Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León

Facultad de Ciencias y Tecnología

Carrera de Matemática

“Algoritmo de emparejamientos aplicados al problema de los matrimonios estables y otras variantes”.

Autores:

Br. Ketty Mireya Gálvez Osejo

Br. Noemí Selena García Angulo

Tutor:

Msc. Martin R. José Alonso Calderón

Asesor:

Dr. Ramiro Cáceres Espinoza.

León, Junio 2022

“A la Libertad por la Universidad”

Agradecimiento

Primeramente, agradecemos a nuestro padre celestial por habernos dado la fortaleza y constancia para poder terminar nuestros estudios.

A nuestros padres que sin duda alguna nos han apoyado en este transcurso de nuestras vidas.

A cada uno de nuestros maestros y muy especial a nuestro tutor que nos han compartido sus conocimientos y han sido pieza fundamental para nuestro desarrollo académico.

Indispensablemente agradecemos el apoyo que nos han brindado nuestros amigos, que han sido de bendición en nuestras vidas.

Dedicatoria

A Dios quien ha sido nuestra guía, fortaleza y su mano de fidelidad y amor han estado nosotras hasta el día de hoy.

A papá y mamá quienes con su amor, paciencia y esfuerzo nos han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer las adversidades porque Dios está siempre.

Finalmente queremos dedicar esta tesis a todas nuestras amistades, por brindarnos su apoyo cuando más las necesitamos, por extendernos su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día, de verdad mil gracias amigos, siempre los llevaremos en el corazón.

Resumen

El algoritmo de Gale-Shapley a pesar de ser un estudio muy reciente si lo comparamos con otras estudios sobre todo teniendo en cuenta en el área de estudio que es una rama joven de las matemáticas, lo cual no produce ningún inconveniente porque hemos podido constatar, a través de esta investigación, que tiene múltiples aplicaciones en la vida cotidiana, siendo un estudio que se aplica no solo en la Teoría de Grafos sino que se aplica en otros campos como la economía específicamente en la teoría de juegos.

En este documento se puede visualizar la aplicación de dicho algoritmo en dos aplicaciones, independientemente sea el algoritmo o alguna variación del original, su forma de aplicar es específicamente casi igual y que la idea de aplicarse este algoritmo es obtener asignaciones estables, y que ambos conjuntos estén conformes con su asignación o emparejamiento.

ÍNDICE

Introducción

La teoría de grafos es una de las ramas más importante de las matemáticas modernas, comenzó en el siglo XVIII por una de las mentes más grande que ha existido. Se considera que tiene su inicio en 1736 cuando el matemático Suizo Leonhard Euler publicó Solutio problematis and geometrian situs pertinentis, en españo, La solución de un problema referente a la geometría de posición. En este artículo aparece la solución al famoso Problema de los puentes de Königsberg.

Durante el siglo XIX la teoría de grafos fue redescubierta a través del estudio de diversos problemas obteniendo así nuevos y más resultados importantes. Por ejemplo, Arthur Cayley en 1857, mientras estudiaba la cantidad posible que podía haber de ciertas estructuras químicas, descubrió una importante familia de grafos, a las que llamó árboles. Aunque poco a poco iba aumentando el interés en esta área, fue hasta 1936 cuando el húngaro Dénes Konig publicó el primer libro sobre este tema. Así que podemos decir que la teoría de grafos es un área muy joven dentro del mundo de las matemáticas, sobre todo si la comparamos con la antigüedad de otras áreas como la Geometría o el Álgebra.

La teoría de juegos es un novedoso diseño, proveniente de las matemáticas y extendido luego a la economía y el Derecho, que pretende analizar y explicar el comportamiento de los individuos y sus interrelaciones. De esta manera, la teoría de juegos sirve como un sistema de pruebas para explicar y entender un determinado modelo en el cual interactúan personas frente a una determinada situación ante la cual se agrupan y establecen relaciones de poder. En términos generales se podría decir que la teoría de juegos estudia los dilemas que se le presentan al hombre en la vida cotidiana.

Shapley hizo uso de la teoría de juegos corporativos para buscar distintas formas de emparejamientos estables. La estabilidad es la clave para el desarrollo de un área de las matemáticas económicas que intentan determinar como un conjunto de individuos debe cooperar para conseguir el mejor acuerdo.

Gale y Shapley diseñaron un algoritmo de emparejamiento, que es con el cual se desarrollan distintas aplicaciones presentes en este documento, donde la función de dicho algoritmo consiste en el mecanismo de aceptación diferida, que siempre da lugar a una asignación estable.

En esta tesis, abordaremos algunas aplicaciones de emparejamientos estables, que los podemos encontrar en muchas situaciones, como puede ser el mercado de trabajo, entre trabajadores y empresas; en la asignación de estudiantes a colegios o universidades o entre donantes y receptores de órganos para trasplantes; entre otras.

Haciendo énfasis en dos aplicaciones como es el problema del matrimonio estable y la asignación de estudiantes a colegios o universidades, en la primera se hace

uso del algoritmo de Gale-Shapley y el algoritmo Gale-Shapley extendido, y en la segunda aplicación se toma una de las variaciones del algoritmo original.

Unas de las aplicaciones se haciendo uso del lenguaje de programación C++ en donde los datos se tienen en un documento de texto el cual debe de ir reflejado en el código para que el programa pueda ejecutarse sin ningún error y así obtener resultados con base al algoritmo.

La primera aplicación se hace realizó de forma teórica donde se aplica el algoritmo original de Gale-Shapley orientado al matrimonio y se obtienen emparejamientos estables, para ambas orientaciones, en el caso en que sea el hombre el que elige o si lo prefiere hacer la mujer, sabiendo que los resultados independientemente de la orientación que se tenga, siguen siendo estables; solo que si se hace orientado a los hombre los resultados son más convenientes o favorables para ellos, de igual manera funciona en el caso de las mujeres , es decir sucede el proceso inverso pero esto no afecta a que el algoritmo de emparejamientos estables.

En la segunda aplicación se implementa una variación del algoritmo original y se aplica para asignar estudiantes a universidades, teniendo en cuenta notas, opciones de carreras y cupos disponibles para poder ingresar a alguna de las facultades teniendo presente sus opciones de preferencias de carreras. Todos y cada uno de estos requisitos van implementado en el código del programa, al igual que en la aplicación anterior los datos están en un documento de texto y se prueba de que en dado caso de que el estudiante tome una misma carrera en opciones diferentes no afecta a que se generen resultados de asignaciones estables que de manera generalizada en el documento nos referimos a los emparejamientos estables.

En este estudio hemos podido constatar que el algoritmo de Gale-Shapley realmente genera emparejamientos estables sin importar la variación de donde se aplique dicho algoritmo.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Aplicar el algoritmo de Gale-Shapley en el problema de matrimonios estables y otras variantes.

Objetivos Específicos

- Encontrar emparejamientos estables a través de la aplicación del Algoritmo Gale-Shapley.

- Diseñar en C++ un algoritmo de emparejamiento para asignar estudiantes a las diferentes carreras ofertadas por una universidad.

- Ejecutar en C++ el Algoritmo de Gale-Shapley para asignar estudiantes a las diferentes carreras ofertadas por una Universidad.

Marco teórico

Emparejamiento uno a uno

El emparejamiento uno a uno es el emparejamiento más básico, en este se hace corresponder un par de elementos de dos conjuntos disjuntos entre sí. La aplicación más común del emparejamiento uno a uno es el Problema del Matrimonio Estable, que fue introducido por Gale y Shapley en el año 1986. (Roth, (February 19, 2003))

Aquí encontraremos dos situaciones distintas, una en la suponemos que cualquier hombre y mujer que consientan relacionarse pueden proceder a hacerlo, y la otra cualquier hombre o mujer es libre de negar su consentimiento y permanecer soltero.

En un problema de matrimonio estable en el que ambos consientan relacionarse, vamos a suponer que tenemos dos conjuntos finitos disjuntos entre sí y de igual cardinalidad, de jugadores, convenientemente llamados el conjunto de hombres (H = $\{h_1, h_2, h_{3, \ldots,} h_n\}$) y el conjunto de mujeres (M = $\{m_1, m_2, m_{3,\ldots,} m_n\}$). (Diaz, 2017)

Cada persona tiene una lista de preferencias estrictamente ordenada (comenzando con la persona de sexo opuesto sobre la que muestra más interés) en la que incluye a todos los integrantes del conjunto opuesto.

Es interesante destacar que las listas de preferencias de mujeres y hombres, se pueden denotar por matrices n * n, por lo tanto, existen dos matrices de preferencias (una para las mujeres y otra para los hombres).

Según Knuth (1976) bajo estas condiciones y una vez establecidos los conjuntos y las listas de preferencias, se puede obtener emparejamientos o matrimonios estables basados en las siguientes definiciones:

Definición 1:

Un emparejamiento es una bisección de H en M, es decir, un conjunto de n matrimonios monógamos entre hombres y mujeres.

Definición 2:

Un emparejamiento E es inestable si existe una pareja bloqueante, es decir, si un hombre y una mujer que no están casado se prefieren que, a sus cónyuges, esta peligrosa conexión ocurre cuando:

- h_1 está casado con m_2;
- m_1 está casado con h_2;
- h_1 prefiere m_1 a m_2;
- m_1 prefiere h_1 a h_2.

Un emparejamiento es estable si esta situación no ocurre.

En la siguiente definición Bakker (2016), explica la estabilidad de un emparejamiento.

Definición 3:

Un emparejamiento E es estable si:

a) Todas las parejas en el emparejamiento E se prefieren mutuamente.

b) En una pareja (m_1,h_1) ocurre que $m_1(h_1)$ no es preferido por nadie mejor que h_1 (m_1).

c) o si $m_1(h_1)$ prefiere a alguien más, por ejemplo, h_2 (m_2) que su pareja actual, entonces h_2 (m_2) debería preferir su pareja actual que relacionarse con $m_1(h_1)$.

