UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

TEMA: MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE USANDO OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA DE IGUALDAD EN PROBLEMAS ECONÓMICOS

PRESENTADO POR:
BR. EDGARD HORACIO CATÍN RUIZ
BR. DAMARIS SULEMA JUÁREZ ZAVALA

BAJO LA DIRECCIÓN DEL MSC W. MILTON CARVAJAL HERRADORA

LEÓN, NICARAGUA 2019.

"A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD"

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE USANDO OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA DE IGUALDAD EN PROBLEMAS ECONÓMICOS

____

EDGARD HORACIO CATÍN RUÍZ

____

DAMARIS SULEMA JUÁREZ ZAVALA

____

TUTOR: MSC. W. MILTON CARVAJAL HERRADORA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

"Puesto que el Universo es perfecto

y fue creado por el Creador más sabio,

nada ocurre en él sin que esté presente

alguna ley de máximo o mínimo"

_ L. Euler (s. XVIII)

AGRADECIMIENTO

- Primeramente, darle gracias a Dios sobre todas las cosas, quien me ha permitido la vida, la salud, el dinero, toda la paciencia que me ha dado y las fuerzas para poder finalizar la carrera con sabiduría y satisfacción.
- A mis padres, que me han apoyado en todo lo que he necesitado para poder cumplir mi meta de culminar mi carrera en esta prestigiosa alma mater.
- A la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-León, por haberme brindado el privilegio de poder estudiar en esta alma mater, de poder ser unos de los egresados de esta gran familia.
- A muchas más personas que de una u otra manera aportaron para que pudiera realizar mis sueños de graduarme.
- A todos los maestros que me dieron clases, ya que sin sus valiosos conocimientos no hubiese podido completar mi formación como matemático y como persona con valores éticos, morales y espirituales.
- A mis amigos y compañeros de clases, que de una u otra forma me animaron para seguir luchando en mis estudiando, brindándome ayuda en cada momento cuando la necesitaba.
- A mi ex maestro y tutor W. Milton Carvajal, quien me ha brindado su ayuda incondicional de su tiempo para la construcción de esta tesis.

Edgard Horacio Catín Ruiz

AGRADECIMIENTO

- Agradecida con Dios sobre todas las cosas, quien me ha dado la vida, la fe, la salud, y la fuerza espiritual e intelectual para finalizar mis estudios con sabiduría.
- A mi madre, Elizabeth Garmendia y mis abuelos Carlos Oviedo y Maura Garmendia, quienes no tengo palabras ni manera de agradecerles todo el amor, apoyo y comprensión a lo largo de estos años para cumplir esta meta, han sido y serán el motivo para seguir adelante.
- A la prestigiosa casa de estudios, nuestra Alma Máter la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua León, por abrir sus puertas y darme la oportunidad de estudiar para desarrollarme científicamente.
- A cada uno de mis maestros de la Universidad, quienes con sus conocimientos han trabajado con esmero y dedicación en mi formación profesional.
- A mi ex maestro y tutor Milton Carvajal, quien ha dispuesto su tiempo para trabajar en la elaboración de éste trabajo.
- A mis amigos y compañeros, que de alguna manera me animaron para seguir luchando.

Damaris Sulema Juárez Zavala.

DEDICATORIA

- A **Dios**, porque a Él debo lo que soy. Por darme la vida y la oportunidad de llegar hasta éste momento, darme la salud y confianza para lograr mis objetivos.

- A mi madre, quien ha sido y será siempre un ejemplo de entrega y voluntad para lograr lo que se propone.

- A mis abuelos, por apoyarme en todo momento, siendo constantes con sus consejos, valores y motivación, por ser ejemplos de perseverancia y constancia.

¡Éste triunfo también es de ustedes!

Damaris Sulema Juárez Zavala.

ÍNDICE

Introducción

Los problemas de optimización con restricciones permiten desarrollar análisis de correlación canónica con los cuales el método determina y evalúa resultados viables que involucran maximizar o minimizar una función multivariable cuya entrada tiene un número de dimensiones predeterminado. El método para encontrar la solución óptima es distinto en cada caso. En este trabajo, solamente se estudiará el problema de optimización con restricciones de igualdad, donde una de las técnicas para resolver problemas de este tipo es el método de multiplicadores de Lagrange.

Esta técnica, permite encontrar el máximo o el mínimo restringido de una función objetivo sujeta a una función de restricción de igualdad. Se estará abordando la parte matemática de este método, y se mostrarán ejemplos de la utilidad del mismo en el área de la economía, en el cual los problemas clásicos suelen ser maximizar la utilidad pese a las limitaciones de los recursos, como tiempo y dinero. El método Lagrangiano, utiliza su técnica de cálculo matemático para medir la satisfacción máxima de los clientes y los beneficios máximos del productor (o minimizar costos) de acuerdo a sus restricciones, también se muestra un pequeño ejemplo del uso del método en los problemas de teoría del consumidor, refiriéndose al problema dual y primal.

De manera que, el aporte de este método en esta disciplina es de gran importancia y la matemática brinda herramientas necesarias para resolver cuantitativamente estos problemas, a lo que algunos economistas refieren como problemas de optimización de restricciones. En fin, las matemáticas abordan muchos aportes de gran utilidad a nuestro mundo.

“El campo de la optimización es una mezcla fascinante de la teoría y los cálculos, la heurística y el rigor.” Roger Fletcher (1987).

ANTECEDENTES

Los análisis históricos del método del multiplicador de Lagrange, durante los siglos XIX y XX era conocido como multiplicador indeterminado. (Basado en el análisis de Xhonneux, 2011). Joseph Louis Lagrange (1736-1813) es uno de los matemáticos más conocidos de finales del siglo XVIII y sus principales aportes están relacionados principalmente a la teoría de números, funciones, las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales, contribuciones a la teoría de cuerdas, propagación del sonido, la mecánica y el cálculo variacional. La principal obra de Lagrange es el libro titulado "Mecánica Analítica", el cual es un resumen de todos los conocimientos adquiridos en mecánica desde Newton con un enfoque algebraico. Así, el matemático presenta los Multiplicadores de Lagrange por primera vez en el libro antes mencionado.


Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Se conoce que en aquellos años existía un problema que llevaba tiempo sin resolverse llamado el problema isoperimétrico en el cual se planteaban dos preguntas muy importantes. *¿Qué saben las abejas de geometría?* Los romanos se preguntaban por qué las abejas construyen sus colmenas utilizando compartimentos hexagonales. La forma hexagonal es la manera más eficiente de subdividir el plano, utilizando el menor perímetro posible; por lo tanto, la menor cantidad material necesario para hacerla. Pappus había demostrado que, entre todos los polígonos regulares de similar periferia, encierran más área que aquellos que poseen un mayor número de lados. Un círculo entonces, es la figura que encierra el espacio más grande de un contorno determinado, pues su número de lados es infinito. *¿Por qué las burbujas son redondas?* En la naturaleza, todos tienden a tener la menor energía posible, esto se logra teniendo la menor superficie; es decir, estando lo menos estirada posible. El volumen de una burbuja está determinado por la cantidad de aire que tiene en su interior. De acuerdo a su forma esférica ellas logran tener la menor cantidad de energía posible.

Después de esto, Euler trato de resolver el problema, fue entonces cuando recibió una carta de Lagrange en el cual le escribe diciendo que consideraba su profunda obra acerca de los problemas de máximos y mínimos como su mejor trabajo en matemáticas, sino que también en ella presentaba un nuevo método para resolver cierta clase de problemas de optimización. Lagrange aplicó el nuevo método de los multiplicadores para investigar el movimiento de una partícula en el espacio restringida a moverse sobre una superficie. Cuando Euler leyó la carta de Lagrange donde comunicaba su demostración interesado por la solución, ésta coincidía con el mismo resultado al que Euler había llegado. De modo que, Lagrange comenzó no solamente a desarrollar aplicaciones del método en el campo de la matemática y física sino en otras áreas como la economía, surgiendo en esta como una necesidad de solucionar problemas de optimización en el contexto de la segunda guerra mundial.

A pesar de que la incursión matemática en la economía ha sido reciente, Antonie Agustín Cournot (1081-1877), era un matemático conocido como fundador de la economía matemática. Junto sus ideas y las publico en 1938 pero el concepto de utilidad marginal apareció años después con Walras y Jevons. La matemática le proporciona un aspecto riguroso y científico a la economía, ha desarrollado nuevas técnicas de investigaciones operativas y en la interpretación de gráficos. Por consiguiente, se estima que muchos de los problemas en economía se reducen a una optimización sujeta a ciertas restricciones, por ejemplo:

Antonie Agustín Cournot (1081-1877)

- Un consumidor que desea maximizar su satisfacción (optimiza su función de utilidad limitada a restricciones presupuestaria).
- Un productor que desea minimizar su costo de producción (optimiza su función de costos considerando la cantidad deseada de producción).

En el desarrollo histórico de este objeto matemático solo se utilizaron registros en lengua natural y registros algebraicos. En cuanto a las primeras apariciones del multiplicador de Lagrange apreciamos que el sistema de equilibrio se representó con varias variables algebraicamente por "$Pdp + Qdq + Rdr + etc. = 0$", por el cual tuvo una evolución a través de las ecuaciones diferenciales como "$P\ dp\ dx + Q\ dq\ dx + R\ dr\ dx + \lambda\ dL\ dx + \mu\ dM\ dx + \nu\ dN\ dx + etc. = 0$". Con respecto a algunos términos nuevos que fueron desarrollándose a través de la historia para la aparición del Multiplicador de Lagrange, rescatamos lo siguiente: el término de los Multiplicadores de Lagrange se refiere a resolver un problema de optimización de una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sujeto a varias restricciones de igualdad $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots,$ $g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, mientras que el Multiplicador de Lagrange se refiere a una sola restricción; es decir, a la función definida por $\mathcal{L}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Por otro lado, el Teorema de Lagrange da las condiciones para resolver el problema de optimización con restricciones. Los ejemplos mencionados anteriormente tienen ese tipo de restricciones que reducen el método de Lagrange al problema restringido en *n* variables en uno sin restricciones de *n+1* varias cuyas ecuaciones pueden ser resueltas. Es un método que utiliza la optimización para trabajar con funciones de varias variables donde interesa maximizar o minimizar y está sujeta a restricciones. Se introduce una nueva variable escalar desconocida, el multiplicador de Lagrange para cada restricción y una forma de combinación lineal involucrando los multiplicadores como coeficientes. Su demostración involucra derivadas parciales o bien diferenciales totales, aplicando regla de la cadena. El fin es, usando alguna función implícita, encontrar las condiciones para que la derivada con respecto a las variables independientes de una función sea igual a cero.

JUSTIFICACIÓN

El hombre moderno utiliza a menudo métodos y artificios matemáticos para dar solución a los problemas cotidianos, en el campo de la economía es de gran efectividad el uso de métodos de análisis para procesar datos que ayuden a tomar decisiones como es el método de "Multiplicadores de Lagrange".

Con este estudio, se pretende desarrollar la maximización restringida sujeta a condiciones; desde la perspectiva matemática se hace necesario destacar la importancia de asociar una función de utilidad a unas preferencias esto abre puertas al análisis matemático para encontrar máximos o mínimos de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones.

Suponiendo que un fabricante de software tiene cierta producción, en donde el costo total del trabajo y capital este limitado a cierto presupuesto. Un problema como este, puede modelarse para una mejor comprensión matemática y obtener una solución óptima por medio del método de multiplicadores de Lagrange. El propósito es obtener la mayor producción posible dependiendo del presupuesto que se haya designado para este trabajo, donde se tendrá que formar dos funciones, la primera función objetivo será la de producción y la segunda será llamada función de restricción y será la del presupuesto.

Se denota la función objetivo por (x, y), la cual está sujeta a la función de restricción $g\ (x, y) =$ c. Con la ayuda de las herramientas necesarias que proporciona el método introduciendo la función Lagrangiana: $\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (\mathrm{c}\ \text{-}\ g\ (x, y))$. Por medio de las condiciones de primer orden encontradas se aplican a esta función, desde la cual se extraen los candidatos a óptimos que satisfacen las condiciones del problema de producción sujeta al presupuesto.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Implementar el método de multiplicadores de Lagrange en problemas de optimización con restricciones de igualdad, resolviendo ejemplos teóricos y de aplicación, que permitan apropiarse del método y conlleven a una propuesta de normativa.

Objetivos Específicos

- Mostrar una prueba analítica y geométrica del método de los multiplicadores de Lagrange limitada a problemas de dos variables.
- Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange en el campo económico, que permita determinar y visualizar la solución óptima y su consecuente análisis de sensibilidad.
- Estudiar el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos y mínimos y ver las condiciones cuando el método falla.

1. Conceptos básicos

Aquí se expone de manera resumida los principales resultados, relacionados con los estudiados en el grado de Matemáticas; sobre el cálculo de derivadas, funciones implícitas, gradientes, matrices y las condiciones suficientes para extremos locales y globales, que serán útiles para desarrollar el Método de los multiplicadores de Lagrange. Además, se incluye la función de producción de Cobb-Douglas que será usada para ejemplificar problemas económicos.

1.1. Teorema de la función implícita: Si tomamos (x_0, y_0) como un punto sobre el conjunto de puntos de $G(x, y) = \mathrm{c}$ en el plano, dónde G es una función continua de dos variables. Si $(\partial G/\partial y)\,(x_0, y_0) \neq 0$, luego definimos a $G(x, y) = \mathrm{c}$ como una curva uniforme alrededor de $(x_0,\, y_0)$ que pueda ser visto como el gráfico de una función continua $y = f(x)$. Además, la pendiente de esta curva es:

$$-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Si $(\partial G/\partial y)\,(x_0, y_0) = 0$, pero $(\partial G/\partial y)\,(x_0, y_0) \neq 0$, el teorema de la función implícita afirma que el conjunto de puntos de $G(x, y) = \mathrm{c}$ es una curva uniforme sobre (x_0, y_0), que podemos considerar definir x como una función de y. Ademas, la línea tangente a la curva en (x_0, y_0) es paralela al eje y, es decir, vertical.

Gradiente: El gradiente de una función escalar multivariable $f\ (x, y, \ldots)$ denotado como ∇f, empaqueta toda la información de sus derivadas parciales en un vector:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

En donde el gradiente da un vector perpendicular a la curva de nivel que pasa por el punto O.

