

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA



**SERIES DE FOURIER Y EL FENÓMENO DE
LA DIFRACCIÓN DE LA LUZ**

MONOGRAFÍA PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

PRESENTA:

Br. Jorge Luis Aguinaga Dimas
Br. Edwin Yuriel Reyes Álvarez
Br. Benito Nolberto Salazar Delgado

TUTOR:

Lic. Lissette del Carmen Quintero Vargas

León, Nicaragua, octubre 2020

“ A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD ”

DEDICATORIA

Dedicamos esta tesis a Dios, que ha sido el forjador de nuestro camino, que nos acompaña y siempre endereza de continuos tropiezos. A nuestros padres, que nos apoyaron incondicionalmente y con sincero amor estuvieron siempre a disposición.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por habernos dado la vida y salud, a nuestros padres por apoyarnos económica y emocionalmente, para poder llegar a concluir nuestra carrera. Agradecemos a la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León por habernos aceptado y abrir las puertas de su seno científico para estudiar nuestra carrera, así como también a los diferentes docentes que brindaron sus conocimientos y su apoyo para seguir adelante día a día.

Nuestro agradecimiento a la asesora de tesis, Lic. Lissette del Carmen Quintero Vargas por habernos brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como también por brindarnos toda la paciencia, para guiarnos durante todo el desarrollo de la tesis. A todos los que fueron compañeros de clase durante todos los niveles de la universidad ya que gracias al compañerismo, amistad y apoyo moral han aportado en un alto porcentaje a las ganas de seguir adelante para culminar nuestra carrera profesional.

RESUMEN

El objetivo de este proyecto es evaluar la fórmula integral que describe el fenómeno de la difracción de la luz, mediante series de Fourier. Se deduce en primera instancia la integral de Kirchhoff para el cálculo de los espectros de luz, pero dicha fórmula al ser incompleta, se generaliza obteniendo el modelo integral de Fresnel-Kirchhoff utilizado para patrones de difracción en campo cercano y lejano. En particular, se centra en el segundo campo mencionado conocido como la difracción de Fraunhofer.

Palabras claves: **Fourier, difracción, Fresnel-Kirchhoff y Fraunhofer.**

ÍNDICE GENERAL

1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes de estudio	2
1.3. Objetivos de la investigación	5
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. Introducción a las series de Fourier	6
2.1.1. Desarrollo histórico	6
2.1.2. De las series trigonométricas a las series de Fourier	6
2.1.3. Función de periodo $2L$	7
2.1.4. Forma compleja de la serie de Fourier	9
2.2. Difracción de la luz	10
2.2.1. Movimiento ondulatorio, la luz como onda	11
2.2.2. Generalidades del movimiento ondulatorio	12
2.2.3. Ondas electromagnéticas	12
2.2.4. Breve introducción histórica	14
2.2.5. Propagación en la recta. Ecuación Homogénea	15
2.2.6. Problema de Cauchy	17
2.2.7. Ecuación de Laplace	20
2.2.8. Fórmulas de Green	25
2.2.9. Propiedades fundamentales de las funciones armónicas	30
2.2.10. Ecuación general con coeficientes constantes	32
3. DISEÑO METODOLÓGICO	33
3.1. Tipo de Investigación	33
3.2. Diseño de la investigación	33
3.2.1. Comprensión de la teoría de difracción	34
3.2.2. Justificación de la teoría mediante demostraciones	34

3.2.3. Desarrollo Teórico y demostrativo de la teoría integral de Fraunhofer	34
4. Desarrollo	35
4.1. Problema de Cauchy en el espacio	35
4.1.1. Método de Promediación	37
4.2. Fórmula de Kirchhoff	39
4.2.1. Fórmula integral de Fresnel - Kirchoff	41
4.3. Difracción de Fraunhofer y Fresnel	44
4.3.1. Curvatura del frente de onda	45
4.4. Patrones de difracción de Fraunhofer	46
4.4.1. Consideraciones para difracción de Fraunhofer	47

CAPÍTULO 1

ASPECTOS INTRODUCTORIOS

1.1. Introducción

Debido a los múltiples campos de aplicación de la difracción de la luz, es necesario enriquecer el conocimiento de las ciencias que aportan a su desarrollo (tales como la Física y las Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P)), en sus diferentes ramas por ejemplo: en la Microscopía (uso de lentes ampliando imágenes), ciencias astronómicas (telescopios refractores) y medicina (rayos X).

La difracción constituye una variable importante en el desarrollo de instrumentos mejorando características de ampliación y resolución de imágenes (microscopios) y dispersión coherente del haz de rayos X. La medición y el manejo del fenómeno exigen el desarrollo y verificación de las principales teorías que la sustentan, en ese sentido, la presente investigación contribuirá con el enriquecimiento de la literatura científica, tiene como finalidad deducir la fórmula integral que describe el fenómeno de la difracción de la luz, mediante series de Fourier. Considerando a las funciones de Green como base para el desarrollo y planteamiento de las ecuaciones diferenciales a desarrollar.

Las series de Fourier toman su relevancia con el hecho de que debemos considerar funciones armónicas, esto quiere decir, que obligatoriamente es necesario realizar un análisis armónico. Dicho análisis se ocupa, a grandes rasgos, de la descomposición de funciones en tonos puros que se denominan armónicos, son objetos que nos recuerdan a las funciones $\cos(2\pi nx)$ y $\sen(2\pi nx)$ con $n \in \mathbb{Z}$, las cuales aparecen en los desarrollos de Fourier clásicos.

Se pondrá de manifiesto los aspectos físicos y matemáticos necesarios que explican el desarrollo del fenómeno de difracción, guardando el rigor matemático. Abarcando desde la construcción de la **integral de Poisson**, que hace referencia a los proble-

mas de contorno, hasta la obtención de la fórmula de Kirchhoff mediante el método de promediación y luego finalizar generalizando el modelo integral de Fraunhofer.

El problema referente a la difracción de luz se encuentra relacionado con diversos factores, pero principalmente se asocia con funciones especiales como las armónicas que describen movimientos ondulatorios. En este contexto, los problemas de contorno, tanto los interiores como los exteriores obligan a trabajar con regiones cerradas, donde puedan aplicarse las funciones de Green y de esta forma disminuir su complejidad.

Por lo cual, se pretende deducir cierta fórmula integral que permita la facilidad en los cálculos de los fenómenos de difracción, enfocado en los componentes de física y Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P).

Contenido de los capítulos

En el capítulo I, se abordan los aspectos generales de la investigación, tales como los antecedentes de estudio, planteamiento del problema, justificación y los objetivos de la investigación; en él se detallan los alcances de la presente investigación en torno al fenómeno de difracción de la luz.

En el capítulo II, se realiza una introducción al análisis de Fourier abarcando la deducción de las series de Fourier considerando las series trigonométricas de senos y cosenos. Además, se abordan conceptos como el de luz, la consideración de la luz como una onda y un movimiento esencial que es el ondulatorio. También se considera la propagación de onda en la recta, el problema de Cauchy, la ecuación de Laplace, fórmulas de Green, propiedades de las funciones armónicas y se finaliza con la ecuación general con coeficientes constantes.

El capítulo III, detalla el tipo, diseño y fases de la investigación para el desarrollo teórico y demostrativo de la teoría integral de Fraunhofer.

En el capítulo IV, se plantea el problema de Cauchy en la esfera integral de Poisson y mediante el método de promediación se obtiene la integral de Kirchhoff. Luego se generaliza dicha integral obteniendo el modelo integral de Fresnel - Kirchhoff y considerando una región de campo lejano resulta la difracción de Fraunhofer.

1.2. Antecedentes de estudio

A través de los años, surgieron diferentes avances en el campo de la óptica, pero es de especial interés el año de 1648 cuando **Francesco María Grimaldi** (1618-1663) matemático y físico italiano, realizó un experimento en el que dejó penetrar la luz del sol en un cuarto oscuro a través de un pequeño orificio en una cartulina, descubriendo

que la luz proyectaba una mancha de mayor tamaño que la esperada si la propagación de la luz fuera rectilínea. En algunos otros experimentos observó que la orilla de la sombra en lugar de estar bien definida, mostraba algunas franjas claras y oscuras. Estos fenómenos los atribuyó debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, a la que Grimaldi le dió el nombre de difracción. En 1665, publicó sus observaciones en *Physicomathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis*.

En 1678, el matemático, astrónomo y físico holandés **Christian Huygens** (1629-1695), postuló que la luz era de naturaleza ondulatoria, partiendo del concepto de que cada punto luminoso de un frente de ondas puede considerarse un nuevo frente de ondas, a esta construcción se le conoce como principio de Huygens. Con base en esta teoría presentó de forma cualitativa los fenómenos de reflexión, refracción y doble refracción de la luz en su obra *Traité de la lumière*.

El establecimiento definitivo de una teoría ondulatoria transversal de la luz más formal se obtuvo alrededor de 1823 gracias a **Augustín Jean Fresnel** (1778-1827), físico francés que contribuyó a establecer la base matemática y conceptual de la teoría ondulatoria de la luz, muestra que la difracción puede ser explicada aplicando la construcción de Huygens.

Posteriormente en 1883 **Gustav Kirchhoff** (1824-1887) extendió los resultados teóricos de Fresnel a un formalismo que se utiliza hoy en día. En 1864, el físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879), se da cuenta de la relación que existe entre la electricidad, el magnetismo y la luz desarrollando la formulación matemática del campo electromagnético que se concreta en las famosas ocho ecuaciones de Maxwell. Maxwell tuvo tanto éxito con su teoría que pudo explicar cualitativa y cuantitativamente todos los fenómenos ópticos y electromagnéticos conocidos hasta entonces.

En estudios recientes, **Pablo Fernandez Gallardo** (Madrid, España, 1997, Tesis doctoral), su estudio se basó en la convergencia de las series de Fourier y su conexión con la cristalografía, concluyó que la difracción por cristales es posible, utilizando las series de Fourier, deduciendo fórmulas integrales de difracción y mostrando que para que pueda llevarse a cabo el fenómeno cristalográfico, es necesario, que la serie de Fourier converja.

Claudia Rosario Muro Urista (Pachuca, Mexico, 2000, maestro en ciencias con orientación en la enseñanza matemática), su trabajo estuvo basado en la significación de la series de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa, sus observaciones estuvieron sustentadas en el modelo de enseñanza de las series de Fourier, poniendo de manifiesto que la instrucción en el área de ciencias exactas tiene fallas, porque los estudiantes no visualizan procesos simples, en series de Fourier que son de gran relevancia. En este contexto, toma la transferencia de masa y formula un modelo a seguir para otros docentes.

Wanda Toloza Díaz (Bogotá, Colombia, 2016, Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales), su trabajo estuvo orientado a la enseñanza de los fenómenos de difracción e interferencia de la luz, a través de procesos experimentales, esta investigación arrojó una propuesta didáctica para la enseñanza de los fenómenos ondulatorios de interferencia y difracción de la luz con estudiantes de un centro educativo, con materiales propios de la región.

Elizabeth Flores Garduño (San Luís Potosí, México, 2016, maestro en nanociencias y materiales), realizó una generalización paramétrica de la espiral de Cornu en difracción óptica. A partir del formalismo matemático para el régimen de difracción de campo cercano para una abertura rectangular, se generalizó el parámetro conocido como número de Fresnel como factor de escalamiento asociado al área de la misma abertura rectangular dentro de los límites de integración para calcular tanto la perturbación óptica como la irradiancia producida por este tipo de abertura.

1.3. Objetivos de la investigación

General

- Evaluar la fórmula integral que describe el fenómeno de la difracción de la luz, mediante series de Fourier.

Específicos

- Mostrar la solución de los problemas de contorno en el círculo y esfera integral de Poisson, auxiliándonos de series de Fourier.
- Determinar la fórmula integral de Kirchhoff de los espectros de luz.
- Calcular la fórmula integral de Fraunhofer que describe el fenómeno de la difracción de la luz.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción a las series de Fourier

2.1.1. Desarrollo histórico

Fourier en su libro titulado *Théorie analytique de la chaleur* publicado en 1822, expone la teoría matemática de las leyes de propagación del calor, además, desde el punto de vista físico, Fourier fue el primero en deducir la ecuación diferencial que describe la difusión del calor e inventó el método de separación de variables para su resolución, reconoció la potencia de este método. Fue también conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas ahora series de Fourier.

El problema de la representación de una función en serie trigonométrica tenía precedentes en el siglo XVIII. Fue con los intentos de resolver el problema de la cuerda vibrante donde la influencia de la teoría de las series trigonométricas repercutió más tarde en la clarificación de conceptos como: función, continuidad, integral, serie, convergencia, etc. Por ello las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. En épocas más recientes, la integral de Lebesgue se desarrolló en estrecha conexión con la teoría de series de Fourier y la teoría de funciones generalizadas con las integrales de Fourier.

2.1.2. De las series trigonométricas a las series de Fourier

(Hsu, 1987) explica que las series de Fourier representan funciones definidas en un intervalo de la recta o, equivalentemente funciones periódicas de la recta. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas. Podemos deducir estos conceptos, a partir de la serie de Fourier.

