N-1][j]=z;
}
//PASO 14
z=(-pow(h,2)*f(x[1],y[1])+g(a,y[1])+lam*g(x[1],c)+lam*w[1][2]+
w[2][1])/mu;
if(abs(w[1][1]-z)>NORM){
    NORM=abs(w[1][1]-z);
}
w[1][1]=z;
//PASO 15
for(i=2;i<=N-2;i++){
    z=(-pow(h,2)*f(x[i],y[1])+lam*g(x[i],c)+w[i-1][1]+lam*w[i][2]+
w[i+1][1])/mu;
    if(abs(w[i][1]-z)>NORM){
        NORM = abs(w[i][1]-z);
    }
    w[i][1]=z;
}
//Paso 16
z=(-pow(h,2)*f(x[N-1],y[1])+g(b,y[1])+lam*g(x[N-1],c)+w[N-2][1]+
lam*w[N-1][2])/mu;
if(abs(w[N-1][1]-z)>NORM){
    NORM=abs(w[N-1][1]-z);
}
w[N-1][1]=z;
//Paso 17
if(NORM<=Tol){
    datos_Salida(m,N,x,y,w,l);
}
l=l+1;
}

}
//return 0;
}

// Actualizar/crear la funcion f
double f(double x, double y){
    /*Esta funcion se utiliza para almacenar Condicion de Frontera*/
    double f;

    f=x*exp(y);
    return f;
}
double g(double x, double y){
    /*Esta funcion se utiliza para almacenar Condicion de Frontera*/
    double g;
    g=x*exp(y);
    return g;
}
double datos_entrada(int *OK,double * a, double * b, double * c,double * d,
double * Tol, double *Ni, int *N, int *m){
    /*Esta funcion permite introducir los datos de entrada que se requieren
para ejecutar correctamnte el codigo*/
    char S;

```



```

cout <<" ;Actualize las condiciones de Frontera?"<<endl;
cout <<" Responda S:Si o N:No."<<endl;
cin>>S;
if((S=='S')||(S=='s')){
    cout <<"Favor, introducir correctamente los datos solicitados"<<endl;
    system("pause");
    * OK = falso;
    while(!(* OK)){
        cout << "Introduzca el extremo a.\na=";
        scanf("%lf",a);
        if( * a < 0.0)
            cout << "Debe ser un numero positivo."<<endl;
        else * OK = true;
    }
    * OK = falso;

    while(!(*OK)){
        cout << "Ingrese el extremo b.\nb=";
        scanf("%lf",b);
        if (* b <0.0)
            cout <<"Debe ser un numero positivo. "<<endl;
        else*OK = true;
    }
    * OK = falso;
    while(!(*OK)){
        cout << "Ingrese el extremo c.\nc=";
        scanf("%lf",c);
        if (* c<0.0)
            cout <<"Debe ser un numero positivo. "<<endl;
        else*OK = true;
    }
    * OK = falso;
    while(!(*OK)){
        cout << "Ingrese el extremo d.\nd=";
        scanf("%lf",d);
        if ( * d<0.0)
            cout <<"Debe ser un numero positivo. "<<endl;
        else*OK = true;
    }
    cout <<"Ingrese la tolerancia.\nTol=";
    scanf("%lf",Tol);
    cout <<"Ingrese el numero aximo de iteraciones.\nNi=";
    scanf("%lf",Ni);
    * OK = falso;

    while(!(* OK)){
        cout<<"Ingrese el entero m = numeros de intervalos en el eje X.\nm=";
        scanf("%d",m);
        if((* m<2))
            cout <<"El valor de m debe ser mayor que 3."<<endl;
        else *OK = true;
    }
    * OK = falso;
    while(!(* OK)){
        cout <<"Ingrese el entero N = numero de intervalos de tiempo.\nN=";
        scanf("%d",N);

```

```

    if>(*N<2)
        cout <<"El valor de N debe ser mayor que 3."<<endl;
    else * OK = true;