1.2. Derivadas parciales: Si $\mathrm{z} = f\ (x, y)$ es una función de dos variables, entonces las derivadas parciales con respecto a x en un punto (x, y) es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Y la derivada parcial con respecto a y es:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Siempre que el límite exista.

Regla de la cadena en derivadas parciales: Si $z = f\ (x, y)$ es diferenciable y $x = g\ (u, v)$ y $y = h\ (u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

1.3. **Sistema de ecuaciones algebraicas:** un sistema de ecuaciones algebraicas es un conjunto de dos o más ecuaciones, con más de una incógnita que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas operaciones. En un sistema de ecuaciones algebraicas las incógnitas son valores numéricos menores a la constante (o más generalmente elementos de un cuerpo sobre el que se plantean las ecuaciones), mientras que en una ecuación diferencial las incógnitas son funciones o distribuciones de un cierto conjunto definido de antemano. Una solución de dicho sistema, por tanto, es un valor o una función que substituida en las ecuaciones del sistema hace que éstas se cumplan automáticamente sin que se llegue a una contradicción. En otras palabras, el valor que reemplazamos en las incógnitas debe hacer cumplir la igualdad del sistema. Las incógnitas se suelen representar utilizando las últimas letras del alfabeto latino, o si son demasiadas, con subíndices.

1.3.1. Método de Sustitución: Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y reemplazar este valor en la otra ecuación, de esta forma se llega a una ecuación de primer grado con una incógnita.

1.3.2. Método de Igualación: El método de igualación, consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. Procedimiento para usar el método de igualación:

1. Despejar una incógnita en una de las ecuaciones, que quedará en función de la otra incógnita (seguiremos teniendo una ecuación).
2. Despejar la misma incógnita en la otra ecuación.
3. Igualar los segundos miembros de las dos incógnitas despejadas, formando una nueva ecuación con una incógnita.
4. Despejar la única incógnita que nos quede. Obtenemos el valor numérico de una incógnita.
5. Sustituir la incógnita despejada en el paso 4 por su valor numérico en cualquiera de las dos ecuaciones originales.
6. Operar para obtener el valor numérico de la otra incógnita.

1.4. **Matriz Hessiana:** la matriz hessiana o hessiano de una función f de n variables, es la matriz cuadrada de $n \times n$, de las segundas derivadas parciales.

Dada una función real f de n variables reales: $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow (x)$

Si todas las segundas derivadas parciales de f existen, se define la matriz hessiana de f como: $H_f(x)$ donde,

$$\mathrm{H_f(x)_{i,j}} = \frac{\partial^2 \mathrm{f(x)}}{\partial \mathrm{x_i}\, \partial \mathrm{x_j}}$$

Tomando la siguiente forma:

$$\mathrm{H(f)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

1.5. **Gauss-Jordan:** Para que una matriz sea de esta forma debe tener las siguientes propiedades:

1. Si un renglón no consta completamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en el renglón es un 1. (A este 1 de le denomina 1 principal.)
2. Si existen renglones que consten completamente de ceros, entonces se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3. Si dos renglones sucesivos no constan completamente de ceros. El 1 principal del renglón superior.
4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

1.6. Teorema (condiciones suficientes para extremo local). Considera el problema de optimización de $f\ (x, y)$ sobre la restricción $C_g = \{(x, y)|g(x, y) = c\}$, con f y g funciones doblemente diferenciables en R^2. Sea (x^*, y^*, λ^*) el punto crítico de la lagrangeana correspondiente, $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda(c - g(x, y))$, y sea

$$|H_{\mathcal{L}}(x^*, y^*, \lambda^*)| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{x\lambda} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{vmatrix}$$

el determinante de la matriz hessiana de en $\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*)$. Entonces:

a) $|H_{\mathcal{L}}\ (x^*, y^*, \lambda^*)| > 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ es un máximo local de f en C_g.

b) $|H_{\mathcal{L}}(x^*, y^*, \lambda^*)| < 0 \Rightarrow (x^*, y^*)$ es un mínimo local de f en C_g.

1.11. Teorema (condiciones suficientes para extremo global). Sea (x^*, y^*, λ^*) un punto crítico de la lagrangeana $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$. Entonces:

a) $\mathcal{L}$ es cóncava con respecto a $(x, y) \Rightarrow f$ tiene un máximo global en (x^*, y^*).

b) $\mathcal{L}$ es convexa con respecto a $(x, y) \Rightarrow f$ tiene un mínimo global en (x^*, y^*).

1.12. Función de producción de Cobb-Douglas: Se representa así: $Q(K, L) = AL^\beta K^\alpha$

En donde:

- **Q**: es la producción
- **L**: es la cantidad de trabajo (normalmente medido en horas-hombre)
- **K**: es la cantidad de capital empleado
- **A**: representa el nivel de tecnología dado
- **α y β**: representan el nivel de elasticidad de los factores productivos, ambos son positivos y son menores a 1.

2. El Método de los Multiplicadores de Lagrange

A continuación, se desarrollarán y analizarán problemas para funciones de varias variables mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Se muestran ejemplos de problemas económicos de optimización con funciones que dependen de ciertos parámetros (precios) que se mantienen constantes durante el proceso de optimización pero que pueden cambiar de acuerdo a situaciones económicas.

2.1. Función Lagrangiana

El problema de maximización restringida más simple, el de maximizar una función $f\ (x, y)$ de dos variables sujetas a una única restricción de igualdad $g\ (x, y) = \mathrm{c}$. Es decir, $max\ f(x, y)$ $sujeto\ a\quad p_x x + p_y y = I$ (Restricción presupuestaria). Se ignora por un momento el requisito de que x y y no sean negativos y la posibilidad de que no todos los ingresos I puedan gastarse.

Teniendo en cuenta este modelo de elección del consumidor, se examina la solución geométrica habitual para este problema. Primero, dibuje el conjunto de restricciones C en el plano xy. La línea gruesa en la figura. Luego, dibuje una muestra representativa de las curvas de nivel de la función objetivo f.

Geométricamente, el objetivo es encontrar la curva de nivel de valor más alto de f que cumpla con el conjunto de restricciones. La curva de nivel más alto de f no puede cruzar la curva de restricción C; si lo hiciera, los conjuntos de niveles superiores cercanos también se cruzarían, como ocurre en el punto b en la figura 1. Este conjunto de nivel más alto de f debe tocar C (para que se cumpla la restricción). Otra forma de decir esto es que la curva de nivel más alto de f para tocar el conjunto de restricciones C debe ser tangente a C en el máximo restringido. Esta situación ocurre en el punto x^* en la figura 1. El hecho de que la curva de nivel de f sea tangente al conjunto de restricciones C en el máximo restringido x^* significa que la pendiente del conjunto de niveles de f es igual a la pendiente de la curva de

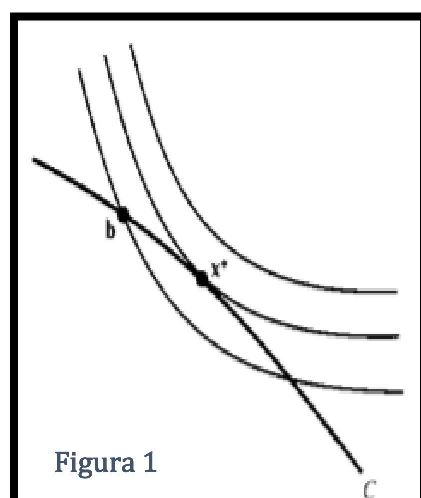


Figura 1

restricción C en x^*, el teorema de la función implícita garantiza que las pendientes de las funciones son iguales, y puede definirse como:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)\Big/\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)$$

El máximo restringido, la curva de nivel más alta de f es tangente a la restricción fijada C.

Y la pendiente del conjunto de restricción $\{h(x_1, x_2) = c\}$ en x^* es:

$$-\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)\Big/\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)$$

El hecho de que estas dos pendientes son iguales en x^* significa que:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}$$

A continuación, se reescribirá esta ecuación y se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}$$

Para evitar trabajar con posibles denominadores ceros, se llama a λ como el valor común de las dos ecuaciones y se tiene lo siguiente:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} = \lambda$$

Reescribiendo la ecuación, queda de esta manera:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \lambda\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \lambda\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

Se debe encontrar la solución de las tres variables (x_1, x_2, λ), se necesitan tres ecuaciones, una más las dos que se acaban de obtener. Pero hay una tercera ecuación: la ecuación de restricción $h(x_1, x_2) = c$. Incluyendo la ecuación de restricción con las dos ecuaciones que se obtuvieron, y se forma un sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$
$$h(x_1, x_2) - c = 0$$

otra forma de escribir este sistema análogamente. Y se forma de este sistema, la **función Lagrangiana** o conocida también como el **Lagrangiano**

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\,(x, y, \lambda) = f\,(x, y) + \lambda\,(\mathrm{c} - g\,(x, y))$$

Para encontrar los puntos críticos de la Lagrangiana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ se iguala cada una las derivadas parciales de la Lagrangiana con respecto a cada una de las variables (x, y) a cero, es decir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \mathcal{L}_x = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mathcal{L}_y = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathcal{L}_\lambda = 0$$

Como puede verificarse fácilmente, el resultado de este proceso es precisamente el sistema de tres ecuaciones con tres variables que obtuvimos. Tomando en cuenta que λ solo multiplica la restricción de la función Lagrangiana λ, la ecuación: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathcal{L}_\lambda = 0$.

Es equivalente con la ecuación de restricción $h(x_1, x_2) - c = 0 \Leftrightarrow c - h(x_1, x_2) = 0$. Esta nueva variable λ que multiplica la ecuación de restricción, es llamada un multiplicador de Lagrange.

Cuando se quiere maximizar una función en un problema sin restricción, simplemente se resuelven sus puntos críticos al establecer sus primeras derivadas parciales de primer orden igualadas a cero. Sin embargo, por la introducción del multiplicador de Lagrange λ en el problema de restricción, se ha transformado un problema con restricción de dos variables al problema de encontrar los puntos críticos de una función $\boldsymbol{\mathcal{L}}\,(x, y, \lambda)$ de una variable más. Es decir, se reduce de un problema de optimización con restricción de dos variables a un problema de optimización sin restricción en tres variables. Esta reducción es la inclusión de una variable nueva y algo artificial λ. Esta nueva variable λ tiene un significado económico, que da una nueva medida de valor de los recursos en el problema en consideración.

Una palabra de precaución está en orden aquí. Esta reducción no habría funcionado si ambas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial h}{\partial y}$$

Serán cero en el máximo de x^* en las ecuaciones:

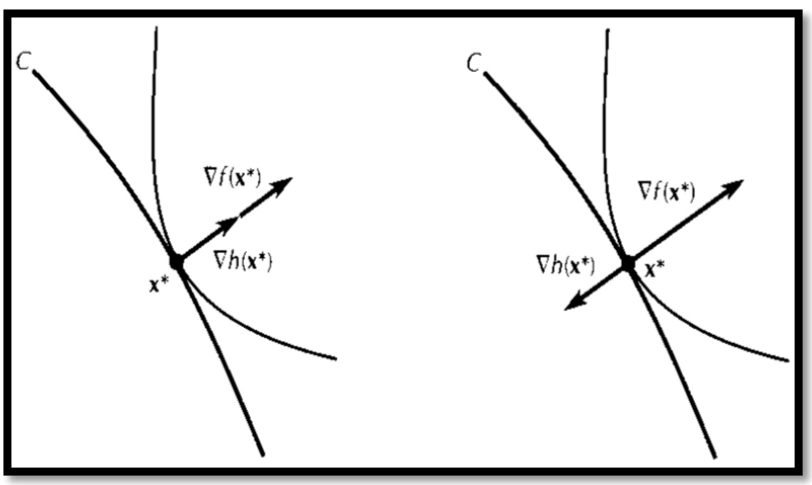
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}$$

Por esta razón, se asume que: $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ o $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ o ambas. No es cero en el máximo restringido. Dado que esto es una (leve) restricción en el conjunto de restricciones, es llamado una cualificación de restricción. Si la restricción es lineal, es usado como la maximización de utilidad en los ejemplos que se verán posteriormente, esta cualificación de restricción se satisface automáticamente. Así, se resume el análisis geométrico del problema de maximizar (o minimizar) a una función de dos variables por una sola restricción de igualdad.

Entonces, la prueba geométrica se basa en el hecho de que las curvas de nivel de f y de h son tangentes para el punto (x_1^*, x_2^*) y esto significa que sus pendientes son iguales. Ahora, se presenta otra versión de la prueba anterior basada en los vectores gradientes,

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ y } \nabla h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Considerando como vectores de desplazamiento o flechas en el punto x, son perpendiculares a los conjuntos de nivel de f y de h respectivamente. Ya que los conjuntos de niveles de f y de h tiene la misma pendiente en x^*. Los vectores gradientes $\nabla f(x)$ y $\nabla\, h\,(x)$ deben alinearse en x^*, señalan en la misma dirección del lado izquierdo de la imagen que muestra o en direcciones opuestas como en la imagen de la derecha. En cualquiera de los casos, los gradientes son múltiplos escalares el uno del otro. Si se escribe este multiplicador como λ, entonces se tendrá que el $\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla h(x^*)$.



$\nabla f(x^*)$ y $\nabla h(x^*)$ se alinean en el máximo restringido o mínimo restringido x^*.