Se llama serie trigonométrica de periodo 2π a la serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \quad (2.1.1)$$

Dada una función periódica de periodo 2π buscamos una serie trigonométrica que coincida con ella. Supongamos que la serie (2.1.1) converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a la función f , por lo que se tiene la igualdad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \quad (2.1.2)$$

Luego, si integramos en $[-\pi, \pi]$, por la convergencia uniforme y considerando que las integrales de $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ son cero, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0. \quad (2.1.3)$$

Multiplicando la igualdad (2.1.3) por $\cos kx$ e integrando en $[-\pi, \pi]$, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi a_k. \quad (2.1.4)$$

Haciendo algo semejante para $\operatorname{sen} kx$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \pi b_k. \quad (2.1.5)$$

Así, los valores de los coeficientes de la serie en (2.1.2) son los siguientes (Bruzual and Domínguez, 2003)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (2.1.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx. \quad (2.1.7)$$

Definición 2.1.1 Dada una función integrable f , los números $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ y $\{b_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ dados en (2.1.6) y (2.1.7) se llaman coeficientes de Fourier de f . La serie trigonométrica 2.1.1 construida con estos coeficientes se llama serie de Fourier de f (Duoandikoetxea, 2003).

2.1.3. Función de periodo $2L$

(Bruzual and Domínguez, 2003) explica que si consideramos funciones periódicas de periodo 2π . Si el periodo es $2L$ (periodo arbitrario), para su deducción es necesaria la siguiente definición

Definición 2.1.2 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es periódica cuando existe un número real T , no nulo, tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso se dice que T es un período para f (Bruzual and Domínguez, 2003).

Sea $f(t) = f(t + 2L)$, para aplicar a estas funciones la teoría anteriormente descrita para funciones de período 2π , se efectuará un cambio de variable, el que conduce a una nueva función tal que la nueva variable es de período 2π . Consideremos

$$t = \frac{L}{\pi}x,$$

entonces

$$f(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

si definimos

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

Claramente por definición 2.1.2 la función g es una función periódica de t de período 2π ya que

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = g(x)$$

Luego: para la función $g(t)$ podemos usar los conceptos de Fourier para funciones de período 2π . Podemos escribir

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

siendo sus coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen} kx \, dx,$$

entonces, como $x = \frac{\pi}{L}t$,

$$g\left(\frac{L}{\pi}t\right) = f\left(\frac{L}{\pi} \frac{\pi}{L}t\right) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \right).$$

Si el período es $2L$, la serie trigonométrica toma la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi kx}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{L} \right) \quad (2.1.8)$$

Los coeficientes también se adaptan y quedan expresados como

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi kx}{L}\right) dx. \quad (2.1.9)$$

2.1.4. Forma compleja de la serie de Fourier

(Hsu, 1987) explica que la forma trigonométrica de la serie de Fourier de una función f , periódica de periodo L puede adoptar otra expresión en términos de funciones exponenciales como se muestra a continuación.

Aprovechando las fórmulas de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

y las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

se tiene que

$$\cos \frac{\pi kx}{L} = \frac{e^{\frac{\pi ikx}{L}} + e^{-\frac{\pi ikx}{L}}}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{L} = \frac{e^{\frac{\pi ikx}{L}} - e^{-\frac{\pi ikx}{L}}}{2i},$$

de modo que

$$\begin{aligned} k \cos \frac{\pi kx}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{L} &= a_k \left(\frac{e^{\frac{\pi ikx}{L}} + e^{-\frac{\pi ikx}{L}}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{\frac{\pi ikx}{L}} - e^{-\frac{\pi ikx}{L}}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[a_k \left(e^{\frac{\pi ikx}{L}} + e^{-\frac{\pi ikx}{L}} \right) - ib_k \left(e^{\frac{\pi ikx}{L}} - e^{-\frac{\pi ikx}{L}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_k e^{\frac{\pi ikx}{L}} + a_k e^{-\frac{\pi ikx}{L}} - ib_k e^{\frac{\pi ikx}{L}} + ib_k e^{-\frac{\pi ikx}{L}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(a_k - ib_k) e^{\frac{\pi ikx}{L}} + (a_k + ib_k) e^{-\frac{\pi ikx}{L}} \right] \end{aligned}$$

sustituyendo ahora en (2.1.2) se obtiene

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{e^{\frac{\pi ikx}{L}} + e^{-\frac{\pi ikx}{L}}}{2} \right) + ib_k \left(\frac{e^{-\frac{\pi ikx}{L}} - e^{\frac{\pi ikx}{L}}}{2} \right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{\frac{\pi i k x}{L}} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-\frac{\pi i k x}{L}} \right) \quad (2.1.10)$$

Ahora definiendo

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_k - ib_k}{2} = c_k, \quad \frac{a_k + ib_k}{2} = \overline{c_k}$$

luego, como $\sin \frac{kx}{L}$ es impar y $\cos \frac{kx}{L}$ es par, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $c_{-k} = \overline{c_k}$. Por lo que

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} + c_{-k} e^{-\frac{\pi i k x}{L}} \right)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-\frac{\pi i k x}{L}} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{\pi i k x}{L}}. \end{aligned}$$

Esta es la llamada **forma compleja de la serie de Fourier o serie compleja de Fourier**.

2.2. Difracción de la luz

Antes de iniciar el siglo XIX, la luz era considerada un flujo de partículas que eran emitidas por un objeto observado o emanaban de los ojos del observador. Newton, principal arquitecto del modelo de las partículas de la luz, afirmaba que éstas eran

emitidas por una fuente luminosa y que estimulaban el sentido de la vista al entrar en los ojos del observador. Con esta idea pudo explicar la reflexión y la refracción.

En 1801, Thomas Young dio la primera demostración clara de la naturaleza ondulatoria de la luz. Demostró que, bajo condiciones apropiadas, los rayos de luz se interfieren unos con otros. Tal comportamiento no podía ser explicado en aquel tiempo por una teoría de partículas porque no había forma imaginable en que dos o más partículas pudieran unirse y cancelarse entre sí.

Desarrollos adicionales durante el siglo XIX condujeron a la aceptación general del modelo de onda de la luz, el resultado más importante de la obra de Maxwell, quien en 1873 afirmó que la luz era una forma de onda electromagnética de alta frecuencia. Hertz proporcionó información experimental de la teoría de Maxwell en 1887 al producir y detectar ondas electromagnéticas.

Según la teoría de Einstein, la energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la onda electromagnética. Por lo cual, debe considerar que la luz tiene doble naturaleza: en algunos casos exhibe características de una onda y en otras de una partícula. En este trabajo se investiga la naturaleza ondulatoria de la luz (Serway and Jewett, 2009).

2.2.1. Movimiento ondulatorio, la luz como onda

Estos son ejemplos de movimiento ondulatorio en la vida diaria: el sonido producido en la laringe de los animales y de los hombres que permite la comunicación entre los individuos de la misma especie, las ondas producidas cuando se lanza una piedra a un estanque, las ondas electromagnéticas producidas por emisoras de radio y televisión, entre otros.

Todos estos son ejemplos de movimiento ondulatorio y tienen en común dos importantes propiedades:

1. La energía se traslada a puntos distantes
2. La perturbación marcha a través del medio sin que éste en su totalidad sufra ningún desplazamiento permanente.

Los dos tipos principales son las mecánicas y las electromagnéticas. En el caso de las ondas mecánicas, algunos medios físicos se perturban; por ejemplo, en el punto donde la piedra choca con la superficie del agua, se crean ondas. Estas ondas se mueven hacia fuera, a partir del punto de creación, en círculos que se expanden hasta que alcanzan la orilla, los elementos del agua se perturban.

Las ondas electromagnéticas no requieren un medio para propagarse; algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz visible, las ondas de radio, las señales de televisión y los rayos X (Jewett and Serway, 2008).

2.2.2. Generalidades del movimiento ondulatorio

El movimiento ondulatorio consiste en la propagación de una propiedad física o una perturbación (variación de alguna magnitud física) descrita por un cierto campo, a través de un medio.

Definición 2.2.1 *En un movimiento ondulatorio se transmite o propaga una condición dinámica, esto es, cantidad de movimiento y energía (Jewett and Serway, 2008).*

2.2.3. Ondas electromagnéticas

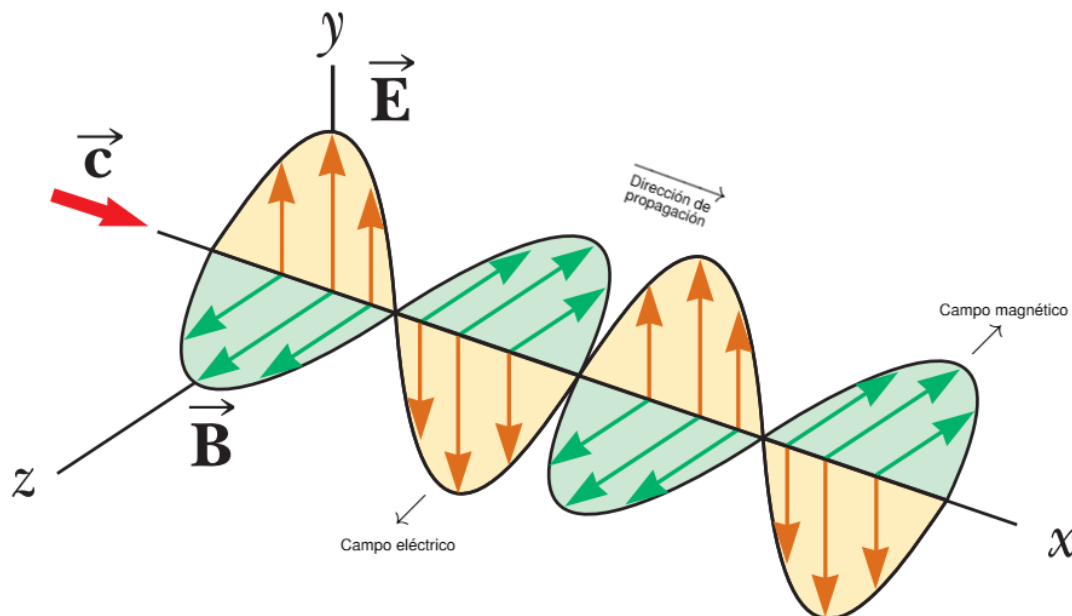


Figura 2.1: Representación de una onda electromagnética que se mueve en la dirección x positiva con una velocidad \vec{c} (Serway and Jewett, 2009).

La figura 2.1 muestra los vectores de campos de una onda electromagnética. Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la propagación de la onda. Las ondas electromagnéticas son, por lo cual, ondas transversales. Los campos de \vec{E} y \vec{B} están en fase y, en cada punto del espacio y en cada instante del tiempo, sus módulos están relacionados por la expresión

$$\vec{E} = c \vec{B}$$

Enfoque su atención en La figura 2.1, la onda electromagnética que viaja en la dirección x (la dirección de propagación). Para esta onda, el campo eléctrico \vec{E} está en la dirección y y el campo magnético \vec{B} está en la dirección z . Tales ondas, en que los

campos eléctrico y magnético se restringen a ser paralelos a un par de ejes perpendiculares, se dice que son **ondas linealmente polarizadas** (Serway and Jewett, 2009).

La onda (véase la figura 2.2) se muestra en un instante de tiempo cuando el campo eléctrico está a lo largo de la dirección y y tiene su máxima magnitud y el campo magnético está a lo largo de la dirección z , también con su máxima magnitud. Estos campos sólo dependen de x y t .

Imagine también que la fuente de las ondas electromagnéticas es tal que una onda radiada desde cualquier posición en el plano yz (como puede sugerir la figura 2.2) se propaga en la dirección x y todas las ondas semejantes se emiten en fase. Si se define un rayo como la línea a lo largo de la cual viaja la onda, todos los rayos para estas onda son paralelos. A esta colección completa de ondas con frecuencia se les llama **onda monodimensional**.

Una superficie que conecta los puntos de igual fase en todas las ondas es un plano geométrico denominado **frente de onda**. En comparación, una fuente puntual de radiación envía ondas radialmente en todas direcciones. Una superficie que conecta puntos de igual fase para esta situación es una esfera, así que esta onda se llama **onda esférica** (Serway and Jewett, 2009).

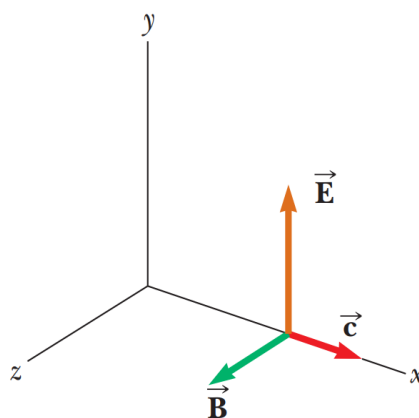


Figura 2.2: Una onda electromagnética que viaja con velocidad \vec{c} en la dirección x positiva, no solamente desde el origen (Serway and Jewett, 2009).

Ondas armónicas

Para entender de manera oportuna se necesita definir qué es una onda.