A continuación, se plantea un ejemplo del problema de matrimonios estables, con una instancia de tamaño n = 4 y los conjuntos $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ (hombres) y $\mathrm{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ (mujeres). Donde cada miembro tiene una lista de preferencias con respecto al conjunto opuesto, presentadas en las siguientes tablas:

Tabla 1

Lista de preferencias de Mujeres

	1	2	3	4
m_1	h_1	h_3	h_4	h_2
m_2	h_1	h_2	h_3	h_4
m_3	h_2	h_3	h_1	h_4
m_4	h_4	h_1	h_3	h_2

Tabla 2

Lista de preferencias de Hombres

	1	2	3	4
h_1	m_1	m_2	m_3	m_4
h_2	m_3	m_2	m_4	m_1
h_3	m_3	m_2	m_4	m_1
h_4	m_2	m_3	m_4	m_1

En esta instancia, el emparejamiento $E(1)$ = {(h_1,m_1), (h_2,m_3), (h_3,m_2), (h_4,m_4)} es estable.

Para verificar la estabilidad se debe comprobar que todos los posibles pares no bloquean el emparejamiento, aunque más eficientemente basta con comprobar sólo los posibles pares bloqueantes; que en este caso son: (h_3,m_3), (h_4,m_2) y (h_4,m_3).

Observando las listas de preferencias de m_3 y m_2 puede apreciarse que ambas prefieren a sus parejas asignadas antes que a las parejas de los pares bloqueantes. Se ve fácilmente que la mujer m_3 prefiere al hombre que le fue asignado en el emparejamiento, antes que al hombre h_3 y h_4, y que la mujer m_3 prefiera a su pareja actual antes que al hombre h_4. Por lo que no hay pares bloqueantes para el $E(1)$.

En cambio, el emparejamiento $E(2)$= $\{(h_1,\ m_2),\ (h_2,\ m_3),\ (h_3,\ m_1),\ (h_4,\ m_4)\}$ no es estable ya que el par o la pareja $(h_1,\ m_2)$ bloquea el emparejamiento, pues el hombre h_1 prefiere estar con la mujer m_1 antes que con su pareja actual m_2, y la mujer m_1 prefiere estar con el hombre h_1 antes que con su pareja actual h_3.

Una forma de obtener al menos un emparejamiento estable es por medio del Algoritmo creado por David Gale y Lloyd Shapley en 1962, tambien rediseñado por Alvin Roth en 1999, el cual presentamos a continuación;

El Algoritmo Gale-Shapley

En el algoritmo, Gale y Shapley probaron que, para cualquier instancia del problema de matrimonios estables con listas de preferencias completas y estrictas, existe por lo menos un emparejamiento que cumple con la propiedad de estabilidad.

Estos autores probaron este resultado a través de un algoritmo que siempre encuentra un emparejamiento para cualquier instancia dada. Por otro lado, demuestran que el algoritmo siempre le otorga a cada hombre (mujer, si los roles se invierten) la mejor pareja según su lista de preferencias, con respecto a las asignaciones que le hubieran tocado en cualquier otro emparejamiento estable.

Hay que tener en cuenta que el algoritmo puede adoptar dos versiones. Una versión orientada a hombres en la que son los hombres quienes comienzan las proposiciones y la contraria, una versión orientada a mujeres que, por lo general obtiene distintos resultados. En este caso, se va a trabajar con la versión orientada a hombres.

El Algoritmo Gale-Shapley se puede describir como una secuencia de propuestas de los hombres hacia las mujeres (también de manera inversa) siguiendo los siguientes pasos:

Paso 0:

Hay un conjunto de mujeres y un conjunto de hombres, ambos de la misma cardinalidad. Cada uno de ellos solteros y con sus respectivas listas de preferencias de acuerdo a sus intereses al sexo opuesto.

Paso 1:

I. Los hombres proponen un compromiso a su mujer preferida.
II. Cada mujer que haya recibido al menos una propuesta, rechaza a todos los que la pretendieron salvo al más preferido por ella. Si sólo hay un hombre en su puerta, ella se compromete con él, si no hay nadie en su puerta, ella se queda soltera.

Paso 2:

I. Los hombres que han sido rechazados en una etapa previa le proponen un compromiso a la próxima mujer en su lista de preferencias (mujer que no le haya rechazado).

II. Las mujeres vuelven a realizar el mismo procedimiento de elección descrito en el primer paso. Si hay varios hombres en la puerta de una mujer, ella elige el más preferido en su lista de preferencias, si este no es el hombre con el que ya estaba comprometida entonces ella terminará el compromiso anterior y se compromete con quien es de mayor preferencia en su lista.

III. Ella rechaza al resto, si sólo hay un hombre en la puerta, ella se compromete con él y si no hay nadie en su puerta, ella se queda soltera.

Paso 3:

I. El paso dos se repite, hasta que ningún hombre es rechazado y cada hombre queda comprometido con alguna mujer.

El algoritmo debe parar en alguna etapa porque solo hay un número finito de hombres y mujeres y ningún hombre hace propuestas a ninguna mujer más de una vez.

Lo que nos lleva a plantear las siguientes observaciones:

A medida que se va avanzando en el algoritmo, los hombres que van siendo rechazados son cada vez menos favorecidos, mientras que cada mujer que va recibiendo mayor cantidad de propuestas, termina mejor favorecida. Por lo tanto, el emparejamiento obtenido es óptimo para el conjunto que hace las propuestas, y es el peor para el conjunto que las recibe. En este caso, el emparejamiento obtenido es óptimo-masculino. Si invertimos los roles en el algoritmo, de forma tal que la mujer realice las propuestas, el emparejamiento resultante será óptimo-femenino. Es decir:

- El Algoritmo Gale-Shapley orientado al hombre es un algoritmo que se enfoca en las preferencias de los hombres, y sólo mira las preferencias de las mujeres cuando hay varios hombres que quieren una misma mujer.
- El Algoritmo Gale-Shapley orientado hacia la mujer es un algoritmo que se centra en las preferencias de las mujeres, y sólo mira las preferencias de las mujeres cuando hay varias mujeres que quieren a un mismo hombre.

A continuación, se explica de forma práctica el funcionamiento del algoritmo. Sean los conjuntos $H = \{h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4\}$ y $\mathrm{M} = \{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4\}$ con las siguientes preferencias:

Tabla 3

Lista de preferencias de Mujeres

	1	2	3	4
m_1	h_3	h_2	h_1	h_4
m_2	h_4	h_1	h_3	h_2
m_3	h_4	h_3	h_2	h_1
m_4	h_1	h_2	h_3	h_4

Tabla 4

Lista de preferencias de Hombres

	1	2	3	4
h_1	m_1	m_2	m_3	m_4
h_2	m_1	m_2	m_3	m_4
h_3	m_1	m_2	m_3	m_4
h_4	m_3	m_4	m_2	m_1

El emparejamiento que se obtiene al aplicar el Algoritmo de Gale-Shapley orientado al hombre resulta ser estable, lo que nos lleva a probar primero el teorema 1 y 2 (Gale, Shapley, 1960-1961).

Teorema 1: (El Algoritmo de Gale-Shapley termina en una cantidad finita de pasos)

Hay un número limitado de pasos en el algoritmo orientado al hombre.

Prueba:

Hay n mujeres y n hombres. Un hombre nunca pretende a la misma mujer, porque cuando un hombre es rechazado, él pretende a la siguiente mujer según su lista de preferencias. Esto significa que una mujer puede rechazar a lo sumo $(n - 1)$ hombres ya que como máximo podría recibir n propuestas; lo que significa que puede haber tantos como $\{n(n - 1) = n^2 - n\}$ pasos que despiden a los hombres. Esto significa que el paso máximo donde no hay rechazo se encuentra en el $(n^2 - n + 1)$ paso. Esto es un número finito de pasos.

Ahora podemos usar el teorema 1 para probar el siguiente teorema.

Teorema 2: (En el Algoritmo de Gale-Shapley todos los participantes encuentran parejas)

El algoritmo orientado al hombre no puede terminar con un hombre rechazado por todas las mujeres.

Prueba:

Para probar esto, se debe saber que una vez que una mujer está comprometida, siempre estará comprometida porque solo puede conseguir una mejor pareja. No es posible elegir estar soltero en vez de estar comprometido porque las mujeres piensan que estar comprometida siempre es mejor que estar soltera. Entonces, si un hombre por ejemplo h_1 es rechazado, es porque la mujer ha encontrado a alguien mejor. Entonces, si h_1 es rechazado por cada mujer, significa que toda mujer tiene otra persona. Si cada mujer tiene a alguien más y si hay *n* mujeres, eso significa que hay n otros hombres además de h_1; esto es imposible porque hay un total de n hombres, lo que significa que un hombre no puede ser rechazado por todas las mujeres. La regla de grupos de igual tamaño es importante para esto.

Por lo tanto, ningún hombre es rechazado por todas las mujeres y no hay varios hombres comprometidos con una mujer lo que significa que hay un hombre para cada mujer.

Ahora podemos probar que el emparejamiento resultante es estable, a través de los siguientes teoremas (Gale, Shapley, 1960-1961)

Teorema 3: (Del Algoritmo de Gale-Shapley siempre se obtienen matrimonios estables)

El algoritmo Gale-Shapley produce matrimonios estables.

Prueba:

Supongamos, por contradicción que hay una pareja que no es estable (m, h) suponiendo que m está casada con h' y h está casado con m' en el algoritmo de Gale-Shaley. Si m está casado con h' pero le gusta más h, luego h pretende a m primero y sabemos que un hombre que se casa, en el peor de los casos, pretende a todas las mujeres, y h dijo 'no' a m, pero entonces h debe haberse casado con alguien que le guste más que m ya que sabemos que una mujer se casa con su favorito entre sus pretendientes, en el mejor de los casos. Entonces a h le gusta más m' que m, lo que significa que la pareja (m, h) es una pareja estable.

Teorema 4: (Del Algoritmo de Gale-Shapley siempre se obtiene un emparejamiento estable)

El emparejamiento que resulta del algoritmo orientado al hombre es estable.

