

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y ACTUARIALES**  
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICA**



MONOGRAFÍA PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA  
ESTUDIO TEÓRICO DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR EN SUPERFICIES EXTENDIDAS

PRESENTA:

Br. Jover Alberto Lagos Brown

Br. Assurin Jocksan Reyes Rugama

TUTORA:

M.Sc. Lissette del Carmen Quintero Vargas

León, Nicaragua, 13 de diciembre 2021

**“ A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD ”**

---

# DEDICATORIA

A mis brillantes y hermosos padres, sin ellos nada sería, me confortan y consuelan siempre, nunca se quejan ni interfieren en nada, no piden nada y lo dan todo.

Assurin Reyes

A mi hijo Jorshua y a mi madre por creer siempre en mi.

Jover Lagos

---

# AGRADECIMIENTOS

Primeramente doy gracias a Dios por permitirme culminar este proyecto con éxito, gracias a nuestra alma mater por permitirme convertirme en un ser profesional en lo que tan me apasiono desde temprana edad de mi vida, gracias a cada maestro que hizo parte de este proceso integral de formación y como recuerdo y prueba viviente en la historia; esta tesis, que perdurara dentro de los conocimientos y desarrollo de las demás generaciones que están por llegar, gracias a mi madre Nulvia Brown Coleman que a sido padre y madre al mismo tiempo, que a pesar de los recursos no optimas me llevo hasta estas instancia, gracias a nuestra maestra Lissette Quintero Vargas por apoyarnos incondicionalmente hasta el final. Finalmente agradezco a quien lea este pequeño apartado.

Jover Lagos

Agradezco a cada una de las personas que hicieron posible este sueño, a mis padres que los quiero mucho y sin ellos nada sería, los consejos de mi madre que siempre me reconfortaron y alentaron a cumplir mis metas, a nuestra brillante maestra Lissette del Carmen Quintero Vargas por su dedicación y esfuerzo en todo momento, a nuestro amigo ken Ordoñez, al profesor Milton Carvajal, y cada una de las personas que de alguna manera aportaron para que este proyecto este hoy realizado, infinitas gracias.

Assurin Reyes

---

# RESUMEN

El objetivo de este proyecto es analizar los modelos matemáticos sobre los parámetros geométricos de transferencia de calor en superficies extendidas que permitan optimizar recursos en las diferentes estructuras. Se estudia la transferencia de calor por conducción; en este caso, se analiza un cuerpo rectangular para poder definir la ecuación general de calor en coordenadas cartesianas y se deduce dicha ecuación general de calor por conducción. Se analizan también la Ecuación de Calor en Coordenadas Curvilíneas y Coordenadas Cilíndricas también se estudia la transmisión de calor por conducción particularizada para el caso de conducción unidimensional en régimen permanente.

Palabras clave: **Aletas, Superficies extendidas, Conducción, y Ecuación de Calor.**

---

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Introducción . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.3.1. Objetivo general . . . . .	3
1.3.2. Objetivos específicos: . . . . .	3
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	<b>4</b>
2.1. Fundamentos de transferencia de calor . . . . .	4
2.1.1. Temperatura y calor . . . . .	4
2.1.2. Transferencia de calor . . . . .	5
2.1.3. Áreas de aplicación de la transferencia de calor . . . . .	5
2.1.4. Elaboración de los modelos de la transferencia de calor . . . . .	6
2.1.5. Mecanismos de transferencia de calor . . . . .	7
2.1.6. Ecuación general de conducción de calor . . . . .	10
2.1.7. Ecuación unidimensional de la conducción de calor . . . . .	11
2.1.8. Resistencia térmica por contacto . . . . .	13
2.2. Superficies extendidas o aletas . . . . .	14
2.2.1. Definición de superficie extendida . . . . .	14
2.2.2. Tipos de superficies extendidas . . . . .	14
2.2.3. Aletas longitudinales . . . . .	15
2.2.4. Ecuación general para las aletas . . . . .	17
2.2.5. Aletas de sección transversal variable . . . . .	18
2.2.6. Eficiencia de las aletas . . . . .	18
2.2.7. Efectividad de las aletas . . . . .	19
<b>3. METODOLOGÍA</b>	<b>20</b>
3.1. Tipo de Investigación . . . . .	20
3.2. Diseño de la investigación . . . . .	20

3.2.1.	Comprensión de la teoría . . . . .	21
3.2.2.	Deducción de la ecuación general de conducción de calor . . . . .	21
3.2.3.	Desarrollo teórico y demostrativo de la teoría de las superficies extendidas	21
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>22</b>
4.1.	Ecuación general de calor por conducción . . . . .	22
4.2.	Transferencia de calor en superficies con aletas . . . . .	39
4.2.1.	Ecuación de la aleta . . . . .	40
4.2.2.	Parámetros para el análisis de las aletas: . . . . .	42

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## ASPECTOS INTRODUCTORIOS

### 1.1. Antecedentes

A nivel local en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León no se ha realizado investigación acerca del análisis de parámetros geométricos de transferencia de calor en superficies extendidas, sin embargo, en el sistema de bibliotecas de la UNAN, León se encontró una investigación que involucra el modelado matemático, el diseño y la programación de algoritmos, entre las más recientes tenemos:

- La tesis de Torres (2014), titulada *Determinación del modelo matemático de transferencia de calor predictivo para el comportamiento térmico de un sistema de esterilización solar para material quirúrgico e instrumental odontológico*. Donde concluyó que el modelo matemático obtenido cumple los requerimientos de los parámetros y variables planteados para el diseño del esterilizador y la exigencia de uso de instrumental médico quirúrgico en la práctica medico odontológico es determinante para el logro de una buena y satisfactoria atención del paciente y del profesional de esta área e influyente para el éxito de la práctica profesional en esta área.

A nivel internacional se han realizado un sin número de investigaciones que evalúan el desempeño de las superficies extendidas, entre estas tenemos:

- La tesis de Oca (2020), titulada *Propuesta de un perfil óptimo de Aletas para intensificación de la transferencia de calor en aerocondensadores*, en dicho trabajo se concluye que la implementación del método propuesto para el análisis integral de la instalación que opera acoplada a sistemas ACC, se facilita la evaluación de estos.
- La tesis de Lazo y Salguero (2017), en el cual se realiza un banco de pruebas para superficies extendidas con fines didácticos, de manera que se obtiene las curvas de distribución de temperatura en tiempo real de tres tipos de aguja (circular, cónica y cuadrada). En dicho trabajo de investigación se realiza la validación de las lecturas obtenidas a través de un sistema DAQ que incorpora sensores infrarrojos (MLX90614), al comprobar que

los perfiles de temperatura teóricos y en tiempo real presenten la misma tendencia de decrecimiento a lo largo de las aletas.

- La tesis de Loredo, (2014), realiza una Caracterización Termohidráulica del Área de Transferencia de Calor en Superficies Extendidas Mediante Simulación Numérica. Donde concluyó que dado que la aplicación de este tipo de geometrías está destinada a sistemas de refrigeración, una buena selección de la geometría mejorará la transferencia de calor y contribuirá a mejorar la eficiencia de los ciclos de refrigeración. Por otro lado una caída de presión pequeña implica la reducción en la potencia de impulsores impactando de manera moderada en el uso de la energía.
- Tesis de Peinado (2015), titulado Optimización y análisis de arreglos de aletas perfil rectangular triangular, parabólico cóncavo, parabólico convexo, anulares y Alfiler, donde concluyó que las aletas analizadas son las más comúnmente usadas debido a la factibilidad de su construcción. Para el cálculo de la eficiencia, la transferencia de calor y el perfil de temperatura se cuenta con las soluciones exactas por lo que el programa no resuelve ecuaciones diferenciales, lo cual lo hace más exacto en los cálculos, con la excepción de la determinación de algunas funciones Bessel que se determinan por integración numérica y la realización de sumatorias con un número determinado de elementos.

## 1.2. Introducción

Es común encontrar la transferencia de calor en los sistemas de ingeniería y otros aspectos de la vida y no es necesario ir muy lejos para ver algunas de sus áreas de aplicación. De hecho, no es necesario ir a alguna parte. El cuerpo humano está emitiendo calor en forma constante hacia sus alrededores y la comodidad humana está íntimamente ligada con la razón de este rechazo de calor. Tratamos de controlar esta razón de transferencia de calor al ajustar nuestra ropa a las condiciones ambientales. También, con base en la experiencia, se sabe que una bebida enlatada fría dejada en una habitación se entibia y una bebida enlatada tibia que se deja en un refrigerador se enfría. Esto se lleva a cabo por la transferencia de calor o energía del medio caliente hacia el frío.

La transferencia de energía siempre se produce del medio que tiene la temperatura más elevada hacia el de temperatura más baja y esa transferencia se detiene cuando ambos alcanzan la misma temperatura, como se explica en la Sección 2.1 del Capítulo 2, y son estos simples hechos sobre la transferencia de calor junto con la termodinámica los que han dado lugar a las soluciones de problemas relacionados al calor que antes no era posible resolver y también son varias áreas de la ingeniería en que utiliza esta teoría.

Por ejemplo, los ingenieros diseñan equipos de transmisión de calor tomando en cuenta el análisis de transferencia de calor en distintos procesos que se hacen de forma experimental o analítica, muchos de estos equipos son los intercambiadores de calor, las calderas, los condensadores, radiadores, calentadores, entre otros. La mayoría de veces el diseño y construcción de estos equipos de transferencia de calor se utilizan formas simples como cilindros, placas planas

y barras, pero a veces es necesario agregar una superficie adicional para poder transferir calor por conducción a lo largo de su geometría y por convección a través de su entorno como se vera en la Sección 2.2.

En base a lo dicho anteriormente, podemos decir que el uso de superficies extendidas es de especial importancia en aplicaciones donde se desea incrementar el flujo de calor y no se dispone de área suficiente, pero para lograr este incremento deben analizarse varios parámetros geométricos de la superficie, es decir, debe tenerse en cuenta cual es la forma geométrica más conveniente para que el incremento del flujo del calor sea el deseado y también se debe tener otras consideraciones para saber si el calor aumentara de manera significativa, por ejemplo, el coeficiente transferencia de calor por convección.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Analizar los modelos matemáticos sobre los parámetros geométricos de transferencia de calor en superficies extendidas que permitan optimizar recursos en las diferentes estructuras.

### **1.3.2. Objetivos específicos:**

- Sistematizar la información acerca del análisis geométricos de superficies extendidas.
- Definir una ecuación que generalice el fenómeno físico de la transferencia de calor a través de la conducción y los fenómenos adicionales de energía que ocurren en el cuerpo en coordenadas rectangulares y en un cuerpo curvilíneo.
- Obtener las expresiones analíticas para la transferencia de calor por conducción dentro de una aleta de sección transversal constante.
- Detectar los mecanismos relevantes de la transferencia de calor en la aleta de sección transversal uniforme inmersa en un fluido en movimiento.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

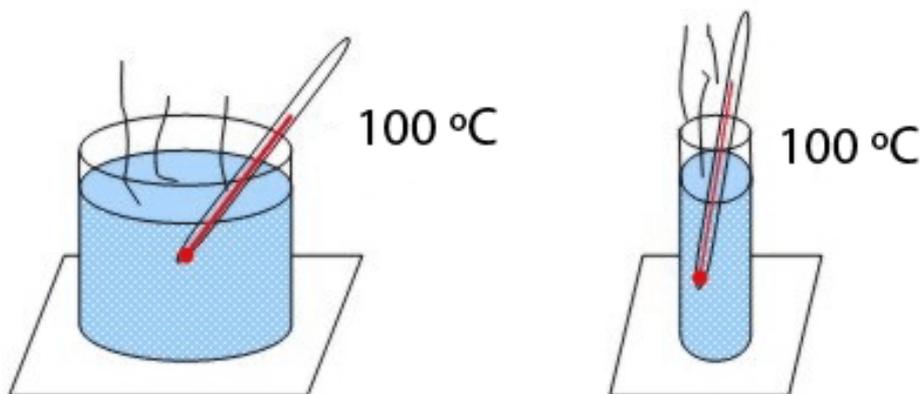
## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Fundamentos de transferencia de calor

#### 2.1.1. Temperatura y calor

Aunque el calor y la temperatura están relacionados entre sí, son sucesos muy diferentes, el calor es un tipo de energía en tránsito relacionada con el movimiento de átomos y moléculas, que siempre fluye desde el medio que posee la temperatura más elevada hacia el de temperatura más baja, en cambio la temperatura es una medida de dicha energía. Por ejemplo, (Figura 2.1), si se hace hervir agua en dos recipientes de diferente tamaño, la temperatura alcanzada es la misma para los dos ( $100^{\circ}\text{C}$ ), pero el que tiene más agua posee mayor cantidad de calor. (Almachi y Pilliza, 2013)

**Figura 2.1:** Diferencia entre temperatura y calor.



**Fuente:** Almachi y Pilliza (2013).

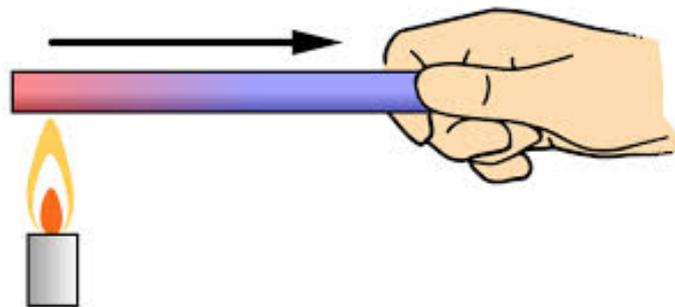
### 2.1.2. Transferencia de calor

Según Cengel y Ghajar (2001), la transferencia de calor es la ciencia que estudia las razones del flujo de calor hacia un sistema y desde éste y por lo tanto, los tiempos de enfriamiento o de calentamiento, así como de la variación de la temperatura en dichos sistemas. Para que exista transferencia de calor se requiere de una fuerza impulsora en este caso la diferencia de temperatura, al igual que la diferencia de tensión es la fuerza impulsora para el flujo de corriente eléctrica y la diferencia de presión es la fuerza impulsora para el flujo de fluidos, por lo cual mientras más grande es la diferencia de temperatura por unidad de longitud, mayor es la razón de transferencia de calor.