Definición 2.2.2 *Una onda es una perturbación que se propaga de un punto a otro de un medio sin que exista transporte neto de materia, pero sí transmisión de energía, es decir, las ondas transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia (Tipler, 2001).*

Definición 2.2.3 *Cuando una onda se propaga produce perturbaciones, que pueden ser expresadas matemáticamente. Si podemos expresar estas variaciones espaciales y temporales del medio mediante funciones senos o cosenos decimos que es una **onda armónica** (Hecht, 2000).*

2.2.4. Breve introducción histórica

La búsqueda de un modelo que explicara la verdadera naturaleza de la luz (y de otros fenómenos que hoy sabemos que son manifestaciones del mismo hecho, la radiación electromagnética) ha sido uno de los grandes empeños de los hombres de ciencia a lo largo de la historia. Los nombres que podemos asociar a su estudio constituyen una vista a la galería de los físicos y matemáticos ilustres que en el mundo han sido: Newton, Fermat, Huygens, Euler, Poisson, Maxwell, Einstein, entre otros.

La forma en que la luz se propaga se justifica de las primeras explicaciones que se construyeron sobre modelos corpusculares; lo que permitió describir, con sencillas construcciones geométricas, muchos fenómenos ópticos. Pero pronto se comprobó experimentalmente que en ciertas situaciones la luz se comportaba de forma anómala, entre estos fenómenos se encuentra la difracción de la luz. El término difracción viene del Latín *diffractus* que significa quebrado. La difracción ocurre debido a que una onda puede rodear un obstáculo en su propagación alejándose del comportamiento de los rayos rectilíneos. Los efectos de la difracción son regularmente pequeños.

Durante el transcurso del siglo XVI se produjeron numerosas aportaciones a este campo. Hooke en 1801, realizó observaciones y propuso que la luz consistía en rápidas vibraciones que se propagaban instantáneamente (o casi). Huygens sugirió que cualquier punto del éter, llegaba una perturbación luminosa que se convertía en el centro de nuevas perturbaciones que se propagaban esféricamente; y que se combinaban de forma que su envolvente definía el frente de ondas posterior.

Mientras la radiación electromagnética abandona su fuente, se expande viajando en línea recta tal como si fuera cubriendo la superficie de una esfera en continua expansión. Esta área se incrementa proporcionalmente al cuadrado de la distancia que ha viajado la radiación.

La energía electromagnética puede considerarse que se propaga de una fuente puntual en ondas planas. La ley del cuadrado inverso no solo se aplica a la fuente de energía sino que también a cualquier punto en la misma. Es decir, de cualquier punto en perturbación monodimensional, la energía se propaga como si el punto fuera la fuente de energía.

Por lo cual las ondas pueden ser consideradas que son creadas continuamente desde cada punto en el plano y propagadas en todas direcciones. Los problemas que estas teorías ondulatorias encontraban a la hora de explicar algunos fenómenos

básicos condujeron a Newton a formular su propia teoría, un modelo de emisión corpuscular.

El rechazo de Newton a la teoría ondulatoria pareció acallar durante un siglo a los partidarios de esta última. En 1818, la academia de París propuso para su premio anual el problema de la difracción, con la esperanza de que se confirmara finalmente el modelo corpuscular. Sorprendentemente, el premio le fue concedido a la memoria presentada por Fresnel, que se basaba en un tratamiento ondulatorio de la luz. Y le fue otorgado tras fuertes discusiones entre los miembros del comité.

A partir del modelo de Fresnel-Huygens (1883) de la difracción de la luz, el matemático Gustav Kirchhoff realizó una reformulación matemática. La idea básica de este modelo es que la perturbación luminosa en un punto responde a la superposición de ondas secundarias procedentes de una superficie situada entre el punto y la fuente Luminosa.

2.2.5. Propagación en la recta. Ecuación Homogénea

(Casas, 1994) explica que cuando en un espacio en el que está definida una variable física se produce una modificación de la misma en un punto, puede ocurrir que esta perturbación se propague a otros puntos y en ellos se reproduzca de forma análoga a como se hizo en el punto inicial, en cuyo caso diremos que la perturbación se mueve. Este movimiento de perturbaciones se rige por una ecuación fundamental, general e independiente de la variable física de que se trate, se llama **ecuación del movimiento ondulatorio**, y las soluciones de esta ecuación deberán ser tales que nos permitan obtener el valor de la variable en un instante dado en cualquier punto del espacio, a la vez que nos informan sobre todos los pormenores de la propagación.

Suponga, para fijar ideas que una variable ξ (perturbación) se modifica en un punto 0, tomando en él valores diferentes con el tiempo. Representemos su variación en 0 por la ecuación

$$\xi_0 = f(t) \quad (2.2.1)$$

Si la perturbación se propaga según la dirección positiva del eje de las x con una velocidad constante v , el valor de ξ en un punto de abscisa x será función de x y t , es decir

$$\xi = f(x, t) \quad (2.2.2)$$

Para ver cómo están ligados en general x y t en (2.2.2), basta considerar que el valor de ξ , suponiendo que el medio no produce amortiguación y que la perturbación se propaga con velocidad constante v , debe ser igual en el punto de abscisa x en el instante t que en el punto de abscisa $x + \Delta x$ en el instante $t + \Delta t$ siendo $\Delta x = v\Delta t$, lo cual solamente puede suceder si la ecuación (2.2.2) es de la forma (Casas, 1994)

$$\xi = f(vt - x) = f(u) \quad (2.2.3)$$

si la perturbación se propaga en el sentido de las x negativas, η será de la forma

$$\eta = f(vt + x) \quad (2.2.4)$$

Las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) pueden considerarse como las ecuaciones finitas de la propagación, pero en los problemas físicos son más importantes las ecuaciones diferenciales porque incluyen soluciones más generales a las que se le pueden fijar condiciones de contorno muy diversas, y porque el planteamiento matemático riguroso de un problema físico debe hacerse sobre evoluciones elementales del fenómeno, que son las únicas previsible en un momento dado, lo que implica plantear una ecuación diferencial (Casas, 1994).

En este caso hemos llegado por consideraciones formales a establecer la ecuación finita (2.2.3) y podemos pasar a la correspondiente ecuación diferencial eliminando en ella la función f por derivación hasta las derivadas segundas respecto a x y t , con lo que se obtiene

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -f'(u); \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = v f'(u) \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(u); \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 f''(u) \quad (2.2.6)$$

relacionando entre las (2.2.6) $f''(u)$, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.2.7)$$

de la cual son soluciones (2.2.3) y (2.2.4) siendo f y g funciones arbitrarias con la condición de ser derivables hasta el segundo orden que es lo que exigen las ecuaciones utilizadas, y cuya forma habrá que decidir en cada caso particular.

La (2.2.7) es la **ecuación diferencial del movimiento ondulatorio** para una variable ξ cuyo valor en un punto del eje x sólo depende de su abscisa x y del instante t que se considere.

Definición 2.2.4 *Si en todos los puntos de un plano normal al eje x se produce la misma perturbación simultáneamente y en todos se propaga en la dirección del eje x obedeciendo a (2.2.3) independientemente de las coordenadas y, z del punto origen, la misma (2.2.3) sirve para representarlo, y recibe el nombre de **ecuación de propagación de una onda plana** en la dirección del eje x (Casas, 1994).*

Según (Giordano, 2016) la ecuación (2.2.7) también puede representarse de la forma

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{2.2.8}$$

cuya solución general es

$$u = f(x + at) + g(x - at) \tag{2.2.9}$$

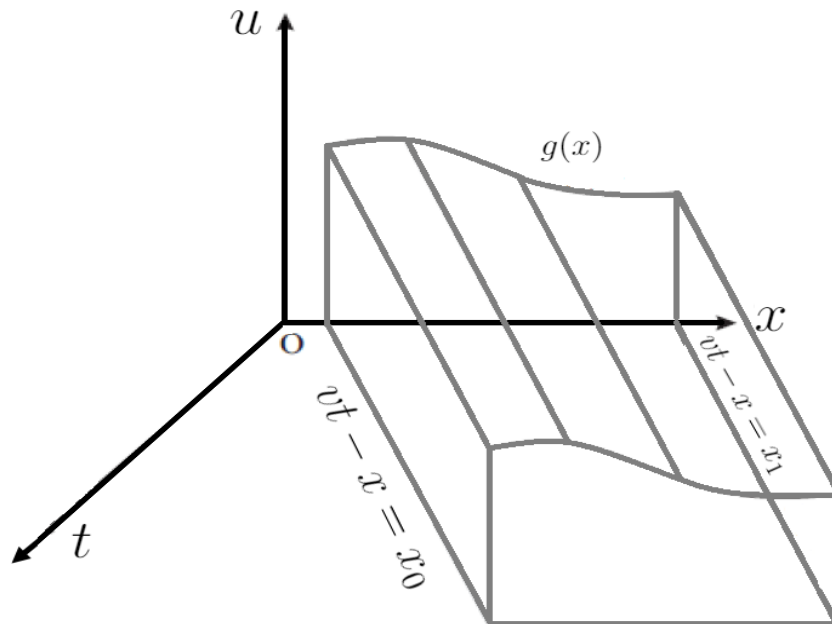


Figura 2.3: La figura ilustra el desplazamiento si la perturbación x se propaga en el sentido de las x positivas desde un punto inicial x_0 hasta el punto x_1 (Giordano, 2016).

2.2.6. Problema de Cauchy

(Giordano, 2016) explica que el problema de Cauchy consiste en hallar la solución de la ecuación de onda cuando se dan los valores de u y de u_t para $t = 0$. Se trata de un problema de valor inicial pues el desplazamiento u depende del perfil y de la distribución de velocidades de la cuerda para $t = 0$. Se supone que el resultado es válido para todo x real, es decir, $-\infty < x < \infty$.

Este planteo corresponde al caso de una cuerda suficientemente larga o, en su defecto, al caso en que se considera un intervalo de tiempo pequeño, por lo que no se evidencia la influencia de los extremos de la cuerda. El problema consiste en hallar la solución a la ecuación de onda,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \tag{2.2.10}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2.11)$$

Para resolverlo partimos de la solución general (2.2.9) y, utilizando las condiciones iniciales del problema, obtenemos

$$u(x, 0) = \phi(x) = f(x) + g(x), \quad (2.2.12)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = af'(x) + ag'(x) \quad (2.2.13)$$

y de la última, la relación

$$\int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi = af(x) - ag(x) + ac \quad (2.2.14)$$

con la ecuación (2.2.12) y (2.2.14) se determinan las funciones f y g ,

$$\int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - ac = af(x) - ag(x)$$

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - c = f(x) - g(x)$$

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - c = f(x) - [\phi(x) - f(x)]$$

$$2f(x) = \phi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - c$$

de modo que $f(x)$ y de forma análoga $g(x)$ resulta,

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2}, \quad (2.2.15)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{c}{2} \quad (2.2.16)$$

y la solución al problema es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (2.2.17)$$

A esta solución se le conoce como **fórmula de D'Alembert**.

Si en el plano de las fases (x, t) , por el punto (x_0, t_0) se trazan las características de ecuación $x \pm at = x_0 \pm at_0$, queda determinado un triángulo llamado **triángulo característico**, como se muestra en la figura 2.4.

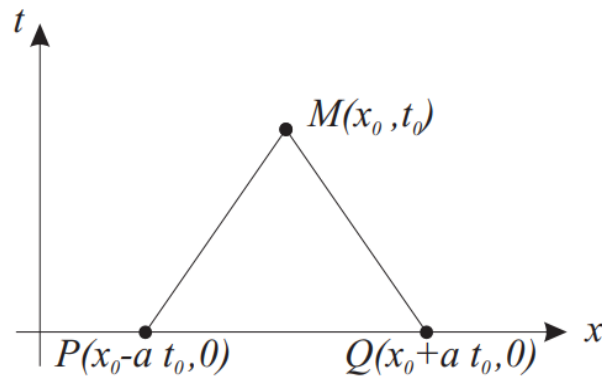


Figura 2.4: Triángulo característico correspondiente al punto de coordenadas (x_0, t_0) en el espacio de fases (Giordano, 2016).

De la fórmula de D'Alembert se deduce que el valor de la solución u en el punto (x_0, t_0) depende del valor de ϕ en los puntos $(x_0 \pm at_0, 0)$, y del valor de ψ en los puntos del intervalo $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ del eje $t = 0$. El intervalo $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, base del triángulo característico, se denomina **dominio de dependencia** de $u(x_0, at_0)$ (Giordano, 2016).

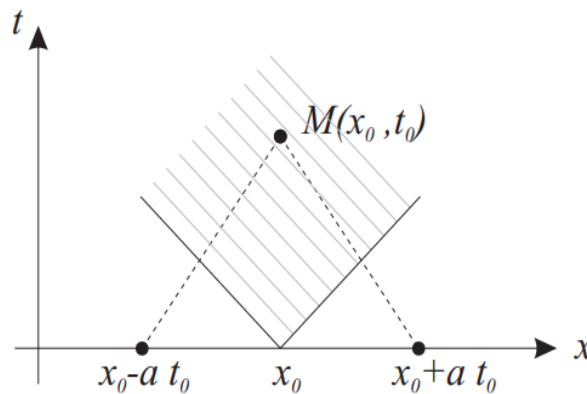


Figura 2.5: Dominio de influencia de $(x_0, 0)$ (región sombreada) y dominio de dependencia del punto M (intervalo sobre el eje x , $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$) (Giordano, 2016).