Esto es,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \lambda^* \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} - \lambda^* \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Esto se traduce inmediatamente en el sistema de ecuación:

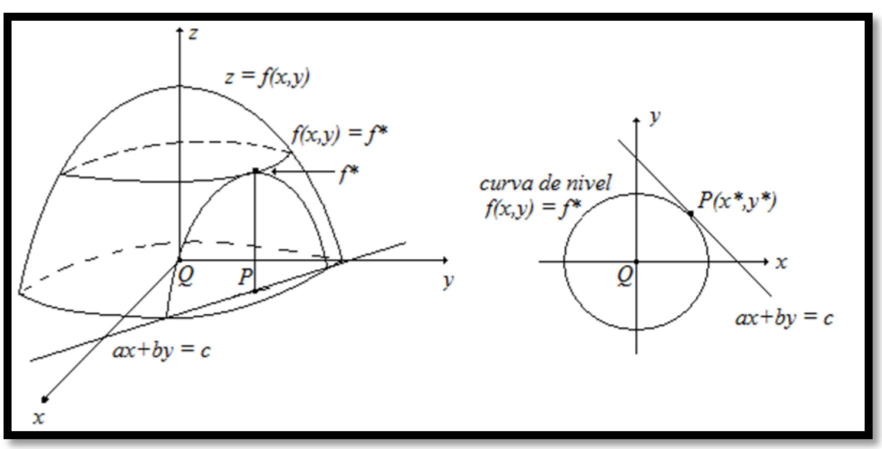
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0$$

Anteriormente se presentó una prueba analítica del método y esta es la versión geométrica. Si se estaba minimizando f en lugar de maximizar f en el conjunto de restricción C_h, se habría utilizado el mismo argumento que se utilizó en la prueba geométrica. Cuando se analice la condición de segundo orden, se distinguirá el máximo del mínimo.

2.2. Condiciones de primer orden

Primero, se considera el caso simple de maximización de una función diferenciable de dos variables, $f(x, y)$ sujeto a una restricción de igualdad, $g(x, y) = c$, con g diferenciable y c constante, dado por: $max\ f(x, y), s. a\ g(x, y) = c$.

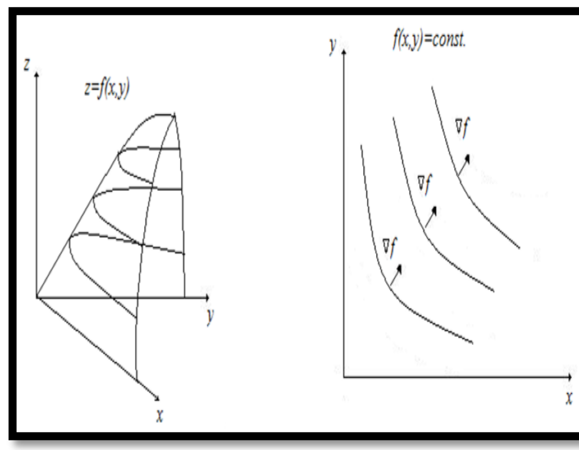
Debido a la restricción, la solución óptima $P(x^*, y^*)$ no necesariamente ocurre en los puntos en donde la superficie $z = f(x, y)$ alcanza su altura máxima ($\nabla f = 0$),sino en los puntos de la curva $g(x, y) = c$, sobre los que f alcanza su máximo valor restringido. Para ilustrar esta idea, la siguiente figura muestra la maximización de una función cóncava $z = f(x, y)$ en R^3 sujeta a una restricción lineal $g(x, y) = ax + by = c$ en R^2.

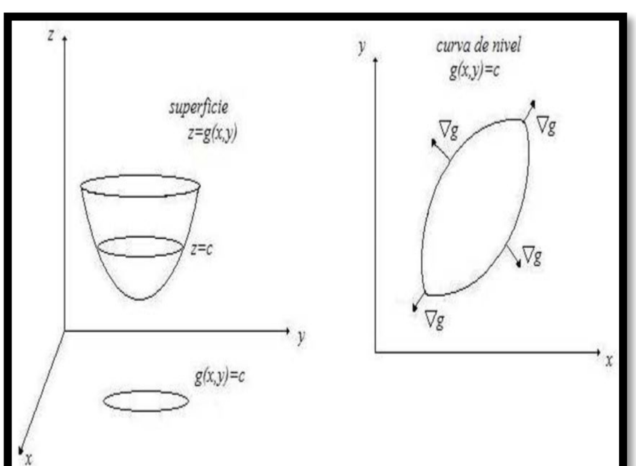


En la figura de la izquierda se observa que el máximo restringido f^* de la función f ocurre en el punto $P(x^*, y^*)$ de la recta $ax + by = c$, y no en el punto Q en donde f se maximiza libremente. Nota que P pertenece a la curva de nivel $f(x, y) = f^*$ correspondiente a $z = f^*$. En la figura de la derecha, se muestra que el óptimo P es el punto de la restricción $ax + by = c$ que está más cercano a Q. Esto ocurre en el punto de tangencia de la curva de restricción y la curva de nivel $f(x, y) = f^*$.

Pueden existir varios candidatos óptimos (locales o globales) para una función f, dados por los puntos donde la restricción $g(x, y) = c$, es tangente a las curvas de nivel de f. Esta condición de tangencia puede expresarse formalmente en términos de los vectores gradiente de las funciones f y g, como se explica a continuación.

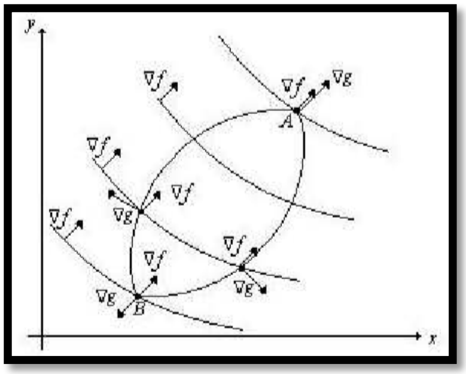
El gradiente de una función diferenciable es un vector perpendicular a sus curvas de nivel y apunta en la dirección de su mayor crecimiento en cada punto. La siguiente figura muestra una posible función objetivo $z = f(x, y)$ en R^3. La figura de la derecha muestra algunas de sus curvas de nivel, en R^2, y la dirección de los vectores gradiente ∇f.





Por otra parte, la curva de restricción $g(x, y) = c$ en R^2 puede considerarse como la curva de nivel $z = c$ de una función $z = g(x, y)$ en R^2, como se ilustra en las siguientes figuras. En este ejemplo, el vector gradiente ∇g apunta hacia afuera de la curva de nivel.

Así, el problema de maximización de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g\ (x,\ y) = c$ se representa gráficamente de la siguiente manera:



Aquí existen dos candidatos a óptimo, que son los puntos de tangencia denotados por A y B. La condición de tangencia implica que, en esos puntos, los vectores gradiente ∇f y ∇g son paralelos entre sí, es decir, $\nabla f \parallel \nabla g$. Por lo tanto, en los puntos en donde f alcanza sus valores extremos debe existir un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$.

El número λ se denomina el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción $g\ (x, y) = c$. Aunque aquí λ juega el papel de una constante de proporcionalidad entre ∇f y ∇g en el óptimo, también representa una interpretación muy interesante y útil.

Por lo general, en el óptimo restringido P de f se tiene $\nabla g = 0$, con $\lambda = 0$. Como $\nabla f = \lambda \nabla g$ en P, en ese punto se tiene $\nabla f = 0$. Así, la condición $\nabla f = 0$ para optimización libre, aquí deberá reemplazarse por las siguientes dos condiciones: $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g\ (x, y) = c$.

Estas dos ecuaciones pueden conjuntarse dentro de un formalismo, expresado de la siguiente manera. Para ello, se reescriben los gradientes de la primera ecuación en términos de sus componentes x y y, obteniendo

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$$
$$f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$$
$$g\ (x,y) = c$$

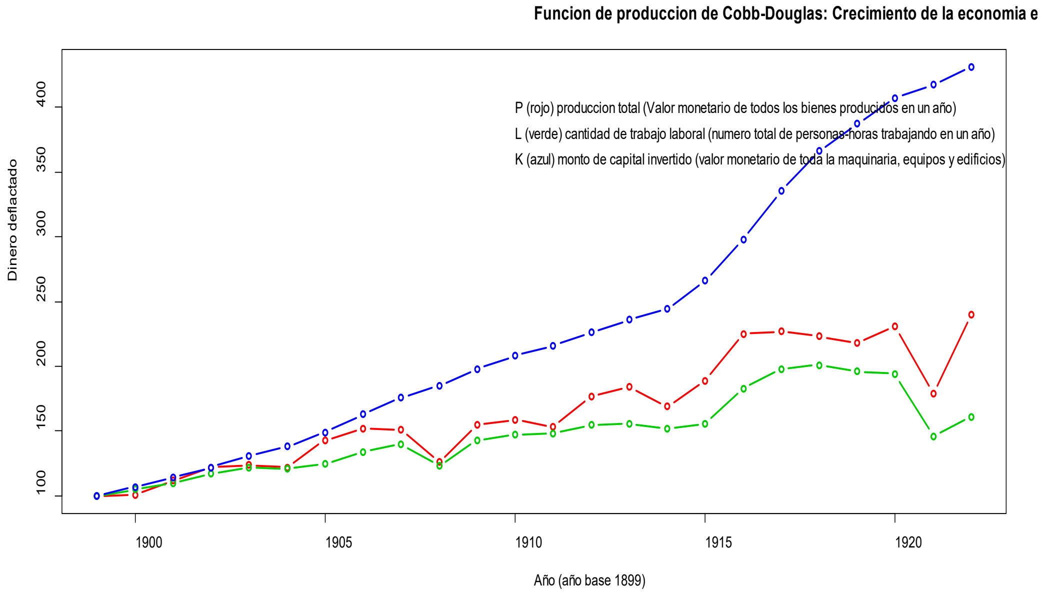
Éste es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con solución x^*, y^* y λ^*. Se señala que esta solución no es el punto crítico de la función objetivo $f\ (x, y)$, ya que $\nabla f\ = \lambda \nabla g \neq 0$. Sin embargo, (x^*, y^*, λ^*) puede interpretarse como el punto crítico de una cierta función de las variables (x, y, λ), a la que se le llamará función lagrangeana $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ definida como: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda(\mathrm{c} - g(x,y))$.

Se observa que la función $\mathcal{L}$ habita en un espacio de dimensión mayor que f, ya que no sólo tiene como variables independientes a x y y, sino también a λ. De esta manera, en lugar de considerar la optimización restringida de f, el método de Lagrange se basa en la optimización libre de la función lagrangeana, con las siguientes condiciones de primer orden:

$$\mathcal{L}_x = fx(x,y) - \lambda gx(x,y) = 0$$
$$\mathcal{L}_y = fy(x,y) - \lambda gy(x,y) = 0;$$
$$\mathcal{L}_\lambda = c - g(x,y) = 0$$

Estas tres ecuaciones representan la condición de tangencia, $\nabla f = \lambda \nabla g$, y el cumplimiento de la restricción, $g\ (x,\ y) = c$, antes discutidas. A continuación, se presenta un ejemplo clásico en economía de resolver problemas usando la función de producción de Cobb-Douglas que se usará en la mayoría de los ejemplos para representar las relaciones entre un producto y las variaciones de insumos trabajo y capital. Ademas, se observará el cumplimiento de las condiciones de tangencia en el ejemplo 1 de Microeconomía.

En 1928, Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que modelaron el crecimiento de la economía estadounidense durante el período 1899-1922. Consideraron una visión simplificada de la economía en la que la producción de salida está determinada por la cantidad de trabajo involucrado y la cantidad de capital invertido. Si bien hay otros muchos factores que afectan el desempeño económico, su modelo demostró ser muy preciso. La función que utilizaban para modelar la producción era de la forma: $P(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$. Donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes producidos en un año), L es la cantidad de trabajo (el número total de persona-horas trabajadas en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de todas las maquinarias, equipos y edificios). Además, se cumple la condición que $\alpha + \beta = 1$ (válido para restricciones de igualdad) siendo ambos positivos. En el gráfico de secuencia se observa el comportamiento anual de las tres variables estimadas en el orden P, L y K. (En anexo se ve la estimación de parámetros).



Ejemplo 1 de Microeconomía: Dada la función de utilidad: $f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$ y la renta es de \$500,000 y los precios de los bienes son: $P_x = \$25,000$ y $P_y = \$15,000$ respectivamente. Encontrar las demandas óptimas. (Véase el gráfico de Contorno al final de este este ejercicio).

Solución: Función Objetivo: Max $f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$ y la restricción presupuestaria s.a $P_x x + P_y y = I$. Para resolver se usa la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (\mathrm{c} - g\ (x, y))$ y se tiene:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^{2/3}y^{1/3} + \lambda(I - P_x x - P_y y)$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables, se obtienen las siguientes condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda P_x = 0 \ \ (1)$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} - \lambda P_y = 0 \ \ (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = I - P_x x - P_y y = 0 \ \ (3)$$

Despejando λ en (1):

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} - \lambda P_x = 0 \Leftrightarrow \lambda P_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{P_x} \quad (4)$$

Despejando λ en (2):

$$\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} - \lambda P_y = 0 \Leftrightarrow \lambda P_y = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}}{P_y} \quad (5)$$

Se igualan las ecuaciones (4) y (5):

$$\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{P_x} = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{P_y} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\frac{\frac{2}{3}x^{\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{1}{3}y^{\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}x^{-1}}{\frac{1}{3}y^{-1}} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{2x^{-1}}{y^{-1}} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{2y}{x} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$x = \frac{2y * P_y}{P_x} \quad (6) \qquad ; \qquad y = \frac{x * P_x}{2P_y} \quad (7)$$

Se reemplaza (6) en la restricción presupuestaria; es decir, en (3):

$$P_x x + P_y y = I \Leftrightarrow P_x\left(\frac{2yP_y}{P_x}\right) + P_y y = I \Leftrightarrow 2yP_y + P_y y = I \Leftrightarrow y(2P_y + P_y) = I$$

$$\Leftrightarrow y(3P_y) = I \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{I}{3P_y} \quad (8)$$

Luego, se reemplaza (7) en la restricción presupuestaria en (3):

$$P_x x + P_y y = I \Leftrightarrow P_x x + P_y\left(\frac{P_x x}{2P_y}\right) = I \Leftrightarrow P_x x + \frac{P_x x}{2} = I \Leftrightarrow 2P_x x + P_x x = 2I \Leftrightarrow$$

$$x(2P_x + P_x) = 2I \Leftrightarrow x(3P_x) = 2I \Leftrightarrow x = \frac{2I}{3P_x} \quad (9)$$

Una vez la obtenidas las demandas óptimas (8) y (9), se sustituyen los datos que brinda el problema: $I = \$500,000$; $P_x = \$25,000$; $P_y = \$15,000$

Se sustituye en (8) y (9) y se obtienen las demandas óptimas:

$$x = \frac{2I}{3P_x} \quad (9) \Leftrightarrow x = \frac{2(500{,}000)}{3(25{,}000)} \Leftrightarrow x = \$13.33$$