### 2.1.3. Áreas de aplicación de la transferencia de calor

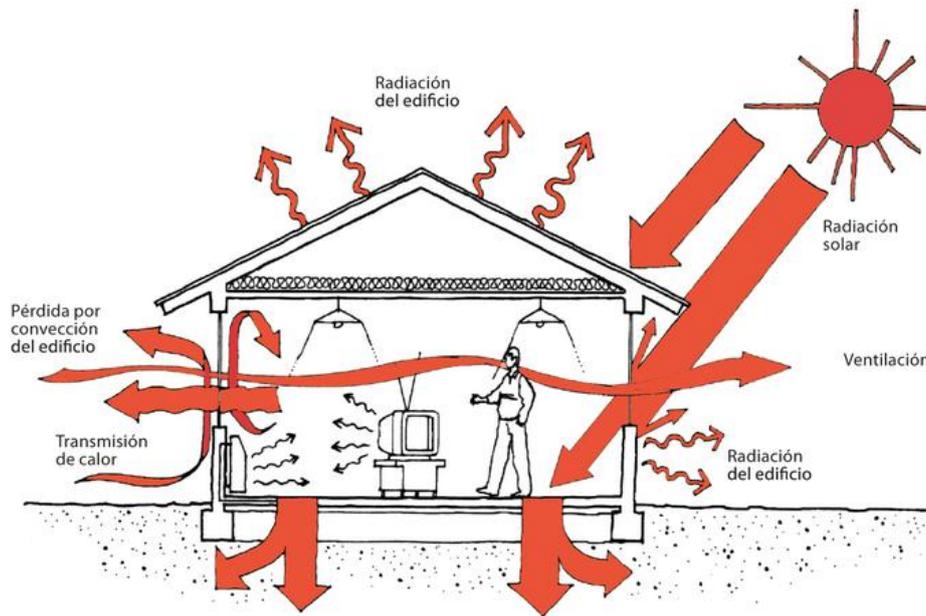
En el diario vivir es muy común encontrar casos de transferencia de calor, un ejemplo es el cuerpo humano, este transmite calor hacia el exterior, y como controlador de esa transferencia es la vestimenta que usa el ser humano. (Incropera y DeWit, 2000)

**Figura 2.2:** Transferencia de Calor.



**Fuente:** Incropera y DeWit (2000).

En el área de la ingeniería, existen muchas aplicaciones: los sistemas de calefacción, de aire acondicionado, el sistema de ventilación y radiadores de los vehículos, plantas generadoras de electricidad, los aparatos electrónicos como computadoras, radios, televisiones, entre otros. (ver Figura 2.3), todos estos necesitan de un estudio adecuado de transferencia de calor, para que tengan un aislamiento apropiado para disminuir o aumentar la pérdida de calor, todo basado en un cálculo matemático correcto.

**Figura 2.3:** Aplicación de Transferencia de Calor.

Fuente: Incropera y DeWit (2000)

### Transferencia de calor en la ingeniería

Según Cengel (2004), los equipos de transferencia de calor como los intercambiadores de calor, las calderas, los condensadores, los radiadores, los calentadores, los hornos y los refrigeradores son diseñados teniendo en cuenta el análisis de la transferencia de calor.

Existen dos tipos de ámbitos a ser estudiados en este caso, primero se tiene los problemas de capacidad nominal, que se refieren a la obtención de la razón de la transferencia de calor con una diferencia específica de temperatura, y el segundo tipo son los de dimensionamiento, los cuales tratan de la determinación del tamaño de un sistema con el propósito de encontrar una razón que determine una diferencia específica de temperatura. A partir de esto se considera que la transferencia de calor puede ser estudiada de una forma experimental.

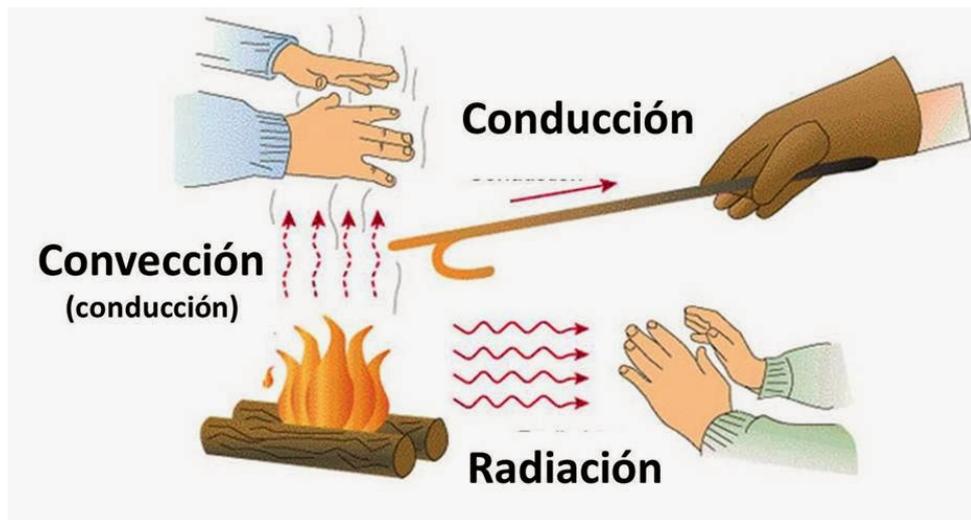
#### 2.1.4. Elaboración de los modelos de la transferencia de calor

Los modelos de transferencia de calor y los procesos de transferencia tiene ciertas condiciones propias y otras que siempre serán base y muy similares en cada proceso, es decir, que se debe tomar en cuenta para un modelo de transferencia de calor las condiciones reales, dimensiones y características de uso, a partir de esto se moldea la función y como estará diseñado el sistema de transferencia de calor a ser creado, estudiado y analizado, el cual cumplirá con todos los aspectos mencionados, muchos procesos ocurren de manera aleatoria pero son gobernados por leyes físicas visibles o no tan visibles, lo que significa que siempre el comportamiento de la transferencia de calor está basado en leyes ya establecidas, que han sido previamente estudiadas científicamente.

### 2.1.5. Mecanismos de transferencia de calor

El estudio matemático se dedica a resolver o determinar la cantidad de transferencia de calor en relación al proceso al que es sometido un sistema de un estado de equilibrio a otro estado de equilibrio, pero el área de estudio que se dedica a la investigación de las razones por las cuales existen esas transferencias de energía se llama transferencia de calor; el calor puede ser transferido mediante tres métodos; conducción, convección y radiación. (Ver Figura 2.4)

**Figura 2.4:** Mecanismos de Transferencia de Calor.



**Fuente:** Rosenow y Hartnett, 1981.

Todos estos tres métodos necesitan principalmente una diferencia en la temperatura, donde los procesos siempre irán de la mayor temperatura a la menor temperatura hasta alcanzar un estado de equilibrio. (Cengel, 2004)

#### Conducción

Según Cengel (2004) la conducción es la transferencia de energía de las partículas más energéticas hacia las adyacentes menos energéticas, como resultado de interacciones entre esas partículas y puede tener lugar en los sólidos, líquidos o gases. En los gases y líquidos la conducción se debe a las colisiones y a la difusión de las moléculas durante su movimiento aleatorio. En los sólidos se debe a la combinación de las vibraciones de las moléculas en una red y al transporte de energía por parte de los electrones libres.

La ecuación para la conducción de calor se representa por la ley de Fourier como:

$$\dot{Q}_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

Donde:

- El signo menos indica que el calor se transfiere en la dirección decreciente de la temperatura

- $k$ : Conductividad Térmica del material ( $W/m \cdot k$ ;  $kCal/h \cdot m \cdot ^\circ C$  ó  $BTU/s \cdot ft \cdot ^\circ F$ )
- $A$ : Área perpendicular a la dirección de transferencia de calor ( $m^2$  ó  $ft^2$ )
- $\frac{dT}{dx}$ : Gradiente de temperatura en la dirección “ $x$ ”

### Conductividad térmica

“La conductividad térmica es una medida de la capacidad que tiene el material para conducir el calor”. (Cengel y Ghajar, 2001)

A continuación, en la Tabla 1 se presenta la conductividad térmica de los materiales más comunes:

**Tabla 2.1:** Conductividad térmica a 273.5K.

Material	Conductividad térmica	
	$W/m^2 \cdot ^\circ C$	$BTU/s \cdot ft \cdot ^\circ F$
Metales:		
Cobre	385	223
Aluminio	202	117
Hierro forjado (o Hierro dulce)	79,5	45,9
Acero al Carbón, 1 % C	43	25
Plomo	45	20,3

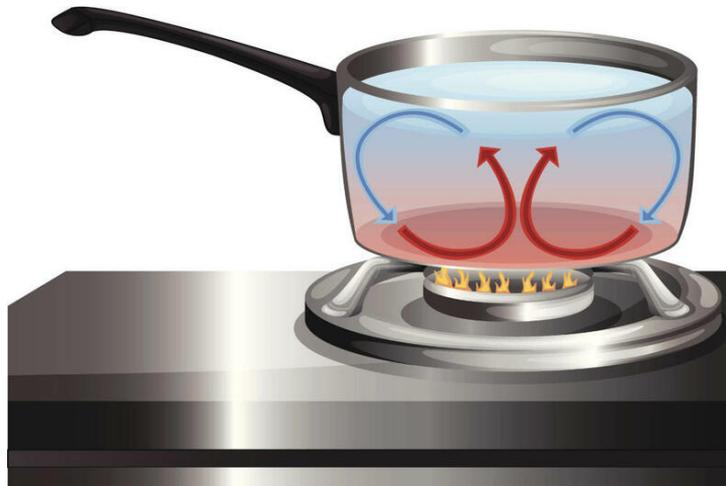
**Fuente:** Almachi y Pilliza (2013)

### Convección

Según Cengel y Ghajar (2001), la convección es la de transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacente que está en movimiento. Entre más rápido es el movimiento de un fluido, mayor es la transferencia de calor por convección, es decir, la presencia de movimiento masivo del fluido acrecienta la transferencia de calor entre la superficie sólida y el fluido, pero también complica la determinación de las razones de esa transferencia.

Existen dos tipos de convección: forzada y natural

- Convección forzada: El flujo del fluido sobre la superficie es causado por medios externos como un ventilador, una bomba o vientos atmosféricos.
- Convección natural (o libre): El flujo del fluido sobre la superficie es provocado por fuerzas de empuje que surgen a partir de diferencias de densidad ocasionadas por la variación de temperatura en el fluido.

**Figura 2.5:** Convección.**Fuente:** Holman (1999).

La ecuación o modelo para la convección se representa por la ley de Newton de enfriamiento . (Cengel y Ghajar, 2001)

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\alpha) \quad (2.2)$$

Donde:

- $h$ : Es el coeficiente de transferencia de calor por convección ( $W/m^2C$ )
- $A_s$ : Es el área superficial a través de la cual tiene lugar la transferencia de calor ( $m^2$ )
- $T_s$  y  $T_\alpha$ : Son la temperatura superficial y ambiental respectivamente ( $^{\circ}C$ )

Es muy importante saber que el coeficiente de transferencia de calor por convección no es una propiedad del fluido, este es un parámetro determinado en forma experimental y que su valor depende de otras variables que son influyentes en la convección, entonces estas variables serán la geometría, la naturaleza del movimiento del fluido, las propiedades y la velocidad masiva del mismo. (Cengel, 2004)

### Radiación

La radiación es un mecanismo de transferencia de calor que no requiere de un medio de transmisión, sino que se produce como resultado de la emisión de energía en forma de ondas electromagnéticas (fotones), además este modo de transferencia no sufre atenuación en el vacío. (Almachi y Pilliza, 2013)

Según Cengel y Ghajar (2001), la ecuación o modelo para la Radiación se representa por la ley de Stefan-Boltzmann

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A_s(T_s^4 - T_{alred}^4) \quad (2.3)$$

Donde:

- $\varepsilon$ : Emisividad de la superficie, indica cuan próxima está la superficie en ser un cuerpo negro ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ )
- $\sigma$ : Constante de Stefan-Boltzmann ( $5,67 \cdot 10^{-8} W m^2 / k^4$ )
- $A_s$ : Área superficial ( $m^2$  ó  $ft^2$ )
- $T_s$  y  $T_{alred}$ : Son la temperatura superficial y de los alrededores respectivamente ( $K$  ó  $R$ )

**Tabla 2.2:** Conductividad térmica a 273.5K.

Material	Emisividad	Temperatura ( $^{\circ}F$ )	Descripción
Aluminio	0,09	212	Chapa comercial
Óxido aluminio	0,63 a 0,42	530 a 930	
Pintura aluminio	0,27 a 0,67	212	Según edad y % Al
Bronce	0,22	120 a 660	Placa mate
Óxido Cobre	0,66 a 0,54	1470 a 2012	
Hierro	0,21	392	Fundición pulida
	0,55 a 0,60	1650 a 1900	Chapa Lisa
	0,24	68	Esmerilado reciente
Óxido Hierro	0,85 a 0,89	930 a 2190	
Acero	0,79	390 a 1110	Oxido a 1110 $^{\circ}F$
	0,66	70	Chapa laminada
	0,28	2910 a 3270	Fundido