Por otro lado, un punto $(x_0, 0)$ influye en la determinación de los valores de u en los puntos (x, t) de la región limitada por las características que pasan por él; a esta región del plano de fases se la denomina **dominio de influencia** de $(x_0, 0)$ y se la muestra sombreada en la figura 2.5 (Giordano, 2016).

2.2.7. Ecuación de Laplace

Las ecuaciones del tipo elíptico se hallan asociadas a la descripción y estudio de procesos estacionarios o estados de equilibrio. La más conocida es la ecuación de Laplace, que en tres dimensiones presenta la forma:

$$\Delta u = 0 \quad (2.2.18)$$

donde Δ es el operador diferencial llamado **laplaciano**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.2.19)$$

El Laplaciano surge de considerar dos operaciones básicas sobre campos vectoriales el **rotacional** y **divergencia**, cada una se asemeja a la derivación, pero una de ellas produce un campo vectorial mientras que la otra un campo escalar (Giordano, 2016).

Campo vectorial rotacional

Definición 2.2.5 Si $F = Pi + Qj + Rk$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y las derivadas parciales de P, Q y R existen, entonces el rotacional de F es el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por (Stewart, 2000):

$$\text{Rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \quad (2.2.20)$$

para deducir (2.2.20), escribimos la ecuación empleando notación de operadores. Se introduce el operador diferencial vectorial ∇ como:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.2.21)$$

este operador tiene significado cuando actúa sobre una función escalar para producir el gradiente de f :

$$\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \quad (2.2.22)$$

Si se imagina a ∇ como un vector con componentes $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$, también se puede considerar el producto vectorial formal de ∇ con el campo vectorial F , como

sigue:

$$\begin{aligned} \nabla \times f &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = \text{rot } F \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1 Si f es una función de tres variables que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces (Stewart, 2000):

$$\text{rot } (\nabla f) = 0$$

Demostración: Para mostrar que se cumple $\text{rot } (\nabla f) = 0$ basta calcular el producto vectorial. Definamos $\text{rot } (\nabla f) = \nabla \times (\nabla f)$ y luego realizamos la operación:

$$\begin{aligned} \text{rot } (\nabla f) &= \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) k \\ &= 0i + 0j + 0k = 0 \end{aligned}$$

se logra mostrar que $\text{rot } (\nabla f) = 0$.

Divergencia

Definición 2.2.6 Si $F = Pi + Qj + Rk$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ existen, entonces la divergencia de F , es la función de tres variables definida por (Stewart, 2000):

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (2.2.23)$$

el $\text{rot } F$ es un campo vectorial, pero $\text{div } F$ es un campo escalar.

Definición 2.2.7 En términos del operador gradiente $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ la divergencia de F se puede escribir simbólicamente como el producto escalar de ∇ y F (Stewart, 2000)

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F \quad (2.2.24)$$

Teorema 2.2.2 Si $F = Pi + Qj + Rk$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y P, Q y R tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces (Stewart, 2000):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

Demostración: Para mostrar que se cumple la condición haremos uso de la definición de rotacional y divergencia, entonces podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} F &= \nabla \cdot (\nabla \times F) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

se logra probar que $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.

El operador diferencial de nuestro interés surge cuando se calcula la divergencia de un campo vectorial gradiente ∇f . Si f es una función de tres variables, se tiene

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

esta expresión se presenta y se le abrevia a menudo en la forma $\nabla^2 f$. El operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ se llama **operador de Laplace** debido a su relación análoga con la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

si realizamos la consideración de ∇ como un vector de componentes se tiene

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

de modo que de la ecuación anterior, se deduce el operador de Laplace (2.2.19) (Stewart, 2000). En tanto, el **Laplaciano en coordenadas cilíndricas** lo obtenemos

considerando lo siguiente:

Definición 2.2.8 Sea $f = f(x, y, z)$ una función de tres variables, donde un punto del espacio tridimensional se representa por (ρ, ϕ, z) , en donde ρ y ϕ son las coordenadas polares del punto y z fijo, es decir (Malakhaltsev and Arteaga, 2013):

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (2.2.25)$$

entonces,

$$f = f(\rho, \phi, z) \quad (2.2.26)$$

Definición 2.2.9 sea \vec{G} un campo vectorial definido para todo \mathbb{R}^3 cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas, donde \vec{G} , se define (Malakhaltsev and Arteaga, 2013):

$$\vec{G} = G_\rho \hat{\rho} + G_\phi \hat{\phi} + G_z \hat{z} \quad (2.2.27)$$

A continuación, escribamos f en términos de su gradiente vectorial:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.2.28)$$

Ahora, realicemos el producto Punto de $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$, esto es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

luego, si realizamos el producto cruz de $\vec{\nabla} \times \vec{G}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{G} &= \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_\rho & G_\phi & G_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial G_z}{\partial \phi} - \frac{\partial G_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial G_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\phi) - \frac{\partial G_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}. \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema (2.2.2), para un campo vectorial gradiente podemos encontrar el **Laplaciano en coordenadas cilíndricas**, que no es más que operar el resultado del producto punto y el producto cruz de $\vec{\nabla}$ y \vec{G} entonces obtenemos

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2.29)$$

y para las funciones con simetría cilíndrica, es decir, que solo dependen de ρ , la solución de la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (2.2.30)$$

es de la forma

$$u = A \ln \rho + B \quad (2.2.31)$$

La función $u = \ln(1/\rho)$ se conoce como solución fundamental de la ecuación de Laplace en el plano (Giordano, 2016).

El Laplaciano en coordenadas esféricas se deduce considerando un procedimiento análogo al de las coordenadas cilíndricas. En donde (r, θ, ϕ) es la triada que representa un punto en el plano tridimensional (Giordano, 2016).

Sea f una función en tres variables; definamos $f = f(r, \theta, \phi)$, además sea \vec{G} un campo vectorial, donde $\vec{G} = G_r \hat{r} + G_\theta \hat{\theta} + G_\phi \hat{\phi}$. De igual forma, escribamos el gradiente de la función:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Efectuando el producto punto y el producto cruz, para obtener el Laplaciano en coordenadas esféricas, en función del campo gradiente vectorial, esto es (Malakhal-tsev and Arteaga, 2013):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta G_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{G} = & \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ G_r & G_\theta & G_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta G_\phi) - \frac{\partial G_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

si operamos utilizando el producto punto y el producto cruz encontrado, se obtiene

el Laplaciano en coordenadas esféricas (Giordano, 2016):

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Si u tiene simetría esférica, es decir, depende solamente de r , entonces la solución de la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.2.32)$$

viene dada por

$$u = \frac{A}{r} + B \quad (2.2.33)$$

La función $1/r$ recibe la denominación de solución fundamental de la ecuación de Laplace en el espacio. Las soluciones de la misma con derivadas primeras y segundas continuas en una región D , se llaman funciones armónicas en D .

2.2.8. Fórmulas de Green

(Giordano, 2016) explica que las fórmulas de Green son de uso frecuente en la resolución de problemas que involucran ecuaciones del tipo elíptico. Se obtienen a partir de la fórmula de Gauss en el espacio según la cual, para un volumen $T \subset \mathbb{R}^3$ de frontera Σ y funciones P, Q y R continuas en $T + \Sigma$ y con derivadas continuas en T , se verifica que:

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.2.34)$$

se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &= \int_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \end{aligned}$$

Donde α, β y γ son los ángulos determinados por la normal exterior a Σ y los ejes x, y y z , respectivamente. Sean las funciones $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$, con derivadas continuas en $T + \Sigma$ y con derivadas segundas continuas en T . Tomando

$$P = uv_x, \quad Q = uv_y, \quad R = uv_z, \quad (2.2.35)$$

resultan

$$\begin{aligned} P_x + Q_y + R_z &= u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \\ P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma &= u(\nabla v \cdot n) = u \frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

con n la normal exterior a Σ . Reemplazando en (2.2.34) se obtiene la primera fórmula de Green:

$$\int_T u\Delta v \, dV = \int_\Sigma uv_n \, dS - \int_T (\nabla u \cdot \nabla v) \, dV \quad (2.2.37)$$

si en la fórmula (2.2.37) se intercambian u y v resulta

$$\int_T v\Delta u \, dV = \int_\Sigma vu_n \, dS - \int_T (\nabla v \cdot \nabla u) \, dV \quad (2.2.38)$$

luego de (2.2.37) se resta (2.2.38), se obtiene la segunda fórmula de Green:

$$\int_T (u\Delta v - v\Delta u) \, dV = \int_\Sigma (uv_n - vu_n) \, dS \quad (2.2.39)$$

A partir de (2.2.39) obtendremos la fórmula fundamental de Green en el espacio. Para ello consideremos la función $v = 1/R$, donde

$$R = R_{M_0M} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (2.2.40)$$

Es la distancia entre los puntos $M(x, y, z)$ y $M_0(x, y, z)$, que satisface la ecuación de Laplace $\forall M \neq M_0$. Sea u una función continua y con derivadas primeras continuas en $T + \Sigma$ y derivadas segundas en T . Si el punto $M_0 \notin T$ las funciones u y $1/R$ satisfacen la ecuación (2.2.39) (Giordano, 2016).

En el caso que $M_0 \in T$, definimos una región en la que se puede aplicar (2.2.39). Tomamos una esfera $K_\epsilon^{M_0}$, de centro M_0 y radio ϵ , de frontera $\Sigma_\epsilon^{M_0}$. La región de continuidad de u y sus derivadas es $T - K_\epsilon^{M_0}$, con frontera $\Sigma + \Sigma_\epsilon^{M_0}$. Si T es abierto podemos elegir de modo que $K_\epsilon^{M_0} + \Sigma_\epsilon^{M_0} \subset T$.

Entonces de (2.2.39) resulta

$$\begin{aligned} - \int_{T - K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R} \, dV &= \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \, dS \\ &+ \int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \, dS \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

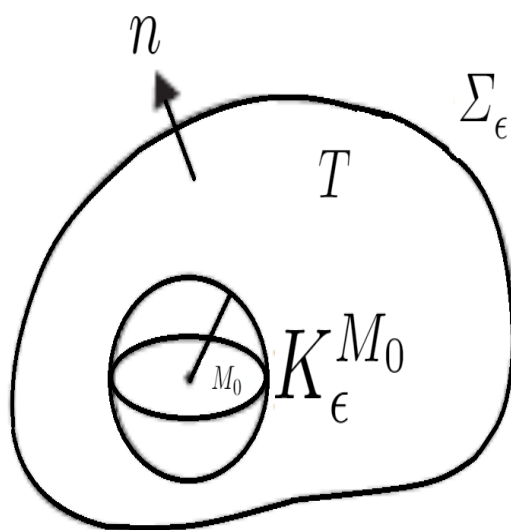


Figura 2.6: Se ilustra la región $T - K_\epsilon^{M_0}$ de frontera $\Sigma + \Sigma_\epsilon^{M_0}$ (Giordano, 2016).

Dado que n denota la normal exterior a la frontera $T - K_\epsilon^{M_0}$, es

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} = - \left. \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{R=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad (2.2.42)$$

Si se aplica el teorema del valor medio a las integrales sobre $\Sigma_\epsilon^{M_0}$ y se indican con \bar{u} y $\overline{(\partial u / \partial n)}$ el valor medio de u y de $(\partial u / \partial n)$ sobre $\Sigma_\epsilon^{M_0}$ respectivamente, resultan

$$\int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS = 4\pi \bar{u}, \quad \int_{\Sigma_\epsilon^{M_0}} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 4\pi \epsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \quad (2.2.43)$$

sustituyendo los valores en la fórmula (2.2.41) se obtiene:

$$\begin{aligned} - \int_{T - K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R} dV &= \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \\ &\quad + 4\pi \bar{u} - 4\pi \epsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \quad (2.2.44) \end{aligned}$$

Dado que u y sus derivadas primeras son continuas en T , y que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta + u_z \cos \gamma \quad (2.2.45)$$

se verifican:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{u} = u(M_0), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0 \quad (2.2.46)$$

El primer miembro de la fórmula integral hallada es una integral impropia y al tomar el límite de $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene;

$$- \int_T \frac{\Delta u}{R} dV = \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 4\pi u(M_0) \quad (2.2.47)$$

o bien

$$\int_\Sigma \left[\frac{1}{R_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 M}} \right) \right] dS - \int_T \frac{\Delta u}{R_{M_0 M}} dV = 4\pi u(m_0)$$

Que es la fórmula fundamental de Green para $M_0 \in T$, con T abierto. Si $M_0 \in \Sigma$ y se supone que Σ tiene plano tangente que varía con la continuidad, entonces se puede elegir ϵ pequeño, tal que el área de la esfera $\Sigma_\epsilon^{M_0}$ de centro en M_0 y radio ϵ que queda dentro de T sea la misma que la que queda afuera.

