

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua

Facultad de Ciencias



Departamento de Estadística – Matemática

León, Nicaragua

Trabajo de Diploma previo para Optar al Título de Licenciado en Estadística

Caracterización de las ganancias netas diarias, obtenida de las ventas de recarga electrónica a celulares, utilizando la Metodología de BOX & JENKINS.

MONOGRAFIA

Presentado por :

Cristian Rafael Pineda Sequeira

Harold Benito Pozo Baca

TUTORES:

MSC. MILTON CARVAJAL

Dr. SIMON CASTILLO ph.D

ASESOR:

Ing. Electrónico. : Mario Berbis

León, Nicaragua.

2008

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo caracterizar la evolución dinámica de las ganancias netas, obtenidas de servicios públicos brindados a la población de la ciudad de León, en REC (recarga electrónica de celulares) diariamente durante el periodo de enero – junio 2008. La presentación se hace en dos secciones: Primero se hizo un análisis descriptivo a través de las estadísticas no paramétricas, el cual determinó que el 80.55% de estos servicios (Domésticos, Pulperías y Cyber), difieren significativamente de sus ganancias medias, obtenidas durante el periodo mencionado; segundo a través de la metodología aportada por los investigadores Box – Jenkins dado que no se dispuso de ningún antecedente que reflejase el comportamiento económico entre estos servicios, se presenta el enfoque de las relaciones económicas a través de la teoría de series de tiempo. Con este fin se determinó que el comportamiento probabilístico que rige las ganancias netas de estos servicios en un 90% es un RUIDO BLANCO GAUSIANO, vale la pena mencionar, que ésto constituye una especificación dinámica de cómo se recibieron los ingresos por estos servicios brindados diariamente a la población de León. Finalmente, el mejor modelo de predicción temporal que representa el comportamiento de las ganancias netas, es generalmente:

$$T(\lambda) \sim \text{NID}(0, \sigma^2 I) \tilde{Y}_t = \varepsilon_{k+n}$$

De esta forma, hemos concluido la caracterización del comportamiento de las ganancias netas a través de una metodología constructiva (Box – Jenkins ó sea no se trata de decir que existe un modelo y ya, sino de mostrar como se establece ésta representación, la cual debe ser mejorada para futuras aplicaciones en otros campos de servicios a la población.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo quiero dar las gracias a dios quien de una manera u otra ilumina el camino a la comprensión y entendimiento.

Sin lugar a dudas el expresar agradecimiento es una de las tareas más complejas que existen, más aún cuando se trata de reconocer a las personas que de una manera u otra han permitido la culminación de este trabajo de investigación. La mayor dificultad radica en nuestra propia naturaleza, determinar que parte de nosotros, de nuestra propia personalidad o intelecto es adquirida, y por tanto ligada al esfuerzo y dedicación de otra persona, no es una labor fácil y por lo tanto, menos aún el poder reconocerlo y agradecerlo, no obstante, Agradezco:

Al Dr. SIMON CASTILLO por gran ayuda, interés y sugerencias en el desarrollo del presente documento.

Al MSC. MILTON CARVAJAL, del departamento de estadística, por su solidaridad en el desarrollo del presente documento.

y a mis maestros por las sabias enseñanzas que me impartieron.

A mi madre

Juana Sequeira Mendoza

Incondicionalmente ante todo

Y a una madre muy linda por su apoyo

CARMEN TORUÑO

Gracias.....

CRISTIAN PINEDA SEQUEIRA

AGRADECIMIENTOS

“La sabiduría se deja hallar radiante e inmarcesible fácilmente la contemplan los que aman y encuentran los que buscan”

(sabiduría 6,12)

Le doy gracias a dios por darme el entendimiento y la fuerza al culminar este camino de preparación.

A mis padres, Avelino Pozo Coronado, y Maria Elena Osorio por haberme apoyado incondicionalmente desde el inicio de mis estudios.

A mi esposa Mariela del Carmen Medrano Téllez por la comprensión que me ha brindado.

Al Dr. SIMON CASTILLO por regalarme un poco de su tiempo y dedicación.

Al Lic. MILTON CARVAJAL por su labor indispensable.