Fuente: Almachi y Pilliza (2013)

### 2.1.6. Ecuación general de conducción de calor

En algunas aplicaciones prácticas se necesita considerar la transferencia de calor en diferentes direcciones, por lo cual se dice que la conducción de calor es multidimensional. La ecuación diferencial en coordenadas cartesianas que rige tales sistemas es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$

En donde los siguientes términos están en función de las siguientes variables.

$$\begin{aligned} k &= k(T, P) \\ c_p &= c_p(T) \\ \rho &= \rho(T) \end{aligned}$$

Con las siguientes suposiciones y sustituyendo en la ecuación (2.4), se obtiene:

- Estado permanente

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.5)$$

- Sin generación de calor

$$\dot{q} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.6)$$

- Sin variación de temperatura en las direcciones  $y, z$ .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.7)$$

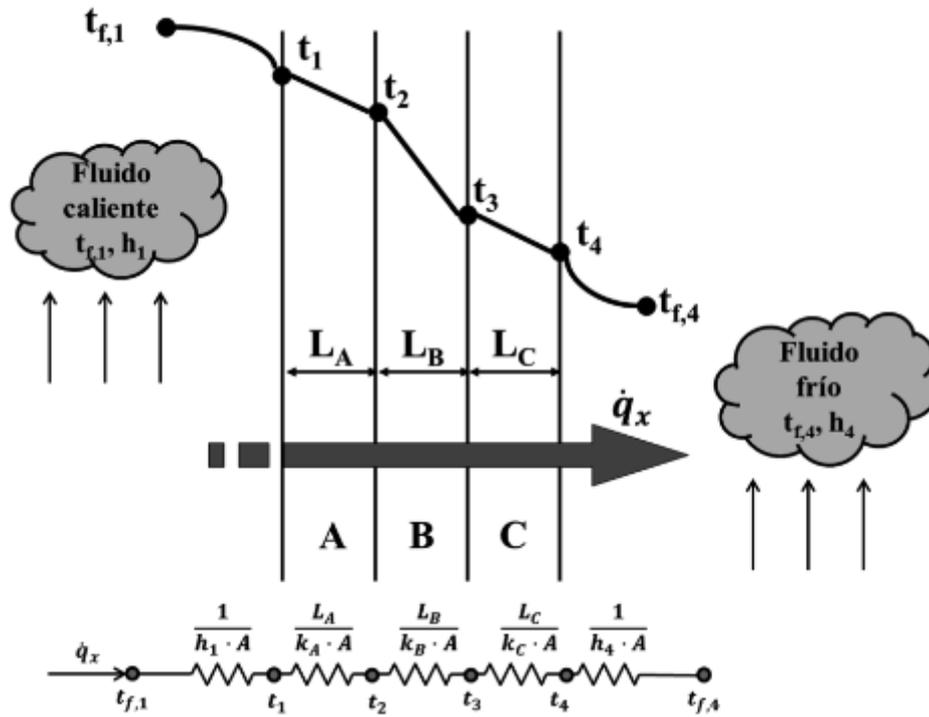
La ecuación (2.7) implica que el flujo de calor es constante en la dirección de la transferencia de calor por conducción por unidad de área.

$$\frac{d^2 q_k}{dx^2} = 0 \quad (2.8)$$

### 2.1.7. Ecuación unidimensional de la conducción de calor

Este caso que se va a estudiar se aproxima más a un sistema real, en el que la pared estará formada por más de un material y a su vez en contacto directo con dos fluidos por ambas caras. Se va a suponer que la pared compuesta está formada por 3 capas de materiales distintos, tal y como se muestra en la figura 2.6:

**Figura 2.6:** Distribución de temperaturas y flujo de calor en una pared plana compuesta con temperaturas superficiales dadas. Circuito térmico equivalente asociado.



Fuente: Holman, 1999.

Para la modelización de la conducción unidimensional estacionaria en una pared compuesta se van a suponer las siguientes hipótesis generales:

1. Pared plana indefinida (para que haya conducción de calor en una única dirección) formada por la yuxtaposición de  $n$  capas de espesores finitos  $L_1, \dots, L_n$ .
2. La temperatura del fluido interior es mayor que la temperatura del fluido exterior,  $t_{f,1} > t_{f,n}$ , de tal forma que la transmisión de calor va desde el interior de la pared cilíndrica hacia el exterior.
3. Cada una de las capas es de material distinto. Es decir, en cada capa, la conductividad térmica es distinta:  $k_1, \dots, k_n$  y el material de cada capa se va a considerar homogéneo e isotrópico, para que la conductividad no dependa de la variable espacial.
4. Todas las capas que integran la pared están perfectamente adheridas unas a otras, lo que equivale a decir que la distribución de temperaturas es una función continua a lo largo de toda la pared y no existen resistencias de contacto.

El flujo de calor por unidad de superficie se mantiene constante a lo largo del espesor de la pared. Es decir, el calor que transfiere el fluido 1 a la superficie 1 es exactamente igual que el que se transfiere a través del material A, a través del material B y a través del material C, y exactamente

igual al que se transfiere de la superficie 4 al fluido 4.

El que exista una mayor o menor caída de temperaturas dependerá de la conductividad de un material dado. Aplicando la ecuación (2.6) a cada uno de los materiales de la pared, y añadiendo además la transmisión de calor por convección se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{q}_x &= \frac{(t_{f,1} - t_1)}{\frac{1}{h_1}} \longrightarrow (t_{f,1} - t_1) = \dot{q}_x \cdot \frac{1}{h_1} \\ \dot{q}_x &= \frac{(t_1 - t_2)}{\frac{L_A}{kA}} \longrightarrow (t_1 - t_2) = \dot{q}_x \cdot \frac{L_A}{kA} \\ \dot{q}_x &= \frac{(t_2 - t_3)}{\frac{L_B}{k_B}} \longrightarrow (t_2 - t_3) = \dot{q}_x \cdot \frac{L_B}{k_B} \\ \dot{q}_x &= \frac{(t_3 - t_4)}{\frac{L_C}{k_C}} \longrightarrow (t_3 - t_4) = \dot{q}_x \cdot \frac{L_C}{k_C} \\ \dot{q}_x &= \frac{(t_4 - t_{f,4})}{\frac{1}{h_4}} \longrightarrow (t_4 - t_{f,4}) = \dot{q}_x \cdot \frac{1}{h_4}\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores, y despejando  $\dot{q}_x$  se tiene:

$$\dot{q}_x = \frac{(t_{f,1} - t_{f,4})}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{kA} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}} \quad (2.9)$$

La expresión (2.10) se puede generalizar para una pared compuesta por  $n$  capas, resultando:

$$\dot{q}_x = \frac{(t_{f,1} - t_{f,n})}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_n}} \quad (2.10)$$

### 2.1.8. Resistencia térmica por contacto

En la realidad incluso las superficies planas que aparentan estar lisas a simple vista, resultan estar ásperas cuando se examinan con un microscopio. Al poner en contacto dos superficies se generan brechas de aire de dimensiones variables que actúan como aislante debido a la baja conductividad térmica del aire. Por lo tanto, dicho contacto presenta resistencia a la transferencia

de calor, y esta resistencia por unidad de área se llama resistencia térmica por contacto. Cengel y Ghajar (2001)

La resistencia térmica por contacto depende de:

- Condición y asperezas de la superficie.
- Temperatura y presión de las interfaces.

La expresión que define a la resistencia térmica por contacto está dada por la siguiente ecuación:

$$R_c = \frac{1}{A_{c,1} h_c} \quad (2.11)$$

Donde:

- $h_c$ : Conductancia térmica de contacto ( $W/m^2C$ )
- $A_{c,1}$ : Área de contacto ( $m^2$ )

## 2.2. Superficies extendidas o aletas

### 2.2.1. Definición de superficie extendida

Incropera y DeWit (2000), al hablar de superficie extendida o aleta se hace referencia a un sólido que experimenta transferencia de energía por conducción dentro de sus límites, así como transferencia de energía por convección (y/o radiación) entre sus límites y los alrededores. Estas superficies son utilizadas de manera específica para aumentar la rapidez de transferencia de calor entre un sólido y un fluido contiguo al incrementar el área superficial. Pueden ser fabricadas al extruir o soldar delgadas láminas metálicas (hechas de materiales intensamente conductores) sobre la superficie deseada.

Al hablar del análisis numérico de superficies extendidas se hace referencia un tema demasiado extenso, ya que involucra un sin número de consideraciones que deben tomar en cuenta, tales como: disposición de las aletas, forma geométrica del dispositivo sobre el cual se va a ubicar el arreglo de aletas, factores que intervienen en el coeficiente de convección, entre otros. Por lo cual resulta conveniente delimitar el tema con el fin de simplificar el análisis.

### 2.2.2. Tipos de superficies extendidas

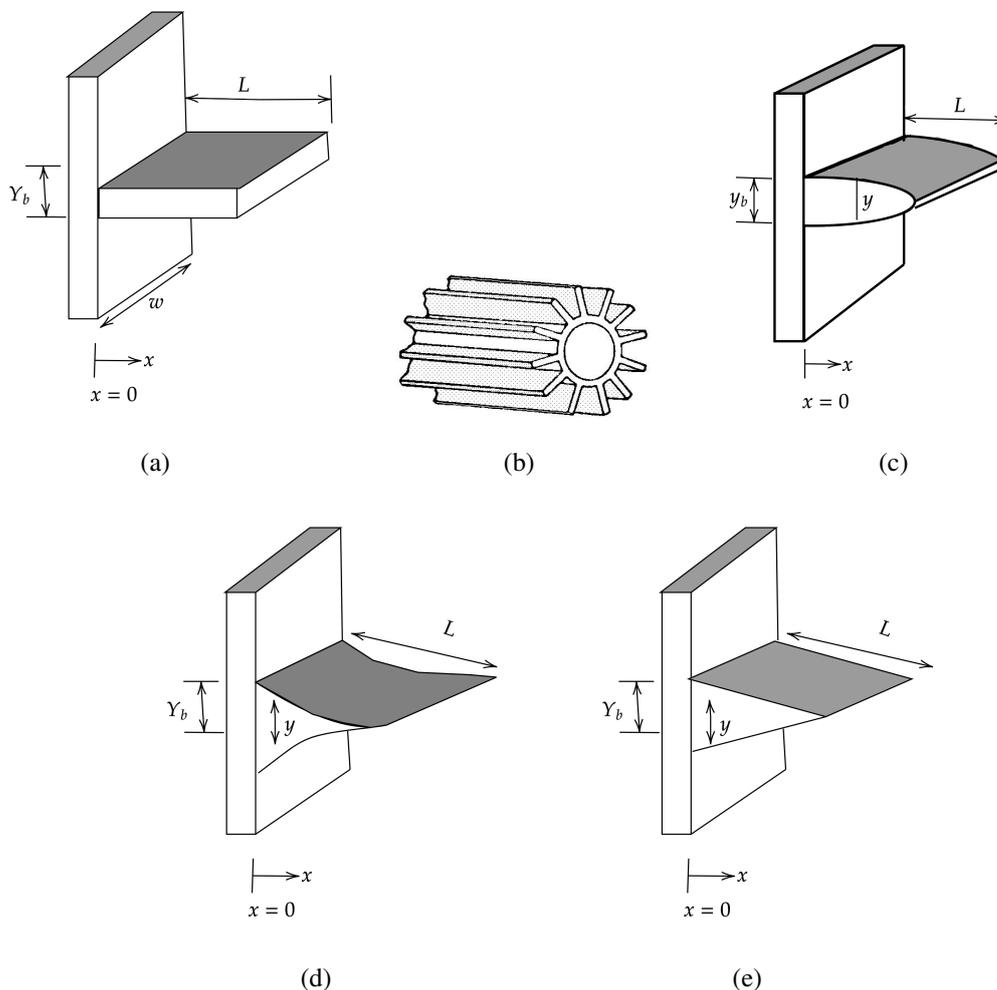
Las superficies extendidas varían según su geometría y ecuaciones resultantes, en la actualidad los arreglos más comunes que se pueden encontrar de estas superficies son: longitudinales, radiales o transversales y espinas. De acuerdo a ello se puede denotar que estos tipos de arreglos de aletas pueden ser ubicados en dispositivos que presenten diferente configuración geométrica (tubular, plana o esférica).

### 2.2.3. Aletas longitudinales

Son aquellas aletas que están prolongadas a lo largo de la superficie. En la industria son usadas ampliamente en intercambiadores de tubo y coraza cuando el flujo procede a lo largo del eje del tubo, además, también son utilizados en dispositivos que involucran gases y líquidos viscosos que estén en régimen laminar. (Almachi y Pilliza, 2013)

Los perfiles más comunes que se pueden encontrar son: rectangulares, triangulares y parabólicas (Figura 2.7).