Consideremos ahora el volumen $T - K_\epsilon^{M_0}$ de frontera $\Sigma_1 + \Sigma_2$, con

$$\Sigma_1 = \Sigma_\epsilon^{M_0} \cap T \text{ y } \Sigma_2 = \Sigma - (\Sigma \cap K_\epsilon^{M_0}).$$

Entonces la fórmula de Green resulta

$$\begin{aligned} - \int_{T - K_\epsilon^{M_0}} \frac{\Delta u}{R} dV &= \int_{\Sigma_1} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \\ &\quad + \int_{\Sigma_2} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

donde

$$\int_{\Sigma_1} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS = 2\pi \bar{u}, \quad \int_{\Sigma_1} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 2\pi\epsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \quad (2.2.49)$$

tomando límite para $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene:

$$-\int_T \frac{\Delta u}{R} dV = \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 2\pi u(M_0) \quad (2.2.50)$$

Esto completa la fórmula de Green en el espacio (Giordano, 2016):

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS \\ - \int_T \frac{\Delta u}{R} dV = \begin{cases} 4\pi u(M_0), & M_0 \in T \\ 2\pi u(M_0), & M_0 \in \Sigma \\ 0, & M_0 \notin T + \Sigma \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

Considerando la región abierta T cuya frontera Σ es una superficie con plano tangente continuo en todos los puntos. Si u es una función armónica en T , entonces $M_0 \in T$ la fórmula fundamental de Green es (Giordano, 2016):

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS \quad (2.2.52)$$

Es decir, si u es una función armónica en T , su valor en un punto M_0 interior a T se puede hallar si se conocen los valores de la función u y de su derivada normal sobre la superficie Σ , frontera de T . Análogamente, a partir de la segunda fórmula de Green en \mathbb{R}^2 , se obtiene la Fórmula fundamental de Green en el plano (Giordano, 2016):

$$\begin{aligned} \int_C \left[\ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right] dS \\ - \int_S \Delta u \ln \frac{1}{R} dS = \begin{cases} 2\pi u(M_0), & M_0 \in S \\ \pi u(M_0), & M_0 \in C \\ 0, & M_0 \notin S + C \end{cases} \end{aligned}$$

Donde S es una región abierta de frontera C , y u con derivadas primeras y segundas continuas en $S + C$ y S respectivamente. Esta fórmula es la solución del problema de contorno para una función u armónica en una región S , con los valores dados de u y $\partial u / \partial n$ sobre la frontera C :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right] dS \quad (2.2.53)$$

A continuación veremos dos resultados que involucran la transformación de radio vectores inversos, respecto a una esfera de radio a , con centro en el origen O de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , en la cual cada punto $M(r, \theta, \phi)$ se le hace corresponder con el punto $M'(r', \theta', \phi')$. Los puntos O, M, M' están sobre la misma recta y los radio vectores r y r' se relacionan según la ecuación

$$rr' = a^2 \quad (2.2.54)$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a = 1$, lo que corresponde solo a un cambio de escala en las longitudes; la transformación resultante $r' = 1/r$ suele denominarse **transformación de Kelvin** (Giordano, 2016). En el plano, la transformación de los radio vectores inversos, en una función v armónica en el plano (ρ', ϕ) dada por

$$v(\rho', \phi) = u(\rho, \phi), \quad \text{donde } \rho' = \frac{1}{\rho} \quad (2.2.55)$$

La función $u(\rho, \phi) = v(\rho', \phi)$ es armónica en el plano (ρ, ϕ) es decir, verifica:

$$\Delta_{\rho\phi} u = \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\phi\phi} = 0 \quad (2.2.56)$$

transformando esta ecuación al plano (ρ', ϕ) se obtiene:

$$\rho'^2 v_{\rho'\rho'} + \rho' v_{\rho'} + v_{\phi\phi} = \Delta_{\rho'\phi} v = 0 \quad (2.2.57)$$

Luego, $u(\rho', \phi)$ es armónica. Análogamente, puede verse que si u es una función armónica en el espacio (r, θ, ϕ) , es decir, $\Delta_{r,\theta,\phi} u = 0$ entonces

$$v(r', \theta, \phi) = u(r, \theta, \phi) \quad (2.2.58)$$

Con $r' = 1/r$ satisface la ecuación de Laplace $\Delta_{r',\theta,\phi} v = 0$, es decir, v es armónica en el espacio (r', θ, ϕ) .

2.2.9. Propiedades fundamentales de las funciones armónicas

Teorema 2.2.3 Si la función u es armónica en T abierto de \mathbb{R}^3 , y Σ_1 es una superficie cerrada contenida en T , entonces (Giordano, 2016):

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (2.2.59)$$

Demostración: Las hipótesis del teorema permiten aplicar la segunda fórmula de Green al volumen $T_1 \subset T$ limitado por Σ_1

$$\int_{T_1} (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_{\Sigma_1} (uv_n - vu_n) dS \quad (2.2.60)$$

tomando $v = 1$, resulta (2.2.59). Este resultado nos permite afirmar que el problema de contorno en T con frontera Σ , que consiste en hallar u armónica en T , tal que

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f \quad (2.2.61)$$

con f continua, solo tiene solución si se verifica la condición $\int_{\Sigma} f \, dS = 0$.

Teorema 2.2.4 Primer teorema del valor medio en \mathbb{R}^3 . Si la función u es armónica en T abierto de \mathbb{R}^3 y siendo $\Sigma_a^{M_0}$ la superficie esférica de centro M_0 y radio a contenida en T , se verifica (Giordano, 2016)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u \, dS \quad (2.2.62)$$

Demostración: De la fórmula fundamental de Green (2.2.51) aplicada sobre $K_a^{M_0} \subset T$ y de frontera $\Sigma_a^{M_0}$:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a^{M_0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS \quad (2.2.63)$$

en virtud del teorema (2.2.3) resulta

$$\begin{aligned} u(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS \\ &= u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Sigma_a^{M_0}} u \, dS \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

Teorema 2.2.5 Segundo teorema del valor medio en \mathbb{R}^3 . Si la función u es armónica en T abierto de \mathbb{R}^3 y si $K_a^{M_0} \subset T$ es la esfera de centro M_0 y radio a , entonces (Giordano, 2016)

$$u(M_0) = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{K_a^{M_0}} u \, dV \quad (2.2.65)$$

Demostración: Si en el primer teorema del valor medio se considera una superficie esférica de radio ρ es:

$$4\pi \rho^2 u(M_0) = \int_{K_\rho^{M_0}} u \, dS \quad (2.2.66)$$

e integrando ambos miembros de (2.2.66) respecto de ρ entre 0 y a , se obtiene (2.2.65).

2.2.10. Ecuación general con coeficientes constantes

(Giordano, 2016) explica que toda ecuación del tipo elíptico con coeficientes constantes se reduce a la forma

$$\Delta u + cu = F \quad (2.2.67)$$

Las propiedades de su solución depende del signo de c . En particular, cuando $c > 0$ suele escribirse

$$\Delta u + K^2u = F \quad (2.2.68)$$

Se le conoce como ecuación de Helmholtz o ecuación ondulatoria (Haberman, 2003). Esta ecuación se presenta en problemas relacionados con oscilaciones permanentes, propagación de ondas, problemas estacionarios, entre otros.

Teorema 2.2.6 del valor Máximo para problemas interiores. *Sea T una región abierta y acotada. La solución de $\Delta u + K^2u = 0$, continua y con derivadas primeras y segundas continuas en T , toma su valor máximo, positivo y mínimo negativo en la Frontera de T (Giordano, 2016).*

Teorema 2.2.7 de Unicidad para el primer problema de contorno. *Si el primer problema interior de contorno para la ecuación $\Delta u + K^2u = 0$ tiene solución, esta solución es única (Giordano, 2016).*

Demostración: sean u_1 y u_2 soluciones, la función $u = u_1 - u_2$ es solución de la ecuación homogénea y $u|_{\Sigma} = 0$. El valor máximo de u no puede ser positivo pues debería de estar en la frontera, y el valor mínimo no puede ser negativo por la misma razón. Por lo tanto es $u = 0$ y la solución es única, tal como se quería demostrar.

Las soluciones con simetría esférica de la ecuación $\Delta u + K^2u = 0$ son $e^{\pm ikr}/r$ y las de $\Delta u - K^2u = 0$ son $e^{\pm kr}/r$, en ambos casos con $r \neq 0$. Esto resulta de considerar que $u = u(r)$, el Laplaciano se reduce a

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$$

Tomando $w = ru$, la ecuación $\Delta u + K^2u = 0$ se escribe $(\partial^2 w / (\partial r^2) + k^2 w = 0)$, que tiene como solución general a $w = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$. A las soluciones particulares de la ecuación de Helmholtz homogénea $e^{\pm ikr}/r$, se les llama soluciones fundamentales (Haberman, 2003). En forma análoga, a partir de la solución general de $(\partial^2 w / (\partial r^2) + k^2 w = 0)$ se obtienen las soluciones fundamentales $e^{\pm kr}/r$ de $\Delta u + K^2u = 0$.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de Investigación

En esta investigación científica, se utilizó una metodología matematicista, ya que el objetivo es desarrollar cálculos sobre la deducción de la fórmula de *Fraunhofer*, por medio de fórmulas bajo supuestos y postulados. Se realizó una formulación considerando estudios previos.

Este estudio partió de considerar ondas en una línea recta, hasta llevarlas a la tercera dimensión. Se plantearon problemas de contorno y sus soluciones, para obtener integrales generales como la de *Poisson* y de *Kirchhoff*, con el fin de poner en manifiesto la ecuación de *Fraunhofer* que describe el fenómeno de la difracción de la luz.

3.2. Diseño de la investigación

La metodología que se utilizó, se basó en el diseño de teoría fundamentada, este tipo de investigación se deriva de datos recopilados, destacando la relación entre el análisis posterior y la recolección de los datos, por lo cual, se definieron las siguientes fases:

1. Comprensión de la teoría de difracción a través de conceptos físicos como: perturbación, ondas y campo magnético.
2. Justificación de la teoría, mediante demostración de teoremas, problemas de contorno y espacios integrables de *Poisson*.
3. Desarrollo teórico y demostrativo de la teoría integral de *Fraunhofer*.

3.2.1. Comprensión de la teoría de difracción

Este estudio abordó todos los aspectos teóricos referentes a la difracción. Se describieron las series de Fourier: desde su deducción a partir de las series trigonométricas en senos y cosenos hasta su forma compleja. Además, se definieron conceptos fundamentales como lo es, la proyección de la luz en forma de onda monocromática y electromagnética, de igual manera se refirieron las ondas armónicas que por sus propiedades son especiales.

En este contexto, se efectuó una remembranza de los conceptos básicos, que son necesarios para el desarrollo correcto de la teoría de la difracción, sin embargo, al ser el diseño de teoría fundamentada, se expresaron en forma de definiciones con su debido soporte matemático, y se encontrarán cimentadas en las áreas de las Ecuaciones Diferenciales y la Física.

3.2.2. Justificación de la teoría mediante demostraciones

En la presente investigación, se planteó los problemas de contorno tanto los interiores como los exteriores, puesto que su demostración nos facilitará la solución de las ecuaciones de Green, Fresnel, entre otras. Los problemas que se resolvieron son los expuestos por Cauchy adaptados al círculo y la esfera integral de Poisson, que constituirán una base para la solución de la ecuación con coeficientes constantes, que será la ecuación de Helmholtz.

3.2.3. Desarrollo Teórico y demostrativo de la teoría integral de Fraunhofer

Habiendo obtenido la solución al problema en el espacio integral de Poisson, se procedió a utilizar el método de promediación, para obtener la solución completa de la ecuación que representa todos los procesos oscilatorios en el espacio o mejor conocida como ecuación de onda, que, a su vez, es conocida como la fórmula integral de Kirchoff. Luego, se utilizó la fórmula de Kirchoff para deducir una ecuación denominada integral de Fresnel-Kirchoff, y a partir de esta concepción, se generalizó y se obtuvo la integral de Fraunhofer que constituye nuestro objeto de estudio.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO

4.1. Problema de Cauchy en el espacio

(Giordano, 2016) explica que la ecuación que representa los procesos oscilatorios en el espacio o ecuación de onda es:

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f \quad (4.1.1)$$

Donde u y f son funciones de $M(x, y, z)$ y del tiempo t , y el Δ es el Laplaciano en tres dimensiones. La función u es solución de la ecuación (4.1.1) en una región A del espacio si satisface la ecuación en A , además si es continua y tiene derivadas primeras y segundas continuas en A para $t > 0$. El problema de Cauchy para la ecuación de onda en el espacio consiste en hallar u tal que verifique la ecuación (Haberman, 2003):

$$a^2 \Delta u = u_{tt} - f(M, t), \quad M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (4.1.2)$$

con las condiciones iniciales

$$u(M, 0) = \phi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad (4.1.3)$$

A continuación se demostrará algunos resultados auxiliares que conducirán a la representación integral de la solución al problema de Cauchy.