HAROLD POZO BACA

Índice

RESUMEN.....	II
AGRADECIMIENTOS.....	III
LISTAS DE TABLAS.....	IV
LISTAS DE FIGURAS.....	V
APENDICES.....	VI
1 INTRODUCCION.....	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.2 HIPÓTESIS – OBJETIVOS.....	5
2 ASPECTOS TEÓRICOS.....	6
2.1 INTRODUCCION.....	6
2.2 PROCESOS ESTOCASTICOS.....	8
2.3 PROCESO ESTACIONARIO Y ESTRICTAMENTE ESTACIONARIO.....	9
2.4 PROPIEDADES DE LA FUNCION DE AUTOCOVARIANZA.....	10
2.5 FUNCION DE AUTOCOVARIANZA MUESTRAL DE UNA SERIE.....	12
2.6 PROCESOS LINEALES ESTACIONARIOS.....	12
2.6.1 <i>Secuencia Aleatoria y Ruido Blanco</i>	13
2.6.2 <i>Procesos Autoregresivos AR(p)</i>	14
2.6.3 <i>Procesos de Media Móvil MA(q)</i>	17
2.6.4 <i>Procesos Autoregresivos de Medias Móviles ARMA(p,q)</i>	18
2.7 PROCESOS LINEALES NO ESTACIONARIOS.....	19
2.7.1 <i>Proceso Autoregresivo Integrado y de Media Móvil ARIMA(p,d,q)</i>	20
2.7.2 <i>Proceso Estacional Autoregresivo Integrado y de Media Móvil SARIMA (p, d, q) (P, D, Q)s</i>	20
2.8 MODELAMIENTO DE UN PROCESO ARIMA(P,D,Q).....	22
2.8.1 <i>Identificación de un modelo ARIMA(p,d,q)</i>	24
2.8.2 <i>Estimación de un modelo ARIMA(p,d,q)</i>	29
2.8.3 <i>Diagnóstico de un modelo ARIMA(p,d,q)</i>	31
2.8.4 <i>Predicciones con modelos ARIMA(p,d,q)</i>	32
3 ASPECTOS METODOLOGICOS.....	35
3.1 DESCRIPCION DE LA MUESTRA Y DEL PROC. DE LA BASE.....	35
3.2 CONJUNTO DE DATOS.....	36
3.3 CODIFICACIÓN.....	36
3.4 ANALISIS DESCRIPTIVO.....	37
3.5 ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO ESTADÍSTICO.....	37
4 RESULTADOS Y DISCUSIONES.....	38
5 CONCLUSIONES.....	52
6 ANEXO.....	55
6.1 A_1 PRUEBA DE NORMALIDAD DE SHAPIRO Y WILKS.....	56
6.2 A_2 RESULTADO Y DIAGNOSTICO 1.....	57
6.3 A_3 RESULTADO Y DIAGNOSTICO 2.....	62
6.4 A_4 RESULTADO Y DIAGNOSTICO 3.....	66
6.5 A_5 DESCRIPCION DE LA BASE DE INFORMACIÓN MANEJADA.....	68
6.6 A_6 DESCRIPCION DE LOS PUNTOS DE RUPTURA.....	69
7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	98

LISTAS DE TABLAS

Tablas	Páginas
Tabla 1.0 Asignación aleatoria a serie codificada.....	36
Tabla 1.1 Identificación del Modelo Arima (p, d, q).....	41
Tabla 1.2 La estimación de los coeficientes ARIMA (p, d, q).....	43
Tabla 1.3 Diagnostico de los Modelos ARIMA (p, d, q).....	44
Tabla 1.4 Prueba de normalidad Shapiro Wilks para Modelos ARIMA (p, d, q).....	46
Tabla 1.5 Validación del Modelo ARIMA (p, d, q).....	47
Tabla 1.6 Cobertura de los intervalos de predicción al 95%.....	50
Tabla 1.7 Amplitud de predicción de los Modelos Box – Jenkins.....	51
Tabla 1.8 A.1_Prueba de Normalidad de Shapiro y Wilks.....	56
Tabla 1.9 A.2_Estadísticas Simples del comportamiento de las Ganancias _ netas.....	57
Tabla 2.0 A.2_Prueba de Kruskal Wallis.....	58
Tabla 2.1 A.2_Prueba de Mediana Mood.....	58
Tabla 2.2 A.2_Pruebas de Múltiples Rangos de Newman-Keuls.....	59
Tabla 2.3 A.2_Resumen del contraste de múltiples rangos.....	60
Tabla 2.4 A.3_Prueba de rangos de Wilcoxon.....	62
Tabla 2.5 A.3_ Prueba de Autocorrelación Excesiva de Box – Pierce.....	63
Tabla 2.6 A.3_Nivel de variabilidad.....	64
Tabla 2.7 A.4_Prueba de secuencias individuales.....	66
Tabla 2.8 A.6_Resumen de los cortes de venta presentado por las series.....	69
Tabla 2.9 A.6_Resumen del ajuste a los cortes de venta presentado por las series.....	69