}

}
else{
cout <<"El programa finalizara para Actualize la condicion de fronteras.";
* OK = falso;

    exit(0);
}
return 0;
}

//salida(m,N,x[i],y[j],w[i][j]);
double datos_Salida(int m, int N, double x[C],double y[C], double w[C][C],
double l){
    /*Esta funcion se utiliza para imprimir los resultado en pantalla o ya sea
    en documento de texto*/
    int i,j,OP;
    char NOMBRE[30];
    FILE *fp;

    cout <<"Elija el metodo de salida de la solucion "<<endl;
    cout <<"1. Salida de pantalla."<<endl;
    cout <<"2. Salida de archivo de texto."<<endl;
    cout <<"Por favor, introduzca 1 o 2."<<endl;
    cin>> OP;
    if(OP==2){
        cout <<"Ingrese el nombre del archivo de texto: nombre.ext \n"<<endl;
        scanf("%s",NOMBRE);
        fp = fopen(NOMBRE,"wt");
        fprintf(fp," i \t j \t x[i] \t\t y[j] \t\t w(i,%4.2i) \n", N);
        if (NORM<=Tol){
            for(i=1;i<=N-1;i++){
                for(j=1;j<=m-1;j++){
                    fprintf(fp,"%1i\t %1i\t %3.3f\t\t %3.3f\t\t %3.5f \n ",
                        i,j,x[i],y[j],w[i][j]);
                }
            }
            fprintf(fp,"El metodo converge despues de %f iteraciones",l);
        }
        else {
            fprintf(fp,"Se excedio el numero maximo de iteraciones");
        }
        exit(0);
    }
    else fp=stdout;
    cout<<"Metodo de diferencias regresivas de la ecuacion de calor \n"<<endl;
    cout<<"i \tj \tx[i] \ty[j] \t w(i,"<<N<<")\n";

//Paso 18s

for(i=1;i<=N-1;i++){
    for(j=1;j<=m-1;j++){
        cout<<setprecision(3)<<i<<"\t"<<setprecision(3)<<j<<"\t"<<
        setprecision(3)<<x[i]<<"\t"<<setprecision(4)<<y[j]<<
        "\t"<<setprecision(5)<<w[i][j]<<endl;
    }
}

```

```
    }  
  
    }  
    system("pause");  
    cout<<"El metodo converge despues de "<<l<<" iteraciones"<<endl;  
    cout<<"Procedimiento terminado con exito"<<endl;  
  
    exit(0);  
}
```

## 10.2. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de Calor

Este algoritmo aproxima la solución a la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

sujeta a las condiciones de fronteras

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < l < T,$$

a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

**Algoritmo 10.2.1.** ENTRADA:

- Extremos  $l$ ;
- Tiempo máximo  $T$ ;
- Constante  $\alpha$ .
- Enteros  $m \geq 3, N \geq 1$ ;

SALIDA: Aproximaciones  $w_{i,j}$  a  $u(x_i, y_j)$  para toda  $i = 1, \dots, m - 1$  y  $j = 1, \dots, N$

1. Tome  $h = l/m$ ;

$$k = T/N;$$

$$\lambda = \alpha^2 k/h^2$$

2. Para  $i = 1, \dots, m - 1$ , tome  $w_i = f(ih)$ . (Valores iniciales). (Los pasos 3 – 11 resuelven un sistema lineal tridiagonal.)

3. Tome  $l_1 = 1 + 2\lambda$ ;

$$u_1 = -\lambda/l_1;$$

4. Para  $i = 2, \dots, m - 2$ , tome  $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda\mu_{i-1}$ ;

$$u_i = -\lambda/l_i.$$

5. Tome  $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda\mu_{m-1}$

6. Para  $j = 1, \dots, N$ , haga los pasos 7 – 11

7. Tome  $t = jk$ ;  
$$z_1 = w_1/l_1.$$
8. Para  $i = 2, \dots, m - 1$ , tome  $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$ .
9. Tome  $w_{m-1} = z_{m-1}$ .
10. Para  $i = m - 2, \dots, 1$ , tome  $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$
11. SALIDA(t); (Nota  $t = t_j$ )  
Para  $i = 1, \dots, m - 1$ , tome  $x = ih$   
SALIDA ( $x, w_i$ ).
12. PARAR. (Procedimiento terminado)

Código en C++, de el algoritmo para la ecuación de Calor en Diferencias Finitas.