Prueba:

Mostraremos esto por contradicción. Supongamos que el algoritmo da la siguiente correspondencia inestable $\{(m_1,h_1), (m_2,h_2), (m_3,h_3), (m_4,h_4)\}$. Es inestable porque m_1 prefiere h_3, que a h_1 y h_3 prefiere m_1 sobre m_3. Si h_3 prefiere a m_1 que a m_3, entonces h_3 habría pretendido a m_1 antes de que a m_2. Si m_1 prefiere h_3 a h_1, ella habría rechazado a h_1 en lugar de h_3. Esto no es lo que sucedió, lo que significa que no puedes encontrar a un hombre que prefiera a otra mujer que lo prefiera a él. En conclusión, el Algoritmo Gale-Shapley siempre terminará (teorema 1) y cuando termine encontrará un emparejamiento estable.

Bueno, ¿Quién crees que está mejor en el Algoritmo de Gale, Shapley (1960-1961)? En otras palabras ¿Quién tiene el poder, los proponentes o los aceptores? Desde que las mujeres se casan con su favorito entre sus pretendientes, y los hombres obtienen las peores mujeres que cortejan, parece razonable creer que las mujeres lo hacen mejor. Parece difícil responder formalmente esta pregunta especialmente porque ni siquiera está claro que queremos decir con ‘‘hacerlo mejor’’. Pero, de hecho, podemos mostrar de una manera muy precisa y formal que el algoritmo Gale-Shapley (1960) orientado al hombre está fuertemente sesgado hacia los hombres. Para formalizar esto necesitamos definir el conjunto de parejas potenciales realistas.

Sea *S* el conjunto de todos los emparejamientos estables. Dado que el Algoritmo Gale-Shapley (1960) da un emparejamiento estable sabemos que $S \neq \emptyset$. Para cada persona p, definamos las listas de preferencias como el reino de las posibilidades para p, sea $\{ q \setminus \exists\, E \in S, (\mathrm{p}, \mathrm{q}) \in E \}$. Es decir, q está dentro del reino de posibilidades para p si y solo si hay una correspondencia estable donde p se casa con q.

Alvin Roth (1990) plantea las siguientes definiciones y teoremas;

Definición 4: La pareja óptima de una persona es su favorita en el reino de las posibilidades.

Debe existir una pareja óptima, ya que sabemos que hay al menos un emparejamiento estable, el producido por el algoritmo Gale-Shapley.

Definición 5: La pésima pareja de una persona es su menos favorito en el reino de las posibilidades.

Teorema 5: (Las peores parejas obtenemos para los hombres cuando las mujeres proponen)

El algoritmo Gale-Shapley orientado a hombres empareja a cada hombre con su pareja óptima.

Prueba:

Suponga, por contradicción, que algún hombre no obtiene su pareja óptima (es decir su mujer preferida en el reino de sus posibilidades). Sea h_1 el primer hombre que es rechazado por su mujer preferida m_1, definamos h_2 como el hombre que hizo que m_1 rechazara a h_1 en el Algoritmo de Gale-Shapley. Entonces m_1 prefiere a h_2 a h_1.

Dado que h_1 es el primero en ser rechazado por la pareja óptima en el algoritmo de Gale-Shapley h_2 no ha sido rechazado por el compañero óptimo cuando tan solo está pretendiendo a m_1. Entonces h_2 prefiere m_1 al menos tanto como prefiere su pareja óptima m^* (m_1 y m^* pueden ser la misma persona).

Sea E un emparejamiento estable donde m_1 se casa con h_1. Existe ya que m_1 está en el reino de las posibilidades de h_1. E no es producido por el Algoritmo de Gale-Shapley por suposición. Dejar m_2 ser pareja de h_1 en E. Por definición a h_2 le gusta m^* al menos tanto como m_2 (de nuevo estas podrían ser la misma persona), por lo que m_2 prefiere m_1 a m_2 ya que a h_2 le gusta m_1 al menos tanto como m^* quien le gusta al menos tanto como m_2 (tengamos en cuenta que m_1 no puede ser la misma persona que m_2). Entonces h_2 y m_1 son un par bloqueante lo que contradice que E es un emparejamiento estable.

Teorema 6: (Las peores parejas obtenemos para las mujeres cuando los hombres proponen)

El Algoritmo Gale-Shapley orientado a hombres empareja a todas las mujeres con su pésima pareja.

Prueba:

Suponga, por contradicción, que existe un emparejamiento estable E^* donde hay una mujer m a la que le va peor que en el Algoritmo Gale-Shapley. Sea h la pareja de m en el Algoritmo Gale-Shapley. Sea h^* la pareja de m en E^* . Entonces a m le gusta h más que h^* ya que le fue peor en E^* que en el Algoritmo Gale-Shapley. Consideremos m^* la pareja de h en E^*. Sabemos que a h le gusta más m que m* ya que (según el teorema 5) el Algoritmo de Gale-Shapley da una pareja óptima para m. Entonces m y h forman una pareja inestable en E^*, que es una contradicción. Por lo que podemos asegurar que el Algoritmo Gale-Shapley orientado al Hombre empareja a todas las mujeres con su peor opción.

Lo que nos lleva a Bakker (2016) plantear la siguiente definición:

Definición 6:

Para dos emparejamientos estables A y B, el emparejamiento A es el más preferido o indiferente por el emparejamiento obtenido del Algoritmo Gale-Shapley orientado al hombre (mujer); $A \succcurlyeq {}^h B$ ($A \succcurlyeq {}^m B$) si todos los hombres (mujeres) prefieren emparejar A, a emparejar B o, son indiferentes entre A y B.

Ahora por teorema 4 y 5 podemos plantear los siguientes resultados:

- Todos los hombres prefieren el emparejamiento que resulta del Algoritmo Gale-Shapley orientado al hombre a cualquier otro.
- Del Algoritmo Gale-Shapley orientado al hombre resulta el peor emparejamiento para las mujeres.

Podemos invertir los roles y decir que el algoritmo orientado a la mujer es el peor resultado en un emparejamiento estable para los hombres. Los emparejamientos estables obtenidos del Algoritmo Gale-Shapley orientado hacia el hombre y el orientado hacia la mujer también pueden verse como extremos; ellos son los que le gustan más a uno de los grupos y lo que menos le gusta al otro.

Dadas las instancias Knuth (1976) establece un conjunto de emparejamientos estables:

El conjunto de todos los Emparejamientos Estables:

Dada una instancia del problema de los matrimonios estables, el emparejamiento óptimo-masculino y el óptimo-femenino son los extremos de todos los emparejamientos estables, pudiendo existir otros emparejamientos intermedios. Como vemos, puede existir más de un emparejamiento estable para una instancia dada del problema, y es posible definir un orden entre tales emparejamientos en función de las listas de preferencias de los individuos en ambos conjuntos. De esta manera, se considera que los individuos de un conjunto prefieren un emparejamiento a otro, digamos A, si los individuos de A se encuentran relacionados en un emparejamiento con individuos de B a los que prefieren por encima de sus parejas en el segundo emparejamiento. Para ello se define una relación de dominación entre los matrimonios estables de acuerdo a lo siguiente: el emparejamiento E_1 domina al emparejamiento E_2 con respecto a un conjunto (hombres) si todos los individuos de ese conjunto (hombres) prefieren o igualan sus parejas en E_1 a las de E_2. Esta relación de dominación define un orden parcial entre todos los emparejamientos estables de una instancia dada, formando un reticulado distributivo en el cual el emparejamiento óptimo masculino (femenino) será el supremo, y el femenino (masculino) será el ínfimo. Esta estructura de reticulado fue observada por primera vez por John Conway. Knuth también demostró que, si E y E' son estables, entonces $E \vee E'$ y $E \wedge E'$ son emparejamientos estables.

Recordemos que un reticulado distributivo es un orden parcial $\succcurlyeq$ en el cual:

- Cada par de elementos (a, b) tiene ínfimo, denotado $a \wedge b$ tal que $a \succcurlyeq a \wedge b$ y $b \succcurlyeq b \wedge a$ y no existe elemento c tal que $a \succcurlyeq c$, $b \succcurlyeq c$ y $c \succ a \wedge b$.
- cada par de elementos (a, b) tiene un supremo, denotado $a \vee b$ tal que $a \vee b \succcurlyeq a$ y $a \vee b \succcurlyeq b$ y no existe elemento c tal que $c \succcurlyeq a, c \succcurlyeq b$ y $a \vee b \succ c$.
- se conservan las leyes distributivas, es decir, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Del algoritmo original que establecieron Gale, Shapley (1960-1961) se reestructura una extensión teniendo en cuenta otras variables que se explica a continuación.

Algoritmo Extendido de Gale-Shapley

Para encontrar los emparejamientos que conforman la estructura reticular lo haremos con apoyo del Algoritmo extendido de Gale-Shapley. Se llama el algoritmo extendido porque no solo encuentra un emparejamiento estable, sino que encuentra una lista con todos los partidos estables posibles. El algoritmo da más información que el Algoritmo regular de Gale-Shapley. Acorta las listas de preferencias tomando parejas que nunca podrían existir en un emparejamiento estable.

De nuevo hay un Algoritmo Gale-Shapley extendido orientado al hombre y orientado a la mujer. De estos algoritmos resultan una lista orientada hacia el hombre y una lista orientada hacia la mujer respectivamente. La superposición entre estas dos listas, está la lista de Gale-Shapley que contiene todos los partidos estables. (Bakker, 2016)

Informalmente, el algoritmo puede expresarse en términos de una secuencia de "propuestas" de los hombres a las mujeres (o de las mujeres a los hombres si los roles de los hombres y las mujeres se invierten en todas partes).

En cualquier momento durante la ejecución del algoritmo, cada persona está comprometida o libre; cada hombre puede alternar entre estar comprometido y ser libre, pero una vez que una mujer está comprometida, nunca más es libre, aunque la identidad de su prometido puede cambiar. Un hombre que se compromete más de una vez obtiene novias que son sucesivamente menos deseables para él, mientras que cada compromiso sucesivo trae una pareja más favorecida. Cuando una mujer recibe una propuesta, ella aceptará de inmediato (pero provisionalmente), comprometiéndose con el proponente, rompiendo simultáneamente su compromiso actual, si lo hubiera, y liberando a su prometido anterior.