Luego en (8):

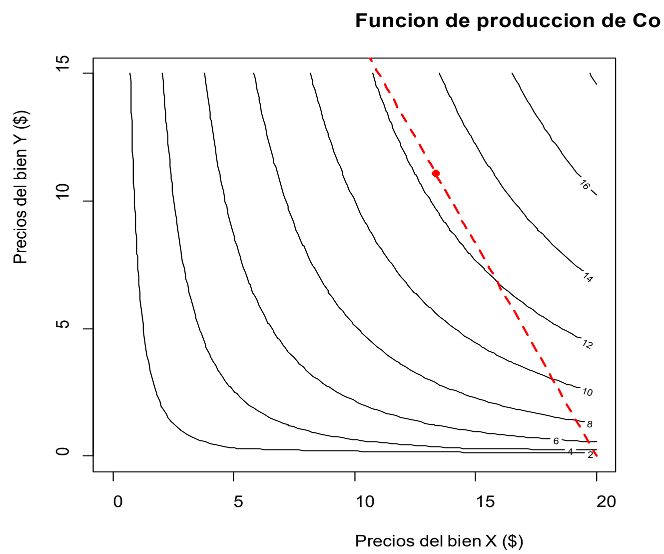
$$y = \frac{I}{3P_y} \quad (8) \Leftrightarrow y = \frac{500000}{3(15000)} \Leftrightarrow y = \$11.11$$

Hasta aquí se responde a la pregunta de la demanda. Las cantidades demandadas de cada bien y el multiplicador de Lagrange representan funciones de los precios y de la renta monetaria ópitma. Para saber la utilidad máxima solo se sustituyen los valores en la función $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$, y se obtiene lo siguiente:

$$f(13.33, 11.11) = (13.33)^{\frac{2}{3}}(11.11)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(13.33, 11.11) = (5.62)(2.23)$$

$$f(13.33,11.11) = \$12.53$$



Ejemplo 2: Utilice el método de multiplicadores de Lagrange a fin de determinar los extremos de la función f para la cual $f(x, y) = 3x + 4y$ - 3. Si el punto (x, y) está sobre la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 25$ (véase el gráfico de contorno al final del ejercicio).

Solución: Primero, se escribe la ecuación de la circunferencia en la forma $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$, con el propósito de encontrar los extremos relativos de f sujeto a esta restricción.

Usando la función lagrangeana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(\text{c} - g(x, y))$:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + 4y - 3 + \lambda\big(24 - (x^2 + y^2 - 2x)\big)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 3x + 4y - 3 + \lambda(24 - x^2 - y^2 + 2x)$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables para obtener las condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = 3 - 2\lambda x + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\lambda(1-x) = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_y = 4 - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -x^2 - y^2 + 2x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \quad (3)$$

Se resuelve para λ en (1):

$$3 + 2\lambda(1-x) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(1-x) = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2(1-x)} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2(x-1)} \quad (4)$$

Ahora, para λ en (2):

$$4 - 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2\lambda y = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{2y} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{y} \quad (5)$$

Igualando (4) y (5):

$$\frac{3}{2(x-1)} = \frac{2}{y} \Leftrightarrow y = \frac{4(x-1)}{3} \quad (6)$$

Se sustituye (6) en (3):

$$x^2 + \left(\frac{4(x-1)}{3}\right)^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}(x^2 - 2x + 1) - 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 16x^2 - 32x + 16 - 18x - 216 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 50x - 200 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = 4$$

Sustituyendo el valor encontrado $x = -2$ en (6):

$$y = \frac{4(-2-1)}{3} = \frac{4(-3)}{3} = -4$$

Y con $x = 4$ en (6):

$$y = \frac{4(4-1)}{3} = \frac{4(3)}{3} = 3$$

Se sustituye $x = -2$ en (4):

$$\lambda = \frac{3}{2(-2-1)} = \frac{3}{2(-3)} = -\frac{1}{2}$$

y luego $x = 4$ en (4):

$$\lambda = \frac{3}{2(4-1)} = \frac{3}{2(3)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto los puntos $(-2,-4,-1/2)$ y $(4,4,1/2)$ son los puntos críticos del $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Así, $(-2,-4)$ y $(4,4)$ son los únicos puntos posibles para los cuales f tiene un extremo relativo.

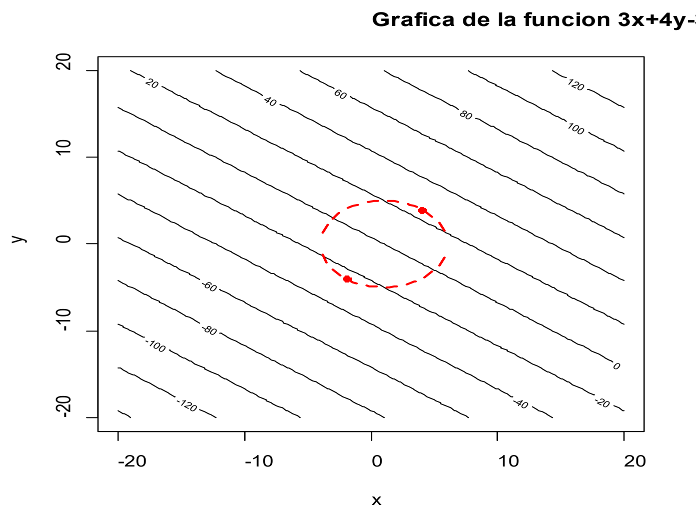
Luego, se sustituye el primer punto encontrado $(-2,-4)$ en la función objetivo

$$f(-2,-4) = 3(-2) + 4(-4) - 3 = -6 - 16 - 3 = -25$$

El segundo punto $(4,4)$ en la función objetivo

$$f(4,4) = 3(4) + 4(4) - 3 = 12 + 16 - 3 = 25$$

Por lo tanto, el valor mínimo relativo de f es -25 y su valor máximo relativo es 25.

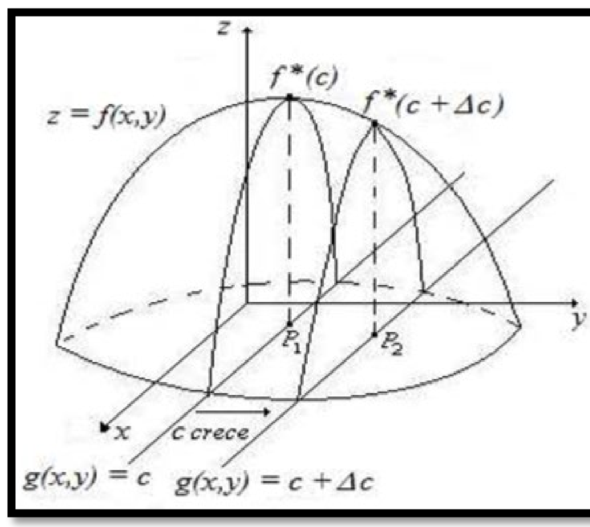


2.3. El significado del multiplicador $\boldsymbol{\lambda}$

Al resolver problemas de optimización restringidos, parece estar derivando información extraña en los valores del multiplicador $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$. Sin embargo, los multiplicadores desempeñan un papel importante en el análisis económico, en esta sección se verá que el multiplicador mide la sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo a los cambios en el lado derecho de las restricciones y, como resultado, proporciona una medida natural del valor para recursos escasos en la maximización de problemas económicos. El multiplicador Lagrangiano, representado en la ecuación por λ, representa la tasa de cambio en la utilidad relativa al cambio de restricción de presupuesto. En economía, esto se conoce como el *valor o utilidad marginal*, el aumento en la utilidad ganada por un aumento de restricción de presupuesto.

Para iniciar el análisis, se toma el problema más simple, el problema de dos variables y una restricción de igualdad. Es decir, maximizar $f\ (x, y)$, Sujeto a $g\ (x, y) = c$. Si se considera a c como un parámetro que varía para cada problema. Entonces, para cada valor de c, se escribirá $\left(x^*(c), y^*(c)\right)$ siendo esto para la solución del problema, y escribir a $\lambda^*(c)$ para el multiplicador que corresponde a esta solución. Luego, sea $f\ (x^*(c), y^*(c))$ el valor óptimo correspondiente de la función objetivo. Se probará que bajo condiciones razonables que se mantengan por casi todos los problemas de maximización restringida, $\lambda^*(c)$ mide la tasa de cambio del valor óptimo de f con respecto al parámetro c.

Prueba: A cada valor del parámetro c le corresponde un punto óptimo, $P(x^*(c), y^*(c))$. En consecuencia, el valor óptimo f^* de la función f, $f^*(c) = f\ (x^*(c), y^*(c))$, también depende de c, como se muestra en la siguiente figura.



Entonces, tiene sentido preguntarse ¿cómo cambia el óptimo f^* cuando el parámetro c se incrementa en Δc?. Si Δc es suficientemente pequeño, el cambio en f^* puede aproximarse por la derivada

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lim_{\Delta c \to 0} \frac{f^*(c + \Delta c) - f^*(c)}{\Delta c}$$

La cual sera utilizada para derivar la función lagrangiana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, como se quiere ver que tanto afectaría el cambio del parámetro c, es necesario incluirlo como una de las variables de la cual dependa la función lagrangiana para poder analizar su cambio por medio de la derivada, esto es: $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ (x, y, λ) $= f\ (x, y) + \lambda\ (c$ - $g\ (x, y))$.

Se toma como solución los puntos $(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c))$, el Lagrangiano quedaría de la siguiente forma: $\mathcal{L}^*(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)) = f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big) + \lambda^*(c)\left(c - g^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)\right)$. Se puede observar que la solución para maximizar la función se logra en el punto $f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$, y como $g^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ es una solución del problema, entonces se cancelaría y se haría cero al restar c con $g^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$,

$$\mathcal{L}^*\big(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)\big) = f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big) + \lambda^*(c)(0)$$

$$\mathcal{L}^*\big(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)\big) = f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$$

Se observa que $f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ con $\mathcal{L}^*\big(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)\big)$ son la misma solución del problema. Luego se calcula la derivada parcial aplicando la regla de la cadena al Lagrangiano con respecto a c para obtener lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial c} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial c} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda^*}\frac{\partial \lambda^*}{\partial c} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial c}$$

Dado que se está calculando las derivadas parciales del lagrangiano con respecto a c, todas las derivadas parciales de las demás variables es cero; es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial c} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c}(1)$$

Calcular la derivada parcial de la solución del lagrangiano con respecto a c,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c} = \lambda^*(c)$$

Según el resultado que se obtuvo anteriormente en donde $\mathcal{L}^*\big(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)\big) = f^*\big(x^*(c), y^*(c)\big)$, entonces resulta:

$$\lambda^*(c) = \frac{\partial f^*(x^*(c), y^*(c))}{\partial c}$$

Se concluye que:

$$\lambda^* = \frac{\partial f^*(c)}{\partial c} = \frac{df^*(c)}{dc}$$

De acuerdo con este resultado, el multiplicador de Lagrange λ^* representa la razón de cambio instantánea del valor óptimo f^* (máximo o mínimo) de la función f al cambiar el parámetro c. Es importante señalar que, para el caso de optimización con restricciones de igualdad, el multiplicador λ^* puede tomar cualquier signo, independientemente de que se trate de un problema de maximización o minimización. Ante un pequeño incremento de c, si $\lambda^* > 0$ se tiene que el valor óptimo de f (ya sea el máximo, o el mínimo) se incrementa, y si $\lambda^* < 0$ éste decrece. A continuación, se muestra un ejemplo para ver la utilización y significado del multiplicador λ^*.

Ejemplo 3. Resuelva el problema de maximización:

$$máx\ f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$$
$$s.a\ x + y = 4$$

El valor máximo de f se utilizará $x + y = 4.01$ como nueva restricción para ver los cambios que pueden ocurrir con un pequeño aumento en c.

Solución: Usando la función lagrangiana $\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (\mathrm{c} - g\ (x, y))$, se tiene:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 9 - x^2 - y^2 + \lambda(4 - x - y),$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables, se tendrán las condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = -2x - \lambda = 0\ ; \qquad \mathcal{L}_y = -2y - \lambda = 0; \qquad \mathcal{L}_\lambda = 4 - x - y = 0.$$

Luego, la forma matricial es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Obteniendo los siguientes valores: $x = 2$, $y = 2$, λ = -4

Sustituyendo en f:

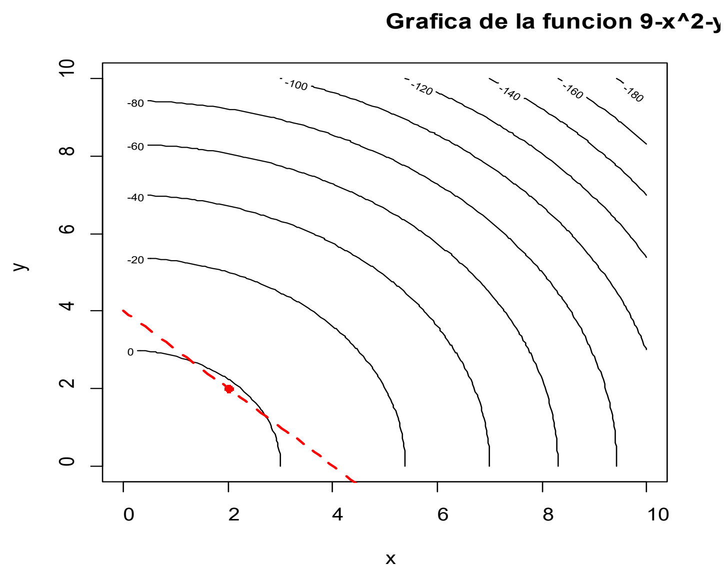
$$f(2,2) = 9 - (2^2) - (2^2) \Leftrightarrow f(2,2) = 9 - 4 - 4 \Leftrightarrow f(2,2) = 9 - 8 \Leftrightarrow f(2,2) = 1$$

Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones, f^* alcanzará su valor máximo, $f^* = 1$, en el punto $(x^*, y^*) = (2,2)$, con $\lambda^* = -4$. Para estimar el nuevo valor máximo de f si la restricción se modifica a $x + y = 4.1$, se utilizará:

$$\lambda^* = \frac{df^*(c)}{dc} \approx \frac{\Delta f^*}{\Delta c}$$

En donde: $\Delta f^* \approx \lambda^* \Delta c$.