LISTAS DE FIGURAS

Figuras	Páginas
Figura 1.1 Serie con Tendencia Homocedástica.....	92
Figura 1.2 Serie sin Tendencia Homocedástica.....	92
Figura 1.3 Serie con Tendencia Heterocedástica.....	93
Figura 1.4 Serie sin Tendencia Heterocedástica.....	93
Figura 1.5 Comportamiento típico Varianza Residual, creciente y decreciente Heterocedástica.....	94
Figura 1.6 Gráfico de Caja y Bigotes de las ganancias netas.....	94
Figura 1.7 Representación gráfica en la selección de Lambda optimo.....	96
Figura 1.8 Flujograma de las etapas del desarrollo Box Jenkins.....	97
Figura 1.9 Gráfico de secuencia cronológico.....	39
Figura 2.0 Función de autocorrelación muestral (FAC).....	40
Figura 2.1 Función de Autocovarianza.....	11
Figura 2.2 Función de autocorrelación de un Ruido Blanco.....	14
Figura 2.3 Ciclo Iterativo Básico de Box and Jenkins.....	23
Figura 2.4 Distribución de frecuencia Residual.....	45
Figura 2.5 Gráfico de Pronósticos.....	48

APENDICES

Apéndices	Páginas
Introducción	70
AP.1 El proceso estacionario se distribuye normalmente.....	71
AP.2 Pruebas de rachas o secuencias.....	74
AP.3 Transformación de potencia lambda.....	79
AP.4 Metodología Box – Jenkins (ampliación practica).....	81
AP.5 Análisis en el dominio del tiempo.....	89

1. INTRODUCCIÓN

En el mundo actual el análisis de series temporales permite; a los empresarios, comerciantes, etc., tomar decisiones basados en hechos determinados; analizar como estará el mercado dentro de dos o tres años, como esta un punto de servicio etc. Aunque ninguna previsión nos va dar una certeza absoluta sobre lo que va ha ocurrir en el futuro mas o menos cercano, siempre pueden ocurrir sucesos esporádicos que anulen totalmente el análisis mas cuidadoso. La función de esta herramienta es sólo la de reducir la incertidumbre con la que debemos tomar una decisión de forma que ésta, en circunstancias normales sea óptima. Tratamos con una metodología muy conocida(Box – Jenkins) que gran parte de sus procedimientos normalmente utilizados, han popularizado los modelos Autoregresivos Integrados de Media Móvil (ARIMA), el cual es un dispositivo altamente refinado de pronósticos a corto plazo, que utilizamos paso a paso para representar el modelamiento probabilístico que rige el comportamiento de las ganancias netas, obtenidas por los servicios de REC(recarga electrónica de celulares) durante el periodo de enero – junio 2008.

Para ilustrar esta caracterización mas ampliamente, se analizó descriptivamente y mediante un análisis estadístico de series de tiempo económica. En primera instancia el análisis descriptivo se realizó a través de las estadísticas de distribución libre,(Kruskal-Wallis, Mediana Extendida (Mood), Rangos Múltiples de Newman - Keuls, Rangos asignados de Wilcoxon), el cual determinó que el 80.55% de los servicios difiere significativamente de sus ganancias netas. Y de otro modo delimitar un patrón o modelo que mejor represente el comportamiento común de las ganancias netas de estos servicios.

Así pues, tratamos de modelizar este comportamiento, usando una metodología que científicamente es demostrable, (como es la estadística); es por eso que la teoría de series temporales basada en la teoría de procesos estocásticos, permite de una manera más amplia explicar esta aleatoriedad, la cual es tal vez la mejor enseñanza del ser en cuanto ser, solo a través de la estabilidad estadística se muestran ciertas características de la naturaleza que aspiramos conocer, es por tanto que la aleatoriedad es el desafío permanente al ser humano.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las ganancias_ netas de los servicios de recarga electrónica a celulares, responden generalmente a un determinado patrón o modelo en común para realizar una previsión o una afirmación sobre su comportamiento observado.