Cada propuesta, en la secuencia, es hecha por un hombre libre h para la primera mujer m en su lista de preferencias actual, y da como resultado la eliminación de la lista de m de todos los sucesores de h, y de m de la lista de cada uno de estos hombres. Nos referiremos a la eliminación del par (h, m). Esto es respecto a la reducción de las listas de preferencias, el algoritmo descrito es una extensión del Algoritmo clásico Gale-Shapley (1960).

El algoritmo orientado al hombre puede ser expresado como sigue:

1. Declare libre a todas las personas.

2. Mientras algún hombre h este libre.

2.1 Sea m la primera mujer en la lista de h.

2.2 Si algún hombre $h´$ está comprometido con m, entonces declare libre a h.

2.3 Declare comprometidos entre sí a h y m.

2.4 Para h' hombre que le sigue a h en la lista de m.

2.4.1 Borre el par (h', m).

3. Forme el apareamiento estable con las n parejas comprometidas y termine.

En el siguiente ejemplo de instancia n $= 4$ de explicamos que el Algoritmo extendido de Gale-Shapley resultan 10 emparejamientos estables.

Tabla 5

Lista de preferencias de hombres

	1	2	3	4
h_1	m_1	m_2	m_3	m_4
h_2	m_2	m_1	m_4	m_3
h_3	m_3	m_4	m_1	m_2
h_4	m_4	m_3	m_2	m_1

Tabla 6

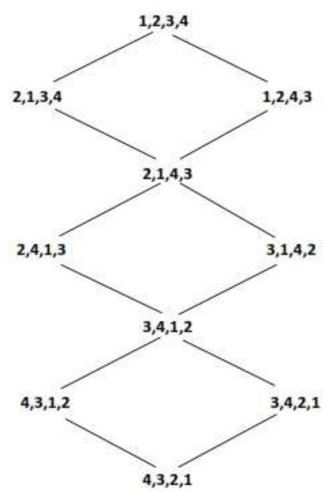
Lista de preferencias de mujeres

	1	2	3	4
m_1	h_4	h_3	h_2	h_1
m_2	h_3	h_4	h_1	h_2
m_3	h_2	h_1	h_4	h_3
m_4	h_1	h_2	h_3	h_4

El resultado tiene el emparejamiento orientado hacia el hombre y el orientado hacia la mujer los que representan los extremos y otros 8 emparejamientos intermedios. Esos emparejamientos forman la estructura reticular que se muestra en la figura 1.

Figura 1

Estructura Reticular



El emparejamiento superior es el orientado hacia el hombre. Debajo hay dos coincidencias que combinan 2 hombres con su primera elección y 2 hombres con su segunda opción. Después de eso hay una coincidencia que combina a todos los hombres con su segunda opción. Esto continúa hasta el final, que es el emparejamiento orientado a la mujer que combina los hombres con sus mujeres menos preferidas y las mujeres con sus hombres más preferido.

Entonces, cuando eres un hombre, preferirías un emparejamiento en la parte superior de la estructura porque un emparejamiento más alto es igual o mejor que un emparejamiento más bajo. Cuando eres mujer querrías lo contrario.

Número de emparejamientos estables:

Anteriormente vimos que podría haber múltiples emparejamientos estables en ciertos problemas de matrimonio. Pero es posible dar un límite inferior o máximo. Cuando *n* aumenta el número de incrementos estables exponencialmente, si quieres encontrar todos los emparejamientos estables a mano puede tomar un tiempo. Hay diferentes maneras de calcular el límite inferior dependiendo de lo que n es. Estas formas se discuten en el teorema 7, 8 y 0

Teorema 7: (Cualquier problema de matrimonio tiene al menos un máximo de emparejamientos estables)

Si tiene dos problemas matrimoniales estables, uno de tamaño *n* y otro de tamaño *m* y con $g(n)$ y $g(m)$ emparejamientos estables respectivamente entonces hay también un problema de matrimonio estable de tamaño $n * m$ con al menos $Máx\ (g(n)g(m)^n, g(m)g(n)^m)$ emparejamientos estables.

Prueba:

Supongamos que hay dos grupos, uno de tamaño *n* y otro de tamaño *m*. Los hombres en el ejemplo *n* están etiquetados p_1,..., p_n, y las mujeres están etiquetadas t_1,..., t_n,. Los hombres en el caso m están etiquetados q_1,, ..., q_m, y las mujeres son etiquetadas por s_1,, ..., s_m,. Hay un ejemplo n*m con hombres etiquetados (p_i,.., q_j,) y con mujeres etiquetadas (t_i,, s_j,) con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$.

Un hombre (p_i,..., q_j,) de la instancia $n * m$ prefiere mujer (t_k, , s_l,) a $(t_{k'}, S_{l'})$ si q_j prefiere s_l a $S_{l'}$ o si $l = l'$ y p_i prefiere t_k a $t_{k'}$. Esto es lo mismo para las mujeres, pero con los papeles invertidos. Así que una mujer (t_i, , s_j,) de la instancia $n * m$ prefiere hombre (p_k, , q_l) a $(p_{k'}, q_{l'})$si sj prefiere q_l a $q_{l'}$ o si $l = l'$ y t_i prefiere p_k a $p_{k'}$.

Ahora llamamos M igual a cualquier coincidencia estable en el problema matrimonial de mi tamaño M_1,..., M_m es una secuencia de emparejamientos estables del problema matrimonial de tamaño $n * m$ puede ser cualquier coincidencia de $g(m)$ y la secuencia M_1,..., M_m Puede ser $g(n)$ a la potencia de m. Así que la combinación de M y M_1,..., M_m es $g(m)*g(n)^m$.

Supongamos que tenemos la siguiente coincidencia ((p_i, q_j), (M (p_i), M_i (q_j))) donde M y M_i son emparejamientos. Ahora tenemos que demostrar que se trata de una coincidencia estable. Podemos demostrar esto por una contradicción. Supongamos que no es estable. Esta significa que hay otra coincidencia $((p, q), (t, s))$ que es mejor. Si ésta es mejor, una de las siguientes preferencias debe ser correcta. O bien; (1) q prefiere s a $M_i(q)$, o (2) $s = M_i(q)$ y p prefiere t a $M(p)$. Con una de estas dos, una de las siguientes preferencias también debe ser ciertas. O bien; (3) s prefiere q a $M_i(s)$, o (4) $q = M_i(s)$ y t prefiere p a $M(t)$. Podemos decir 1 y 3 ambos pueden ser verdad porque M_i es estable. Mientras 2 y 4 no pueden ser ambos porque M es estable. Las otras combinaciones no son ciertas porque es imposible para esas combinaciones vayan a estar juntas. Esto significa que el emparejamiento ((p_i,q_j), (M(p_i), M_i(q_j))) es una coincidencia estable. Esto significa que el problema de matrimonio estable tiene al menos $g(m)g(n)$ emparejamientos m estables. Esto también se puede hacer con los roles de $n\ y\ m$ invertidos. Esto resultará en al menos $g(n)g(m)$ n emparejamientos estables. Esto significa que el límite inferior del número máximo de emparejamientos estables es $Máx\ (g(m)g(n)^m, g(n)g(m)^n)$.

En el siguiente teorema Gale y Shapley (1960-1961) explica las instancias del problema del matrimonio:

Teorema 8: (Si hay un problema de matrimonio de instancia *n*, existe también uno que sea el doble de *n*)

Si hay un problema de matrimonio estable con n hombres, n mujeres y $g(n)$ emparejamientos estables entonces también hay un problema de matrimonio con $2n$ hombres, $2n$ mujeres y al menos $2[g(n)]$ emparejamientos estables.

Prueba:

Supongamos que hay una instancia de tamaño n. Los hombres están etiquetados como h_1 y las mujeres como m_j con $i = 1, \ldots, n$. Entonces tenemos $H = \{h_1, ..., h_n\}$ y $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Crea una instancia de tamaño n con los hombres etiquetados h_j y las mujeres etiquetadas m_j con $j = n + 1, \ldots, 2n$. Entonces tenemos $H' = \{h_n + 1, \ldots, h_{2n}\}$ y $M' = \{m_n + 1, \ldots, m_{2n}\}$. Crea este instante para que si m_i prefiere m_k a m_l para $i \leq n$ entonces $h_i + n$ prefiere $m_k + n$ a $m_l + n$ y si m_i prefiere h_k am_l para $i \leq n$ entonces $m_j + n$ prefiere $m_k + n$ a $h_l + n$. De esta manera ambas instancias tendrán el mismo número de emparejamientos estables.

- Ahora necesitamos crear otra instancia más del tamaño $2n$ con los hombres. Etiquetado h_a y las mujeres etiquetadas m_a con $a = 1, \ldots, n$. Ahora tenemos a tiene $H'' = \{h_1, \ldots, h_{2n}\}$ y $M'' = \{m_1, ..., m_{2n}\}$. La lista de preferencias de las últimas n personas pueden ser determinadas por las primeras n personas y la lista de preferencias de las primeras n personas pueden ser determinadas por las últimas n personas, ya sea para los hombres o las mujeres.

Digamos que z es una coincidencia estable para la instancia con H hombre y M mujeres y z' es una coincidencia estable para la instancia con H' hombre y M' mujer. Ahora también tiene una coincidente z_1'' por ejemplo con H'' hombres y m'' mujer. Esta coincidencia $z_1''(h)$ tiene la siguiente definición.

$$z_1''(h) = z(h) \text{ si } h \text{ es de } H$$

Y

$$z_1''(h) = z'(h) \text{ si } h \text{ es de } H'$$

Esto significa que z_1'' es una coincidencia estable porque tanto z como z' son estables emparejamientos; también puede haber una coincidencia estable z_1'' por ejemplo, con H'' hombres y mujeres M'' que tiene la siguiente definición.

$$z_1''(m_i) = z'(m_{i+n}) \qquad \text{si } i \leq n$$

Y

$$z_1''(m_i) = z(m_{i-n}) \qquad \text{si } i \geq n.$$

Los emparejamientos z y z' cada uno puede ser *g(n)* coincidencias estables (porque ambos las instancias son de tamaño n) lo que significa que la instancia de tamaño n puede tener al menos $2g(n)^2$ emparejamientos estables.