```

#include <iostream>
#include<stdio.h>
#include<cmath>
#include <iomanip>

#define pi 3.141592653589793
#define true 1
#define falso 0

using namespace std;

double F (double x);
void algoritmo();
double datos_entrada(int *, double *, double *, double *,int *,int *);
double datos_Salida(double, double, int, double *, double);

double w[50], L[50], u[50], Z[50];
double t,l,alfa,h,K,lam,x;
int N,m,m1,m2,il,I,J, Estado;

int main(){

    cout <<"Bienvenido"<<endl;

    F (x);
    algoritmo();
    datos_entrada(& Estado,& l,& t,& alfa,& N,& m);
    datos_Salida(t,x,m1,w,h);
    // return 0;
    system("pause");

}

void algoritmo(){
    /*Esta funcion describe el algoritmo de la ecuacion de calor
    tomado de Burden Faires*/
    datos_entrada(& Estado,& l,& t, & alfa, & N,& m);
    if(Estado){
        m1=m-1;
        m2=m-2;
        // PASO 1
        h=l/m;
        K=t/N;
        // lam se utiliza por lamda
        lam=(pow(alfa,2)*K)/pow(h,2);
        // Conjunto W(M)=0
        w[m-1]=0.0;
        //PASO 2
        for(I=1;I<=m1;I++){
            w[I-1]=F(I*h);
        }
        //PASO 3
        L[0]=1.0+2*lam;
        u[0]=-lam/(L[0]);
        //PASO 4
        for(I=2;I<=m2;I++){
            L[I-1]=1.0+2*lam+lam*u[I-2];
            u[I-1]=-lam/(L[I-1]);
        }
    }
}

```

```

}
//PASO 5
L[m1-1]=1.0+2*lam+lam*u[m2-1];
//PASO6
for(J=1;J<=N;J++){
//PASO 7
// T(J)
t =J*K ;
Z[0]=w[0]/L[0];
//PASO 8
for(I=2;I<=m1;I++){
Z[I-1]=(w[I-1]+lam*Z[I-2])/L[I-1];
}
//PASO 9
w[m1-1]=Z[m1-1];
//PASO 10
for(i1=1;i1<=m2;i1++){
I=m2-i1+1;
w[I-1]=Z[I-1]-u[I-1]*w[I];
}
}
//PASO 11
datos_Salida(t,x,m1,w,h);
}
// PASO 12
//return 0;
}
// Actualizar/crear la funcion f
double F(double x){
/*Esta funcion es la almacena las condiciones de fronteras (inicial)*/
double f;
f=sin(pi*x);
return f;
}
double datos_entrada(int *Estado,double *l,double *t, double *alfa, int *N,
int *m){
/*Esta funcion permite introducir los datos de entrada que se requieren
para ejecutar correctamente el codigo*/
char S;
cout <<"Metodo de diferencias regresivas para la ecuacion de calor"<<endl;
cout <<"Actualize las condiciones de Fronteras F ";
cout <<" Responda S:Si o N:No."<<endl;
cin>> S;
if((S=='S')||(S=='s')){
cout << "El punto inicial de eje x es 0."<<endl;
* Estado = falso;
while(!(* Estado)){
cout << "Introduzca el punto final(largo) del eje x.\nI=";
scanf("%lf",l);
if(* l <= 0.0)
cout << "Debe ser un numero positivo."<<endl;
else * Estado = true;
}
* Estado = falso;
while(!(*Estado)){
cout << "Ingrese el tiempo maximo.\nT=";
scanf("%lf",t);
if (* t<=0.0)
cout <<"Debe ser un numero positivo. "<<endl;
else*Estado = true;
}
}
}

```