1.2 HIPÓTESIS

Encontrar (mediante el desarrollo de la metodología expuesta por sus autores *Box Jenkins*) un modelo de predicción que nos permita representar de una mejor manera el comportamiento característico de las ganancias netas obtenidas por los servicios públicos REC, en Pulperías, Domésticos y Cyber; durante el periodo de Enero a Junio del 2008.

1.3 OBJETIVOS

Objetivo – General

Caracterizar el comportamiento de las ganancias netas de las ventas de REC(recarga electrónica a celulares) emitida por servicios públicos durante el periodo de enero – junio 2008 en la ciudad de león.

Objetivos – Específicos

- I. Conocer si las ganancias_ netas tienen un efecto significativo sobre la muestra de servidores públicos de REC obtenida del distribuidor principal.

- II. Delimitar un modelo de predicción temporal que mejor represente el comportamiento común de las ganancias_ netas obtenidas por los servidores públicos durante el periodo de enero junio_ 2008.

2. ASPECTOS TEORICOS

2.1 Introducción

En los últimos años, el análisis de series de tiempo, se ha convertido en un método poderoso para analizar conjuntos de datos, cuya característica fundamental, es que se hayan observado a través del tiempo y a intervalos iguales, así los datos usualmente son dependientes entre sí, y cuyos principales objetivos es describir el comportamiento típico de una serie de tiempo $X = P + T + E$, donde P es el componente periódico, T es el componente de tendencia y E es el componente estocástico; y realizar predicciones o interpolaciones lo más confiable posibles, sin importar el área de investigación en que se encuentra.

Por otro lado las características ineludibles de una serie temporal, nos obligaron prácticamente a desarrollar una metodología que surge en los setentas, cuyos autores, Box and Jenkins (1976) establecen los principios fundamentales sobre el tratamiento de las series de tiempo.

En particular los modelos estacionales autorregresivos integrados de medias móviles ARIMA(p,d,q), son una gran generalización del estudio Box-Jenkins que se presenta brevemente. La metodología de Box Jenkins asume que una serie $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, donde \mathbb{Z} es el conjunto de los enteros, sigue un modelo lineal finito dimensional con la distribución de los errores conocido usualmente se asume un proceso gaussiano. Así el modelo ARIMA(p,d,q) es:

$\phi(B)\Phi(1-B)^d \varepsilon_t$, donde: $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, son los operadores ó polinomios de medias móviles, asociados al componente regular. En adición p, d, q, son los parámetros

estructurales del modelo, donde p es el orden del polinomio autoregresivo regular, q es el orden del polinomio de medias móviles regular y el parámetro d el número de diferencias regular, que son necesarias para lograr que la serie de tiempo se convierta en un proceso estacionario.

Por otro lado B es el operador de retrasos, definido por: $BX_t = X_{t-1}$, finalmente $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \text{ iid } \sim N(0, \sigma_z^2)$ esto es, que los errores del modelo se supone que son independiente e idénticamente distribuidos con una distribución normal con esperanza metafórica cero y varianza σ_z^2 constante. Si d se conocen, típicamente el procedimiento de máxima verosimilitud, es empleado para estimar el resto de los parámetros del modelo. Si son desconocidos los parámetros se buscan mediante la minimización de algunos criterios tales como: Akaike o Bayesian Information.

Criterio.

Los valores futuros o predicciones de la serie, se obtienen de la información histórica y con la estructura del modelo. Estas predicciones están dentro del intervalo de predicción:

$$\hat{E}[X_{T+h} | X_1, \dots, X_T] \pm Z \alpha / 2 \left(\hat{\sigma}_z^2 \sum_{j=0}^{h-1} \hat{\Psi}_j^2 \right)^{1/2} \text{ donde } \hat{E}[X_{T+h} | X_1, \dots, X_T] \text{ es predictor lineal usando el}$$

modelo $\phi(B)\Phi(1-B)^d$, $X_t = \theta(B)\Theta(B)\varepsilon_t$; $\hat{\Psi}_j$ son los coeficientes estimados de la representación de medias móviles; σ_z^2 es la varianza estimada de los errores y $Z \alpha / 2$ es la $2/\alpha$ -ésima cuantila de la distribución normal estándar.