A continuación, en el siguiente teorema Bakker (2016) nos explica que depende del tamaño de un problema de matrimonio la existencia de un máximo:

Teorema 9: (Cuando el tamaño de los grupos del problema de matrimonio es de multiplicidad 2, existe un máximo de emparejamientos estables):

El número máximo de emparejamientos estables es al menos $2n - 1$ cuando $n = 2k$ con $k \geq 0$.

Prueba:

Esto se hace por inducción. El teorema es correcto para $k = 0$. Si $k = 0$ entonces $n = 2^0 = 1$ y $2^{n-1} = 2^0 = 1$. Esto significa que, si solo hay un hombre y una mujer entonces solo hay una coincidencia estable que es obvia.

Ahora decimos que el teorema es correcto para $n = 2^i$. Tenemos que demostrar que es correcto para $n = 2^{i+1}$ con $2^{n-1} = 2^{2i+1} - 1$ emparejamientos estables. Para probar esto necesitaremos lo que probamos en el teorema 6. Tenemos $n = 2^i$ y $g(n) = 2^{2i-1}$ y Usaremos $n = 2$ en listas de preferencias en las tablas 7 y 8.

Tabla 7

Lista de preferencias de mujeres

	1	2
m_1	h_2	h_1
m_2	h_1	h_2

Tabla 8

Lista de preferencias de hombres

	1	2
h_1	m_1	m_2
h_2	m_2	m_1

Esta instancia tiene: dos coincidencias estables {(m_1, h_2),(m_2, h_1)} y {(m_1, h_1), (m_2, h_2)}. Esta significa que $g(h) = 2$. Hemos probado en el teorema 6 que también debería haber otro problema de matrimonio estable con tamaño $n * m = 2^i *= 2^{i+1}$ y con al menos el $máx(g(n)g(m),\ g(m)g(n)m\ = máx(2^{2i-1} * 2^2,\ 2 * (2^{2i-1})^2)$= $máx(2^{2i+1-1}, 2^{2i+1-1}) = 2^{2i+1-1}$ emparejamientos estables. Así que existe un problema de matrimonio estable con tamaño 2^i * 2= 2^{2i+1} y con al menos 2^{2i+1-1} estables emparejamientos.

En la tabla 9 están los límites inferiores del teorema 8 para algunos ejemplos de n. Aquí podemos ver que el límite inferior crece exponencialmente cuando n aumenta, los del máximo real pueden ser mucho mayor que los valores mostrados en las tablas; porque son límites inferiores.

Tabla 9

i	$n = 2^i$	2^{n-1}
0	1	1
1	2	2
2	4	8
3	8	128
4	16	32768
5	32	2147483648

Otras variantes del problema de matrimonios estables

Ahora discutiremos diferentes variaciones del problema de matrimonios estables, en las que encontraremos diferentes situaciones, como es el caso de entrarnos grupos de diferentes tamaños en el cual nos resultarán participantes solteros, esto dependiendo de qué grupo contiene la cantidad mayor de integrantes, en esta situación los participantes siempre consideran el hecho de que es mejor estar casados a estar solteros, en la siguiente situación que discutiremos al menos uno de los participantes decide estar solteros a estar casados con ciertas personas, lo que lo hace más real, y finalmente veremos la variación de la indiferencia.

En las siguientes definiciones de emparejamientos estables Diaz (2017) nos explica que son aplicadas, pero ligeramente modificas, al igual que el algoritmo Gale-Shapley.

Definición 7: Un emparejamiento (m_x, h_x) es estable si para cada $h(m)$ que está en $m_x(h_x)$ prefiere su pareja actual a cualquier otro, es decir $h(m)$ prefiere su propia pareja en $m_x(h_x)$. Además, si alguien es soltero significa que nadie los prefiere a sus parejas actuales.

Entonces, si hay más mujeres que hombres, el algoritmo Gale-Shapley (orientado al hombre) se detendrá cuando todos los hombres estén comprometidos con diferentes mujeres. La diferencia entre el número de hombres y el número de mujeres es el número de mujeres solteras.

El emparejamiento resultante sigue siendo estable y es el mejor emparejamiento para los hombres y el peor emparejamiento para las mujeres. El algoritmo orientado a las mujeres también se detendrá cuando todos los hombres estén comprometidos. Habrá todavía mujeres solteras, puesto que hay más mujeres que hombres, pero el emparejamiento estable es el mejor resultado para las mujeres. Si una mujer es soltera después del algoritmo orientado a la mujer entonces ella es única en cada emparejamiento estable. Cuando hay más hombres que mujeres, entonces los algoritmos se detendrán cuando todas las mujeres estén comprometidas y quedarán hombres solteros.

Otra variación del problema de matrimonios estables es cuando al menos uno de los participantes prefiere estar solteros que estar casados con ciertas personas. Esto hace que el problema sea un poco más realista porque puede que no te gusten todos los que están disponibles. En esta situación el escenario podría terminar teniendo tanto un grupo de hombres solteros como un grupo de mujeres solteras, no importa cuántos hombres y mujeres haya. Este problema nuevamente tiene una definición de emparejamiento estable, ligeramente diferente y podemos, de manera similar aplicar el algoritmo de Gale-Shapley.

Definición 8: Un emparejamiento E es estable si para cada (m_x, h_x), h (m) prefiere su propia pareja en el emparejamiento o h (m) prefiere ser soltero.

El algoritmo orientado al hombre y el algoritmo orientado a las mujeres cambian porque las listas de preferencias de hombres y mujeres cambian. Las listas de preferencias obtienen un elemento adicional llamado $\mathrm{x-soltero}$ (donde x es el nombre de la persona que está soltero).

Cuando h (m) está en una posición superior a $\mathrm{x-soltero}$ en la lista de preferencias, significa que h (m) prefiere m (h) a ser soltero, en caso contrario cuando h (m) está en una posición inferior del elemento $\mathrm{x-soltero}$ en la lista de preferencias de h (m) significa que h (m) prefiere estar soltero a estar con m (h).

El algoritmo seguirá siendo el mismo, pero para que funcione, en las tablas de preferencias deberemos agregar una persona falsa para cada persona que prefiera ser soltera.

Es claro que es imposible para alguien estar en un matrimonio estable con la versión soltero de otra persona; esto es porque $x - soltero$ siempre tiene x en la parte superior de su lista de preferencias, es decir, yo prefiero $yo - soltero$ a todos los demás $x - soltero$. El orden de la lista de preferencias de $x - soltero$ no importa siempre que x esté en la parte superior de la lista.

La última variación del problema de matrimonios estables que discutiremos es el caso de la indiferencia. En esta situación al igual que en las anteriores asumimos que cada hombre y mujer tiene una lista de preferencias completamente ordenadas, pero en esta versión del problema el hombre y la mujer pueden ser indiferentes entre determinadas opciones y decidir ser soltero, es decir, alguien es indiferente cuando no prefiere uno sobre el otro. Entonces h es indiferente entre m y $m*$ si quiere a m más (o menos) que $m*$. También puede ser que alguien sea indiferente entre alguien más y estar soltero. Con la indiferencia hay diferentes tipos de estabilidad dependiendo de cuan estricto quieres ser.

Tipos de estabilidad en los emparejamientos estables

El primer tipo de estabilidad; es el emparejamiento súper estable, aquí el emparejamiento es inestable si te gusta otra persona al menos tanto como tu pareja actual y si le gustas al menos tanto como su pareja actual. Cuando tienes este tipo de estabilidad es posible no tener matrimonios estables; un ejemplo de esto es cuando todos son indiferentes uno al otro.

El segundo tipo de estabilidad es uno llamado emparejamientos fuertemente estables; en este, los emparejamientos son inestables si te gusta alguien más que tu pareja actual y les gustas al menos tanto como a su pareja actual. De nuevo es posible que con este tipo de estabilidad no tengas matrimonios estables.

El tercer tipo de estabilidad es un tipo de estabilidad más débil que es más fácil conseguir; los emparejamientos son inestables si te gusta alguien estrictamente más que tu pareja actual y les gustas estrictamente más que su pareja actual.

En el siguiente contexto Knuth (1976) nos explica algunas estrategias para mejor nuestro resultado al aplicar el algoritmo.

Estrategia y otros problemas

Ahora exploraremos el tema de la veracidad en el problema de matrimonio estable en el algoritmo Gale-Shapley. La pregunta básica es: ¿Hay algunas estrategias que podrías aplicar para mejorar tu resultado y obtener la pareja más preferida? La respuesta a esta es "sí" dependiendo de tu situación, si eres una mujer en la situación orientada al hombre o si eres un hombre en la situación orientada a la mujer puedes conseguir una mejor pareja si aplicas una estrategia, esta es la estrategia de mentir sobre su lista de preferencias. De esta manera es posible que tengas que descarta a alguien por alguien que te guste menos, pero cuando haces esto podrías terminar con alguien mejor. Por ejemplo, si eran solteros sin una estrategia, no pueden aplicar una estrategia para casarse de repente con alguien que les agrada.

A continuación, presentamos un ejemplo que lo hace un poco más claro;

Supongamos que tenemos 4 hombres y 3 mujeres. La lista de preferencias se describe en la tabla 10 y 11 para mujeres y hombres, respectivamente. Algunos hombres y algunas mujeres prefieren estar solteras a estar con otras personas.

Tabla 10

Lista de preferencias de Mujeres.

	1	2	3	4	5	6	7
m_1	h_1	h_2	h_3	h_4	m_{1-s}	m_{1-s}	m_{3-s}
m_2	h_2	h_1	h_3	h_4	m_{2-s}	m_{1-s}	m_{3-s}
m_3	h_3	h_1	m_{3-s}	h_4	h_2	m_{1-s}	m_{3-s}
h_{1-s}	h_1	h_2	h_3	h_4	m_{1-s}	m_{1-s}	m_{3-s}
h_{2-s}	h_2	h_1	h_3	h_4	m_{1-s}	m_{1-s}	m_{3-s}
h_{3-s}	h_3	h_1	h_2	h_4	m_{1-s}	m_{1-s}	m_{3-s}
h_{4-s}	h_4	h_1	h_2	h_3	m_{1-s}	m_{1-s}	m_{3-s}

Tabla 11

Lista de preferencias de Hombres.