**Figura 2.7:** (a), (b), (c), (d) y (e), Aletas longitudinales.



**Fuente:** Kern (1999).

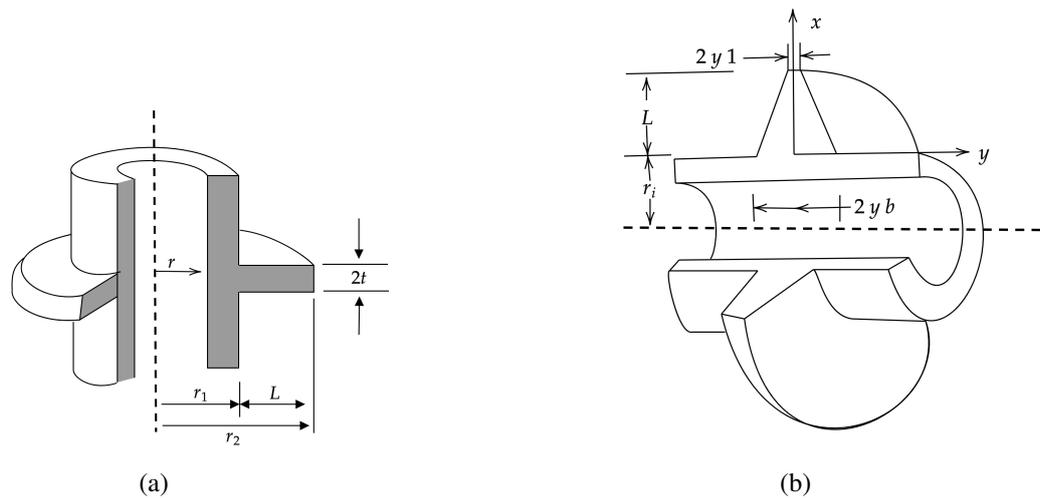
### Aletas radiales o transversales

Son como discos anulares concéntricos ubicados alrededor de un cilindro, el espesor puede ser uniforme o variable según su aplicación. En la industria son usadas ampliamente para el

calentamiento o enfriamiento de gases en flujo cruzado. (Almachi y Pilliza, 2013)

Los perfiles más comunes que se pueden encontrar son: rectangulares y triangulares (Figura 2.8)

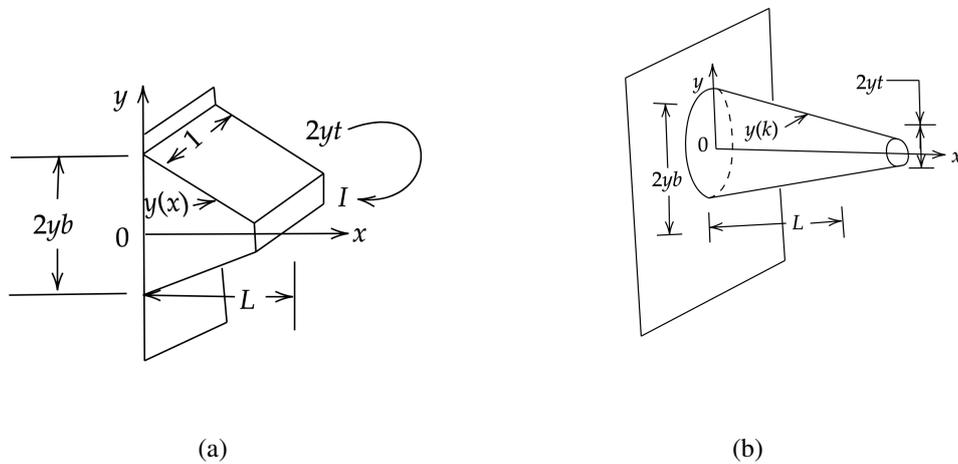
**Figura 2.8:** (a) y (b), Aletas radiales.



**Fuente:** Kern (1999)

### Aletas de aguja o espinas

Son superficies prolongadas de sección transversal circular, que puede ser uniforme o no uniforme a lo largo de la aleta. En la industria son usadas para dispositivos con flujo longitudinal o flujo cruzado Almachi y Pilliza (2013). Los perfiles más comunes que se pueden encontrar son: circular, cuadrada, triangular, parabólico (Figura 2.9)

**Figura 2.9:** (a) y (b), Aletas agujas.**Fuente:** Kern (1999)

### 2.2.4. Ecuación general para las aletas

Por conveniencia en el análisis de estas superficies algunos autores se basan en una serie de suposiciones con el fin de facilitar los cálculos:

1. Operación estacionaria sin generación de calor en las aletas.
2. La Conductividad térmica del material permanece constante.
3. La conducción de calor es continua y unidireccional.
4. El coeficiente de convección es constante y uniforme sobre toda la superficie de la aleta.
5. La temperatura en la base de aleta es constante sobre toda la superficie
6. Se desprecia los gradientes de temperatura a lo largo del espesor, ya que es demasiado pequeño comparado con el ancho.
7. La radiación desde la superficie es insignificante.

De manera que al efectuar un balance de energía y resolver las ecuaciones diferenciales correspondientes resulta la siguiente ecuación general. (Cengel y Ghajar, 2001)

$$\frac{d}{dx} \left( k A_c \frac{dT}{dx} \right) - hp(T - T_\alpha) = 0 \quad (2.12)$$

### 2.2.5. Aletas de sección transversal variable

En la industria las superficies extendidas con área de sección transversal variable tienen algunas aplicaciones prácticas, por lo cual para plantear un modelo Matemático a este tipo de superficies extendidas se han tomado en consideración las mismas suposiciones expuestas para las aletas de sección transversal uniforme:

De acuerdo a estas suposiciones vale recalcar que para obtener las ecuaciones diferenciales para este tipo de superficies se requiere de un alto grado de conocimiento en matemáticas avanzadas, ya que el análisis abarca las ecuaciones de Bessel de orden cero, y ecuaciones de Bessel de primer y segunda especie.

Al realizar el análisis correspondiente se obtiene una ecuación generalizada para las aletas longitudinales de sección transversal variable. Kraus, Aziz, y Welty (2001)

$$2Lf(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2Lf(x)d\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{k}\theta = 0 \quad (2.13)$$

Donde

- $h$  : Coeficiente de convección del medio ambiente
- $f(x)$  : Perfil variable de la aleta en función de " $x$ "
- $L$  : Longitud de la aleta
- $K$  : Conductividad térmica del material

### 2.2.6. Eficiencia de las aletas

En la realidad la suposición número 5 no es verdadera ya que la temperatura de la aleta cae a lo largo de ella, por lo cual, para considerar el efecto de esta disminución sobre la transferencia de calor se define una eficiencia de la aleta como:

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\dot{Q}_{aleta,max}} \quad (2.14)$$

Donde:

- $\dot{Q}_{aleta}$  : Es el flujo de calor real de la aleta
- $\dot{Q}_{aleta,max}$  : Es el flujo de calor ideal de la aleta (Temperatura base igual sobre toda la superficie)

Una consideración importante en el diseño de las superficies con aletas es la selección de la longitud  $L$  de la aleta que sea más apropiada. Las longitudes de aletas que causan la caída de eficiencia por debajo de 60 % suelen no poder justificarse económicamente y deben evitarse. La eficiencia de la mayor parte de las aletas usadas en la práctica está por encima de 90 % . (Cengel y Ghajar, 2001)

### 2.2.7. Efectividad de las aletas

El desempeño de las aletas se juzga sobre la base del mejoramiento en la transferencia de calor comparado con el caso en el que no se usan aletas. Se expresa por la siguiente ecuación: Donde:

$$\varepsilon_{aleta} = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{\dot{Q}_{sin\ aleta}} = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{hA_b(T_b - T_\alpha)} \quad (2.15)$$

- $T_b$  y  $A_b$  = Son la temperatura y el área de la base respectivamente.
- Una  $\varepsilon_{aleta} = 1$  indica que la adición de las aletas a la superficie no afecta la transferencia de calor en lo absoluto
- Una  $\varepsilon_{aleta} < 1$  indica que, en realidad, la aleta actúa como aislamiento, retardando la transferencia de calor desde la superficie.
- Una  $\varepsilon_{aleta} > 1$  indica que las aletas están mejorando la transferencia de calor desde la superficie.
- Una  $\varepsilon_{aleta} > 2$  se justifica para un uso práctico Tanto la eficiencia de la aleta como su efectividad están relacionadas con el desempeño de la misma, pero son cantidades diferentes. Sin embargo, están relacionadas entre sí por:

$$\varepsilon_{aleta} = \frac{\dot{Q}_{aleta}}{hA_b(T_b - T_\alpha)} = \frac{\eta_{aleta}hA_{aleta}(T_b - T_\alpha)}{hA_b(T_b - T_\alpha)} = \frac{A_{aleta}}{A_b}\eta_{aleta} \quad (2.16)$$

En la tabla 4 se muestra un resumen de las ecuaciones para cada uno de los perfiles tanto de sección transversal uniforme como sección transversal variable.

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## METODOLOGÍA

### 3.1. Tipo de Investigación

En esta investigación científica, se utilizan modelos matemáticos, ya que el objetivo es desarrollar cálculos basados en ecuaciones diferenciales para la deducción de los parámetros geométricos de transferencia de calor en superficies extendidas que permitan optimizar recursos en las diferentes estructuras.

Este estudio partió con los análisis de mecanismos de transferencia de calor, se realizan la revisión exhaustiva de la ecuación diferencial parcial de la transferencia de calor en una y en dos dimensiones y al entrar en la resolución de los problemas térmicos en superficie específicas, se realiza una interpretación intuitiva de la necesidad de las superficies ampliadas, que se conocen con el nombre de aletas, así como de sus secciones transversales, longitudinales y de agujas (spin), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas.

### 3.2. Diseño de la investigación

La metodología que se utiliza, se presenta en el diseño de teoría fundamentada, este tipo de investigación se deriva de propiedades físicas y fundamentos matemáticos, destacando la relación entre el fenómeno físico y el consecuente análisis del mismo, por lo cual, se definieron las siguientes fases:

1. Comprensión de los fundamentos de la transferencia de calor como: Temperatura y calor, Transferencia de calor, Mecanismos de transferencia de calor y Conductividad térmica.
2. Deducción de la ecuación general de conducción de calor.
3. Desarrollo teórico y demostrativo de la teoría de las superficies extendidas.

### 3.2.1. Comprensión de la teoría

En este contexto, se efectuó una recopilación de los conceptos básicos, que son necesarios para el desarrollo sistemático de la teoría de la transferencia de calor en superficies extendidas, sin embargo, al ser el diseño de teoría fundamentada, se expresaron en forma de definiciones con su debido soporte matemático y se encuentran cimentadas en las áreas de Ecuaciones Diferenciales y Física.

### 3.2.2. Deducción de la ecuación general de conducción de calor

En esta etapa, se estudia a fondo lo que es la transferencia de calor por conducción; en este caso, se analiza un cuerpo rectangular para poder definir la ecuación general de calor en coordenadas cartesianas, es decir, que el vector del flujo de calor será  $\nabla q(x, y, z)$  y de este deduce dicha ecuación general de calor por conducción. Se analizan también la Ecuación de Calor en Coordenadas Curvilíneas y Coordenadas Cilíndricas también se estudia la transmisión de calor por conducción particularizada para el caso de conducción unidimensional en régimen permanente.

### 3.2.3. Desarrollo teórico y demostrativo de la teoría de las superficies extendidas

En esta sección de la investigación, se desarrolla las bases teóricas de la transferencia de calor en superficies con aletas, se analizan los parámetros para el estudio de las aletas como:

1. Aleta con convección en el extremo.
2. Aleta con extremo adiabático.
3. Aleta con temperatura establecida.
4. Aleta con longitud infinita
5. Aleta de perfil rectangular
6. Aleta Cilíndrica

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## RESULTADOS

### 4.1. Ecuación general de calor por conducción

La ecuación de calor en coordenadas rectangulares por conducción resulta un balance de energía del vector de flujo calor, la energía generada y la energía que se almacena en dicho sistema. Esto es expresado de la siguiente manera

$$E_{ent} - E_{sal} + E_g = E_{alm} \quad (4.1)$$

$$(q_x - q_{x+dx}) + (q_y - q_{y+dy}) + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.2)$$

Aplicando la serie de Taylor tendremos que los  $q_{i+di}$  son iguales a lo indicado en la ecuación (4.3), donde  $i$  representa cualquiera de las variables independientes coordenadas, tal como se indica en las ecuaciones (4.4) a la (4.6), respectivamente, para  $x$ ,  $y$  y  $z$  :

$$q_{i+di} = q_i + \frac{\partial q_i}{\partial i} di \quad (4.3)$$

Por tanto

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (4.4)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (4.5)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.3) a la (4.6) en (4.2) tendremos que

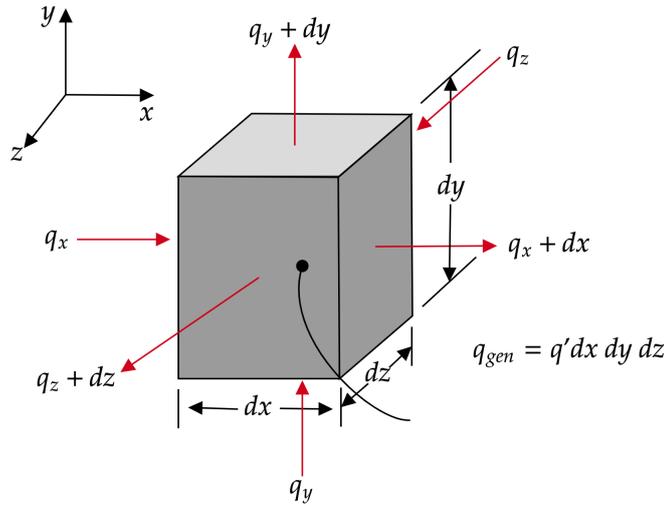


Figura 4.1: Espacio rectangular

$$\left[ \left( q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \left( q_y - q_y - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + \left( q_z - q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.7)$$