Lema 4.1.1 *sea $v(r, t) = ru(r, t)$, entonces la función u con simetría esférica verifica $u_{tt} = a^2 \Delta u$ si y solo si v satisface $v_{tt} = a^2 v_{rr}$ (Giordano, 2016).*

Demostración: dado que $u(r, t)$ tiene simetría esférica y el Laplaciano en coordena-

das esféricas es

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = \frac{1}{r} v_{rr} \quad (4.1.4)$$

de $v_{tt} = ru_{tt}$ y de $u_{tt} = a^2 \Delta u$, resulta $u_{tt} = a^2 v_{rr}$ y recíprocamente.

Proposición 4.1.1 *Las soluciones particulares de la ecuación homogénea $u_{tt} = a^2 \Delta u$ que poseen simetría esférica respecto a un punto M_0 y son acotadas en M_0 tienen la forma:*

$$u(R, t) = \frac{1}{R} \left[g \left(t + \frac{R}{a} \right) - g \left(t - \frac{R}{a} \right) \right] \quad (4.1.5)$$

con $R = R_{M_0 M}$ y g continua con derivadas primera y segunda continuas (Giordano, 2016).

Demostración: las soluciones de $u_{tt} = a^2 \Delta u$ con simetría esférica se obtienen de $v(R, t) = Ru(R, t)$, esto debido al lema (4.1.1), con $v(R, t)$ soluciones de $u_{tt} = a^2 v_{rr}$ y la solución general viene dada por

$$u(R, t) = f_1 \left(t - \frac{R}{a} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{a} \right) \quad (4.1.6)$$

dado que u es acotada en M_0 , es $v(0, t) = 0$ y resulta

$$0 = f_1(t) + f_2(t) \quad (4.1.7)$$

de modo que denotando $f_2(t) = -f_1(t) = g(t)$ obtenemos que:

$$u(R, t) = \frac{1}{R} \left[g \left(t + \frac{R}{a} \right) - g \left(t - \frac{R}{a} \right) \right] \quad (4.1.8)$$

tal como se quería demostrar.

Corolario 4.1.1 *con las hipótesis y notaciones de la proposición (4.1.1) es (Giordano, 2016):*

$$u(0, t) = \frac{2}{a} g'(t) \quad (4.1.9)$$

Solamente basta observar que:

$$g'(t) = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \frac{g\left(t + \frac{R}{a}\right) - g\left(t - \frac{R}{a}\right)}{\frac{2R}{a}} \right\} = \frac{2}{a}u(0, t) \quad (4.1.10)$$

A fin de hallar la solución en forma de integral del problema de Cauchy para la ecuación de onda homogénea se utiliza el método de promediación (Haberman, 2003).

4.1.1. Método de Promediación

Sea u solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} a^2 \Delta u &= u_{tt}, \quad t > 0, \quad M \in \mathbb{R}^3 \\ u(M, 0) &= \phi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Introduciendo coordenadas esféricas con centro en un punto fijo M_0 , definimos la función $\bar{u}(R, t)$ como:

$$\bar{u}(R, t) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Sigma_R^{M_0}} u(M, t) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_R^{M_0}} u(M, t) d\Omega \quad (4.1.12)$$

Con $R^2 \Omega = dS$ y $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, que representa el valor medio de u sobre la superficie esférica de centro M_0 y radio R y de (4.1.12) se deduce que:

$$\bar{u}(0, t) = u(M_0, t) \quad (4.1.13)$$

Tal como veremos, la función $\bar{u}(R, t)$ verifica la ecuación $a^2 \Delta u = u_{tt}$. En efecto, integrando $a^2 \Delta u = u_{tt}$ en la esfera $K_R^{M_0}$ con centro en M_0 y radio R .

$$a^2 \int_{K_R^{M_0}} \Delta u dV = \int_{K_R^{M_0}} u_{tt} dV \quad (4.1.14)$$

aplicando la fórmula de Green en dicho volumen:

$$\int_{K_R^{M_0}} v \Delta u dV = \int_{\Sigma_R^{M_0}} v u_n dS - \int_{K_R^{M_0}} \nabla u \nabla v dV \quad (4.1.15)$$

tomando $v = 1$, obtenemos el primer término de (4.1.14), se escribe

$$\begin{aligned} a^2 \int_{K_R^{M_0}} \Delta u \, dV &= a^2 \int_{\Sigma_R^{M_0}} u_R R^2 \, d\Omega \\ &= a^2 R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\int_{\Sigma_R^{M_0}} u \, d\Omega \right) = 4\pi R^2 a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

En tanto, para el segundo termino de (4.1.14), resulta

$$\begin{aligned} \int_{K_R^{M_0}} u_{tt} \, dV &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^R \rho^2 \int_{\Sigma_R^{M_0}} u \, d\Omega \, d\rho \right) \\ &= 4\pi \int_0^R \bar{u}_{tt} \rho^2 \, d\rho \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

de las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.17), se obtiene

$$a^2 R^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} = \int_0^R \bar{u}_{tt}(\rho, t) \rho^2 \, d\rho \quad (4.1.18)$$

que al derivar respecto a R resulta

$$a^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} \right) = R^2 \bar{u}_{tt} \quad (4.1.19)$$

es decir,

$$a^2 \Delta u = \bar{u}_{tt} \quad (4.1.20)$$

La proposición (4.1.1) permite escribir la solución \bar{u} en la forma

$$\bar{u}(R, t) = \frac{1}{R} \left[g \left(t + \frac{R}{a} \right) - g \left(t - \frac{R}{a} \right) \right] \quad (4.1.21)$$

derivando $R\bar{u}$ respecto de R y de t , se obtienen

$$\begin{aligned} (R\bar{u})_R &= \frac{1}{a} \left[g' \left(t + \frac{R}{a} \right) - g' \left(t - \frac{R}{a} \right) \right] \\ (R\bar{u})_t &= g' \left(t + \frac{R}{a} \right) - g' \left(t - \frac{R}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

de modo que

$$\left[(R\bar{u})_R + \frac{1}{a} (R\bar{u})_t \right]_{t=0, r=at_0} \quad (4.1.23)$$

Pero según el corolario de la proposición (4.1.1) y por (4.1.13) es

$$\bar{u}(0, t) = \frac{2}{a} g'(t_0) = u(M_0, t_0) \quad (4.1.24)$$

De estos dos últimos resultados y reemplazando \bar{u} por su expresión (4.1.12) resulta:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{a} \int_{\Sigma_R^{M_0}} u_t d\Omega + \frac{\partial}{\partial R} \int_{\Sigma_R^{M_0}} Ru d\Omega \right]_{t=0, r=at_0} \quad (4.1.25)$$

Finalmente, considerando las condiciones iniciales y el valor de u en un punto genérico (M, t) , se obtiene la fórmula integral de Poisson:

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ t \int_{\Sigma_{at}^M} \Psi(P) d\Omega_P + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_{at}^M} \Phi(P) d\Omega_P \right\} \quad (4.1.26)$$

De la integral de Poisson se deduce la unicidad de la solución del problema (4.1.1) ya que si u_1 y u_2 son soluciones de dicho problema, $u = u_1 - u_2$ es solución del problema con condiciones iniciales nulas y de (4.1.26) resulta $u = 0$, con lo cual $u_1 = u_2$ (Haberman, 2003).

4.2. Fórmula de Kirchhoff

Para resolver la ecuación completa

$$a^2 \Delta u - u_{tt} = -f \quad (4.2.1)$$

En el punto (M_0, t_0) se introduce, en lugar del tiempo t , el tiempo local t^* del punto M_0 , dado por:

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{R_{M_0 M}}{a} \right) \quad (4.2.2)$$

Se emplean coordenadas esféricas (R, ϕ, θ) con centro en M_0 ($R = R_{M_0 M}$), y se considera la función U definida por

$$u(R, \phi, \theta, t) = u \left(R, \phi, \theta, t^* + t_0 - \frac{R}{a} \right) = U(R, \phi, \theta, t^*) \quad (4.2.3)$$

Para

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (4.2.4)$$

Se tienen:

$$u_R = U_R + \frac{1}{a} u_{t^*}, \quad u_{RR} = U_{RR} + \frac{2}{a} U_{Rt^*} + \frac{1}{a^2} U_{t^*t^*}$$

Que reemplazadas en (4.2.1), con $F(R, \phi, \theta, t^*) = fU(R, \phi, \theta, t)$, dan la ecuación

$$a^2 \Delta U = -F - 2aU_{Rt^*} - \frac{2a}{R} U_{t^*} = -F - \frac{2a}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU_{t^*}) \quad (4.2.5)$$

Si T es una región del espacio de frontera Σ y $M_0 \in T$, la fórmula fundamental de Green en el espacio, aplicada con $t^* = 0$ se obtiene

$$4\pi U(M_0, 0) = \left| \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS + \int_T \frac{2}{aR^2} \frac{\partial}{\partial R} (RU_{t^*}) dV + \int_T \frac{F}{a^2 R} dV \right|_{t^*=0} \quad (4.2.6)$$

Notamos que la segunda de las integrales es impropia de modo que, tomando las esferas con centro en M_0 y radio ϵ , si $\Sigma_{\epsilon}^{M_0} = \Sigma_{\epsilon}$ y $k_{\epsilon}^{M_0} = k_{\epsilon}$, se considera la integral:

$$\begin{aligned} I_{\epsilon} &= \int_{T-k_{\epsilon}} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (RU_{t^*}) dV \\ &= \int_{T-k_{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial R} (RU_{t^*}) \sin \theta dR d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

e integrando con respecto a R se obtiene:

$$I_{\epsilon} = \int_{\Sigma} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial t^*} \cos(\widehat{n, R}) dS + \int_{\Sigma} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial t^*} dS \quad (4.2.8)$$

Con $\cos(\widehat{n, R}) dS = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$ y n la normal a Σ , de modo que

$$\int_T \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (RU_{t^*}) dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = \int_\Sigma \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{\partial R}{\partial n} dS \quad (4.2.9)$$

pues

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Sigma \frac{1}{R} U_{t^*} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{U_{t^*}} 4\pi\epsilon = 0 \quad (4.2.10)$$

Con U_{t^*} continua en M_0 . De aquí que (4.2.5) se transforma en:

$$4\pi U(M_0, 0) = \left| \int_\Sigma \left[\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dS \right. \\ \left. + \int_\Sigma \frac{2}{aR^2} U_{t^*} \frac{\partial R}{\partial n} dS + \int_T \frac{F}{a^2 R} dV \right|_{t^*=0} \quad (4.2.11)$$

teniendo presente las definiciones para U y t^* , resultan

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{\partial R}{\partial n}; \quad U(M_0, 0) = u(M_0, t_0). \quad (4.2.12)$$

Finalmente, se obtiene para u la fórmula de Kirchhoff:

$$U(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{aR} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial R}{\partial n} \right\} dS \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \int_T \frac{[f]}{R} dV \quad (4.2.13)$$

Donde los corchetes indican que las funciones están evaluadas en $t = t_0 - R/a$, pues de los teoremas de unicidad resulta $t^* = 0$; esta ecuación se conoce como el teorema integral de Kirchhoff. Sin embargo, la teoría de Kirchoff es aun incompleta a pesar de obtener resultados bastante aproximados a la realidad. Los resultados exactos solo se obtienen usando la teoría electromagnética (Haberman, 2003).

4.2.1. Fórmula integral de Fresnel - Kirchoff

Para simplificar los cálculos, a partir de la ecuación (4.2.13) consideremos la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \text{donde} \quad \Delta u = \nabla^2 \varphi \quad \text{y} \quad k^2 u = k^2 \varphi \quad (4.2.14)$$

Donde φ representa una perturbación óptica en el espacio complejo. Y como bien es sabido la ecuación de Helmholtz es una ecuación de onda que nos sirve para

caracterizar el movimiento de una perturbación óptica en un medio. Para resolver la ecuación (4.2.14), se usa el segundo teorema de Green, considerando que U, V son dos funciones escalares, entonces la solución de la ecuación de Helmholtz utilizando el cambio de variables es (Giordano, 2016):

$$\iint_S (V \nabla U - U \nabla V) dS = 0 \quad (4.2.15)$$

Siendo $U = \varphi$, una perturbación óptica escalar no específica. Con $V = V_0 \frac{e^{i(kr+wt)}}{r}$ una función de tipo de onda esférica, donde r se mide desde el punto de observación P .

Existe una singularidad en el punto P en $r = 0$, de tal modo que está rodeada de una pequeña esfera, a fin de excluir a P de la región encerrada por S . La ecuación (4.2.15) queda ahora como

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla U - U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - \iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega \quad (4.2.16)$$

Donde $d\Omega$ es el elemento del ángulo sólido de la esfera centrada en P y $\rho^2 d\Omega$ es el correspondiente elemento de área. Nótese que $V_0 e^{iwr}$ se puede factorizar. Cuando ρ tiende a cero, entonces la segunda integral se aproxima al valor de U en el punto P , al que se le nombra U_P , así

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla U - U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - 4\pi U_P = 0 \quad (4.2.17)$$

esto es,

$$U_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla U \right) dS \quad (4.2.18)$$

La fórmula encontrada, es equivalente a la de Kirchhoff, pero usando otras variables. A partir de la ecuación (4.2.18), considerando \vec{r} el vector que va de la fuente S a un punto P_1 de la abertura a , \vec{r}' el vector que va del punto P_1 de la abertura a un punto de observación P y \hat{n} un vector unitario normal a la abertura a .