	1	2	3	4	5	6	7
h_1	m_2	m_1	m_3	h_{1-s}	h_{2-s}	h_{3-s}	h_{4-s}
h_2	m_3	m_1	m_2	h_{2-s}	h_{1-s}	h_{3-s}	h_{4-s}
h_3	m_2	h_{3-s}	m_1	m_3	h_{1-s}	h_{2-s}	h_{4-s}
h_4	m_1	m_2	m_3	h_{4-s}	h_{1-s}	h_{2-s}	h_{3-s}
m_{1-s}	m_1	m_2	m_3	h_{4-s}	h_{2-s}	h_{3-s}	h_{4-s}
m_{2-s}	m_2	m_1	m_3	h_{4-s}	h_{2-s}	h_{3-s}	h_{4-s}
m_{3-s}	m_3	m_1	m_2	h_3	h_{2-s}	h_{3-s}	h_{4-s}

El emparejamiento estable que resulta después de aplicar el Algoritmo, está dado por: $\{(m_1, h_2), (m_2, h_1), (m_3, m_{3-soltero}), (m_{3-soltero}, m_3), (m_{4-soltero}, m_4)\}$. Tanto m_1 como m_2 se emparejan con su segunda opción, h_1 y h_2 se emparejan con su primera y segunda opción respectivamente y m_3, h_3 y h_4 son todos solteros; m_2 podría obtener una mejor pareja si actuara como si tuviera una lista de preferencias diferente.

Una lista de preferencias que podría usar está dada de la siguiente manera: m_2: h_2, $h_3, h_4, h_1, m_{2-S}, m_{1-S}, m_{3-S}$. Ella traslada h_1 a un lugar más bajo en su lista de preferencias; esto hará que m_2 obtenga h_2 y despida h_1, entonces se moverá h_2 a m_2. Esta es una estrategia para que m_2 obtenga su primera opción.

El emparejamiento resultante será:
$\{(m_1, h_1), (m_2, h_2), (m_{2-soltero}, m_2), (m_{3-soltero}, m_3), (m_{4-soltero}, m_4)\}$.
Éste sigue siendo un emparejamiento estable incluso con la lista de preferencias original de m_2, nadie puede obtener una mejor pareja que su pareja actual, porque las personas que les gustan más que su pareja actual no les gustan más, además, porque del Algoritmo Gale-Shapley resulta un emparejamiento estable.
La pregunta que nos queda es: ¿Hay alguna manera de evitar esta estrategia?, para dar respuesta a esta pregunta Knuth (1976) estable el siguiente teorema:

Teorema 10: (Mentir es inevitable)
No hay algoritmo que evite la estrategia de mentir.

Prueba:
Supongamos que tenemos un problema de matrimonio con 2 hombres y 2 mujeres. Nosotros podemos demostrar que para cada proceso de emparejamiento estable un hombre o una mujer pueden hacerlo mejor mintiendo acerca de su lista de preferencias. Las mujeres y los hombres tienen su lista de preferencias mostradas en la tabla 10 y la tabla 11 respectivamente.

Tabla 12

Preferencias de mujeres

	1	2
m_1	h_2	h_1
m_2	h_1	h_2

Tabla 13

Preferencias de Hombres

	1	2
h_1	m_1	m_2
h_2	m_2	m_1

Al desarrollar, manualmente, el Algoritmo Gale-Shapley orientado a hombre y orientado a la mujer, resultan dos emparejamientos estables:

$$E_1 = \{(m_1, h_1)(m_2, h_2)\}$$
$$E_2 = \{(m_1, h_2)(m_2, h_1)\}$$

Supongamos que un Algoritmo da como resultado E_1; esto sería malo para m_1 y m_2. Ahora, ¿Qué pasaría si m_2 cambiara su lista de preferencias y dijera que preferiría ser soltera que estar con h_2, el único emparejamiento estable posible resultante de este cambio de preferencia es E_2. Lo mismo podría decirse de h_2 en lugar de m_2, si un algoritmo elige E_2. También podemos asumir sin pérdida de generalidad que esto es cierto para una instancia más grande n. En conclusión, no hay un algoritmo donde es mejor para todos ser honestos.

Emparejamiento de varios a uno

En esta investigación también planteamos otra situación de emparejamientos en donde se asigna un elemento de un conjunto con varios elementos de otro conjunto, de tal manera que al aplicar el algoritmo Gale-Shapley, los emparejamientos resultantes sean estables, tal es el caso de la admisión de estudiantes a universidades o colegios.

En el caso del problema de asignar estudiantes a universidades (o de escolares a colegios) se tiene que en uno de los lados (las universidades o los colegios) hay más de una plaza ofertada, es decir, cada universidad ofrece un determinado número de plazas, donde aquellas ofertadas por una misma universidad (colegio) son percibidas como idénticas por los estudiantes. El papel de las universidades es pasivo, es decir que son los estudiantes los que solicitan plaza, y las universidades (o colegios) se limitan a aceptar o rechazar al estudiante.

Este problema se abordó por primera vez en el trabajo de Gale y Shapley en 1962. En dicho artículo ambos matemáticos argumentaron que un emparejamiento adecuado, debería cumplir que todos los agentes estén contentos con sus respectivas parejas, las asignaciones que cumplan esto serían llamadas estables. Además, demostraron que estas asignaciones siempre existen mediante el desarrollo de un algoritmo que proporciona asignaciones estables: el algoritmo Gale y Shapley.

Problema de las admisiones de estudiantes a carreras de una universidad

En este caso los dos conjuntos son los estudiantes, $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, y las carreras de una universidad, $U = \{c_1, \ldots, c_m\}$, ambos conjuntos finitos y disjuntos. La universidad tiene c_i carreras con q_i cupos. Cada estudiante tiene su propia lista de preferencias sobre las carreras de la universidad a las que le gustaría optar, mientras que la universidad, al igual que los estudiantes, van a poder presentar cada una diferentes listas de preferencias del perfil de los estudiantes a aceptar, dado que dichas preferencias pueden depender no solo de la nota de los estudiantes, sino también de los requisitos de acceso que imponga la universidad.

Formalmente, cada estudiante $e \in E$ realiza una lista de preferencias en un orden estricto sobre el conjunto U y la universidad realiza una lista para cada carrera ofertada, de acuerdo al conjunto E. Dichas preferencias se entienden de la misma forma que en el caso del problema del matrimonio, cuando digamos que un agente i prefiere la opción a a la b significa que dicho agente antepone su elección al individuo a ante el b, lo que se denotará por $a \succ b$ por ejemplo, si tenemos; $e_1 = c_3, c_2, c_1, c_4$ diremos que el estudiante e prefiere la carrera c_3 antes que la c_2 y que la c_1 y que prefiere la carrera c_2 antes que la c_1 y la carrera c_4 y prefiere la c_1 que la c_4.

Además, las carreras, al igual que los estudiantes, van a poder presentar cada una de las diferentes listas de preferencias de los estudiantes a aceptar dado que dichas preferencias pueden depender no solo de la nota de los estudiantes, sino también de los requisitos de acceso que imponga la universidad.

Por otro lado, la principal diferencia de este problema con el planteado anteriormente (problema de matrimonios estables), además de la cardinalidad de los conjuntos, es que la universidad puede aceptar a varios estudiantes a la vez. Para controlar la capacidad de las carreras la universidad determina un límite de cupos que pueden ser ocupadas por los estudiantes, las cuales designaremos con $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\} \subset \mathrm{N}$.

En este problema de asignación la definición de estabilidad de un emparejamiento P, parte de la definición de lo que es una pareja bloqueante la cual es un par (e_i, c_j) que no pertenece a P y que cumple las tres condiciones siguientes:

- c_j está en la lista de preferencias de e_i .

- c_j o no ha cubierto el cupo máximo de estudiantes o prefiere a e_i antes que a otro estudiante de E al que ya ha aceptado dicha carrera.

- e_i o no ha sido aceptado por ninguna carrera o prefiere a c_j antes que a la carrera en la que ha sido aceptado.

De esta forma un emparejamiento estable será aquel para el cual no exista ninguna pareja bloqueante. El algoritmo propio para este problema es muy similar al del problema del matrimonio con listas incompletas, pero teniendo en cuenta el concepto de cupos de las carreras de una universidad y el hecho de que las únicas listas que pueden ser incompletas son las de los estudiantes.

Algoritmo Gale-Shapley para la admisión a universidades

Paso 1: Cada estudiante que no tenga una universidad asignada manda una solicitud a la mejor universidad cumpliendo con el orden de su lista ordenada de preferencias (siempre que esa universidad no le haya rechazado ya).

Paso 2: Cada universidad ordena, según sus preferencias, a todos aquellos estudiantes de los que haya recibido solicitud o hubiera aceptado anteriormente. Acepta a todos ellos de forma ordenada y si se alcanza el cupo de estudiantes que pueden ser aceptados en la universidad, se rechaza a los menos deseados.

Paso 3: Se repiten los pasos 1 y 2 hasta que todos los estudiantes han sido admitidos en una universidad o han sido rechazados por todas ellas. Este algoritmo vuelve a generar como en el problema anterior un emparejamiento estable.

A continuación, mostraremos un ejemplo donde aplicamos el algoritmo descrito anteriormente;
Sean los conjuntos de estudiantes y universidades $E = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$ y $U = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}$ respectivamente, las universidades tienen cupos máximos para la admisión de estudiantes, en el caso de c_1 es $q_1 = 3$, en el caso de c_2 es $q_2 = 2$, y para c_3 es $q_3 = 2$. Y la universidad y cada estudiante tiene su lista de preferencias:

Tabla 14

Lista de preferencias de universidades

	1	2	3	4	5	6
c_1	e_3	e_2	e_1	e_5	e_6	e_4
c_2	e_6	e_2	e_1	e_4	e_5	e_3
c_3	e_1	e_4	e_5	e_6	e_2	e_3

Tabla 15

Lista de preferencias de estudiantes

	1	2	3
e_1	c_1	c_2	c_3
e_2	c_1	c_2	
e_3	c_2	c_1	c_3
e_4	c_1	c_3	c_2
e_5	c_1	c_2	
e_6	c_1	c_2	c_3

Aplicamos el algoritmo, expuesto anteriormente:

Como todos los estudiantes ya tienen una universidad asignada el algoritmo finaliza, dando lugar al siguiente emparejamiento de admisión en las 3 universidades:

$$P = \{(e_1, c_1)(e_2, c_1)(e_3, c_1)(e_4, c_3)(e_5, c_2)(e_6, c_2)\}$$

El emparejamiento es estable ya que anteriormente se demostró que el Algoritmo *Gale-Shapley da* como resultado un emparejamiento estable.