Acomodando los términos se tiene

$$\left[ (q_x - q_x) + (q_y - q_y) + (q_z - q_z) - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.8)$$

Se cancelan los flujos de calor en la dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$ , con lo cual obtenemos la nueva ecuación

$$- \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.9)$$

Al desarrollar un poco más la igualdad anterior, se observa lo siguiente

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial x} (q_x) dx + \frac{\partial}{\partial y} (q_y) dy + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) dz \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.10)$$

Ahora se debe recordar cómo se define el flujo de calor dado que, en este caso,  $\nabla q(x, y, z)$ , es decir, que el flujo de calor es un vector en un espacio coordenado cartesiano. Al encontrarse en un espacio rectangular, se dice que la base que define dicho espacio se encuentra conformada por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que se denominan base canónica. Planteando lo anterior, el flujo de calor por medio de la ley de Fourier

$$\nabla \dot{q} = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \hat{i} + \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \hat{j} \right) + \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \hat{k} \right) \right) \quad (4.11)$$

Donde

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \quad (4.12)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \quad (4.13)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \quad (4.14)$$

Retornemos a la ecuación (4.9) y sustituir los flujos de calor respectivos de las ecuaciones (4.12) a la (4.14)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(q_x)dx - \frac{\partial}{\partial y}(q_y)dy - \frac{\partial}{\partial z}q_z dz + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.15)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \right) dx - \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \right) dy - \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \right) dz + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.16)$$

Pasamos a multiplicar el signo negativo afuera de los paréntesis

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \right) dz + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.17)$$

En los siguientes pasos se encontrará la ecuación general de calor por conducción. Ahora se determinan los diferenciales de área y volumen involucrados en la ecuación.

$$dA_x = dydz \quad (4.18)$$

$$dA_y = dx dz \quad (4.19)$$

$$dA_z = dy dx \quad (4.20)$$

$$dv = dx dy dz \quad (4.21)$$

Hay que hacer una mención de donde salen estos términos de las diferenciales de áreas,  $dA_i$  es el volumen transversal del flujo de calor de un cubo infinitesimal y el  $dv$  se relaciona al volumen infinitesimal del mismo cubo. Sustituyendo las ecuaciones (4.18) a la (4.20) en (4.17) se obtiene la ecuación (4.22)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} dy dx \right) dz + \dot{q} dx dy dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (4.22)$$

Los diferenciales que se encuentran dentro del paréntesis son constantes y se pueden pasar a multiplicar afuera del mismo y ser divididos a ambos extremos de la igualdad, lo que da como resultado la eliminación del elemento diferencial de volumen  $dv$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydzdx + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dy dx dz + \dot{q} dx dy dz = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.24)$$

Asumiendo una Conductividad Térmica constante, pasamos el término afuera de los paréntesis y luego dividiéndolo a ambos lados de la igualdad, donde se tiene

$$k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + k \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.26)$$

Y, recordando que

$$\frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial T}{\partial i} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial i^2} \quad (4.27)$$

Al sustituir la relación (4.27) en (4.26) donde corresponda para la variable independiente respectiva, se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.28)$$

El término  $\frac{\rho C_p}{k}$  se conoce como  $\frac{1}{\alpha}$ , donde  $\alpha$  es la difusividad térmica que representa la velocidad de propagación del calor en el medio sólido. Al realizar todas estas operaciones matemáticas, la expresión resultante se conoce como **Ecuación General de Conducción de Calor**, en el caso de que la conductividad térmica sea constante. La ecuación (4.28) también se conoce como la **Ecuación de Fourier-Biot** y, en condiciones específicas, se reduce a estas tres formas conocidas como Ecuación de **Poisson**, Ecuación de **Difusión de Calor** y Ecuación de **Laplace** respectivamente:

1) Régimen Estacionario: (Ecuación de Poisson)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = 0 \quad (4.29)$
2) Régimen transitorio sin generación de calor: (Ecuación de difusión)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.30)$
3) Régimen estacionario y sin generación de calor: (Ecuación de Laplace)	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.31)$

**Tabla 4.1:** Variaciones de la Ecuación de calor en coordenadas rectangulares

## Ecuación de Calor en Coordenadas Curvilíneas

En los problemas reales de transferencia de calor existirán diversas maneras o métodos para poder darles alguna solución, esto conlleva que algunas formas geométricas por donde se manifiesta el fenómeno sea muy difícil analizarlas por coordenadas rectangulares, lo cual hace mucho más fácil su estudio si transformamos el espacio por donde existe el fenómeno de transferencia de calor. De esta manera, si se plantearán en otro espacio coordenado ajeno a un Espacio Euclidiano normal a uno no Euclidiano se logra generar una transformación curvilínea entre el espacio coordenado cartesiano al nuevo sistema curvilíneo ortonormal como son los ejemplos de los espacios esféricos y los cilíndricos Tou (2011).

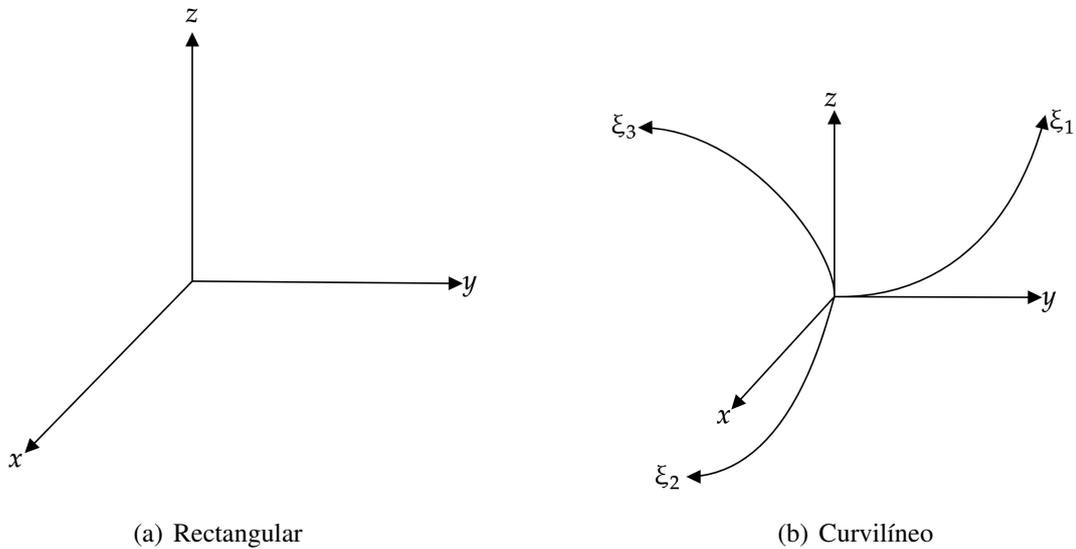
Así mismo, esta transformación al nuevo espacio coordenado nos ayuda a expandir nuestra visión sobre el problema de transferencia de calor. Adicionalmente, se dice que un espacio vectorial no Euclidiano, donde un sistema coordenado curvilíneo se encuentra definido por la base conformada por los vectores  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , caso contrario, lo que ocurre en un sistema Cartesiano, donde la base canónica está definida por  $x, y, z$ , así como se observa en la figura 1.1. En este caso, los vectores curvilíneos se pueden expresar de la siguiente manera

$$V(x, y, z) \quad (4.32)$$

$$x = X(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3); \quad y = Y(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3); \quad z = Z(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \quad (4.33)$$

$$\epsilon_1 = a_1 u_1, \quad \epsilon_2 = a_2 u_2, \quad \epsilon_3 = a_3 u_3 \quad (4.34)$$

**Figura 4.2:** Espacios vectoriales



**Fuente:** Kern (1999)

Donde  $u_1, u_2, u_3$  son las coordenadas de nuestro nuevo espacio coordenado, así mismo  $a_1, a_2, a_3$  se conocen como factores escalares, los cuales se deben encontrar para realizar la transformación.

La pregunta fundamental es como definir o realizar una Transformación de un Espacio a otro; Según Ozisik (1993) se debe definir en primera instancia la distancia de un vector en la base canónica, es decir, en sus correspondientes coordenadas rectangulares. Según Grossman y cols. (2011) esto se calcula de la siguiente manera

$$\|v\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.35}$$

Al determinar que el vector tiene características infinitesimales, dado que se mueve de un punto a otro, esa distancia sufre una pequeña variación en su posición, la cual matemáticamente puede ser expresada como una diferencial del vector  $V$ , esto también diferenciará cada una de sus componentes rectangulares y curvilíneas

$$dV(dx, dy, dz) \tag{4.36}$$

Donde la nueva distancia será

$$\|dv\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.37}$$

Ahora bien, si una componente se puede expresar en términos de otras componentes del nuevo espacio curvilíneo, podemos decir que cada componente cartesiana puede ser expresada como una diferencial total correspondiente a sus nuevas coordenadas

$$dV(dx, dy, dz) \tag{4.38}$$

$$dv[(dx_{u_i} - dx_{u_i+du_i}), (dy_{u_i} - dy_{u_i+du_i}), (dz_{u_i} - dz_{u_i+du_i})] \tag{4.39}$$

La diferencial total se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
dv = & \left[ ((dx_{u_1} - dx_{u_1+du_1}) + (dx_{u_2} - dx_{u_2+du_2}) + (dx_{u_3} - dx_{u_3+du_3})) \hat{i} + ((dy_{u_1} - dy_{u_1+du_1}) \right. \\
& + (dy_{u_2} - dy_{u_2+du_2}) + (dy_{u_3} - dy_{u_3+du_3})) \hat{j} + ((dz_{u_1} - dz_{u_1+du_1}) + (dz_{u_2} - dz_{u_2+du_2}) \\
& \left. + (dz_{u_3} - dz_{u_3+du_3})) \hat{k} \right]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Desarrollando la serie de Taylor para los primeros términos, en forma genérica se tiene la igualdad dada en la ecuación (4.41)

$$dx_{u_i+du_i} = dx_{u_i} + \frac{\partial x_{u_i}}{\partial u_i} du_i \tag{4.41}$$

Y sustituyendo esta en la ecuación (4.40), el vector queda

$$\begin{aligned}
dv = & \left( (dx_{u_1} - dx_{u_1}) + (dx_{u_2} - dx_{u_2}) + (dx_{u_3} - dx_{u_3}) - \left( \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \right) \hat{i} \\
& + \left( (dy_{u_1} - dy_{u_1}) + (dy_{u_2} - dy_{u_2}) + (dy_{u_3} - dy_{u_3}) - \left( \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \right) \hat{j} \\
& + \left( (dz_{u_1} - dz_{u_1}) + (dz_{u_2} - dz_{u_2}) + (dz_{u_3} - dz_{u_3}) - \left( \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \right) \hat{k}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Eliminando los primeros tres pares de términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned}
dv = & \left( -\frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} du_1 - \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} du_2 - \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \hat{i} + \left( -\frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} du_1 - \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} du_2 - \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \hat{j} \\
& + \left( -\frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} du_1 - \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} du_2 - \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right) \hat{k}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Reagrupando la expresión anterior como sumatorias, tendremos lo siguiente

$$dv = \sum_1^3 \left( -\frac{\partial x_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \hat{i} + \sum_1^3 \left( -\frac{\partial y_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \hat{j} + \sum_1^3 \left( -\frac{\partial z_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \hat{k} \tag{4.44}$$

Dado que

$$dx = \sum_1^3 \left( \frac{\partial x_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \quad (4.45)$$

$$dy = \sum_1^3 \left( \frac{\partial y_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \quad (4.46)$$

$$dz = \sum_1^3 \left( \frac{\partial z_{u_i}}{\partial u_i} du_i \right) \quad (4.47)$$

Los diferenciales de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son vectores con coordenadas curvilíneas así como lo muestra la ecuación (4.32) a la (4.34), por lo tanto, podemos sustituir estas expresiones en (4.36), así que

$$dx = \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \hat{i} + \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \hat{j} + \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \hat{k} \quad (4.48)$$

$$dx^2 = \left( \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 \quad (4.49)$$

$$dy = \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \hat{i} + \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \hat{j} + \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \hat{k} \quad (4.50)$$

$$dy^2 = \left( \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 \quad (4.51)$$

$$dz = \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \hat{i} + \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \hat{j} + \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \hat{k} \quad (4.52)$$

$$dz^2 = \left( \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 \quad (4.53)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.37)

$$\begin{aligned} \|dv\|^2 = & \left( \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} du_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} du_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} du_3 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Agrupando términos semejantes

$$\begin{aligned} \|dv\|^2 = & \left( \left( \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 \right) du_1^2 + \left( \left( \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 \right) du_2^2 \\ & + \left( \left( \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 \right) du_3^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Entonces

$$\|dv\|^2 = a_1^2 du_1^2 + a_2^2 du_2^2 + a_3^2 du_3^2 \quad (4.56)$$

Donde

$$a_1^2 = \left( \frac{\partial x_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_1}}{\partial u_1} \right)^2 \quad (4.57)$$

$$a_2^2 = \left( \frac{\partial x_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_2}}{\partial u_2} \right)^2 \quad (4.58)$$

$$a_3^2 = \left( \frac{\partial x_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_{u_3}}{\partial u_3} \right)^2 \quad (4.59)$$