Sustituyendo una perturbación óptica esférica $U = U_0 \frac{e^{i(kr'-wt)}}{r'}$ en el teorema de

la integral de Kirchhoff (4.2.18). La ecuación cambia a

$$U_P = -\frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) dS \quad (4.2.19)$$

Por definición de gradiente de una función, se tiene que

$$\nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} = \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \hat{r}' = \cos(\hat{n}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \quad (4.2.20)$$

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} = \cos(\hat{n}, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4.2.21)$$

donde \hat{r} y \hat{r}' son vectores unitarios, y (\hat{n}, \vec{r}) , (\hat{n}, \vec{r}') son ángulos. Así

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} &= \left[\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}), \\ \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} &= \left[\frac{ike^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{(r')^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}') \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Estas dos últimas ecuaciones se sustituyen en la ecuación (4.2.19), donde se obtiene que la perturbación óptica en el punto P que está dada por

$$U_P = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r-r')}}{rr'} k(\theta) dS \quad (4.2.23)$$

o cambiando $k = 2\pi/\lambda$, la ecuación se puede reescribir como

$$U_P = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{2\lambda} \iint \frac{e^{ik(r-r')}}{rr'} k(\theta) dS \quad (4.2.24)$$

Siendo esta ecuación conocida como la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff, y es la que se utilizará para los cálculos de difracción de Fraunhofer. Recordando que k es el número de onda, U_0 es la perturbación óptica de la fuente, ω es la frecuencia de onda y el factor

$$k(\theta) = \cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \quad (4.2.25)$$

es llamado comúnmente factor de oblicuidad (Flores, 2016).

4.3. Difracción de Fraunhofer y Fresnel

Según (Flores, 2016), si imaginamos un obstáculo con una abertura a iluminada por una fuente de onda S , y un plano de observación P que es una pantalla paralela a a . Se proyecta sobre la pantalla una imagen de la abertura, al que llamaremos patrón de difracción. De manera cualitativa diremos que se tiene difracción de Fraunhofer o de campo lejano cuando las ondas incidentes y difractadas se consideran planas, es decir, tanto la fuente S como la pantalla P están lo suficientemente alejadas de la abertura a . De manera análoga se considera campo cercano o difracción de Fresnel, cuando es significativa la curvatura de las ondas incidentes y difractadas, esto es, están lo suficientemente cerca de la abertura a .

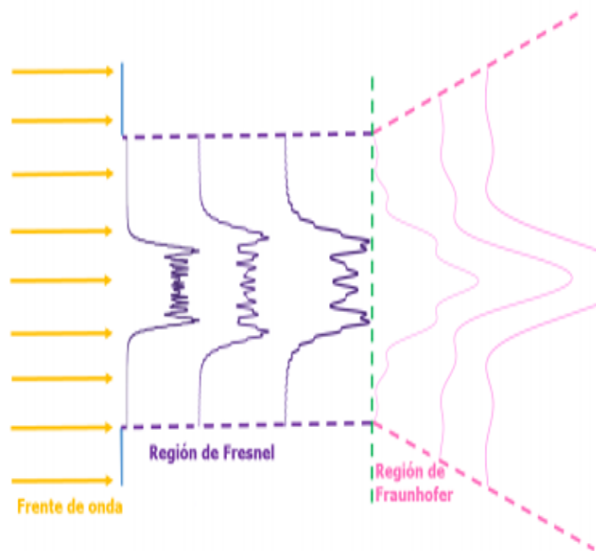


Figura 4.1: Muestra la diferencia cualitativa entre la región de Fresnel y Fraunhofer mediante el cambio de la irradiancia (módulo cuadrado de la perturbación óptica) (Flores, 2016).

En la Figura se muestra de manera esquemática y cualitativa la diferencia entre las regiones de campo cercano y lejano mediante los gráficos de irradiancias de acuerdo a diferentes números de Fresnel que a su vez están relacionados con la distancia a la que se encuentra el punto de observación con respecto a la abertura. Para distinguir de manera cuantitativa entre campo cercano y campo lejano, se hace uso de los siguientes conceptos.

4.3.1. Curvatura del frente de onda

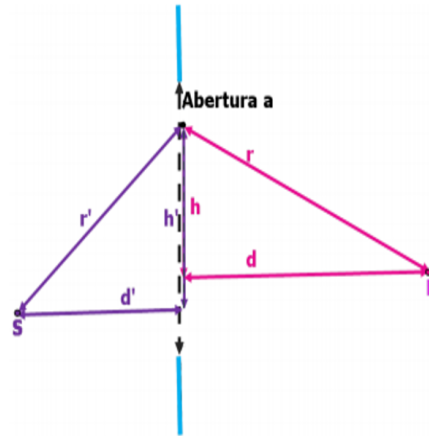


Figura 4.2: Muestra la geometría para obtener la curvatura del frente de onda para describir cuantitativamente los regímenes de difracción (Flores, 2016).

Considere el esquema de la figura (4.2). Siendo S una fuente luminosa, d' es la distancia de la fuente a la abertura perpendicular a la misma, h' es la altura entre el eje perpendicular d' y un punto cualquiera de la abertura, P es el punto de observación, d es la distancia perpendicular entre la abertura y el punto de observación, h es la altura entre el eje perpendicular d y un punto cualquiera de la abertura, y finalmente a es el tamaño de la abertura.

A partir de la Figura (4.2) se ve que la variación Δ de la cantidad $r + r'$ de un borde de la abertura al otro está dado por

$$\Delta = \sqrt{d'^2 + (h'^2 + a^2)} - \sqrt{d'^2 + h'^2} + \sqrt{d^2 + (h^2 + a^2)} - \sqrt{d^2 + h^2} \quad (4.3.1)$$

Usando la primera aproximación de la expansión binomial de la raíz cuadrada $\left((1 + x^2)^2 \approx 1 + \frac{x}{2} \right)$ la ecuación (4.3.1) se cambia a la forma

$$d' \left(1 + \frac{(h' + a)^2}{2d'^2} \right) + d \left(1 + \frac{(h + a)^2}{2d^2} \right) - d' \left(1 + \frac{h'^2}{2d'^2} \right) - d \left(1 + \frac{h^2}{2d^2} \right) \quad (4.3.2)$$

Desarrollando, simplificando y factorizando los términos de la ecuación (4.3.2) se

obtiene

$$a \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) + \dots \quad (4.3.3)$$

Donde el término cuadrático mide la curvatura del frente de onda, este debe ser menor con respecto a la longitud de onda para que se considere régimen de Fraunhofer, es decir

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \ll \lambda \quad (4.3.4)$$

Por el contrario, si la desigualdad se invierte se dice que está en el régimen de Fresnel, esto es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \gg \lambda \quad (4.3.5)$$

Si se tiene una longitud de onda cualquiera λ y si se supone que d' y d son lo suficientemente grandes, es decir, $d' \rightarrow \infty$ y $d \rightarrow \infty$, esto implica que $\frac{1}{d'} \rightarrow 0$ y $\frac{1}{d} \rightarrow 0$, entonces no importa el tamaño de la abertura a , la operación $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \rightarrow 0$ y esto será siempre mucho menor que la longitud de onda λ por muy pequeña que esta sea, satisfaciendo así la difracción de campo lejano de Fraunhofer. Por el contrario si suponemos que d' y d son lo suficientemente pequeñas, esto es $d' \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$, entonces $\frac{1}{d'} \rightarrow \infty$ y $\frac{1}{d} \rightarrow \infty$, de igual manera no importa el tamaño de la rendija, la operación $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \rightarrow \infty$ y esto será mucho mayor que la longitud de onda λ por muy grandes que ésta sea, satisfaciendo así la difracción de campo cercano de Fresnel (Flores, 2016).

4.4. Patrones de difracción de Fraunhofer

Resulta evidente que el patrón de difracción será diferente dependiendo de la distancia a la que se encuentre el punto de observación de la abertura, en este sentido la difracción de Fraunhofer es la que se observa a distancias “lejanas” de la abertura difractante. Se muestran aberturas sencillas como la rendija única, la abertura rectangular y su caso particular la abertura cuadrada, la doble rendija y finalmente las rendijas múltiples, usando el formalismo de la teoría de la difracción escalar, que para el caso de campo lejano se verá que es mucho más sencillo de trabajar en comparación con el campo cercano (Flores, 2016).

4.4.1. Consideraciones para difracción de Fraunhofer

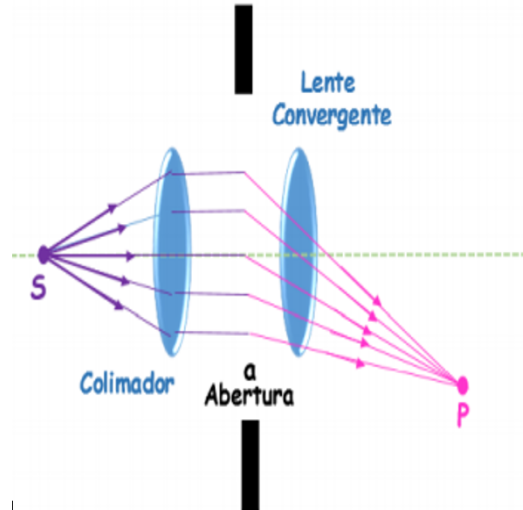


Figura 4.3: Muestra el arreglo experimental para observar la difracción de Fraunhofer (Flores, 2016).

Un arreglo experimental usual para observar la difracción de Fraunhofer se muestra en la figura (4.3). Una fuente de luz monocromática coherente ilumina una abertura, frente a ella se coloca un lente colimador y una segunda lente detrás de la abertura, este arreglo de lentes eliminará de forma efectiva que los frentes de ondas sean divergentes y no estrictamente planos ya que el tratamiento teórico se volvería más complejos.

A partir de la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff:

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{-ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] dS \quad (4.4.1)$$

Para realizar los cálculos de los patrones de difracción, se considera:

- Debido a que el ángulo de la luz difractada es suficientemente pequeño como para que la variación del factor de oblicuidad $\left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right]$ sea apreciable sobre la abertura, este se puede considerar constante y salir fuera de la integral.
- La cantidad $\frac{e^{ikr'}}{r'}$ es prácticamente constante ya que $r' \rightarrow \infty$, también puede salir de la integral.

- La variación del factor $\frac{1}{r}$ es despreciable con respecto a la variación de las oscilaciones de la exponencial e^{ikr} por tanto este puede salir de la integral.

Consecuentemente la formula integral de Fresnel-Kirchhoff se reduce a una ecuación más simple

$$U_P = C \iint e^{ikr} dS \quad (4.4.2)$$

donde

$$C = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}e^{ikr'} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right]}{4\pi r r'} \quad (4.4.3)$$

Representa todos los factores constantes que están fuera de la integral. La fórmula (4.4.2) indica que la distribución de la luz difractada se obtiene simplemente integrando el factor de la fase e^{ikr} y este depende de la geometría del sistema (Flores, 2016).

CONCLUSIÓN

En conclusión, a partir del fenómeno en estudio, se puede inferir que, la naturaleza de la luz proviene de modelos ondulatorios y por lo cual se debe visualizar como una onda, para realizar un análisis respecto a ondas, es necesario hacerlo desde el punto de vista del análisis armónico, una función armónica puede descomponerse en una serie de Fourier clásica en senos y cosenos.

La fórmula integral de Kirchhoff es útil para el cálculo de difracción, en particular de los espectros de luz, pero no es una fórmula completa para calcular la difracción de la luz. Si, se generaliza la misma, se obtiene la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff que da un análisis respecto al campo cercano y lejano, refiere a la interpretación de Fresnel y Fraunhofer respectivamente de este fenómeno.

La difracción de Fraunhofer puede observarse mediante rendijas, su cálculo se realiza utilizando la fórmula de Fresnel-Kirchhoff, varía según el tipo de rendija porque se considera la geometría en una situación específica.

BIBLIOGRAFÍA

- R. Bruzual and M. Domínguez. *Series de Fourier*. UCV - Caracas, first edition, 2003.
- J. Casas. *Óptica*. Librería general - Zaragoza, seventh edition, 1994.
- J. Duoandikoetxea. *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAN - Managua, first edition, 2003.
- E. Flores. *Posgrado en nanociencias y materiales: Generalización perimétrica de la espiral de Cornu en difracción óptica*. Flores - San Luis, Potosí, first edition, 2016.
- C. Giordano. *Ecuaciones diferenciales parciales*. Universidad Nacional de La Plata - Argentina, first edition, 2016.
- R. Haberman. *Ecuaciones Diferenciales Parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. Prentice Hall- Nueva Jersey, edición edición, 2003.
- E. Hecht. *Óptica*. Addison Wesley Iberoamericana - Madrid, third edition, 2000.
- H. Hsu. *Análisis de fourier*. Rat Mehra - Estados Unidos, first edition, 1987.
- J. Jewett and R. Serway. *Física para Ciencias e Ingeniería volumen 1*. Sergio Cervantes - México D.F., seventh edition, 2008.
- M. Malakhaltsev and J. Arteaga. *Cálculo vectorial*. Ricardo H. Rodríguez - Bogotá, first edition, 2013.
- R. Serway and J. Jewett. *Física para Ciencias e Ingeniería con Física moderna volumen 2*. Sergio Cervantes - México D.F., seventh edition, 2009.
- J. Stewart. *Cálculo*. Editorial Iberoamérica - México D.F., first edition, 2000.
- P. Tipler. *Física para Ciencias y la Tecnología volumen 1*. Editorial REVERTÉ - Barcelona, fourth edition, 2001.