2.2 Procesos Estocásticos

En el análisis de series de tiempo es necesario seleccionar un modelo matemático adecuado para la secuencia observada, que nos permita conocer la naturaleza de los valores futuros ó predicciones; de esta manera suponemos que cada observación es un valor realizado de cierta variable aleatoria X_t , así una serie de tiempo $\{x_t, t \in T_0\}$ es entonces una realización de la familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T_0\}$ donde T_0 representa el espacio de parámetros.

Definición.- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T_0\}$ definido sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) , donde Ω es el espacio muestral, F es un sigma álgebra y P representa la probabilidad.

Como X_t es una variable aleatoria, para cada $t \in T$, X_t es una función $X_t(\cdot)$ sobre el conjunto Ω . Por otro lado, para cada $\omega \in \Omega$ fijo, $X(\omega)$ es una función sobre T .

Definición.- Las funciones $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ sobre T , son conocidas como realizaciones de un proceso $\{X_t, t \in T\}$. En adelante usaremos el término de serie de tiempo como una realización de un proceso estocástico.

Definición.- Sea T el conjunto de todos los vectores $\{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T^n : t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1, 2, \dots\}$. Entonces la función de distribución finita dimensional de $\{X_t, t \in T\}$ son las funciones $\{F_t(\cdot), t \in T\}$, definadas por:

$$F_t(x) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \text{ donde } x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n).$$

2.3 Proceso Estacionario y Estrictamente Estacionario

La obtención de las distribuciones de probabilidad del proceso es posible en ciertas situaciones, sin embargo sólo podemos observar una realización del proceso estocástico que es la serie de tiempo. El proceso estocástico existe conceptualmente, pero no es posible obtener muestras sucesivas o realizaciones independientes del mismo, para poder estimar las características intrínsecas del proceso tales como su media, varianza, etc. A partir de su evolución es necesario suponer que las propiedades (distribución de las variables en cada instante) son estables a lo largo del tiempo, esto conduce al concepto de proceso estacionario.

Definición.- Si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$ para cada $t \in T$, entonces la Función de Autocovarianza $\gamma_X(\cdot, \cdot)$ de $\{X_t\}$ esta definido por

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - EX_r)(X_s - EX_s)], \quad r, s \in T$$

Definición.- Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es estrictamente estacionario si la distribución conjunta de probabilidad, de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})'$ y $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})'$ son las mismas para todo entero positivo k y para todo $t_1, \dots, t_k, h \in T$, esto es $F(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})' = F(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})'$.

Definición.- Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$, se dice que es estacionario ó estacionario de segundo orden si:

- (i) $E|X_t|^2 < \infty$ para todo $t \in T$
- (ii) $EX_t = \mu$ constante para todo $t \in T$
- (iii) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r+t, s+t)$ para todo $r, s, t \in T$

Definición.- El proceso $\{X_t, t \in T\}$ es Gaussiano si y solamente si las funciones de distribución de $\{X_t, t \in T\}$ son todas normales multivariadas. Si un proceso gaussiano es estacionario, entonces el proceso será estrictamente estacionario.

En la parte restante de este documento se usará la siguiente notación: el parámetro t (tiempo) discreto, esto es $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y el proceso será escrito como $\{X_t, t \in Z\}$.

2.4 Propiedades de la función de autocovarianza

Sea $\{X_t, t \in Z\}$ un proceso estacionario con función de autocovarianza

$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0) = \gamma_X(h) = Cov(X_{t+h}, X_t)$, para todo $r, s, h, t \in Z$, llamaremos a $\gamma_X(h)$ la función de autocovarianza con retardo h .

Proposición.- La función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ de un proceso estacionario $\{X_t, t \in Z\}$ cumple las siguientes propiedades:

- (i) $\gamma(0) \geq 0$.
- (ii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$, para todo $h \in Z$.
- (iii) $\gamma(h) = \gamma(-h)$, para todo $h \in Z$.

Prueba.