```

}
cout <<"Ingrese la constante alfa."<<endl;
scanf("%lf",alfa);
* Estado = falso;

while(!(* Estado)){
cout <<"Ingrese el ntero m .\nm=";
scanf("%d",m);
if((* m<3))
cout <<"El valor de m debe ser mayor que 3."<<endl;
else *Estado = true;
}
* Estado = falso;
while(!(* Estado)){
cout <<"Ingrese el entero N\nN=";
scanf("%d",N);
if((*N<1))
cout <<"El valor de N debe ser mayor que 1."<<endl;
else *Estado = true;
}
}
else{
cout <<"El programa finalizara para Actualize la condicion de fronteras.";
* Estado = falso;

exit(0);
}
}
double datos_Salida(double t, double x, int m1, double * w, double h){
/*Esta funcion se utiliza para imprimir los resultado en pantalla o ya sea
en documento de texto*/
int i,OP;
char NOMBRE[30];
FILE *fp;

cout <<"Elija el metodo de salida de la solucion "<<endl;
cout <<"1. Salida de pantalla."<<endl;
cout <<"2. Salida de archivo de texto."<<endl;
cout <<"Por favor, introduzca 1 o 2."<<endl;
cin>> OP;
if(OP==2){
cout <<"Ingrese el nombre del archivo de texto: nombre.ext \n"<<endl;
scanf("%s",NOMBRE);
fp = fopen(NOMBRE,"wt");
fprintf(fp,"i\t\tx\t\tw(x,%4.2f) \n", t);
for(i=1;i<= m1; i++){
x =i*h;
fprintf(fp,"% 3d\t% 11.1f\t %13.6f \n ",i,x,w[i-1]);
}
}
else fp=stdout;
cout<<"Metodo de diferencias regresivas de la ecuacion de calor \n"<<endl;
cout<<"i\t\tx\t\tw(i, "<<t<<")\n";
cout<<"0\t0.0\t0\n";
for(i=1;i<= m1; i++){
x =i*h;
cout<<setprecision(3)<<i<<"\t"<<setprecision(2)<<x<<"\t"<<

```



```
        setprecision(6)<<w[i-1]<<endl;
    }
    cout<<"10\t1.0\t0\n"<<endl;
    system("pause");
    exit(0);
}
```

### 10.3. Algoritmo de diferencias finitas para la ecuación de onda

Este algoritmo aproxima la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

sujeta a las condiciones de fronteras

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l; \end{aligned}$$

**Algoritmo 10.3.1. ENTRADA:**

- Extremos l;
- Tiempo máximo T;
- Constante  $\alpha$ .
- Enteros  $m \geq 3, N \geq 1$ ;

**SALIDA:** Aproximaciones  $w_{i,j}$  a  $u(x_i, y_j)$  para toda  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, N$

- 1.
2. Tome  $h = l/m$ ;  
 $k = T/N$ ;  
 $\lambda = k\alpha/h$
3. Para  $j = 1, \dots, N$ , tome  $w_{0,j} = 0$ ;  $w_{m,0} = f(l)$ .
4. Tome  $w_{0,0} = f(0)$ ;  
 $w_{m,0} = f(l)$ .
5. Para  $i = 1, \dots, m - 1$ , (Inicialice  $t = 0$  y  $t = k$ )  
Tome  $w_{i,0} = f(ih)$

$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2} [f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih).$$

6. Para  $j = 1, \dots, N - 1$ , (Realice una multiplicación de matrices)

Para  $i = 1, \dots, m - 1$

$$\text{Tome } w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + w_{i,j-1}$$

7. Para  $j = 0, \dots, N$

Tome  $t = jk$ ;

para  $i = 0, \dots, m$

Tome  $x = ih$ ;

SALIDA  $(x, t, w_{i,j})$ .

8. Parar. (Procedimiento terminado)

Código en C++, de el algoritmo para la ecuación de Onda en Diferencias Finitas.