De esta manera se encuentran los factores escalares para hacer la transformación, ahora el nuevo vector tendrá las siguientes coordenadas

$$U(u_1, u_2, u_3) \quad (4.60)$$

## Coordenadas cilíndricas

Esta es la manera más general para cambiar el espacio coordenado para un sistema ortonormal curvilíneo, ahora se analizará qué es lo que ocurre en una figura geométrica igual a un cilindro, las coordenadas internamente de un vector en cualquier cilindro se definen de la siguiente manera

$$U(u_1, u_2, u_3) = U(r, \theta, z) \quad (4.61)$$

Por lo tanto, se debe definir como se expresan sus coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos(\theta); \quad y = r \sin(\theta); \quad z = z \quad (4.62)$$

Adicionalmente, se debe recordar que analizamos este caso para determinar el vector de flujo de calor en coordenadas cilíndricas, en ese caso tenemos entonces

$$\nabla q(r, \theta, z) \quad (4.63)$$

Si analizamos el flujo de calor en una sección infinitesimal de un cilindro, en el cual existe flujo de calores entrantes como salientes, donde se genere calor y se almacena parte de la energía se podría deducir

una ecuación que nos ayude a definir la transferencia de calor en coordenadas cilíndricas. En este caso determinemos con un balance de energía cual sería dicha ecuación

$$E_{ent} - E_{sal} + E_g = E_{alm} \quad (4.64)$$

$$[(q_r - q_{r+dr}) + (q_\theta - q_{\theta+d\theta}) + (q_z - q_{z+dz})] + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.65)$$

Aplicando la serie de Taylor tendremos que los  $q_{i+di}$  son iguales a

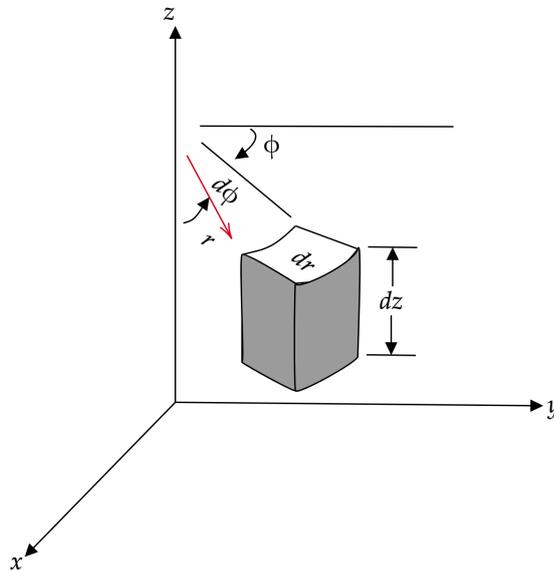
$$q_{i+di} = q_i + \frac{\partial q_i}{\partial i} di \quad (4.66)$$

Por lo tanto

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (4.67)$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad (4.68)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (4.69)$$



**Figura 4.3:** Espacio cilíndrico

Sustituyendo las ecuaciones (4.66) hasta la (4.68) en (4.64) se tendrá que

$$\left[ \left( q_r - q_r - \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \right) + \left( q_\theta - q_\theta - \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) + \left( q_z - q_z - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \right] + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.70)$$

Acomodando los términos se tiene que

$$\left[ (q_r - q_r) + (q_\theta - q_\theta) + (q_z - q_z) - \left( \frac{\partial q_r}{r} dr + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.71)$$

Se cancelan los flujos de calor de los primeros tres pares de términos y se obtiene la nueva ecuación diferencial parcial

$$- \left[ \frac{\partial q_r}{\partial r} dr + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.72)$$

Al desarrollar un poco más la igualdad anterior tendríamos la expresión (4.73)

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial r} (q_r) dr + \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) d\theta + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) dz \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.73)$$

Ahora bien, debemos determinar en este caso el vector del flujo de calor como función de las coordenadas cilíndricas

$$\nabla \dot{q} = - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \hat{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \hat{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \hat{k} \right) \quad (4.74)$$

Donde los diferenciales de área y de volumen son los siguientes

$$dA_x = dydz \quad (4.75)$$

$$dA_y = dx dz \quad (4.76)$$

$$dA_z = dy dx \quad (4.77)$$

$$dv = dx dy dz \quad (4.78)$$

En este caso determinemos el cambio de variables, para ello se necesita deducir los factores escalares obtenidos anteriormente en las ecuaciones (4.57) a la (4.58) respectivamente; de igual manera, sustituyendo sus equivalentes en coordenadas cilíndricas dadas en la ecuación (4.62), haciendo las derivadas parciales respectivas y considerando la identidad trigonométrica definida por  $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$  se obtienen las ecuaciones (4.79) a la (4.81)

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \left( \left( \frac{\partial x_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_r}{\partial r} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \text{sen}(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} (z) \right)^2 \right) \\ &= \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) + 0 = 1 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \left( \left( \frac{\partial x_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \text{sen}(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (z) \right)^2 \right) \\ &= (-r \text{sen}(\theta))^2 + (r \cos(\theta))^2 + 0 = r^2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$a_3^2 = \left( \left( \frac{\partial x_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_z}{\partial z} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial z} (r \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} (r \sin(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} (z) \right)^2 \right) = +0 + 1 = 1 \quad (4.81)$$

Por tanto tenemos que

$$dx = dr \quad (4.82)$$

$$dy = r d\theta \quad (4.83)$$

$$dz = dz \quad (4.84)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.11), obtenemos que

$$\nabla \dot{q} = - \left( k \frac{\partial T}{\partial r} dA_r \hat{i} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dA_\theta \hat{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \hat{k} \right) \quad (4.85)$$

Donde

$$dA_r = r d\theta dz \quad (4.86)$$

$$dA_\theta = dr dz \quad (4.87)$$

$$dA_z = r dr d\theta \quad (4.88)$$

$$dv = r dr d\theta dz \quad (4.89)$$

Por tanto

$$\nabla \dot{q} = - \left( k \frac{\partial T}{\partial r} r d\theta dz \hat{i} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr dz \hat{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} r dr d\theta \hat{k} \right) \quad (4.90)$$

Donde

$$q_r = -kr \frac{\partial T}{\partial r} d\theta dz; \quad q_\theta = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr dz; \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} r dr d\theta \quad (4.91)$$

Este sería el vector del flujo de calor según la ley de Fourier en coordenadas Cilíndricas. Ahora, sustituyendo las ecuaciones (4.90) en la ecuación (4.72)

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr \frac{\partial T}{\partial r} d\theta dz \right) dr + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr dz \right) d\theta + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} r dr d\theta \right) dz \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.92)$$

Sacando los términos constantes de las respectivas derivadas parciales

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r dr d\theta dz \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.93)$$

Sustituyendo la ecuación (4.89) en la (4.92)

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r dr d\theta dz \right] + \dot{q}(r dr d\theta dz) \\
& = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} (r dr d\theta dz)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Dividiendo por el término  $r dr d\theta dz$ , que corresponde al diferencial de volumen y eliminando el producto de los signos menos, se obtiene

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.95}$$

Aunque la conductividad térmica no es constante, para el caso ideal y deducción de la ecuación de calor, se asumirá constante, con lo que se obtiene la ecuación (4.96)

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.96}$$

Esta expresión es la **Ecuación General de Calor por conducción en coordenadas cilíndricas**. Así como en las coordenadas rectangulares, veamos otras variaciones para este determinado espacio curvilíneo

1) Régimen Estacionario: (Ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas)	$ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \tag{4.97} $
2) Régimen transitorio sin generación de calor: (Ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas)	$ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.98} $
1) Régimen estacionario y sin generación de calor: (Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas)	$ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{4.99} $

**Tabla 4.2:** Variaciones de la Ecuación general de calor en coordenadas cilíndricas

## Coordenadas Esféricas

Ya analizado el método de transformación de espacio podemos analizar un nuevo conjunto de coordenadas curvilíneas, ahora se realizará en una figura geométrica igual a una esférica, las coordenadas internamente de un vector en cualquier cilindro se definen de la siguiente manera

$$U(u_1, u_2, u_3) = U(r, \varphi, \theta) \quad (4.100)$$

Por lo tanto, se debe definir como se expresan sus coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

$$x = r \sin(\varphi) \cos(\theta); \quad y = r \cos(\varphi) \sin(\theta); \quad z = r \cos(\theta) \quad (4.101)$$

Adicionalmente, se debe de recordar que analizamos este caso para determinar el vector de flujo de calor en coordenadas cilíndricas en ese caso tenemos entonces lo siguiente

$$\nabla q(r, \varphi, \theta) \quad (4.102)$$

Si analizamos el flujo de calor en una sección infinitesimal de un cilindro, en el cual existe flujo de calores entrantes como salientes, se podría deducir una ecuación que nos ayude a definir la transferencia de calor en coordenadas cilíndricas.

En este caso determinamos con un balance de energía cual sería dicha ecuación

$$E_{ent} - E_{sal} + E_g = E_{alm} \quad (4.103)$$

$$[(q_r - q_{r+dr}) + (q_\varphi - q_{\varphi+d\varphi}) + (q_\theta + d\theta)] + \dot{q}dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.104)$$

Aplicando la serie de Taylor tendremos que los  $q_{i+di}$  son iguales a

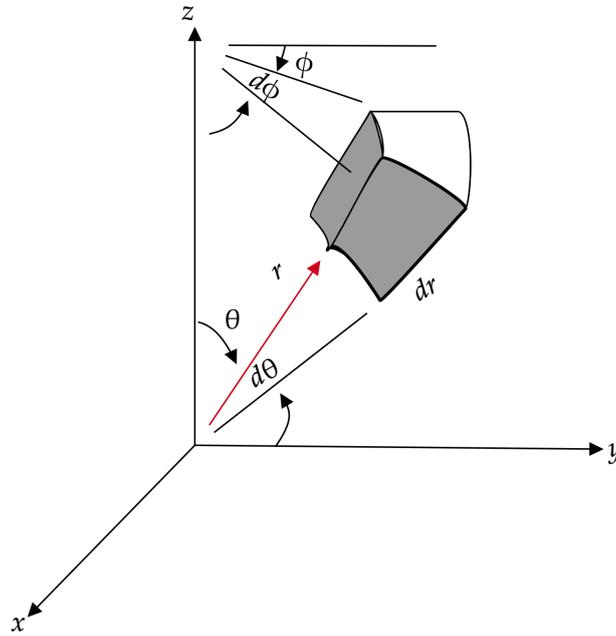
$$q_{i+di} = q_i + \frac{\partial q_i}{\partial i} di \quad (4.105)$$

Por lo tanto

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (4.106)$$

$$q_{\varphi+d\varphi} = q_\varphi + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \quad (4.107)$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad (4.108)$$



**Figura 4.4:** Espacio esférico

Sustituyendo las ecuaciones (4.106) a la (4.108) en (4.104) y agrupando los términos semejantes se obtiene

$$\left[ (q_r - q_r) + (q_\theta - q_\theta) + (q_\phi - q_\phi) - \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} dr + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.109)$$

Cancelando los primeros tres pares de términos correspondientes al flujo de calor, se obtiene la nueva ecuación

$$- \left( \frac{\partial q_r}{\partial r} dr + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.110)$$

Al desarrollar un poco más la igualdad anterior tendríamos lo siguiente

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial r} (q_r) dr + \frac{\partial}{\partial \phi} (q_\phi) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta) d\theta \right] + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (4.111)$$

Ahora bien, debemos determinar en este caso el vector del flujo de calor como función de las coordenadas cilíndricas

$$\nabla \dot{q} = - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} dA_x \hat{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} dA_y \hat{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} dA_z \hat{k} \right) \quad (4.112)$$

Donde los diferenciales de área y de volumen son los siguientes

$$dA_x = dydz \quad (4.113)$$

$$dA_y = dx dz \quad (4.114)$$

$$dA_z = dy dx \quad (4.115)$$

$$dv = dx dy dz \quad (4.116)$$

De igual manera al caso cilíndrico, se necesita determinar el cambio de variables, para esto necesitamos deducir los factores escalares obtenidos anteriormente en ecuaciones (4.57) a la (4.58) respectivamente. Sustituyendo sus equivalentes en coordenadas esféricas dadas en la ecuación (4.101) haciendo las derivadas parciales respectivas y considerando la identidad trigonométrica definida por  $\sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2 = 1$  se obtienen las ecuaciones (4.117) a la (4.119)

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \left( \left( \frac{\partial x_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_r}{\partial r} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \sin(\varphi) \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cos(\varphi) \sin(\theta)) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cos(\theta)) \right)^2 \right) = \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \left( \left( \frac{\partial x_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin(\varphi) \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos(\varphi) \sin(\theta)) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos(\theta)) \right)^2 \right) = (r \cos(\varphi) \cos(\theta))^2 + (-r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + 0 = (r \sin(\theta))^2 \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} a_3^2 &= \left( \left( \frac{\partial x_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin(\varphi) \cos(\theta)) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos(\varphi) \sin(\theta)) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos(\theta)) \right)^2 \right) = (-r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (r \sin(\varphi) \cos(\theta))^2 + (-r \sin(\theta))^2 = r^2 \end{aligned} \quad (4.119)$$

Considerando los respectivos diferenciales se tiene

$$dx = dr \quad (4.120)$$

$$dy = r \sin(\theta) d\varphi \quad (4.121)$$

$$dz = r d\theta \quad (4.122)$$

Sustituyendo en la (4.112) las ecuaciones (4.120) a la (4.122)

$$\nabla \dot{q} = \left( -\frac{\partial T}{\partial r} dA_r \hat{i} - \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} dA_\varphi \hat{j} - k \frac{\partial T}{\partial \theta} dA_\theta \hat{k} \right) \quad (4.123)$$