Diseño Metodológico

- Tipo y enfoque de investigación: El presente estudio se trata de una investigación transcriptiva, puestos que nos interesa profundizar en esta temática, ya que su rama es una de las más actuales dentro de la ciencia Matemática, pero no menos importante.

- Área de estudio: Teoría de Grafos y Teoría de Juego.

- Enfoque de la investigación: Cuantitativo, ya que obtenemos una cantidad de emparejamientos estables al aplicar el algoritmo.

- Fuentes de investigación o información: Secundarias.

- Técnicas de recolección o análisis de información: en este caso se utilizó documentos, revistas, libros, informes monográficos y páginas web.

- Procedimiento. Se mostrarán los resultados obtenidos de los ejemplos que se utilizó para la comprobación del método.

  En la aplicación del algoritmo de Gale- Shapley al problema de los matrimonios estables, aplicamos el algoritmo paso a paso hasta obtener una serie de matrimonios estables, todo esto cumpliendo con las distintas definiciones y teoremas que establecen la estabilidad, de igual manera para las diferentes variaciones del algoritmo en estudio.

  En el problema de admisión de estudiantes a distintas carreras ofertadas por una universidad hicimos uso de una variación del algoritmo original el cual diseñamos en el lenguaje de programación C++, cabe destacar que la información no fue obtenida de una base de datos sino que en el caso de la información de los estudiantes y otras variables de estudios fueron almacenadas en un documento de texto, en el caso de las carreras, notas y cupos disponibles esta información se encuentra de forma estática en el código fuente del algoritmo.

Para la ejecución de estas variables se utilizaron datos ficticios con el fin de comprobar que dicho algoritmo da siempre como resultados emparejamientos o asignaciones estables.

- Variables de estudios: Preferencias de personas, estudiantes, carreras, cupos y notas.

Resultados

1. De la aplicación del algoritmo Gale- Shapley al problema del matrimonio, obtuvimos los siguientes resultados que cumplen con la definición de estabilidad.

En las siguientes tablas se muestra paso a paso el desarrollo de dicho algoritmo, que puede ser orientado a hombres como a mujeres:

Paso 0: Todos están solteros.

Tabla 16

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_4	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4

Paso 1: Los hombres proponen compromiso a sus mujeres favoritas, de manera que h_1, h_2 y h_3 proponen compromiso a m_1 y h_4 a m_3.

Tabla 17

Algoritmo de Gale- Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1.1	h_1,h_2,h_3		h_4		

Paso 1.2: Las mujeres seleccionan su mejor propuesta, por lo tanto, m_1 selecciona a h_3 y m_3 a h_4, así h_1 y h_2 son rechazados, por tanto, la asignación provisional queda de la siguiente manera:

Tabla 18

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1.1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1,h_2

Paso 2.1: Los hombres que han sido rechazados en una etapa previa le proponen compromiso a la próxima mujer en su lista de preferencias (mujer que no le haya rechazado). Aquí los hombres h_1 y h_2 son los rechazados en el paso anterior, por tanto, van a proponer un compromiso a su segunda opción, de sus listas de preferencias, para ambos es la mujer m_2.

Tabla 19

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1,h_2
2	h_3	h_1,h_2,	h_4		

Paso 2.2: Nuevamente las mujeres con más de una propuesta seleccionan al hombre con mayor preferencia. Por tanto, m_2 rechaza a h_2 y se queda con h_1, dejando la asignación provisional de la siguiente manera:

Tabla 20

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1.1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1,h_2
2.1	h_3	h_1,h_2,	h_4		
2.2	h_3	h_1	h_4		h_2

Paso 3: El paso 2 se repite. El único hombre rechazado es h_2, por tanto, propone matrimonio a su tercera opción, la mujer m_3.

Tabla 21

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1.1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1,h_2
2.1	h_3	h_1,h_2	h_4		
2.2	h_3	h_1	h_4		h_2
3	h_3	h_1	h_2, h_4		

Paso 4: Se repite paso 1.2, nuevamente las mujeres con más de una propuesta seleccionan al hombre con mayor preferencia en su tabla de preferencias, por tanto, la mujer m_3 rechaza a h_2 dado que ya está emparejada con su opción preferida, h_4, dejando la asignación provisional de la siguiente manera

Tabla 22

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1.1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1, h_2
2.1	h_3	h_1, h_2	h_4		
2.2	h_3	h_1	h_4		h_2
3	h_3	h_1	h_4 , h_2		
4	h_3	h_1	h_4		h_2

Paso 5: se repite, el algoritmo para cuando ningún hombre es rechazado y cada hombre queda comprometido con alguna mujer. El hombre h_2 propone matrimonio a su siguiente y última opción, la mujer m_4.

Tabla 23

Algoritmo de Gale-Shapley orientado al Hombre

Pasos	m_1	m_2	m_3	m_4	Solteros
0					h_1,h_2,h_3,h_4
1	h_1,h_2,h_3		h_4		
1.2	h_3		h_4		h_1,h_2
2	h_3	h_1,h_2	h_4		
2.2	h_3	h_1	h_4		h_2
3	h_3	h_1	h_4,h_2		
3.1	h_3	h_1	h_4		h_2
4	h_3	h_1	h_4	h_2	

Paso 6: La mujer m_4 se compromete con h_2, por lo tanto, este es el último paso del algoritmo y obtenemos el siguiente emparejamiento:

$$E = \{(m_1, h_3), (m_2, h_1), (m_3, h_4), (m_4, h_2)\}.$$

2. Otra situación es el caso donde uno de los candidatos prefiere ser soltero, a estar con cualquier persona, esto se aclarará con la ayuda del siguiente ejemplo, donde tenemos un problema de matrimonios estables con; 2 mujeres y 3 hombres, las listas de preferencias se muestran en la tabla 24 y 25.

Tabla 24

Lista de preferencias de Mujeres.

	1	2	3	4
m_1	h_1	h_2	$m_{1-soltero}$	h_3
m_2	h_2	h_3	$m_{2-soltero}$	h_1

Tabla 25

Lista de preferencias de Hombre.

	1	2	3
h_1	m_2	m_1	$h_{1-soltero}$
h_2	m_1	$h_{2-soltero}$	m_2
h_3	m_1	m_2	$h_{3-soltero}$

A continuación, se presentan las nuevas tablas con las personas falsa agregadas para cada persona que prefiera ser soltera:

Tabla 26

Lista de preferencias de Mujeres.

	1	2	3	4	5
m_1	h_1	h_2	$m_{1-soltero}$	h_3	$m_{2-soltero}$
m_2	h_2	h_3	$m_{2-soltero}$	h_1	$m_{1-soltero}$
$h_{1-soltero}$	h_1	h_2	h_3	$m_{1-soltero}$	$m_{2-soltero}$
$h_{2-soltero}$	h_2	h_1	h_3	$m_{1-soltero}$	$m_{2-soltero}$
$h_{3-soltero}$	h_3	h_1	h_2	$m_{1-soltero}$	$m_{2-soltero}$

Tabla 27

Lista de preferencias de Hombre.

	1	2	3	4	5
h_1	m_2	m_1	$h_{1-soltero}$	$h_{2-soltero}$	$h_{3-soltero}$
h_2	m_1	$h_{2-soltero}$	m_2	$h_{1-solero}$	$h_{3-soltero}$
h_3	m_1	m_2	$h_{3-soltero}$	$h_{1-soltero}$	$h_{2-soltero}$
$m_{1-soltero}$	m_1	m_2	$h_{1-soltero}$	$h_{2-soltero}$	$h_{3-soltero}$
$m_{2-soltero}$	m_2	m_1	$h_{1-soltero}$	$h_{2-soltero}$	$h_{3-soltero}$

Tabla 28

Aplicando el algoritmo Gale-Shapley Orientado al hombre

Pasos	m_1	m_2	$h_{1-soltero}$	$h_{2-soltero}$	$h_{3-soltreo}$	Solteros
0						h_1,h_2,h_3,m_{1-S},m_{2-S}
1.1	h_2,h_3,m_{1-S}	h_1, m_{2-S}				
1.2	h_2	m_{2-S}				h_3,m_{1-S},h_1
2.1	h_2, h_1	m_{2-S},h_3,m_{1-S}				
2.2	h_1	h_3				h_2,m_{2-S}, m_{1-S}
3.1	h_1, m_{2-S}	h_3	m_{1-S}	h_2		
3.2	h_1	h_3	m_{1-S}	h_2		m_{2-S}
4.1	h_1	h_3	m_{1-S},m_{2-S}	h_2		
4.2	h_1	h_3	m_{1-S}	h_2		m_{2-S}
5.1	h_1	h_3	m_{1-S}	h_2,m_{2-S}		
5.2	h_1	h_3	m_{1-S}	h_2		m_{2-S}
6.1	h_1	h_3	m_{1-S}	h_2	m_{2-S}	

El emparejamiento estable resultante está dado por:

$$E = \{(m_1,h_1),\ (m_2,h_3),\ (h_{2-soltero},\ h_2)\}.$$

Esto significa que h_2 se queda solo. Él podría tener de pareja a m_2 pero a él prefería quedarse solo más que comprometerse con m_2.

En este caso presentamos un ejemplo donde aplicaremos el algoritmo Galey-Shapley donde supondremos que hay un problema de matrimonio con 3 mujeres y 5 hombres, cuyas listas de preferencias se muestran en la tabla 18 y 19 respectivamente:

Tabla 29

Lista de preferencias de Hombres

	1	2	3
h_1	m_1	m_1	m_2
h_2	m_2	m_2	m_1
h_3	m_3	m_3	m_2
h_4	m_1	m_1	m_3
h_1	m_2	m_2	m_1

Tabla 30

Lista de preferencias de Mujeres

	1	2	3	4	5
m_1	h_5	h_4	h_1	h_2	h_3
m_2	h_1	h_5	h_3	h_4	h_2
m_3	h_5	h_2	h_4	h_1	h_3

En las tablas 31 y 32 se muestran aplicado el algoritmo Gale-Shapley orientado a la mujer y al hombre respectivamente.