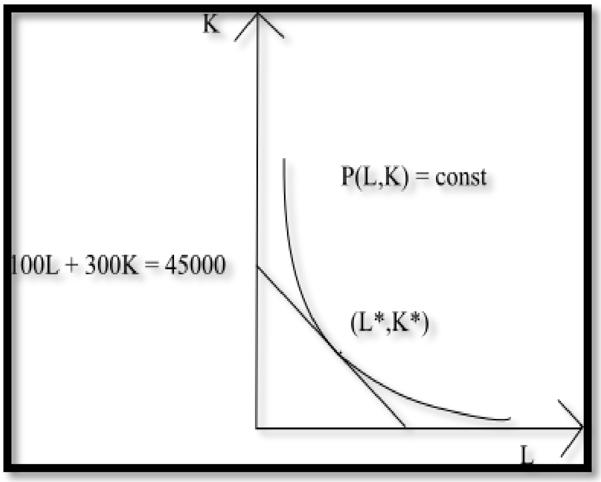
Tomando el multiplicador de $\lambda^* = -4$ evaluado en el optimo inicial, se observa que Δc = 4.01 – 4 = 0.01, obteniendo $\Delta f^* \approx (-4)(0.01) = -0.04$. Así, al incrementar c de 4 a 4.01, el máximo de f disminuye ($\lambda^* < 0$) aproximadamente en 0.04. De esta manera, el nuevo máximo sería $f^* \approx 1 + \Delta f^* = 1 - 0.04 = 0.96$, aproximadamente.



Ejemplo 4: Resuelve el siguiente problema de maximización de la producción $P(L, K)$ sujeto a una restricción presupuestal, Máx. $P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$; $s.\ a = 100L + 300K = 45000$. Donde: L denota el trabajo y K el capital. ¿Cómo afectaría la producción máxima un ligero incremento presupuestal a partir de 45000?

Solución: Dado que el problema describe cada variable, se usa la función lagrangeana para resolver el problema, siendo la ecuación $\boldsymbol{\mathcal{L}}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c$ - $g\ (x, y))$:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} + \lambda(4500 - 100L - 300K)$$



Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables obteniendo las siguientes condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_L \;=\; \frac{100}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3} - 100\lambda = \;0 \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_K \;=\; \frac{50}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3} - 300\lambda \;=\; 0 \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda \;=\; 45000 - 100L - 300K \;=\; 0 \qquad (3)$$

Estas ecuaciones se conocen en economía como *condiciones de equimarginalidad*, que expresan que en el óptimo se da la tangencia de la ecuación de restricción presupuestal con alguna curva de nivel de la función de producción.

Utilizando el método de igualación en las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{100}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}} - 100\lambda = 0 \Leftrightarrow -100\lambda = -\frac{100}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{100}{3(-100)}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}}\right) \quad (4)$$

Despejar (2):

$$\frac{50}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}} - 300\lambda \;=\; 0 \Leftrightarrow -300\lambda = -\frac{50}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{50}{3(-300)}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{18}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{18}\left(\frac{L^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}}\right) \quad (5)$$

Igualando (4) y (5):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{K^{\frac{1}{3}}}{L^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{18}\left(\frac{L^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}}\right) \Leftrightarrow 18(K^{\frac{1}{3}})(K^{\frac{2}{3}}) = 3(L^{\frac{1}{3}})(L^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 18K^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3L^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 18K^{\frac{1+2}{3}} = 3L^{\frac{1+2}{3}} \Leftrightarrow 18K^{\frac{3}{3}} = 3L^{\frac{3}{3}} \Leftrightarrow 18K = 3L \Leftrightarrow L = \frac{18}{3}K \Rightarrow L = 6K \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3):

$$45000 - 100(6K) - 300K = 0 \Leftrightarrow -600K - 300K = -45000 \Leftrightarrow -900K = -45000$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{-45000}{-900} \Leftrightarrow K = 50$$

Sustituir $K = 50$ en (3):

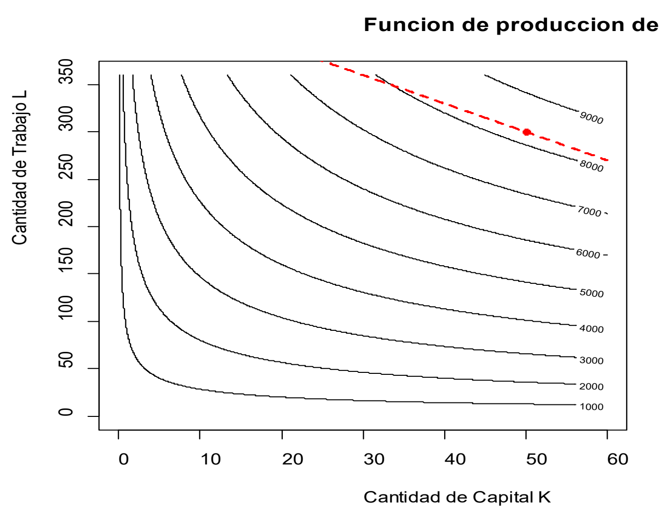
$$45000 - 100L - 300(50) = 0 \Leftrightarrow -100L = -45000 + 300(50)$$

$$\Leftrightarrow -100L = -45000 + 15000 \Leftrightarrow -100L = -30000 \Leftrightarrow L = \frac{-30000}{-100} \Leftrightarrow L = 300$$

Sustituyendo $K = 50$ y $L = 300$ en (4):

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{50}{300}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3\sqrt[3]{6}} = 0.183440$$



Entonces, la producción máxima será la siguiente:

$$P^*(300{,}50) = 50(300)^{2/3}(50)^{1/3}$$

$$P^*(300{,}50) = 8254.82$$

Como $\lambda^* > 0$, un ligero incremento presupuestal a partir de 45000 generaría un incremento en la producción máxima.

Ejemplo 5: Resuelva el siguiente problema de minimización de costo $C(L, K)$ sujeto a una restricción de producción,

$$\text{Mín. } C(L, K) = wL + rK$$

$$\text{s.a } L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = Q$$

Donde: L denota el trabajo, K el capital, w el salario, r la tasa de interés y Q el nivel de producción w, r y Q constantes positivas. ¿Cómo afectaría al costo mínimo un ligero incremento en la producción a partir de Q?

Solución: Descritas las variables en el problema se sustituyen los valores en la función lagrangeana $\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c - g\ (x, y))$:

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda(Q - L^{1/2}K^{1/2})$$

Derivando parcialmente, las condiciones de primer orden correspondientes son las siguientes:

$$\mathcal{L}_L = w - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_K = r - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = Q - L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (3)$$

Luego, se despeja λ en cada una de las ecuaciones (1) y (2):

De ecuación (1):

$$w - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = -w \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = -(-2)w \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = 2w$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2w\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

De ecuación (2):

$$r - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = -r \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = -(-2)r \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 2r$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} 2r \quad (5)$$

Se iguala (4) y (5):

$$2w\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = 2r\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow w\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = r\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow w\left(\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}\right) = r\left(\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\Leftrightarrow w\left(L^{\frac{1}{2}}\right)\left(L^{\frac{1}{2}}\right) = r\left(K^{\frac{1}{2}}\right)\left(K^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow w\left(L^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) = r\left(K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow w\left(L^{\frac{1+1}{2}}\right) = r\left(K^{\frac{1+1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow w\left(L^{\frac{2}{2}}\right) = r\left(K^{\frac{2}{2}}\right) \Leftrightarrow w(L) = r(K)$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{rK}{w} \ \ (6), \quad K = \frac{wL}{r} \ \ (7)$$

Se sustituye (6) en (3):

$$Q - \left(\frac{rK}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{rK}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = -Q \Leftrightarrow \left(\frac{rK}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = Q$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1+1}{2}} = Q \Leftrightarrow \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{2}} = Q \Leftrightarrow \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} K = Q$$

$$\Leftrightarrow K = Q\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow K^{*} = Q\sqrt{\frac{w}{r}}$$

Se iguala (7) en (3):

$$Q - L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{wL}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{wL}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = -Q \Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{wL}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q$$

$$\Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow L^{\frac{1+1}{2}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow L^{\frac{2}{2}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q \Leftrightarrow L\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q$$

$$\Leftrightarrow L = Q\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow L^{*} = Q\sqrt{\frac{r}{w}}$$

Sustituir $L^{*} = Q\sqrt{\frac{r}{w}}$ y $K^{*} = Q\sqrt{\frac{w}{r}}$ en (4) y se obtiene lo siguiente:

$$\lambda^{*} = 2w\left(\frac{Q\sqrt{\frac{r}{w}}}{Q\sqrt{\frac{w}{r}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2w\left(\frac{\sqrt{\frac{r}{w}}}{\sqrt{\frac{w}{r}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2w\left[\frac{\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2w\left[\left(\frac{\frac{r}{w}}{\frac{w}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2w\left[\left(\frac{r}{w} * \frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda^* = 2w\left[\left(\frac{r^2}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2w\left\{\left[\left(\frac{r}{w}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = 2w\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} = 2w\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}}\right) = 2w * w^{-\frac{1}{2}} * r^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda^* = 2w^{1-\frac{1}{2}} * r^{\frac{1}{2}} = 2w^{\frac{1}{2}} * r^{\frac{1}{2}} = 2(wr)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{wr} \Leftrightarrow \lambda^* = 2\sqrt{wr}$$

Para encontrar el costo mínimo, se sustituye $L^* = Q\sqrt{\frac{r}{w}}$ y $K^* = Q\sqrt{\frac{w}{r}}$ en la función $C(L, K) = wL + rK$ y queda:

$$C^*(L^*, K^*) = w\left[Q\sqrt{\frac{r}{w}}\right] + r\left[Q\sqrt{\frac{w}{r}}\right]$$

Ejemplo 6: La función de producción de Cobb-Douglas para un fabricante de software está dada por: $f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$. Donde x representa las unidades de trabajo a \$150 por unidad y y representa las unidades de capital a \$250 por unidad. El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50,000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante. En economía, al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción se le llama *productividad marginal del capital.*

Solución: Primero, se analiza que limitación tiene el fabricante de software y este será dato servirá para formar la función de restricción del problema: $g(x, y) = 150x + 250y = 50{,}000$. Dado que la función de producción la brinda el problema, se ordenan las ecuaciones del problema:

$$max\ f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$
$$s.a\ g(x, y) = 150x + 250y = 50{,}000$$

Aplicar la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c - g\ (x, y))$ para resolver:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 100x^{3/4}y^{1/4} + \lambda\big(50{,}000 - (150x + 250y)\big)$$
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 100x^{3/4}y^{1/4} + \lambda(50{,}000 - 150x - 250y)$$

Se deriva parcialmente con respecto a cada una de las variables, el resultado de ello serán las condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = 100\left(\frac{3}{4}\right)x^{-1/4}y^{1/4} - 150\lambda = 0 \Leftrightarrow 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 150\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_y = 100\left(\frac{1}{4}\right)x^{3/4}y^{-3/4} - 250\lambda = 0 \Leftrightarrow 25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -150x - 250y + 50{,}000 = 0 \Leftrightarrow 150x + 250y - 50{,}000 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo para λ en (1):

$$75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 150\lambda = 0 \Leftrightarrow 150\lambda = 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{150} = \frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2} \quad (4)$$

Resolviendo para λ en (2):

$$25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda = 0 \Leftrightarrow 250\lambda = 25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{250}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{10} \quad (5)$$

Se iguala (4) y (5):

$$\frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{10} \Leftrightarrow \frac{10y^{\frac{1}{4}}}{y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{2x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}} \Leftrightarrow 10y^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 10y^{\frac{4}{4}} = 2x^{\frac{4}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 10y = 2x \Leftrightarrow x = 5y \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3), se tiene

$$150(5y) + 250y = 50{,}000 \Leftrightarrow 750y + 250y = 50{,}000 \Leftrightarrow 1{,}000y = 50{,}000$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{50{,}000}{1{,}000} = 50$$

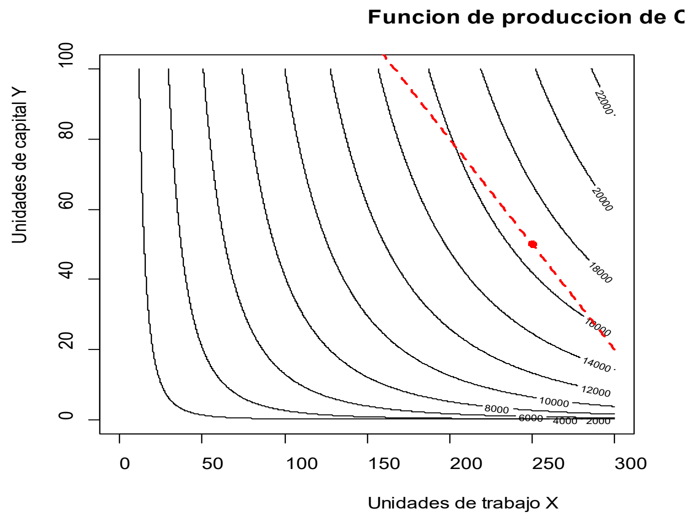
Se sustituye $y = 50$ en (6): $x = 50(50) = 250$

Sustituyendo el valor de $x = 250$ y $y = 50$ en la función objetivo para obtener la producción máxima, $f(250,50) = 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \approx 16{,}719$ unidades del producto.

Se sustituye $x = 250$ y $y = 50$ en (4) y se obtiene el valor λ:

$$\lambda = \frac{(250)^{-\frac{1}{4}}(50)^{\frac{1}{4}}}{2} \approx 0.334$$

Lo cual significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, puede producirse 0.334 unidades adicionales del producto.



2.4. Condiciones de segundo orden

Continuando con la técnica central matemática en la teoría económica: la solución de problemas de optimización con restricciones. Anteriormente, se vió la formulación lagrangiana de esa solución y el enfoque en su aspecto más importante. Las condiciones de primer orden que forman la base de un gran número de principios económicos. La condición de segundo orden a menudo puede ayudar a elegir un maximizador o minimizador del conjunto de candidatos que satisfacen las condiciones de primer orden.