ANEXO A: SUCESSIONES DE FUNCIONES

Una familia numerable de funciones $\{f_n\}$, donde f_n es una función, real o compleja, definida en un dominio común D para todo $n \in \mathbb{N}$, se llama sucesión de funciones. Para cada punto x del dominio común D , $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números cuyos términos son los correspondientes valores imágenes, luego podemos pensar en la convergencia o divergencia de la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$. Si para todo $x \in D$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge, se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente en D . La notación usual es

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Así, la función f es el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$, esto equivale a la siguiente definición formal.

Definición 4.4.1 A.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) una función. Decimos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente hacia una función límite f , si para cada punto $x \in D$ y para cada $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ (que depende a la vez de x y de ϵ) tal que si $n > N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Si un mismo N sirve para todo punto de D , la convergencia se llama uniforme en D , esto sugiere la siguiente definición.

Definición 4.4.2 A.2. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente a f en el conjunto D si, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ (que depende solo de ϵ) tal que $n > N$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \text{para cada } x \in D$$

Definición 4.4.3 A.2. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, para cada x en D se considera

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Si existe una función f tal que $S_n \rightarrow f$ uniformemente en D , se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Teorema 4.4.1 A3. Sea $D = [a, b]$. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$. Si f_n es continua en $c \in [a, b]$ para todo n , entonces la función límite f es continua en c .

Demostración. Por hipótesis dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in D$$

Como f_n es continua en c , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Luego, si $|x - c| < \delta$ tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\ &= \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto la función límite f es continua en c , lo que se quería mostrar (Hsu, 1987).

Las condiciones de Dirichlet

Anteriormente se dedicó atención a la determinación de la serie de Fourier de funciones dadas y se supuso que la función dada se podía representar mediante una serie de Fourier. Ahora se debe investigar la convergencia de la serie de Fourier a $f(x)$. Una de las partes más elegantes de la teoría de Fourier es la que se trata de los problemas

de convergencia. Se enunciarán aquí las condiciones, conocidas como condiciones de Dirichlet, bajo las cuales es posible la representación en series de Fourier de una función dada $f(x)$.

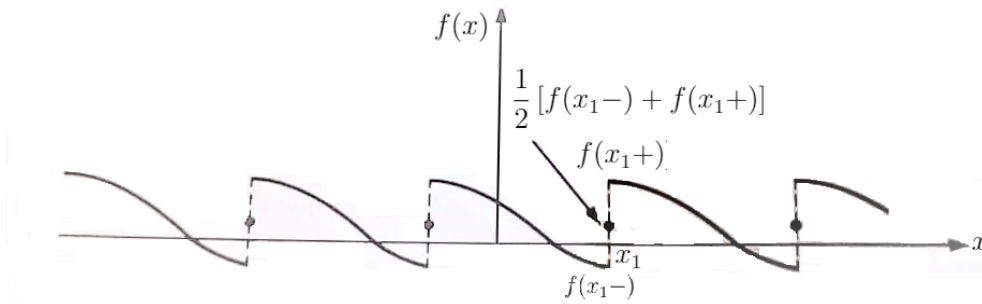


Figura 4.4: Función continua por tramos y límites a la izquierda y a la derecha (Flores, 2016).

Definición 4.4.4 *Condiciones de Dirichlet:*

1. La función $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.
2. La función $f(x)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
3. La integral del valor absoluto de $f(x)$ en un período es finita; es decir,

$$\int_{-T}^T |f(x)| \cdot dx = \text{finita} < \infty.$$

Se dice que una función $f(x)$ es continua por tramos en el intervalo finito $[-T, T]$ si satisface las condiciones (1) y (2). En un punto de discontinuidad, como se muestra en la figura 4.4, el cual se denota por $x = x_1$, la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2} [f(x_1-) + f(x_1+)],$$

Donde $f(x_1-)$ es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_1 por la izquierda, y $f(x_1+)$ es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_1 por la derecha (Hsu, 1987).

ANEXO B: SOBRE CONTORNOS

Teorema 4.4.2 (Teorema del Valor Máximo). *Sea T un conjunto abierto conexo con Frontera Σ . Si u es armónica en T y es continua en $T + \Sigma$, entonces u toma sus valores máximo y mínimo en Σ , y solo alcanza dichos valores en T cuando u es constante.*

Teorema 4.4.3 Teorema de Unicidad. *Si el primer problema interior de Dirichlet en \mathbb{R}^3 tiene solución, la solución es única.*

Demostración:

Sea u_1 y u_2 soluciones, entonces $u = u_1 - u_2$ es solución y $u|_{\Sigma} = 0$, con u continua en $T + \Sigma$. Por el teorema del valor máximo es $u = 0$ en T , de donde $u_1 = u_2$.

Teorema 4.4.4 Teorema de Estabilidad. *El primer problema interior de Dirichlet es estable*

Demostración: Se consideran dos soluciones u_1, u_2 tales que $|u_1 - u_2| < \epsilon$ en Σ , dado que la función constante es armónica, se deduce que $|u_1 - u_2| < \epsilon$ en T .

A partir de los teoremas de unicidad y estabilidad, se concluye que el primer problema interior de Dirichlet tiene solución, entonces es un problema **bien planteado**. Consulte (Giordano, 2016).

ANEXO C: SOBRE RENDIJAS

Considere una rendija de largo b y ancho L , siendo este mucho menor que b , tal como se observa en la figura (4.5). Imagine una abertura de difracción que consista en dos rendijas paralelas, cada una de ancho b y a una distancia de separación h , tal como se muestra en figura (4.7). Una rejilla con un número N de múltiples rendijas idénticas y paralelas entre sí, con ancho b y separación h . El cálculo a partir de la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff, se realiza de manera similar al de la doble abertura figura (4.9) (Flores, 2016).

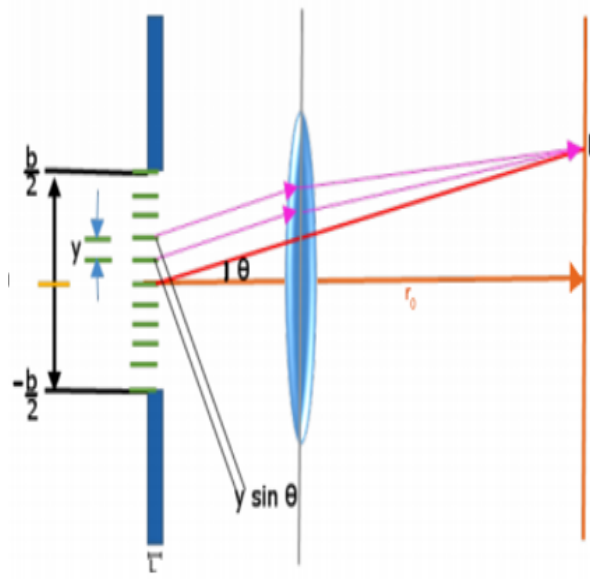


Figura 4.5: Geométrica de una sola rendija (Flores, 2016).

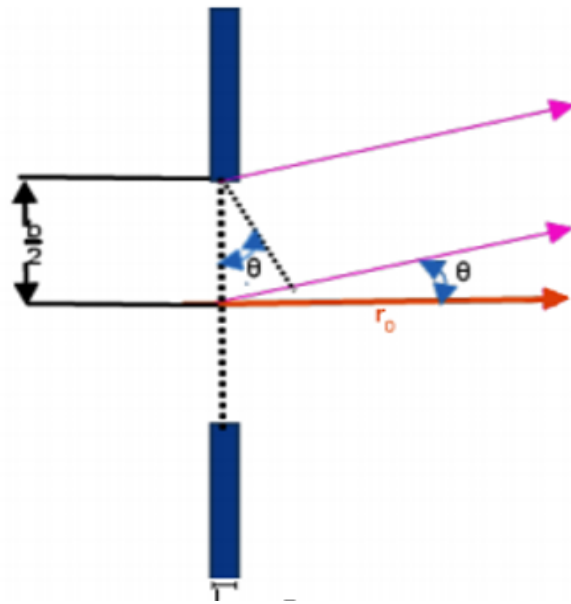


Figura 4.6: Acercamiento para observar la diferencia de camino óptico en una sola rendija (Flores, 2016).

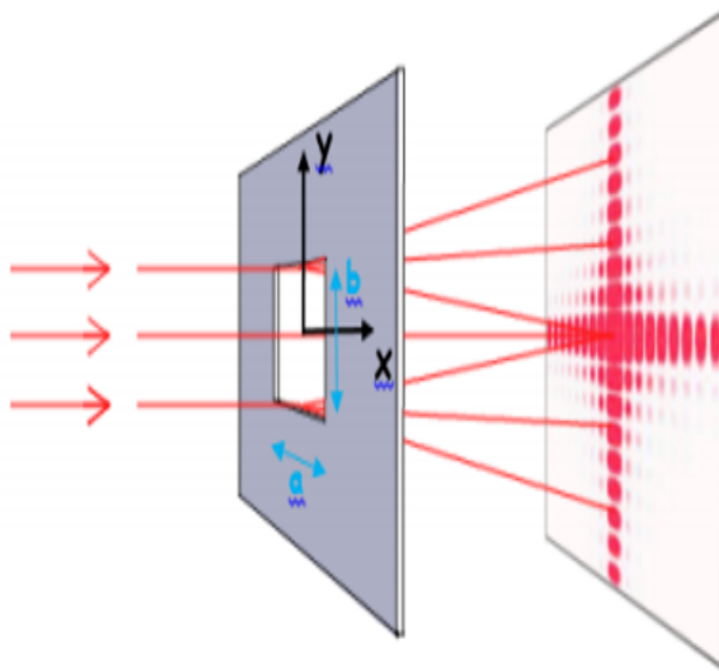


Figura 4.7: Geometría de una abertura rectangular para la difracción de Fraunhofer y en la pantalla de observación se presenta el patrón de difracción (Flores, 2016).

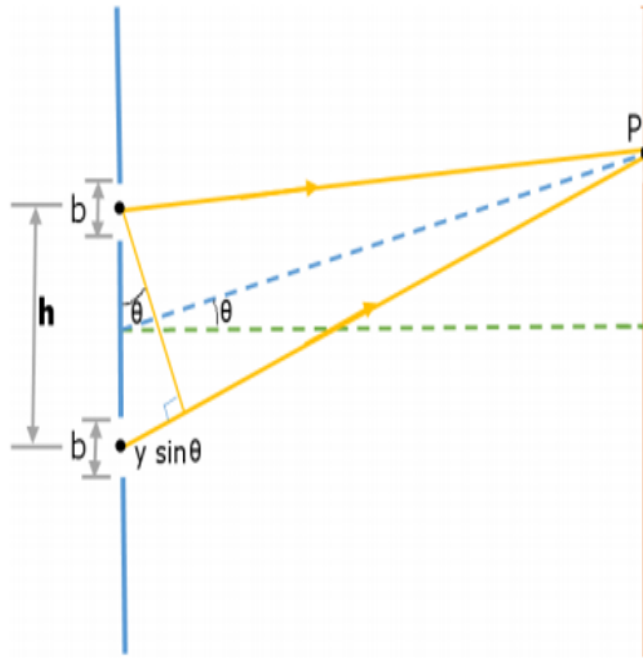


Figura 4.8: Geometría para la difracción en campo lejano para la doble rendija (Flores, 2016).

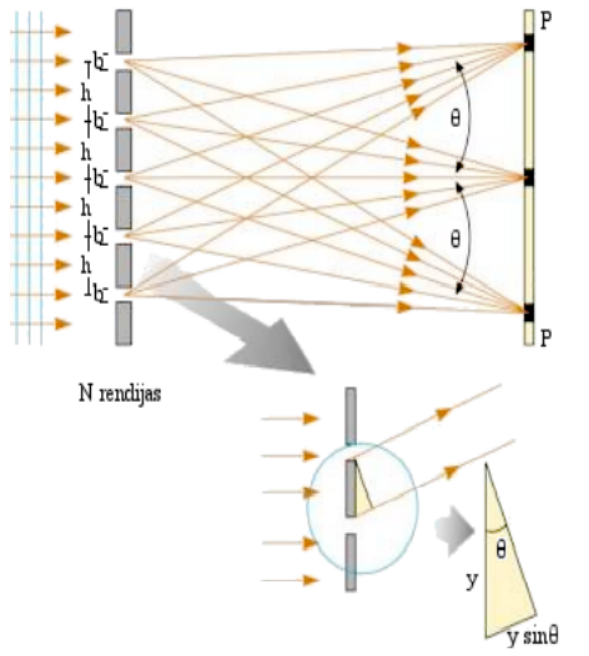


Figura 4.9: Geometría para la difracción de campo lejano mediante una rejilla de N (Flores, 2016)