Tabla 31

Algoritmo Gale-Shapley orientado hacia la mujer.

Pasos	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	Solteros
0						m_1, m_2,m_3
1	m_2				m_1,m_3	
2	m_2				m_1	m_3
3	m_2	m_3			m_1	

Tabla 32

Algoritmo Gale-Shapley orientado hacia el hombre.

Pasos	m_1	m_2	m_3	Solteros
0				h_1, h_2,h_3, h_4, h_5
1	h_1, h_4	h_2, h_5	h_3	
2	h_4	h_5	h_3	h_1,h_2
3	h_4, h_2	h_5, h_1	h_3	h_2, h_5
4	h_4	h_1	h_3	
5	h_4, h_5	h_1	h_3, h_2	
6	h_5	h_1	h_2	h_3, h_4
7	h_5	h_1, h_3	h_2, h_4	
8	h_5	h_1	h_2	h_3, h_4
9	h_5, h_3	h_1, h_4	h_2	
10	h_5	h_1	h_2	h_3, h_4

En este caso después de aplicar el algoritmo Gale-Shapley, en ambas situaciones los hombres h_3 y h_4 son solteros y el emparejamiento resultante es similar, y está dado por:

$$E = \{(m_1,h_5), (m_2,h_1), (m_3, h_2)\}.$$

3. El algoritmo de Gale- Shapley lo adaptamos al problema de admisión de estudiantes a carreras ofertadas por una universidad, al aplicar este diseño en el lenguaje de C++, estamos simulando la admisión de estudiantes a una universidad, a través de datos ficticios o simulados, puesto que se nos fue imposibles obtener los datos reales ya que estos son de carácter confidencial en esta prestigiosa alma mater.

Este algoritmo tiene presente varias variables que cumplen con las definiciones y teoremas que muestran que, al aplicarse este algoritmo, sin importar la problemática, siempre de como resultados emparejamientos estables.

El código fuente del algoritmo consta de 674 líneas, y está estructurado de la siguiente manera:

- Estudiantes:
    - Nombre: pueden ser implícito o explícito.
    - Opciones de carrera: tiene un orden estricto de acuerdo a las preferencias del optante, siendo tres opciones.

- Nota: Historial académico del estudiante, para ser admitido en la universidad.

➢ Carreras:
  - Nombre: pueden ser implícito o explícito.
  - Nota: método de selección del optante.
  - Cupos: capacidad de cada carrera para admitir estudiantes.

El algoritmo sigue de acuerdo a lo establecido por Gale – Shapley tal cual como asignar parejas como en el problema de matrimonios estables.

A continuación, presentamos el algoritmo escrito en C++:

[*] NK-EST-CARR.cpp

```
#include <windows.h>
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<string.h>
#include<fstream>
using namespace std;

#define MAX 50   //valor maximo que se les dara a los  alumnos

int numerador=0,vector[4], entradas=0,vueltas=0;
void principal(string title)
{
    int val, i;

    val = title.length();

    val = val + 20;


    //imprime asteriscos
    for(i=0; i <=val; i++)
    {
        cout << "*";
    }
    cout << "\n\n";
```

[*] NK-EST-CARR.cpp

```cpp

string nombre, opcion1, opcion2, opcion3, nota;

}estudiantes_ordenados[MAX];

struct alumnos
{

    string nombre, opcion1, opcion2, opcion3, nota;

}estudiantes[MAX];



struct carrera
{
    string cod_carrera, nom_carrera,nota;
    int cupos;
}carreras[MAX];

struct asigna_carrera
{
    string cod_carrera, nom_carrera, nom_stud;

}ubica_carreras[MAX];
```

[*] NK-EST-CARR.cpp

```cpp
void asigna_carreras(){
    entradas=0;
    int res=0,res1=0,res2=0, conta=0, resta=0;
    int aumenta1=9,aumenta2=17;
    int numer1=0, numer2=0;

    //res=estudiantes[3].opcion1.compare(carreras[2].nom_carrera);

    for(int i=0; i<vueltas; i++)
    {
        for(int e=0; e<24; e++)
    {


            res=estudiantes[i].opcion1.compare(carreras[e].nom_carrera);
        numer1=atoi(carreras[e].nota.c_str());
        numer2=atoi(estudiantes[i].nota.c_str());

        if((res==0) && (carreras[e].cupos >=1) && (e<9) && (numer2>=numer1)){
            entradas++;
```

[*] NK-EST-CARR.cpp

```cpp
void asigna_carreras(){
    entradas=0;
    int res=0,res1=0,res2=0, conta=0, resta=0;
    int aumenta1=9,aumenta2=17;
    int numer1=0, numer2=0;

    //res=estudiantes[3].opcion1.compare(carreras[2].nom_carrera);

    for(int i=0; i<vueltas; i++)
    {
        for(int e=0; e<24; e++)
    {


            res=estudiantes[i].opcion1.compare(carreras[e].nom_carrera);
        numer1=atoi(carreras[e].nota.c_str());
        numer2=atoi(estudiantes[i].nota.c_str());

        if((res==0) && (carreras[e].cupos >=1) && (e<9) && (numer2>=numer1)){
            entradas++;
```

F:\NK FINAL\nk.exe

```
*******************************************************

          SISTEMA DE MATRICULAS UNIVERSITARIA

*******************************************************


1.   LISTAR MATRICULAS
2.   ASIGNAR CARRERAS
3.   MOSTRAR TODOS LOS ALUMNOS ASIGNADOS
4.   MOSTRAR CARRERAS DISPONIBLES
5.   SALIR DEL SISTEMA
```

F:\NK FINAL\nk.exe

```
NOMBRE   --> Estudiante 5
NOTA     --> 81
OPCION 1--> Contabilidad
OPCION 2--> Medicina
OPCION 3--> Derecho


NOMBRE   --> Estudiante 2
NOTA     --> 79
OPCION 1--> Derecho
OPCION 2--> Veterinaria
OPCION 3--> Matematica


NOMBRE   --> Estudiante 4
NOTA     --> 70
OPCION 1--> Matematica
OPCION 2--> Ingenieria en sistemas
OPCION 3--> Veterinaria


NOMBRE   --> Estudiante 3
NOTA     --> 40
OPCION 1--> Derecho
OPCION 2--> Medicina
OPCION 3--> Farmacia


Presione una tecla para continuar . . .
```

F:\NK FINAL\nk.exe

```
*************LISTA DE ALUMNOS ASIGNADOS*****************

 NOMBRE -->  Estudiante 1
 CARRERA-->  Telematica

 NOMBRE -->  Estudiante 5
 CARRERA-->  Contabilidad

 NOMBRE -->  Estudiante 2
 CARRERA-->  Veterinaria

 NOMBRE -->  Estudiante 4
 CARRERA-->  Veterinaria

Presione una tecla para continuar . . .
```

```
F:\NK FINAL\nk.exe

NOMBRE CARRERA:       Telematica
NOTA REQUERIDA:       60
CUPOS DISPONIBLES:    1

NOMBRE CARRERA:       Derecho
NOTA REQUERIDA:       40
CUPOS DISPONIBLES:    0

NOMBRE CARRERA:       Medicina
NOTA REQUERIDA:       91
CUPOS DISPONIBLES:    0

NOMBRE CARRERA:       Farmacia
NOTA REQUERIDA:       76
CUPOS DISPONIBLES:    3

NOMBRE CARRERA:       Matematica
NOTA REQUERIDA:       80
CUPOS DISPONIBLES:    1

NOMBRE CARRERA:       Veterinaria
NOTA REQUERIDA:       69
CUPOS DISPONIBLES:    1

NOMBRE CARRERA:       Contabilidad
NOTA REQUERIDA:       77
CUPOS DISPONIBLES:    3

Presione una tecla para continuar . . .
```

Conclusión

Esta investigación tuvo como objetivo la aplicación del algoritmo de Gale – Shapley en el problema de matrimonios estables y otras variantes; donde también se diseñó y se ejecutó en el lenguaje de programación C++, en la asignación de estudiantes a carreras de una universidad, facilitando las asignaciones al ingresar los datos de los estudiantes requeridos para ser ingresados.

En este trabajo hemos tratado principalmente dos de los problemas de asignación, cada uno de ellos con sus correspondientes definiciones, teoremas y procedimiento de aplicación de estabilidad.

Sin embargo, no son los únicos problemas de asignación que se han estudiado y analizados. Hay muchas situaciones de la vida real donde se requiere establecer emparejamientos entre diversos agentes y en donde se aplican procedimientos y algoritmos similares.

Concluimos que los problemas de asignación estables están presentes en nuestro día a día y buscan emparejar agentes de forma estable con el fin de relacionar determinados conjuntos sin que dichas relaciones se rompan.

Recomendaciones

El problema de matrimonios estables tiene diferentes aplicaciones en la vida cotidiana, y por las conclusiones planteadas procedemos a realizar las siguientes recomendaciones:

- Ampliar la investigación y realizar la asignación de muchos a muchos.

- Adaptar el algoritmo de Gale – Shapley al área de recursos humanos de alguna empresa para mejorar la selección del personal.

- Realizar una versión del algoritmo de Gale – Shapley al área de la salud.

- Aplicar el algoritmo en otros lenguajes de programación.

Bibliografía

Bakker. (2016). Matching Theory and the Allocation of Kidney Transplantations. *University of Utrecht*, 58.

Diaz. (2017). Estabilidad en Emparejamientos. *Universidad Politecnica de Madrid*, 72.

Gale, Shapley. (1960-1961). College admissions and the stability of marrige.

Knuth. (1976). Mariages stables et leurs relation avec d´autres problemes combinatoires. *Presses de I´Université de Montréal*, 35.

Roth. ((February 19, 2003)). The origins, history, and design of the resident match. JAMA, the Journal of the American Medical Association. 289.

Roth, S. (1990). *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis.* España: "Cambridge University Press".