Las condiciones $\mathcal{L}_x = 0$, $\mathcal{L}_y = 0$ y $\mathcal{L}_\lambda = 0$, son condiciones necesarias de primer orden para los niveles óptimos de una función sujeta a una restricción de igualdad. Existen ciertas condiciones bajo las cuales es posible asegurar que esos óptimos dan origen a un máximo o un mínimo de la función, conocidas como condiciones suficientes de segundo orden. A continuación, se describen los criterios correspondientes basados en un análisis de la concavidad o convexidad de la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ (¡no de f!), con respecto a las variables x, y y λ. Para resolver el problema de optimización restringida de f, se tendrá que $max\ f(x, y)$ sujeto a $g(x,$

$y) = c$; es equivalente a resolver el problema de optimización libre de la función lagrangeana asociada, $\boldsymbol{\mathcal{L}}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c - g\ (x, y))$.

En vista de ello, para utilizar los criterios de concavidad o convexidad inherentes a problemas de optimización libre, es claro que estos deben aplicarse a la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y no a la función objetivo f. La búsqueda de extremos locales es un problema sencillo cuando f y g son doblemente diferenciables. En ese caso, es posible definir una matriz hessiana $H_{\mathcal{L}}$ para la lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ con respecto a x, y y λ.

$$H_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda \mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\lambda \mathrm{y}} \\ \mathcal{L}_{x\lambda} & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{y\lambda} & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{\mathrm{x}} & -g_{\mathrm{y}} \\ -g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ -g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{pmatrix}$$

Como se establece lo siguiente, la clasificación de los puntos críticos de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ se basa en el signo del determinante $|H_{\mathcal{L}}|$,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & -g_{\mathrm{x}} & -g_{\mathrm{y}} \\ -g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ -g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_{\mathrm{x}} & g_{\mathrm{y}} \\ g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{vmatrix}$$

evaluado en cada nivel óptimo (x^*, y^*, λ^*).

Ejemplo 7: Clasifica los puntos críticos del problema de optimización.

$$\text{Optim. } f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$\text{s.a } x^2 + xy + y^2 = 3$$

Solución: Usar la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c - g\ (x, y))$ para encontrar los puntos críticos de optimización:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3 - (x^2 + xy + y^2))$$
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3 - x^2 - xy - y^2)$$

Derivando parcialmente las siguientes condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = 2x - 2\lambda x - \lambda y = 0 \quad (1)$$
$$\mathcal{L}_y = 2y - \lambda x - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = 3 - x^2 - xy - y^2 = 0 \;\; (3)$$

Para saber si el resultado es un máximo local o mínimo local con el Hessiano, primero se debe encontrar las condiciones de primer orden del lagrangiano y además calcular los valores de cada una de las variables que conformen el problema de optimización.

Despejar λ en (1):

$$2x - 2\,\lambda x - \lambda y = 0 \Leftrightarrow -2\,\lambda x - \lambda y = -2x \Leftrightarrow \lambda(-2\,x - y) = -2x$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2x}{-2x - y} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x}{2x + y} \quad (4)$$

Despejar λ en (2):

$$2y - \lambda x - 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow -\lambda x - 2\lambda y = -2y \Leftrightarrow \lambda(-x - 2y) = -2y$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2y}{-x - 2y} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2y}{x + 2y} \quad (5)$$

Igualando (4) y (5):

$$\frac{2x}{2x + y} = \frac{2y}{x + 2y} \Leftrightarrow 2x(x + 2y) = 2y(2x + y) \Leftrightarrow x(x + 2y) = y(2x + y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy = 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 0$$

$$x + y = 0 \quad \vee \quad x - y = 0 \Leftrightarrow x = -y \quad \vee \quad x = y \qquad (6)$$

Primero igualar (6) cuando $x = y$ en (3)

$$3 - x^2 - (x)(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x^2 - x^2 = -3 \Leftrightarrow -3x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-3}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

Como se obtuvo en (6) que $x = y$, entonces tambien $y = 1 \quad \vee \quad y = -1$.

Se sustituye $x = 1$ y $y = 1$ en (4):

$$\lambda = \frac{2x}{2x + y} = \frac{2(1)}{2(1) + 1} = \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

Ahora de (6) cuando $x = -y$ se sustituye en (3):

$$3 - (-y)^2 - (-y)y - y^2 = 0 \Leftrightarrow 3 - y^2 + y^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow -y^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \quad \vee \quad y = -\sqrt{3}$$

Como $x = -y$ quiere decir que, $x = -\sqrt{3} \quad \vee \quad x = \sqrt{3}$

sustituyendo $x = \sqrt{3}$ y $y = -\sqrt{3}$ en (4):

$$\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + (-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

A partir de las condiciones de primer orden se obtienen 4 puntos críticos, los puntos serían $(1,1)$ y $(-1,-1)$, con $\lambda = 2/3$, y los puntos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, con $\lambda = 2$. Se aplica el hessiano para encontrar los puntos son los mínimos locales y cuales son los máximos locales,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & g_{\mathrm{x}} & g_{\mathrm{y}} \\ g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{vmatrix}$$

Para aplicarlo se debe calcular las segundas derivadas parciales con respecto a cada una de las variables, se necesitan en el hessiano y las primeras derivadas parciales de la función de restricción según sea necesario en el hessiano.

Se procede a analizar el punto $(1,1)$ con $\lambda = 2/3$,

$$\mathcal{L}_{xx} = 2 - 2\,\lambda; \qquad \mathcal{L}_{xy} = -\lambda; \qquad \mathcal{L}_{yy} = 2 - 2\lambda$$

$$\mathcal{L}_{yx} = -\lambda; \qquad g_x = 2x + y; \qquad g_y = x + 2y$$

Y se sustituyen las primeras y segundas derivadas parciales en el hessiano,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & g_{\mathrm{x}} & g_{\mathrm{y}} \\ g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x + y & x + 2y \\ 2x + y & 2 - 2\lambda & -\lambda \\ x + 2y & -\lambda & 2 - 2\lambda \end{vmatrix}$$

Se sustituye el punto $(1,1)$ con $\lambda = 2/3$,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & 2(1) + (1) & 1 + 2(1) \\ 2(1) + 1 & 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) & -\frac{2}{3} \\ 1 + 2(1) & -\frac{2}{3} & 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 + 1 & 1 + 2 \\ 2 + 1 & 2 - \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 + 2 & -\frac{2}{3} & 2 - \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Aplicar el método de Cramer para encontrar el determinante de la matriz 3x3 obtenida,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -3\left((3)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)(3)\right) + 3\left((3)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)(3)\right)$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -3(2+2) + 3(-2-2) = -3(4) + 3(-4) = -12 - 12 = -24$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -24$$

Ahora se sustituye el punto $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ con $\lambda = 2$,

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & g_{\mathrm{x}} & g_{\mathrm{y}} \\ g_{\mathrm{x}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{xy}} \\ g_{\mathrm{y}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yx}} & \mathcal{L}_{\mathrm{yy}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x+y & x+2y \\ 2x+y & 2-2\lambda & -\lambda \\ x+2y & -\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix}$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{3}-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-\sqrt{3} & 2-2(2) & -2 \\ \sqrt{3}-2\sqrt{3} & -2 & 2-2(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-4 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & 2-4 \end{vmatrix}$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Y aplicar el método de Cramer para resolver la siguiente matriz 3x3 obtenida:

$$|H_{\mathcal{L}}| = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \sqrt{3}\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} + (-\sqrt{3})\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix}$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -\sqrt{3}\left((\sqrt{3})(-2) - (-2)(-\sqrt{3})\right) - \sqrt{3}\left((\sqrt{3})(-2) - (-2)(-\sqrt{3})\right)$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -\sqrt{3}(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}(-4\sqrt{3}) - \sqrt{3}(4\sqrt{3})$$

$$|H_{\mathcal{L}}| = -\sqrt{3}(-4\sqrt{3}) - \sqrt{3}(-4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3^2} + 4\sqrt{3^2} = 4(3) + 4(3) = 12 + 12 = 24$$

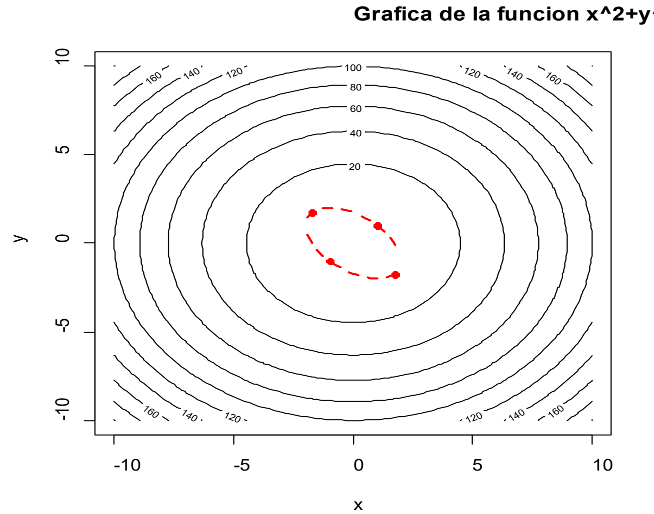
$$|H_{\mathcal{L}}| = 24$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$|H_{\mathcal{L}}(1,1,2/3)| = |H_{\mathcal{L}}(-1,-1,2/3)| = -24$

$|H_{\mathcal{L}}(\sqrt{3},-\sqrt{3},2)| = |H_{\mathcal{L}}(-\sqrt{3},\sqrt{3},2)| = 24$

Se concluye que $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son mínimos locales, puesto que el determinante del hessiano es menor que cero, mientras que $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ son máximos locales porque el hessiano en mayor que cero.



2.5. Problema Primal y Problema Dual

Para la resolución de problemas de dos bienes y con función de utilidad, donde el consumidor trata de maximizar su utilidad o minimizar sus costos suponiendo que hace uso de la función de producción de Cobb-Douglas y dependerá de tres parámetros : A, α y β. La maximización está condicionada a la restricción presupuestaria que depende de otros parámetros P_x , P_y y c. Entonces, se puede definir el problema primal y dual como:

Primal		**Dual**	
Maximizar	$U = AL^{\alpha}K^{\beta}$	Minimizar	$P_xX + P_yY$
Sujeto a	$P_xX + P_yY = c$	sujeto a	$AL^{\alpha}K^{\beta} = U_0$

Ejemplo de problema primal: Un consumidor se enfrenta al consumo de dos bienes cuyos precios son: $P_x = 10$ y $P_y = 40$. Su renta monetaria es 600 y su funcion de utilidad $U = XY + 30X$. Encontrar las demandas óptimas.

$$\text{Max } U = XY + 30X$$
$$\text{s.a } 10x + 40y = 600$$

Solución: Usar la función lagrangeana $\mathcal{L}\,(x, y, \lambda) = f\,(x, y) + \lambda\,(c - g\,(x, y))$ para encontrar los puntos críticos de optimización:

$$\mathcal{L}_x = y + 30 - 10\lambda = 0 \quad (1)$$
$$\mathcal{L}_y = x - 40\lambda = 0 \quad (2)$$
$$\mathcal{L}_\lambda = 600 - 10x - 40y = 0 \quad (3)$$

Despejar para λ en (1):

$$y + 30 - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow -10\lambda = -\mathrm{y} - 30 \Leftrightarrow \lambda = \frac{y+30}{10} \quad (4)$$

Despejar para λ en (2):

$$x - 40\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{40} \quad (5)$$

Se igualará (4) y (5):

$$\frac{y+30}{10} = \frac{x}{40} \Leftrightarrow x = 4y + 120 \quad (*)$$

Se sustituirá (∗) en (3):

$$600 - 10(4y + 120) - 40y = 0 \Leftrightarrow 600 - 40\mathrm{y} - 1200 - 40\mathrm{y} = 0$$
$$\Leftrightarrow -600 - 80y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} = -\frac{15}{2}$$

Se sustituirá $\mathrm{y} = -\frac{15}{2}$ en (∗):

$$x = 4\left(-\frac{15}{2}\right) + 120 = -30 + 120 = 90$$

Entonces, su utilidad máxima será:

$$U = XY + 30X = (90)\left(-\frac{15}{2}\right) + 30(90) = 2{,}025$$

Así, el número unidades de cada bien que maximiza la utilidad a $2{,}025$ unidades monetarias son $x = 90$ y $y = -\frac{15}{2}$.

2.6. El caso multidimensional

Es fácil generalizar los resultados anteriores al caso multidimensional, correspondiente a la optimización de una función de n variables sujeta a $m < n$ restricciones de igualdad,

$$máx./mín. f(x_1, \dots, x_n)$$
$$s.a. g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, \dots, x_n) = c_m, m < n.$$

Es importante señalar que el número m de restricciones debe ser estrictamente menor al número n de variables. De otra manera, si $m = n$ el sistema de ecuaciones podría tener una solución única, por lo que no habría grados de libertad para llevar a cabo la optimización, o bien, si $m > n$ habrían más ecuaciones que incógnitas y el sistema podría ser inconsistente (no existiría solución posible).

La condición anterior de tangencia en el punto óptimo, $\nabla f = \lambda \nabla g$, se generaliza ahora requiriendo que, en ese punto, el gradiente ∇f de la función f sea una combinación lineal del conjunto de gradientes $\{\nabla g_1, \ldots, \nabla g_m\}$ de todas las restricciones. En otras palabras, en el óptimo debe verificarse $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_m \nabla g_m$, en donde $\lambda_1, .., \lambda_m \in \mathbb{R}$ son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones $g_1, .., g_m$. La existencia de estos multiplicadores sólo está garantizada cuando el conjunto de gradientes $\{\nabla g_j\}$ en el óptimo es linealmente independiente, lo que se conoce como la cualificación de las restricciones. Cuando esta condición no se cumple el método de Lagrange puede fallar.