```

#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <stdio.h>
#include <windows.h>

#define pi 3.141592653589793
#define true 1
#define falso 0
#define C 50

using namespace std;

double F (double x);
double G (double x);
double algoritmo ();
double datos_entrada(int * ,double *, double *, double *, int *, int *);
double datos_Salida(double, double, int, int, double [C][C], double, double );

double t,l,alfa,h,K,lam,x;
int N,m,m1,m2,i1,i,j,OK;
double w[C][C];

int main(int argc, char *argv[])
{
    cout<<"Ecuacion de Onda en Diferencias Finitas"<<endl;
    cout<<" Bienvenido " <<endl;

    F (x);
    G (x);
    algoritmo ();
    datos_entrada(& OK,& l,& t,& alfa,& N,& m);
        datos_Salida(t,x,m,N,w,h,K);

    system("PAUSE");
    return 0;
}

double algoritmo(){
    /*Algoritmo de Diferencias Finitas de ecuacion Onda
    tomado de Burden Faires*/
    datos_entrada(& OK,& l,& t, & alfa, & N,& m);
    if(OK){
        m1=m-1;
        m2=N-1;
        // PASO 1
        h=l/m;
        K=t/N;
        // lam SE UTILIZA PARA LAMBDA
        lam=K*alfa/h;

        //PASO 2
        for(j=1;j<=N;j++){
            w[0][j]=0;
            w[m][j]=0;
        }
        //PASO 3
    }
}

```

```

w[0][0]=F(0);
w[m][0]=F(1);
//PASO 4
for(i=1;i<=m1;i++){
//    t=0;
//    t=K;
w[i][0]=F(i*h);
int i1 = i+1;
int i2 = i-1;
w[i][1]=(1-pow(lam,2))*F(i*h)+(pow(lam,2)/2)*(F(i1*h)+F(i2*h))+
    K*G(i*h);
}
//PASO 5
for(j=1;j<=m2;j++){
for(i=1;i<=m1;i++){
w[i][j+1]=2*(1-pow(lam,2))*w[i][j]+pow(lam,2)*(w[i+1][j]+w[i-1][j])+
w[i][j-1];
}
}

//PASO 6
datos_Salida(t,x,m,N,w,h,K);
}
// PASO 7
return 0;
}
// Actualizar/crear las condiciones de fronteras
double F(double x){
/*Esta funcion se utiliza para almacenar la condicion de frontera f*/
double f;

f=sin(pi*x);
return f;
}
double G(double x){
/*Esta funcion se utiliza para almacenar la condicion de frontera g*/
double g;
g=0;
return g;
}
double datos_entrada(int *OK,double *l,double *t,double *alfa, int *N, int *m){
/*Esta funcion permite introducir los datos de entrada que se requieren
para ejecutar correctamente el codigo*/
char S;

cout<<"Actualize las condiciones de Fronteras "<<endl;
cout <<" Responda S:Si o N:No."<<endl;
cin>>S;
if((S=='S')||(S=='s')){
cout <<" El punto inicial de eje x es 0."<<endl;
* OK = falso;
while(!(* OK)){
cout << "Introduzca el punto final(largo) del eje x.\n";
scanf("%lf",l);
if(* l <= 0.0)
cout << "Debe ser un numero positivo."<<endl;
else * OK = true;
}
* OK = falso;
while(!(*OK)){

```

```

cout << "Ingrese el tiempo maximo.\nT=";
scanf("%lf",t);
if (* t<=0.0)
    cout <<"Debe ser un numero positivo. "<<endl;
else*OK = true;

}
cout <<"Ingrese la constante alfa.\nalfa=";
scanf("%lf",alfa);
* OK = falso;

while(!(* OK)){
    cout <<"Ingrese el entero.\nm=";
    scanf("%d",m);
    if((* m<3))
        cout <<"El valor de m debe ser mayor que 3."<<endl;
    else *OK = true;
}
* OK = falso;
while(!(* OK)){
    cout <<"Ingrese el entero N.\nN=";
    scanf("%d",N);
    if((*N<1))
        cout <<"El valor de N debe ser mayor que 1."<<endl;
    else *OK = true;