La primera propiedad es un hecho obvio, ya que por definición $Var(X_t) \geq 0$. En la segunda propiedad utilizaremos la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*.

$$|\gamma(h)| = |Cov(X_{t+h}, X_t)| \leq (\text{var}(X_{t+h}))^{1/2} (\text{var}(X_t))^{1/2} = \gamma(0)$$

La tercera propiedad establecida como $\gamma(-h) = Cov(X_{t-h}, X_t) = Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$

Obsevación: (Ergodicidad) Típicamente una función de autocovarianza de un proceso

estacionario tiende a cero esto es $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \text{cov}(X_{t+h}, X_t) = 0$.

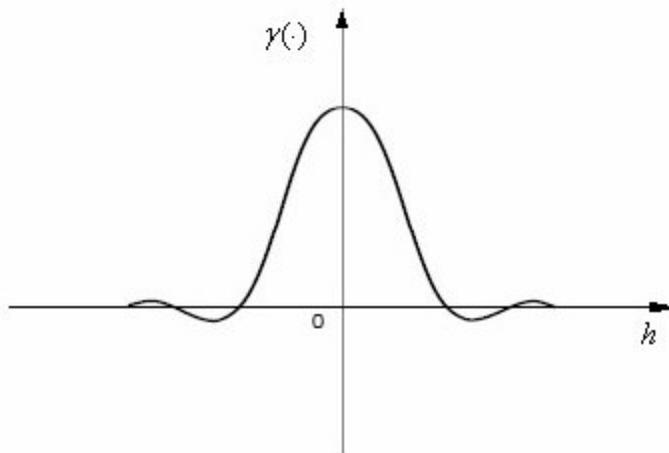


Figura 2.1 Función de Autocovarianza $\gamma(\cdot)$

Definición.- El proceso $\{X_t, t \in T\}$ con función de autocovarianza $\gamma_X(h)$, tiene la función de autocorrelación definida como: $\text{Corr}(X_{t+h}, X_t) = \rho_X(h) = \gamma_X(h)/\gamma_X(0)$, con $|\rho_X(h)| \leq 1$, para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

En adición a la autocorrelación entre X_{t+h} y X_t , es necesario investigar la correlación entre X_{t+h} y X_t después de que sus dependencias lineales sobre las variables que intervienen $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ haya sido removida. Así surge la correlación condicional:

$\text{Corr}(X_{t+h}, X_t | X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$ denominada Autocorrelación parcial en el análisis de series de tiempo.

2.5 Función de autocovarianza muestral de una serie

En un proceso estacionario $\{X_t, t \in T\}$, frecuentemente observamos una serie de tiempo $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ de la cual estimamos la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$, consecuentemente la función de autocorrelación $\rho(\cdot)$, teniendo en cuenta la estructura de dependencia del proceso.

Definición.- La función de autocovarianza muestral de $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ esta definido por:

$$\hat{\gamma}(h) = (1/T) \sum_{j=1}^{T-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}), \text{ y } \hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h) \text{ para } 0 \leq h < T, \text{ donde } \bar{x} \text{ es la media muestral}$$

definida por $\bar{x} = (1/T) \sum_{j=1}^T x_j$.

Una consecuencia importante es la función de autocorrelación muestral definida por:

$$\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}(h) / \hat{\gamma}(0), \quad |h| < T.$$

2.6 Procesos Lineales Estacionarios

Una gran familia de procesos lineales estacionarios paramétricos son utilizados con gran frecuencia en el estudio de las series de tiempo, los más usados son los procesos autoregresivos (AR), medias móviles (MA), y la combinación de estos, llamados procesos ARMA, los que tienen una característica importante dentro de la teoría del predictor lineal.

2.6.1 Secuencia Aleatoria y Ruido Blanco

Consideremos $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en el mismo espacio muestral Ω . Aquí $T = \{1,2,\dots\}$ y así tenemos un proceso de parámetro discreto o una secuencia aleatoria. Para todo $n \geq 1$ podemos escribir:

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \times P\{X_2 = a_2 | X_1 = a_1\} \\ \times \dots \times P\{X_n = a_n | X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}\} \quad (2.1)$$

Donde los a_i representan el espacio de estados que pueden ser tomados como el conjunto de los reales. El caso más simple es cuando tenemos una secuencia $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ de variables aleatorias mutuamente independientes en el cual (2.1) se puede escribir como

$$P\{X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\} \times P\{X_2 = a_2\} \times \dots \times P\{X_n = a_n\} \quad (2.2)$$