Se necesitan los siguientes pasos para poder resolver este método cuando se tenga una función objetivo con varias funciones de restricción.

$$\text{máx./mín. } f(x)$$
$$s.a. \ g_i(x) = c_j$$

con $j = 1, \ldots, m$. Si el conjunto de gradientes $\{\nabla g_i(x^*)\}$ en el óptimo es linealmente independiente, entonces existen $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ tale que (x^*, λ^*) es un punto crítico de la función lagrangeana

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1\big(c_1 - g_1(x)\big) + \lambda_2\big(c_2 - g_2(x)\big) + \cdots + \lambda_m\big(c_m - g_m(x)\big)$$

Es decir,

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \left(c_j - g_i(x)\right).$$

En este caso, las $n + m$ condiciones de primer orden para la función lagrangeana son

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} - \cdots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial l}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} - \cdots - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad (n \text{ ecuaciones})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \lambda_1} = c_1 - g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda_m} = c_m - g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (m \text{ ecuaciones})$$

Las primeras n ecuaciones equivalen a la condición $\nabla f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j$ y las restantes son las m ecuaciones de restricción, $g_j(x) = c_j$. Al resolver el sistema de $n + m$ ecuaciones se obtienen las n coordenadas del punto óptimo, $x_1^*, \dots, x_n^*$, y los m multiplicadores de Lagrange, $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$.

El significado de los multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ es similar al caso de una sola restricción. En el caso multidimensional, a cada valor del conjunto de parámetros $c = (c_1, \dots, c_m)$ le corresponde un punto óptimo, $P(x^*(c), y^*(c))$. En consecuencia, el valor óptimo f^*de la función f, será $f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$, que también depende de c. Utilizando las $n + m$ condiciones de primer orden anteriores, se tendrá que

$$\lambda_j^* = \frac{\partial f^*(c)}{\partial c_j}$$

para cada $j = 1, \dots, m$. Así, λ_j^* representa la razón de cambio instantánea del valor óptimo f^* de la función f al cambiar el parámetro c_j.

Por último, para clasificar los extremos locales y globales del problema puede utilizarse un criterio de signos para la matriz hessiana de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, que es una matriz de $(n + m)\times(n + m)$. Debido al tamaño de esa matriz, este método de clasificación suele resultar bastante complejo. Sin embargo, en muchas de las aplicaciones de interés es fácil identificar un extremo global, simplemente argumentando sobre la concavidad o convexidad de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, de acuerdo a las siguientes condiciones.

Sea (x^*, λ) un punto crítico de la función lagrangeana $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x, \lambda)$. Entonces,

a) $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es cóncava con respecto a x $\Rightarrow f$ tiene un máximo global en x.

b) $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es convexa con respecto a $x \Rightarrow f$ tiene un mínimo global en x.

Ejemplo 8: Considere el siguiente problema de maximización $f(x, y, z) = xyz$ en el conjunto de restricciones definidas por:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \qquad g_2(x,y,z) = x + z = 1$$

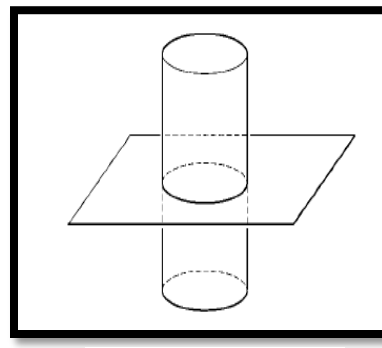


Ilustración del conjunto de restricciones

Solución: A diferencia de los problemas anteriores, se observan dos restricciones definidas con una funcion objetivo de tres variables. Geométricamente, el conjunto definido por g_1 forma un cilindro c_1 paralelo al eje z del eje y. El conjunto definido por g_2 es el plano c_2 paralelo al eje y, entonces el conjunto de restricciones real c_m es la intersecion de c_1 y c_2 (Véase la ilustración de la derecha). Para resolverlo se usa la ecuación que previamente se definió, $\mathcal{L}(x\,,\lambda) = f(x) + \lambda_1\big(c_1 - g_1(x)\big) + \lambda_2\big(c_2 - g_2(x)\big) + \cdots + \lambda_m\big(c_m - g_m(x)\big)$ luego se sustituyen los valores que brinda el problema,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \ \lambda_1\big(1 - (x^2 + y^2)\big) + \lambda_2\big(1 - (x + z)\big)$$

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \ \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2(1 - x - z)$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables, para obtener las condiciones de primer orden correspondientes:

$\mathcal{L}_x = yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$; $\mathcal{L}_y = xz - 2\lambda_1 y = 0$; $\mathcal{L}_z = xy - \lambda_2 = 0$

$\mathcal{L}_{\lambda_1} = 1 - x^2 - y^2 = 0$; $\mathcal{L}_{\lambda_2} = 1 - x - z = 0$

resolver la segunda ecuación de las condiciones de primer orden para λ_1

$$xz - 2\lambda_1 y = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_1 y = -xz \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-xz}{-2y} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{xz}{2y}$$

Y por último resolver la tercera ecuación de las condiciones de primer orden para λ_2,

$$xy - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = xy$$

Estos dos valores obtenidos de λ_1 y λ_2 se sustituyen en la primera ecuación para obtener,

$$yz - 2\left(\frac{xz}{2y}\right)x - xy = 0 \Leftrightarrow yz - \frac{x^2 z}{y} - xy = 0 \Leftrightarrow y^2 z - x^2 z - xy^2 = 0 \quad (*)$$

Luego, resolver la cuarta ecuación de las condiciones de primer orden para y^2 en terminos de x^2, es decir, $1 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$. Y la ultima ecuación de las condiciones de primer orden para z en términos de x; es decir, $1 - x - z = 0 \Leftrightarrow z = 1 - x$.

Estas dos ecuaciones encontradas para y^2 en terminos de x y z, en terminos de x se tiene, se sustituirá en $(*)$ y se obtendrá la nueva ecuación,

$$(1 - x^2)(1 - x) - x^2(1 - x) - x(1 - x^2) = 0$$
$$(1 - x^2)(1 - x) - x^2(1 - x) - x(1 - x)(1 + x) = 0$$

Para facilitar la solución, se divide esta ecuación por $(1 - x)$ y se obtendrá lo siguiente:

$$(1 - x^2) - x^2 - x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 1 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuación cuadrática:

$$x = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{13}\right) \quad \vee \quad x = \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{13}\right)$$

Que es aproximadamente $x = 0.4343$ y $x = -0.7676$, se introducen estos datos en las ecuaciones de restricciones para calcular los valores de y y z.

Para $x = 0.4343$,

$$y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - (0.4343)^2} \Leftrightarrow y = \pm 0.9008$$

Luego para $x = -0.7676$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\sqrt{1 - (-0.7676)^2} \Leftrightarrow y = \pm 0.6409$$

calcular los valores de z, primero con $x = 0.4343$,

$z = 1 - x \Leftrightarrow z = 1 - 0.4343 = 0.5657 \Leftrightarrow z = 0.5657$

para $x = -0.7676$

$z = 1 - x \Leftrightarrow z = 1 - (-0.7676) = 1 + 0.7676 = 1.7676 \;\Leftrightarrow\; z = 1.7676$

De esta manera se han obtenido todos los candidatos para maximizar el problema los cuales son:

$$x = 0.4343 \qquad y = \pm 0.9008 \qquad z = 0.5657$$

$$x = -0.7676 \qquad y = \pm 0.6409 \qquad z = 1.7676$$

Y se evalúan cada uno de los posibles puntos que maximizan la solución del problema propuesto.

Primer punto: (0.4343, 0.9008, 0.5657)

$f(0.4343, 0.9008, 0.5657) = (0.4343)(0.9008)(0.5657) = 0.2213$

Segundo punto: (0.4343, -0.9008, 0.5657)

$f(0.4343, -0.9008, 0.5657) = (0.4343)(-0.9008)(0.5657) = -0.2213$

Tercer punto: (-0.7676, 0.6409, 1.7676)

$f(-0.7676, 0.6409, 1.7676) = (-0.7676)(0.6409)(1.7676) = -08696$

Cuarto punto: (-0.7676, -0.6409, 1.7676)

$f(-0.7676, -0.6409, 1.7676) = (-0.7676)(-0.6409)(1.7676) = 08696$

Analizando cada resultado de los puntos evaluados en la función, el punto que logra maximizar el problema es:

$$x = -0.7676 \qquad y = -0.6409 \qquad z = 1.7676$$

2.7. Cualificación de las restricciones: ¿cuándo falla el método de los multiplicadores de Lagrange?

Hasta este momento se ha encontrado la solución de poblemas de optimización con restricción de igualdad, pero como todo método tiene que cumplir ciertas condiciones para que pueda funcionar. El método de los multiplicadores de Lagrange para el problema de optimización restringida de $f(x_1, \dots, x_n)$ sujeto a $g_j(x_1, \dots, x_n) = c_j, j = 1, \dots, m,$ se basa en el cumplimiento de la llamada cualificación de las restricciones, $\nabla f^* = \lambda_1^* \nabla g_1^* + \cdots + \lambda_m^* \nabla g_m^*$.

Para que esta condición se cumpla es necesario que el conjunto de gradientes en el óptimo $\{\nabla g_1^*, \dots, \nabla g_m^*\}$ sea linealmente independiente. Cuando esto no sucede, es posible que el método de Langrange no te permita obtener ninguno de los candidatos a óptimo, o bien, que no te dé todos los candidatos posibles.

En el caso particular de la optimización de una función de dos variables $f(x, y)$ sujeto a una sola restricción $g(x,\ y) = c$, la cualificación de las restriccciones se reduce a la condición de tangencia: $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$.

Esta condición no se cumple cuando el óptimo restringido (x^*, y^*) del problema coincide con un punto crítico de g ($\nabla g = 0$), a menos que este óptimo también sea un punto crítico de $f(\nabla f = 0)$, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9: Encuentre la solución del problema,

$$max\, f(x, y) = \text{-}y$$

$$\text{s.a } y^3 - x^2 = 0$$

Solución: Usando la función lagrangeana $\mathcal{L}$ $(x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda$ (c - $g\ (x, y)$):

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -y + \lambda(x^2 - y^3)$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables, se obtienen las siguientes condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_y = -1 - 3\lambda y^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}_\lambda = x^2 - y^3 = 0 \qquad (3)$$

despejando λ en (1), obteniendo lo siguiente:

$$2\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \qquad (4)$$

despejando λ en (2):

$$-1-3\lambda y^2 = 0 \Leftrightarrow -3\lambda y^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3y^2} \qquad (5)$$

igualando (4) y (5):

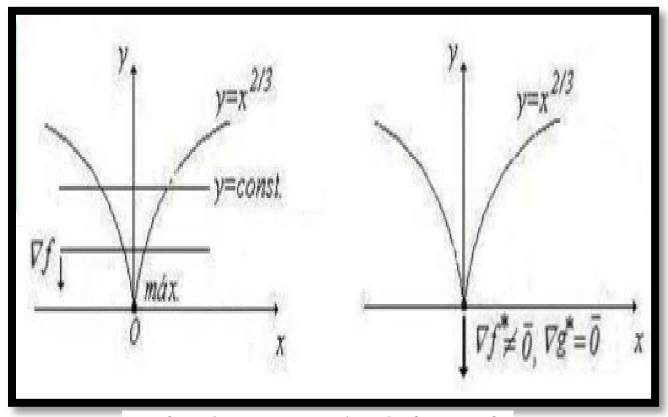
$$-\frac{1}{3y^2} = 0$$

Multiplicar la ecuación por $-3y^3$ $\qquad y = 0$

sustituir $y = 0$ en (3):

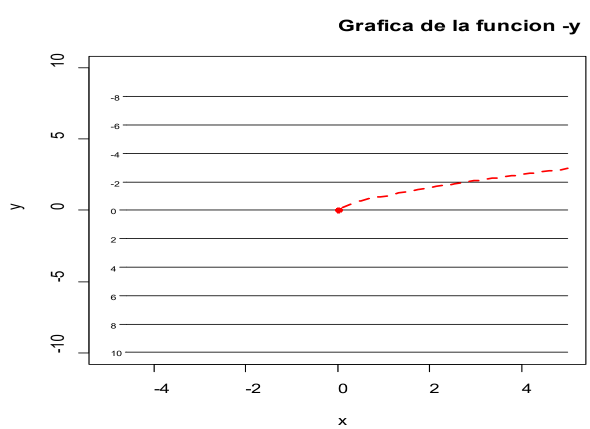
$$x^2 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (0)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Es fácil de verificar que no existe solución a este sistema de ecuaciones, por lo que erróneamente se puede concluir que en este problema f no se maximiza. Sin embargo, si se grafican las curvas de nivel de f, dadas por $-y = \text{const}$, y la curva de restricción $y = x^{2/3}$, se observa que la función f alcanza su máximo en el punto (0,0).



Gráfica de curvas nivel en la función f

El método de Lagrange falla aquí, ya que no se verifica la condición $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$. Como el óptimo (0,0) es un punto crítico de g, pero no de f. Como el óptimo $\nabla f^* \neq 0$ y $\nabla g^* = 0$. Por lo tanto no existe λ^* tal que $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$.



Ejemplo 10: Encuentre la solución al problema

$$máx\ f(x,y) = -x^2 - y^2$$
$$\text{s. a } y^3 - x^2 = 0.$$

Solución: Aplicar la función lagrangeana $\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (\text{c} - g\ (x, y))$:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(0 - (y^3 - x^2))$$
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(x^2 - y^3)$$

Derivando parcialmente con respecto a cada una de las variables, las siguientes condiciones de primer orden correspondientes:

$$\mathcal{L}_x = -2x + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(\lambda - 1) = 0 \qquad (1)$$
$$\mathcal{L}_y = -2y - 3\lambda y^2 = y(-2 - 3\lambda y) = 0 \qquad (2)$$
$$\mathcal{L}_\lambda = x^2 - y^3 = 0 \qquad (3)$$

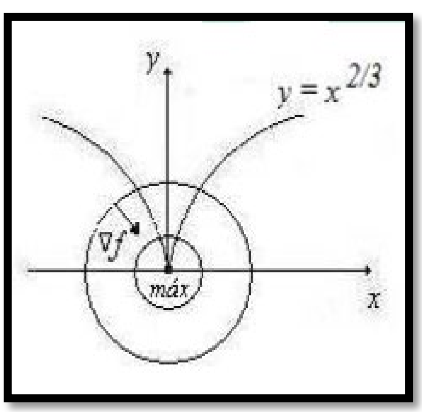
Despejando λ en (1):

$2x(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \quad \vee \quad \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1$

despejando λ en (2):

$y(-2 - 3\lambda y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \vee \quad -2 - 3\lambda y = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \quad \vee \quad -3\lambda y = 2 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ \lambda = -\frac{2}{3\text{y}}$



Como $y = 0$, λ no existe. Es fácil de verificar que este sistema de ecuaciones si tiene solución, y ésta ocurre en el punto (0,0), que es la misma que se obtiene a partir de un análisis gráfico.