}

}
else{
cout <<"El programa finalizara para Actualize la condicion de fronteras.";
* OK = falso;

    exit(0);
}
}

//datos_Salida(t,x,m,N,w,h,K);
double datos_Salida(double t, double x, int m, int N, double w[C][C],
double h, double K ){
    /*Esta funcion se utiliza para imprimir los resultado en pantalla o ya sea
en documento de texto*/
    int i,j,OP;
    char NOMBRE[30];
    FILE *fp;

    cout <<"Elija el metodo de salida de la solucion "<<endl;
    cout <<"1. Salida de pantalla."<<endl;
    cout <<"2. Salida de archivo de texto."<<endl;
    cout <<"Por favor, introduzca 1 o 2."<<endl;
    cin>> OP;
    if(OP==2){
        cout <<"Ingrese el nombre del archivo de texto: nombre.ext \n"<<endl;
        scanf("%s",NOMBRE);
        fp = fopen(NOMBRE,"wt");
        fprintf(fp," x\t w(i,%4.2i) \n", N);
        for(j=0;j<=N-1;j++){
            t=j*K;
            for(i=0;i<=m-1;i++){
                x =i*h;
                fprintf(fp,"%1.1f\t %3.10f\n ",x,w[i][j]);
            }
        }
    }
}

```

```
    }
    exit(0);
}
exit(0);
}
else fp=stdout;
cout<<"Metodo de diferencias Finitas de la ecuacion de Onda \n"<<endl;
cout<<"t \t x\t w(i, "<<N<<")\n";
for(j=0; j<=N-1; j++){
    t=j*K;
    for(i=0; i<=m-1; i++){
        x = i*h;
        cout<<setprecision(3)<<t<<"\t"<<setprecision(2)<<x<<"\t"<<
            setprecision(10)<<w[i][j]<<endl;
    }
    cout<<"1.0\t1.0\t0\n"<<endl;
    system("pause");
    exit(0);
}
exit(0);
}
```

## Bibliografía

- [1] Hans Petter Langtangen. Svain Linge, *Finite difference computing with PDEs*. Editorial Board 1era Edition 2010.
- [2] J. Underruga L.R. Venegas C., *Introducción a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales*. Prentice Hall. EE.UU. 1968.
- [3] Sixto Romero, Francisco J Moreno, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales (EPDs)*. Universidad de Huelva 2001.
- [4] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, *Ecuaciones Diferenciales con problemas en la frontera*. Séptima edición, CENGANGE Learning.
- [5] Antonio Carrillo Lesdama, Karla Ivonne Gonzáles Rosa y Omar Mendoza Bernal, *Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional*. Facultad de Ciencias, UNAM. Invierno 2019, versión 1.0 $\alpha$
- [6] Kendall Atkinson, Weimin Han, *Theoretical Numerical Analysis*. Springer, 2000.
- [7] Ronald E. Mickens, *Applications of Nonstnderd Finite Difference Schemes*. Clark Atlanta University, Atlanta, Georgia.
- [8] Stephenson, G., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Longman Inc., 2nd edition EE.UU. 1970.
- [9] Tom M. Apostol, *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Volume 1 and 2. Jong Wiley and Sons, Inc.
- [10] George F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales Con aplicaciones y Notas Historicas*. 2da Edición, McGraw-Hill (1993).
- [11] Thomas, *Cálculo Varias Variable*. Undécima Edición. PEARSON, ADDISON WESLEY.



- 
- [12] Edwards Waldemar Jiménez Quintana, *Ecuaciones en Derivadas Parciales: Una introducción a la teoría Clásica*. Universidad del Bio-Bio, 2015.
- [13] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*. Séptima Edición, Thomson Learning.
- [14] José Luis de la Fuente O'Connor, *Ingeniería de los Algoritmo y Métodos Numéricos. Un acercamiento práctico avanzado a la computación científica con MATLAB*. Segunda edición, septiembre (2017).
- [15] Timothy Sauer, *Análisis Numérico*. Segunda Edición. PEARSON, Educación, México, 2013.