Donde

$$dA_r = r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\varphi d\theta \quad (4.124)$$

$$dA_\varphi = r dr d\theta \quad (4.125)$$

$$dA_\theta = r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi \quad (4.126)$$

$$dv = r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta \quad (4.127)$$

Por tanto, sustituyendo en (4.123) las ecuaciones (4.124) a la (4.127)

$$\nabla \dot{q} = \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\varphi d\theta \hat{i} - \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} r dr d\theta \hat{j} - k \frac{\partial T}{\partial \theta} r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi \hat{k} \right) \quad (4.128)$$

Donde

$$q_r = -kr^2 \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial r} d\varphi d\theta; \quad q_\varphi = -\frac{k}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} r dr d\theta; \quad q_\theta = -kr^2 \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} dr d\varphi \quad (4.129)$$

Este sería el vector del flujo de calor según la ley de Fourier en coordenadas esféricas. Ahora, sustituyámoslo en la ecuación (4.110)

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr^2 \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial r} d\varphi d\theta \right) dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{k}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} r dr d\theta \right) d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{kr^2 \operatorname{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr d\varphi \right) d\theta \right] \\ & + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \operatorname{sen}(\theta) d\varphi d\theta dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{k}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) r \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta \right] \\ & + \dot{q} dv = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \end{aligned} \quad (4.131)$$

Sustituyendo la ecuación (4.127) en la (4.131)

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \operatorname{sen}(\theta) d\varphi d\theta dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\frac{k}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi d\theta \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -k \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) r \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta \right] + \dot{q} r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta \end{aligned} \quad (4.132)$$

Dividiendo la ecuación (4.132) por el término  $r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi d\theta$ , se obtiene

$$- \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( -kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -k \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.133)$$

De igual manera que en los casos anteriores, se asume una conductividad térmica constante y eliminando el signo menos por el producto de los dos, se tiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.134)$$

Esta expresión es la **Ecuación General de Calor por conducción en coordenadas esféricas**. Así como las coordenadas rectangulares, veamos otras variaciones para este determinado espacio curvilíneo

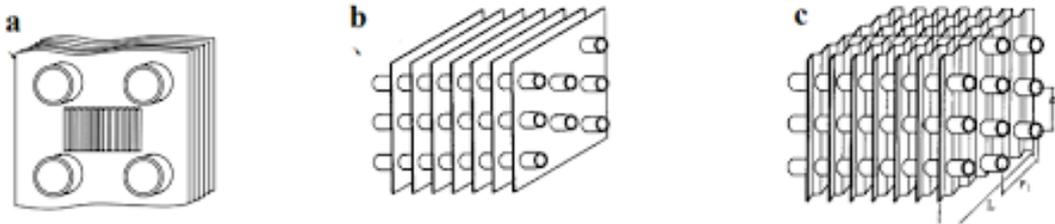
1) Régimen Estacionario: (Ecuación de Poisson en coordenadas esféricas)	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = 0 \quad (4.135)$
2) Régimen transitorio sin generación de calor: (Ecuación de difusión en coordenadas esféricas)	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.136)$
3) Régimen estacionario y sin generación de calor: (Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas)	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.137)$

**Tabla 4.3:** Variaciones de la Ecuación general de calor en coordenadas esféricas

## 4.2. Transferencia de calor en superficies con aletas

Al hablar de superficie extendida o aleta, se hace referencia a un sólido que experimenta transferencia de energía por conducción dentro de sus límites, así como transferencia de energía por convección entre sus límites y sus alrededores, en ciertos casos se tomaría en cuenta la radiación (ver Figura 2.5). La aplicación más frecuente es aquella en la que se usa una superficie extendida o aleta de manera específica para aumentar la rapidez de transferencia de calor entre un sólido y un fluido contiguo. Las aletas se usan cuando el coeficiente de transferencia de calor por convección  $h$  es pequeño.

**Figura 4.5:** Algunas figuras geométricas de transferencia de calor en aletas. (a) Aleta “louvered” (b) Aleta Plana (c) Aleta Ondulada.



**Fuente:** Holman (1999).

La razón de transferencia de calor desde una superficie está a una temperatura  $T_s$  hacia el medio circundante que está a  $T_\infty$  se expresa por la ley del enfriamiento como la ecuación expuesta anteriormente (Cengel, 2004)

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s (T_s - T_\infty); \quad (4.138)$$

Existen dos maneras de aumentar la razón de transferencia de calor: aumentar el coeficiente de transferencia de calor por convección,  $h$ , o aumentar el área superficial  $A_s$ . El aumento de  $h$  puede requerir la instalación de una bomba o ventilador, o reemplazar el existente con una más grande, pero esto puede resultar muy poco práctico.

La mejor alternativa es aumentar el área superficial al agregar superficies extendidas llamadas aletas (Figura 2.5). Las superficies con aletas se fabrican al extruir, soldar o envolver una delgada lámina metálica sobre una superficie. Las aletas mejoran la transferencia de calor desde una superficie al exponer un área más grande a la convección y la radiación.

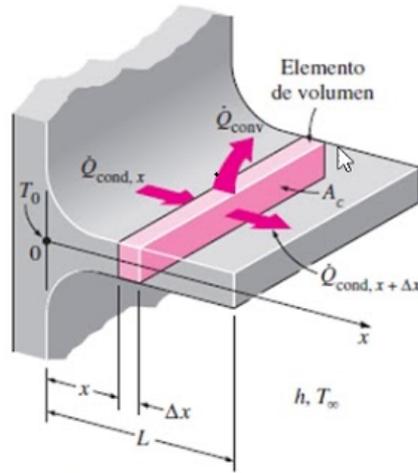
Se define la nomenclatura de la siguiente forma:

- $L$  : Longitud de Aleta.
- $Q$  : Transferencia de Calor o Calor.
- $A_c$  : Área Constante.
- $p$  : Perímetro.
- $T_s$  : Temperatura de la Aleta.
- $T_\infty$  : Temperatura Ambiente.
- $h$  : Coeficiente de Transferencia de Calor.
- $K$  : Resistencia Térmica del Material.

### 4.2.1. Ecuación de la aleta

Si se considera un elemento de volumen en una aleta, en la ubicación  $x$ , que tiene longitud  $\Delta x$ , un área de sección transversal constante ( $A_c$ ) y un perímetro de  $p$  como se muestra en la Figura 4.7.

**Figura 4.6:** Algunas figuras geométricas de transferencia de calor en aletas. (a) Aleta “louvered” (b) Aleta Plana (c) Aleta Ondulada.



**Fuente:** Holman (1999).

En condiciones estacionarias, el balance de energía sobre este elemento de volumen se puede expresar como:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{conducción de calor} \\ \text{hacia el elemento en } x \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{conducción de calor} \\ \text{desde el elemento en } x + \Delta x \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Razón de la} \\ \text{convección del calor} \\ \text{desde el elemento} \end{array} \right)$$

o sea

$$\dot{Q}_{\text{cond}, x} = (\dot{Q}_{\text{cond}, x+\Delta x}) + \dot{Q}_{\text{conv}} \quad (4.139)$$

Donde:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = h(p \Delta x)(T_s - T_\infty) \quad (4.140)$$

al sustituir y dividir entre  $\Delta x$  se tiene:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{cond}, x+\Delta x} - \dot{Q}_{\text{cond}, x}}{\Delta x} + hp (T_s - T_\infty) = 0 \quad (4.141)$$

Al tomar el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{d\dot{Q}_{\text{cond}}}{dx} + hp (T_s - T_\infty) = 0 \quad (4.142)$$

Con base en la ley de Fourier de la conducción del calor se tiene;

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = kA_c \frac{dT}{dx}$$

donde  $A_c$  es el área de la sección transversal de la aleta en la ubicación  $x$ . La sustitución de esta relación en la ecuación (4.142) se obtiene la ecuación diferencial que rige la transferencia de calor en las

aletas.

$$\frac{d}{dx} \left( k A_c \frac{dT}{dx} \right) - hp (T - T_\infty) = 0 \quad (4.143)$$

En general el área de sección transversal  $A_c$  y el perímetro  $p$  de una aleta varían con  $x$ , lo cual hace que esta ecuación diferencial sea difícil de resolver. En el caso especial de una sección transversal constante y conductividad térmica constante, la ecuación diferencial (4.143) se reduce a:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp}{k A_c} (T - T_\infty) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2 T}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad (4.144)$$

Donde:

$$m^2 = \frac{hp}{k A_c} \quad (4.145)$$

$$\theta = T - T_\infty \quad (4.146)$$

A partir de la ecuación anterior con las respectivas condiciones de borde se obtienen los siguientes casos que sirven para obtener la transferencia de calor de una aleta, así como su distribución de temperaturas:

### 4.2.2. Parámetros para el análisis de las aletas:

Diferencia de temperaturas:

$$(\theta) : \theta_x = T_x - T_\infty \quad (4.147)$$

Máxima diferencia de temperaturas ó el exceso de la temperatura En el caso de una aleta, se tiene una base por lo que la ecuacion 2.21 se transforma en

$$(\theta_b) : \theta_s = T_s - T_\infty \quad (4.148)$$

donde  $T_s$  es la temperatura de la base.

Factor geométrico:

$$(m) : m = \sqrt{\frac{hp}{k A_c}} \quad (4.149)$$

#### Casa A: Aleta con convección en el extremo.

Todas las aletas están expuestas a convección desde el extremo, excepto cuando el mismo se encuentre aislado o su temperatura sea igual a la del fluido. Para este caso se tiene:

Transferencia de calor de la aleta:

$$\dot{Q}_f = \sqrt{hPKA_c\theta_b} \frac{\sin h(mL) + \left(\frac{h}{mK}\right) \cos h(mL)}{\cos h(mL) + \left(\frac{h}{mK}\right) \sin h(mL)} \quad (4.150)$$

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x)) + \left(\frac{h}{mK}\right) \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{mK}\right) \sinh(mL)} \quad (4.151)$$

### Caso B: Aleta con extremo adiabático.

Se considera aleta de este tipo cuando el área del extremo no intercambia calor con el fluido adyacente.

Transferencia de calor de la aleta  $\dot{Q}_f$  :

$$\dot{Q}_f = \sqrt{hPKA_c}\theta_b \tanh(mL) \quad (4.152)$$

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)} \quad (4.153)$$

### Caso C: Aleta de extremo con temperatura establecida.

Cuando se conoce la temperatura en el extremo de la aleta:

Transferencia de calor de la aleta ( $\dot{Q}_f$ ):

$$\dot{Q}_f = \sqrt{hPKA_c}\theta_b \frac{\cosh(mL) - \left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right)}{\sinh(mL)} \quad (4.154)$$

Distribución de Temperaturas:

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right) \sinh(mx) + \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \quad (4.155)$$

donde

$$\theta_L = T_L - T_\infty \quad (4.156)$$

**Caso D: Aleta con longitud infinita.**

Transferencia de calor de la aleta ( $\dot{Q}_f$ ):

$$\dot{Q}_f = \sqrt{hPKA_c}\theta_b \quad (4.157)$$

**Distribución de temperaturas:**

$$\frac{\theta_x}{\theta_b} = e^{-mx} \quad (4.158)$$

**Corrección de caso A a caso B**

Sólo debe corregirse la longitud  $L$  de una aleta con convección en el extremo, por  $\dot{L}_C$  y analizarla como una aleta con extremo adiabático más larga como se muestra en la siguiente figura.

**Aleta de Perfil rectangular:**

$$\dot{L}_C = L + \frac{w}{2} \quad (4.159)$$

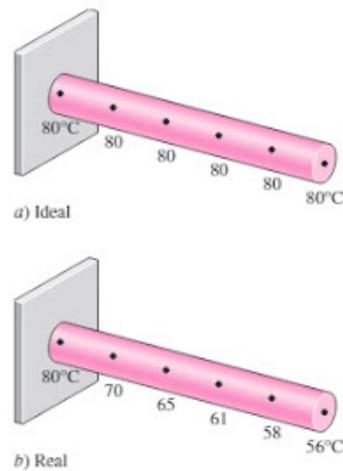
**Aleta Cilíndrica:**

$$\dot{L}_C = L + \frac{D}{4} \quad (4.160)$$

**DESEMPEÑO DE LA ALETA**

Se sabe que las aletas se utilizan para aumentar la transferencia de calor de una fuente porque acrecientan el área efectiva de superficie, pero la aleta como tal representa una resistencia a la conducción del calor, por eso no hay seguridad de que la aleta aumente la transferencia de calor por ello se define la efectividad y eficiencia de una aleta como:

**Figura 4.7:** Algunas figuras geométricas de transferencia de calor en aletas. (a) Aleta “louvered” (b) Aleta Plana (c) Aleta Ondulada.