Aquí no falla el método, ya que si se verifica la condición $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$, es decir el óptimo (0,0) es un punto crítico tanto de g como de f. Como el óptimo $\nabla f^* = \nabla g^* = 0$, por lo tanto se cumple la condición $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$ para todo valor de λ^*.

Este tipo de dificultades suele ocurrir cuado el óptimo restringido (x^*, y^*) de f coinciden con algún punto cúspide de la curva de restricción $g(x, y) = c$, en donde no está definida la curva dy/dx. La cúspide se origina en el hecho de la función $z = g(x, y)$ tiene un punto crítico a lo largo de la curva de nivel $g(x, y) = c$. En efecto, a lo largo de la curva de nivel $g(x, y) = c$ por el teorema de la función implícita se tiene:

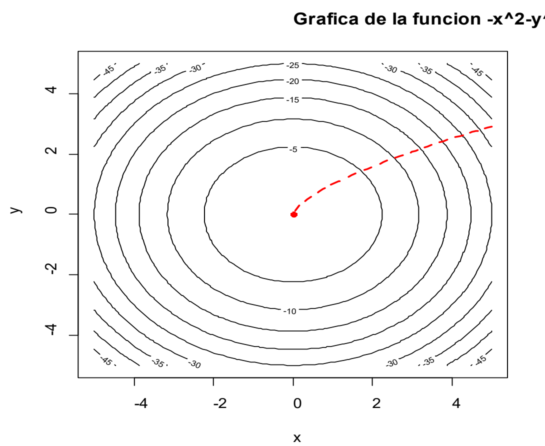
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}$$

Cuando el óptimo (x^*, y^*) es un punto crítico de la función $z = g(x, y)$, entonces $\nabla g(x^*, y^*) = 0$. Por lo tanto:

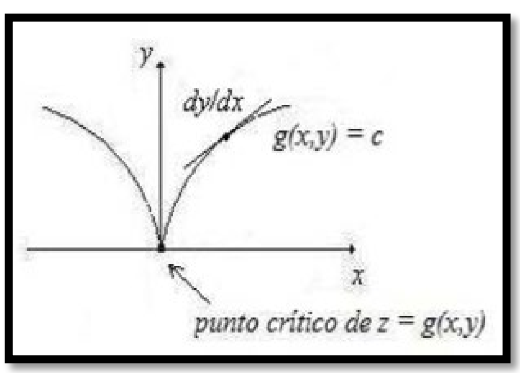
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) = 0.$$

Como (x^*, y^*) está en la curva $g(x, y) = c$, se tiene $g(x^*, y^*) = c$, de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)} = -\frac{0}{0}.$$



Por lo tanto, la derivada dy/dx no está definida en (x^*, y^*) y la curva $g(x^*, y^*) = c$ tiene una cúspide en (x^*, y^*).



En resumen, los candidatos a óptimo para el problema de optimización restringida con los puntos críticos de la función lagrangeana $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ así como los puntos críticos de la función de restricción $g(x, y)$, en donde posiblemente se viole la cualificación de la restricción $\nabla f^* = \lambda^* \nabla g^*$.

CONCLUSIÓN

De acuerdo al análisis realizado en este breve estudio, con uno de los métodos de optimización conocido como el método de multiplicadores de Lagrange, y especialmente aplicado en el área de la economía, se ha comprobado que este método de optimización con restricción de igualdad representa un pilar fundamental en la solución de problemas aplicados a esta ciencia muy usada en nuestro mundo, aportando formas para encontrar máximos y mínimos de una función objetivo sujeta a ciertas restricciones y su consecuente análisis de sensibilidad óptimo respecto a cambios de restricción.

Se proporcionó la base matemática y analítica de problemas que generan algunas superficies cuadráticas, cúbicas y curvas de nivel para distintos valores, las que se visualizaron con la habilidad de un ambiente computacional usando el software "R" identificando los puntos críticos donde las funciones se maximizan o minimizan, estos resultados se observan gráficamente en varios ejemplos usando el método en estudio. Además de R, también se usó el software "Inkscape" para crear las imágenes usadas en el documento.

Además, se mostró como se aplican los modelos matemáticos para representar teorías y analizar problemas con los que a diario nos encontramos y algunas veces resolvemos empíricamente. Se comprueba como la matemática va más allá de formular ecuaciones con rigor y generalidad, dando la posibilidad de formar soluciones significativas y comprobables. Podemos inferir que una persona tiene una base empírica para tomar decisiones sobre la maximización continua de la utilidad teniendo en cuenta los cambios de las restricciones que pueda tener.

Se analiza este método matemático con el propósito de verlo como una oportunidad de aplicarlo en otras áreas, dado que no se aplica únicamente en el área de la economía, también tiene su aporte en otras ciencias (como física, química, astronomía, biología, entre otras) en donde se necesite la ayuda de la optimización con ciertas restricciones. Cada estudio de éstos métodos matemáticos, ayudar a contribuir en el avance de esta ciencia brindando soluciones factibles a distintos problemas para el beneficio y desarrollo de nuestro país.

RECOMENDACIONES

Al concluir esta tesis, hemos considerado como recomendaciones las siguientes:

- A personas interesadas en general, que enfaticen el estudio de los métodos de optimización con igualdades o desigualdades, para modelar y resolver problemas en distintos ámbitos; tanto en la matemática pura que comprende el análisis de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker generalizando los multiplicadores de Lagrange, como problemas aplicados que comprende la programación lineal y no lineal.
- A los profesionales de distintas áreas para que conlleven una comunicación más fluida con los matemáticos, pues es la forma en la que pueden ocurrir ideas para crear más estrategias viables, los cuales pueden implementarse en un lenguaje entendible para personas interesadas en ésta área.
- A la comunidad universitaria, que enfaticen el estudio de éste tipo de métodos y puedan crear oportunidades aprovechando cada herramienta matemática, siendo hoy en día este tipo de métodos los más usados por el potencial que encierran la optimización en el área de economía y consideramos que conllevan un futuro prometedor, destacando asimismo el uso de software matemáticos durante el desarrollo de dichos problemas.
- Al departamento de matemática, que considere la posibilidad de reforzar las clases en donde se apliquen métodos de optimización.

ANEXOS

El gráfico de curvas de nivel de cada ejemplo se desarrolló con el programa “R”, el cual genera gráficos de contorno de las funciones presentadas. A continuación, se brindan los códigos de las imágenes de los ejemplos propuestos.

Código Función de Cobb-Douglas 2D:

```
CD = read.table (head=TRUE, text = "
Year   P     L     K
1899   100   100   100
1900   101   105   107
1901   112   110   114
1902   122   117   122
1903   124   122   131
1904   122   121   138
1905   143   125   149
1906   152   134   163
1907   151   140   176
1908   126   123   185
1909   155   143   198
1910   159   147   208
1911   153   148   216
1912   177   155   226
1913   184   156   236
1914   169   152   244
1915   189   156   266
1916   225   183   298
1917   227   198   335
1918   223   201   366
1919   218   196   387
```

```
1920    231     194     407

1921     179     146     417

1922     240     161     431")

with (CD, plot (rep (Year,3), c (P, L, K), type ="n", xlab="Año (año base 1899)", ylab="Dinero deflactado"))

with (CD, lines (Year, P, col=2, type ="b", lwd=2))

with (CD, lines (Year, L, col=3, type="b", lwd=2))

with (CD, lines (Year, K, col=4, type="b", lwd=2))

title ("Funcion de produccion de Cobb-Douglas: Crecimiento de la economía en USA")

text (1910, 400, "P (rojo) produccion total (Valor monetario de todos los bienes producidos en un año)")

text (1910, 380, "L (verde) cantidad de trabajo laboral (numero total de personas-horas trabajando en un año)")

text (1910, 360, "K (verde) monto de capital invertido (valor monetario de toda la maquinaria, equipos y edificios)")
```

Código del ejemplo 1:

X = seq (0, 20, len = 100) ; y = seq (0, 15, len = 50) ; f = function (x, y) ; x^(2/3)*y^(1/3) ; z = outer (x, y ,f); contour (x, y, z) ; y0 = function (x) ; (100-5*x)/3 ; lines (x, y0 (x), col=2, lwd =2, lty =2) ; points (13.33, 11.11, pch = 16, col=2) ; title ("Funcion de Cobb-Douglas") ; title (x lab = "Cantidad del bien X", y lab = "Cantidad del bien Y")

Código del ejemplo 2:

X = seq (-20, 20, len =100)   ;   y = seq (-20, 20, len = 100) ; f = function (x, y)   3*x+4*y-3; z = outer (x, y, f) ; contour (x, y, z)   ;   y0 = function (x)   (25-(x-1)^2)^(1/2) ; lines (x, y0(x), col=2, lwd = 2, lty = 2) ;   y1 = function (x)   -(25-(x-1)^2)^(1/2)   ;   lines (x, y1(x), col = 2, lwd = 2, lty = 2) ; points (-2, -4, pch = 16, col = 2) ; points (4, 4, pch = 16, col = 2); title ("Grafica de la funcion 3x+4y-3")   ;   title(x lab = "x", y lab = "y")

Códigos del ejemplo 3:

X = seq (0, 10, len = 100) ; y = seq (0, 10, len = 100)   ;   f = function (x, y)   9-x^2-y^2   ; z = outer (x, y, f) ; contour (x, y, z)   ;   y0 = function (x)   4-x   ; lines (x, y0(x), col = 2, lwd = 2, lty =2)   ;   points (2, 2, pch = 16, col = 2)   ; title ("Grafica de la funcion 9-x^2-y^2") ;   title (x lab = "x", y lab = "y")

Códigos del ejemplo 4:

K = seq (0, 60, len = 500) ;   L = seq (0, 360, len = 500) ; f = function (K, L) 50*L^(2/3)*K^(1/3)   ; z = outer(K, L, f)   ; contour (K, L, z) ; y0 = function (K)   (45000-300*K)/100 ; lines (K, y0(K), col = 2, lwd = 2, lty = 2)   ;   points (50 , 300, pch = 16, col = 2); title ("Funcion de producción de Cobb-Douglas")   ;   title (x lab = "Cantidad de Capital K", y lab = "Cantidad de Trabajo L")

Códigos del ejemplo 6:

X = seq (0, 260, len = 400); y = seq (0, 60, len = 400); f = function (x, y) 100*x^ (3/4) *y^ (1/4); Z = outer (x, y, f); contour (x, y, z); y0 = function (x, y);   150*x+250*y-50000; lines (x, y0(x, y), col = 2, lwd = 2, lty = 2); points (250, 50, pch = 16, col=2); title ("Funcion de producción de Cobb-Douglas”); title (x lab = "Unidades de trabajo", y lab = "Unidades de capital")

Códigos del ejemplo 7:

X = seq (-10, 10, len = 100) ;   y = seq (-10, 10, len = 100) **;**   f = function(x, y)   x^2+y^2   ; z = outer(x, y, f)   **;**   contour(x, y, z)   **;**   y0 = function(x)   (-x+(-3*x^2+12)^(1/2))/2 ; lines (x, y0(x), col = 2, lwd = 2, lty = 2)   ;   y1 = function(x)   (-x-(-3*x^2+12)^(1/2))/2   **;** lines (x, y1(x), col = 2, lwd = 2, lty = 2)   ;   points (1, 1, pch = 16, col = 2)   **;**   points (-1, -1, pch = 16, col = 2)   ;   points ((3)^(1/2), -(3)^(1/2), pch = 16, col = 2)   **;**   points(-(3)^(1/2), (3)^(1/2), pch = 16, col = 2) ;   title ("Grafica de la funcion x^2+y^2") **;**   title (x lab = "x", y lab = "y")

Códigos del ejemplo 9:

X = seq (-10 ,10, len = 100) ; y = seq (-10, 10, len = 50) ; f = function (x, y) -y ; z = outer (x, y, f); contour (x, y, z) ; y0 = function (x) x^(2/3) ; lines (x, y0(x), col = 2, lwd = 2, lty = 2) ; points (0, 0, pch = 16, col = 2) ; title ("Grafica de la funcion -y") ; title(x lab = "x", y lab = "y")

Código del ejemplo 10:

X = seq (-5, 5, len = 100) ; y = seq (-5, 5, len = 100) ; f = function (x, y) -x^2-y^2 ; z = outer (x, y, f) ; contour (x, y, z) ; y0 = function (x) x^(2/3) ; lines (x, y0(x), col = 2, lwd = 2, lty = 2) ; points (0, 0, pch = 16, col = 2) ; title ("Grafica de la funcion -x^2-y^2") ; title (x lab = "x", y lab = "y")

BIBLIOGRAFÍA

1. http://es.scribd.com/document/384715053/Historia-de-Como-Surgio-El-Metodo-de-Los-Multiplicadores-de-LaGrange
2. Daniel G. Prolong. (2018), Un abordaje del multiplicador de Lagrange por medio de la teoría de registros de representación semiótica en estudiantes de economía, pag. 22.
3. Lagrange, J-L: Méchanique analitique, Reprint ed., París, 1965.
4. https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applicatios-of-multivariable-derivates/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-single-constraint
5. HOWARD ANTON, ÁLGEBRA LINEAL 3ra edición.
6. Calculus Concepts and Contexts 2nd Ed – James Stewart.
7. Ron LARSON, BRUCE H. EDWARDS. Cálculo 2 de varias variables, novena edición.
8. departamentodematematicas.itam.mx/sites/default/files/u452/notaswmc2_1-13.pdf
9. https://www.ugr.es/~buribe/3127/1y2ciclo/micrGade/Temas/Tema01/4.php
10. Mathematics for Economists, CARL P. SIMON – LAWRENCE BLUME.
11. LEITHOLD, EL CALCULO – 7MA EDICIÓN.
12. Matemáticas para el Análisis Económico - Knut Sydsaeter & Peter Hammod.