**FIGURA 3-42**  
Distribución ideal y real de temperatura en una aleta.

**Fuente:** Cengel y Ghajar (2001).

### Eficiencia de una aleta $\dot{\epsilon}_{aleta}$ .

La eficiencia de una aleta es la relación que existe entre el calor que se transfiere de una aleta con condiciones determinadas, (dependiendo del caso de estudiado)  $(\dot{Q}_f)$  y la transferencia de calor máxima  $(\dot{Q}_{max})$  que existiría si esa aleta estuviera a la máxima temperatura (Temperatura de la base)

-En el caso límite de resistencia térmica cero o conductividad térmica infinita ( $k \rightarrow \infty$ ) la temperatura de la aleta es uniforme al valor de la temperatura de la base ( $T_b$ ). En este caso, la transferencia de calor desde la aleta será máxima y se puede expresar como:

$$\dot{Q}_{aleta,max} = hA_{aleta}(T_b - T_{\infty}) \quad (4.161)$$

Sin embargo, en realidad la temperatura de la aleta cae a lo largo de ella y, por lo tanto, la transferencia de calor desde la misma será menor debido a la diferencia decreciente en la temperatura,  $T_{(x)} - T_{\infty}$  hacia la punta, como se muestra en la siguiente figura

Para considerar el efecto de esta disminución en la temperatura sobre la transferencia de calor, la ecuación matemática de eficiencia de la aleta  $(\eta_{aleta})$  se define como:

$$\eta_{aleta} = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{aleta,max}} \quad (4.162)$$

O bien,

$$\dot{Q}_f = \eta_{aleta} \dot{Q}_{aleta,max} \quad (4.163)$$

El cual es equivalente,

$$\dot{Q}_f = \eta_{aleta} h A_{aleta} (T_b - T_\infty) \quad (4.164)$$

Donde  $\dot{Q}_f$  es la transferencia de calor en la aleta

Las aletas con perfiles triangular y parabólico contienen menos material y son más eficientes que aquellas con perfiles rectangulares y, por lo tanto, más adecuadas para las aplicaciones que requieren un peso mínimo, como las espaciales.

Una consideración importante en el diseño de las superficies con aletas es la selección de la longitud  $L$  de la aleta que sea más apropiada. Por lo común, entre más larga es la aleta, mayor es el área de transferencia de calor y, como consecuencia, más alta es la razón de la transferencia desde ella. Pero también entre más grande es la aleta, más grande es la masa, el precio y la fricción del fluido.

La eficiencia de la aleta decrece al aumentar su longitud debido a la disminución de la temperatura con la longitud. Las longitudes de aletas que causan la caída de eficiencia por debajo de 60 % suelen no poder justificarse económicamente y deben evitarse. La eficiencia de la mayor parte de las aletas usadas en la práctica está por encima de 90 %.

### Efectividad de un aleta $\dot{\epsilon}_{aleta}$

Las aletas se usan para mejorar la transferencia de calor y no se puede recomendar su uso a menos que el mejoramiento de la transferencia justifique el costo adicional y la complejidad asociada con ellas. El desempeño de una aleta, expresado en términos de efectividad de aleta se define como:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{aleta} &= \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{sin\ aleta}} \\ &= \frac{\dot{Q}_f}{h A_b (T_b - T_\infty)} \frac{\text{Razón de la transferencia de calor desde la aleta de área de la base}}{\text{Razón de transferencia de calor desde la superficie del área}} \end{aligned}$$

Donde  $A_b$  es el área de la sección transversal de la aleta en la base y  $\dot{Q}_f$  representa la razón de la transferencia de calor desde esta área, si no se tienen aletas sujetas a la superficie.

Note que tanto la eficiencia de la aleta como su efectividad están relacionadas con el desempeño de la misma, pero son cantidades diferentes. Sin embargo, están relacionadas entre sí por:

$$\varepsilon_{\text{aleta}} = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{\text{sin aleta}}} = \frac{\dot{Q}_f}{hA_b(T_b - T_\infty)} = \frac{\eta_{\text{aleta}} hA_{\text{aleta}}(T_b - T_\infty)}{hA_b(T_b - T_\infty)}$$

$$\eta_{\text{aleta}} = \frac{A_{\text{aleta}}}{A_b} \eta_{\text{aleta}}$$

La razón de la transferencia de calor desde una aleta suficientemente larga de sección transversal uniforme, en condiciones estacionarias, se expresa por la ecuación

$$\eta_{\text{aleta larga}} = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{\text{sin aleta}}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}(T_b - T_\infty)}{hA_b(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \quad (4.165)$$

En este caso, se considera que  $A_c = A_b$

Las consideraciones para efectividad de aletas son las siguientes:

- Si  $\eta_{\text{aleta}}$  es igual a 1 indica que la adición de aletas a la superficie no afecta la transferencia de calor en lo absoluto. Es decir, el calor conducido hacia la aleta a través del área de la base es igual al calor transferido desde la misma área hacia el medio circundante.
- Si  $\eta_{\text{aleta}}$  es menor a 1 indica que, la aleta actúa como aislamiento, retardando la transferencia de calor desde la superficie. Se puede tener esta situación cuando se usan aletas hechas de materiales con baja conductividad térmica.
- Si  $\eta_{\text{aleta}}$  es mayor a 1 indica que las aletas están mejorando la transferencia de calor desde la superficie. Sin embargo, no se puede justificar el uso de aletas a menos que  $\eta_{\text{aleta}}$  sea suficientemente mayor que 1.

De lo anterior se concluye en base a la relación en el desempeño de aletas para que sean consideradas en el diseño y selección de las aletas, lo siguiente:

- La conductividad térmica  $k$  del material de la aleta debe ser tan alta como sea posible. Por ello, no es coincidencia que las aletas estén hechas de metales, siendo los más comunes el cobre, el aluminio y el hierro. Quizá las aletas que se usan con mayor amplitud están hechas de aluminio debido a su costo y peso bajos y a su resistencia a la corrosión.
- La razón entre el perímetro y el área de la sección transversal de la aleta,  $p/A_c$  debe ser tan alta como sea posible. Este criterio lo satisfacen las aletas de placa delgada.
- El uso de aletas es más efectivo en aplicaciones que comprenden un bajo coeficiente de transferencia de calor por convección. Por lo tanto, el uso de las aletas se justifica con más facilidad cuando el medio es un gas en lugar de un líquido y la transferencia de calor es por convección natural en lugar de por convección forzada. Por lo tanto, no es coincidencia que en los intercambiadores de calor de líquido a gas, las aletas se coloquen en el lado del gas.

### LONGITUD APROPIADA DE UNA ALETA

Un paso importante en el diseño de una aleta es la determinación de su longitud apropiada, una vez que se especifican el material y la sección transversal de la misma.

Por consiguiente, diseñar una aleta “extra larga” de ese tipo está fuera de contexto ya que representa un desperdicio de material, peso excesivo y mayor tamaño y, por lo tanto, un costo mayor sin obtener beneficio a cambio (de hecho, una aleta así de larga tendrá un comportamiento dañino, ya que suprimirá el movimiento del fluido y, por consiguiente, reducirá el coeficiente de transferencia de calor por convección). Las aletas tan largas, en las que la temperatura tiende a ser la del medio no son recomendables, dado que el poco incremento en la transferencia de calor en la región de la punta no puede justificar el desproporcionado aumento en el peso y el costo.

Con el fin de obtener cierto sentido de la longitud apropiada de una aleta, se compara la transferencia de calor de una de longitud finita con la transferencia de calor de una infinitamente larga, en las mismas condiciones. La razón entre estas dos transferencias de calor es:

$$\text{Razón de transferencia de calor} = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{\text{aleta larga}}} \quad (4.166)$$

$$= \frac{\sqrt{hpkA_c} (T_b - T_\infty) \tanh mL}{\sqrt{kpA_c} (T_b - T_\infty)} \quad (4.167)$$

$$= \tanh mL \quad (4.168)$$

En la tabla 02 se pueden observar los valores de  $\tanh mL$  para algunas magnitudes de  $mL$ . En ella se observa que la transferencia de calor desde una aleta aumenta con  $mL$  linealmente al principio, pero la curva forma una meseta más adelante y alcanza un valor para la aleta infinitamente larga en alrededor de  $mL = 5$ .

Por lo tanto, se puede considerar que una aleta es infinitamente larga cuando su longitud es  $L = \frac{5}{m}$ . También se observa que reducir la longitud de la aleta a la mitad causa una caída de sólo 1% en la transferencia de calor.

En la práctica, una longitud de aleta que corresponde a alrededor de  $mL = 1$  transferirá 76,2% del calor que puede transferir una aleta infinitamente larga y, por lo tanto, debe ofrecer un buen término medio entre el rendimiento respecto a la transferencia de calor y el tamaño de la aleta.

Cuando sobre una superficie se agregan dos o más aletas estamos en presencia de un arreglo, para este tipo de caso puede definirse una eficiencia global que involucra la disipación de calor desde las aletas y desde la superficie, en este tipo de sistema es necesario definir una eficiencia global.

**eficiencia global** ( $\eta_0$ )

La eficiencia global se determina mediante la siguiente ecuación

$$\eta_0 = \frac{\dot{Q}_{\text{total}}}{\dot{Q}_{\text{máximo}}} \quad (4.169)$$

Donde:

- $\dot{Q}_{\text{total}}$  : es Transferencia de calor total desde las aletas y la base (espacios libres de aletas)
- $\dot{Q}_{\text{máximo}}$  : es máxima transferencia de calor suponiendo temperatura uniforme en todo el sistema.

$$\dot{Q}_{\text{máximo}} = hA_t\theta_b \quad (4.170)$$

- $A_t$  : es el Área total del arreglo que se expone a la convección (espacios libres de aletas y área superficial de todas las aletas)
- $\theta_b$  : es la Máxima Diferencia de Temperaturas ( $\theta_b = T_b - T_\infty$ )

La transferencia de calor total ( $\dot{Q}_{\text{total}}$ ) es lo que realmente ocurre cuando las aletas y la parte de base que no posee aletas se exponen a convección, pudiéndose determinar esta transferencia de calor como sigue:

$$\dot{Q}_{\text{total}} = N\dot{Q}_f + \dot{Q}_b \quad ; \quad \dot{Q}_b = hA_b\theta_b \quad (4.171)$$

Donde

$N$  es la cantidad de aletas en el arreglo;

$\dot{Q}_b$  es Calor disipado desde los espacios libres de aletas

---

## CONCLUSIONES

En el balance de Energía que existe en un cuerpo multidimensional, es afectado por un flujo de calor incidiendo en todas sus dimensiones; así mismo, se le aplica una generación calor y ocurre un almacenamiento de energía, se logra determinar que la ecuación de calor por conducción es una ecuación diferencial parcial; cuya solución será una función matemática de sus coordenadas en el espacio vectorial que sea estudiado. Adicionalmente esta solución determina la distribución de Temperatura en cualquier punto del espacio vectorial en el estudio. En este caso, se deben plantear las condiciones de frontera o las condiciones físicas para poder determinar la solución más adecuada para dicha ecuación.

Se puede realizar un cambio de espacio vectorial, con el simple hecho de realizar un cambio de base entre 2 espacios ortonormales u ortogonales, en este caso, trasladar un Espacio Euclidiano rectangular con base canónica a otro espacio vectorial no Euclidiano con base curvilínea. Esto se logra hacer simplemente observando la variación existente en desplazamiento de posición de un vector, esto se define como una diferencial total a las coordenadas curvilíneas que definen a las coordenadas rectangulares en el espacio rectangular. Por tanto, se puede concluir que la transformación de un espacio a otro es una linealización del mismo con un factor de escala determinado, es decir que los términos son los factores escalares  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , los cuales se multiplican a los vectores de la base canónica, lo que conlleva que la base nueva es una base linealmente independiente.

La transferencia de calor para un espacio coordenado curvilíneo puede también encontrarse una expresión matemática que modele dicho mecanismo de intercambio de calor, haciendo las respectivas transformaciones de las coordenadas del espacio, se puede determinar cualquier ecuación general de calor para un sinnúmero de espacios curvilíneos, en nuestro caso los determinados en coordenadas Cilíndricas y esféricas.

---

## REFERENCIAS

- Almachi, J., y Pilliza, J. (2013). *Diseño y construcción de un equipo para el estudio de transferencia de calor en superficies extendidas en estado estable destinado al laboratorio de Transferencia de Calor de la Escuela Politécnica Nacional* (Título de Ingeniero Mecánico). Facultad de Ingeniería Mecánica. Escuela Politécnica Nacional.
- Cengel, Y. A. (2004). *Transferencia de calor y masa*. McGraw-Hill. (Tercera ed.)
- Cengel, Y. A., y Ghajar, A. J. (2001). *Transferencia de calor y masa*. México : McGraw-Hill. (Cuarta ed.)
- Grossman, S., y cols. (2011). *Matemáticas 4: Álgebra lineal*. McGraw-Hill.
- Holman, J. P. (1999). *Transferencia de calor*. México : Continental S.A. (Primera ed.)
- Incropera, F., y DeWit, D. (2000). *Fundamentos de transferencia de calor*. México: Pearson Educación. (Cuarta ed.)
- Kern, D. Q. (1999). *Procesos de transferencia de calor*. México : Continental S.A. (Primera ed.)
- Kraus, A. D., Aziz, A., y Welty, J. (2001). *Extended surface heat transfer*. Canada: John Wiley. (Primera ed.)
- Lazo, S., y Salguero, M. (2017). *Construcción de un Banco de Pruebas en Superficies extendidas para fines didácticos* (Título de Ingeniero Mecánico). Facultad de Ingeniería y Arquitectura.
- Oca, D. (2020). *Propuesta de un perfil óptimo de Aletas para intensificación de la transferencia de calor en aerocondensadores* (Título de Ingeniero Mecánico). Facultad de Ciencias Técnicas.
- Ozisik, M. N. (1993). Heat conduction.
- Peinado, P. (2015). *Optimización mediante modelos en red de aletas rectas recubiertas en función de la longitud bajo condiciones de convección* (Título de Ingeniero Mecánico). Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial.
- Torres, G. (2014). *Determinación del modelo matemático de transferencia de calor predictivo para el comportamiento térmico de un sistema de esterilización solar para material quirúrgico e instrumental odontológico* (Maestría en maestría en energías renovables y medio ambiente). Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial.
- Tou, S. (2011). *Visualization of fields and applications in engineering*. John Wiley & Sons.