Si las variables aleatorias X_1, X_2, \dots , tiene todas la misma distribución, entonces tenemos una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*). En este caso el proceso X_n es estacionario, si $E(X_n) = \mu$, y $Var(X_n) = \sigma^2$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$\gamma(h) = Cov(X_n, X_{n+h}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h = 0 \\ 0, & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

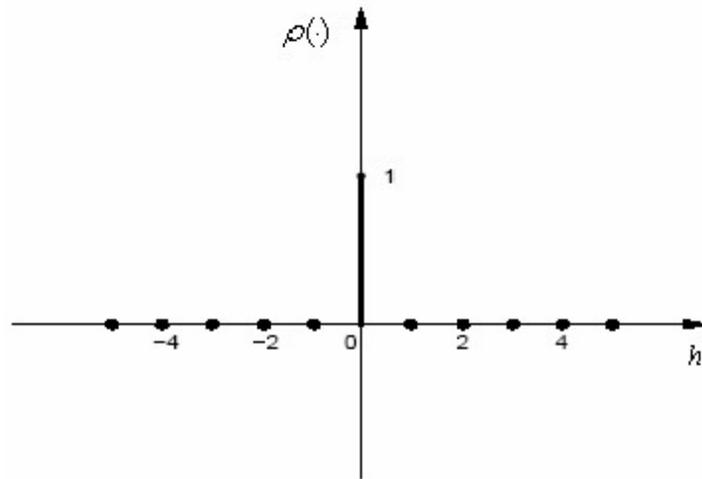
Definición.- El proceso $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ se llama ruido blanco discreto si las variables aleatorias ε_t son no correlacionadas, esto es $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ para $t \neq s$.

Tal proceso será estacionario si $E(\varepsilon_t) = \mu$, y $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, para todo t , si su función de autocovarianza está dada por (2.3).

Obviamente si ε_t son variables independientes, entonces también son no correlacionadas. Una secuencia de variables aleatorias *iid*, es llamada proceso puramente aleatorio.

De ahora en adelante representamos $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ como un ruido blanco y suponemos $E(\varepsilon_t) = \mu = 0$, y se representa por $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$ y en el caso de un proceso puramente aleatorio se representa por $\{\varepsilon_t\} \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$.

Figura 2.2 Función de Autocorrelación de un Ruido Blanco



2.6.2 Procesos Autorregresivos AR(p)

Se dice que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autoregresivo de orden p , se denota por $\{X_t\} \sim AR(p)$ y satisface la ecuación de diferencias:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

Donde $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son parámetros del modelo y $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$. Si seguimos que $E(X_t) = \mu$, y escribimos el proceso de la forma:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Entonces $E(X_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$, y sin perder la generalidad es supuesta cero.

Definiendo el operador de retardo B , a través de $B^s X_t = X_{t-s}$ para $s \geq 1, s \in \mathbb{N}$, entonces si $\mu =$

0, (2.4) puede ser escrita como:

$$\phi(B) X_t = \varepsilon_t \quad (2.6)$$

Donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ es el operador autoregresivo o polinomio autorregresivo de orden p, al proponer una solución para (2.6) del siguiente modo:

$\phi(B) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \psi(B) \varepsilon_t$. Así la solución es:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.7)$$

Donde $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$, y debemos suponer que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ para que (2.7) sea una

solución estacionaria, ó el proceso AR(p), definido por la ecuación $\phi(B) X_t = \varepsilon_t$ se dice ser causal; por otro lado el proceso $\{X_t\} \sim \text{AR}(p)$ que acepta la notación (2.7) se dice que tiene

representación de media móvil infinita. Como $\phi(B)\psi(B) = 1$ entonces los coeficientes ψ_j 's

pueden ser obtenidos en función de los ϕ_j 's. Una condición para que X_t sea estacionario, es que

todas las raíces de $\phi(B) = 0$ caen fuera del círculo unitario, o equivalentemente que $|\phi_j| < 1$ para

$j = 1, 2, \dots, p$, esto es que los valores ϕ_j caigan dentro del círculo unitario [Box Jenkins y

Reinsel, 1994].

Bajo el supuesto de estacionariedad y multiplicando (2.4) por X_{t-h} y tomando esperanzas se tiene:

$$\sigma_x^2 = \gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p} \quad \text{para } h = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) \quad \text{para } h > 0 \quad (2.9)$$

Que son la varianza y la función de autocovarianza del procesos AR(p), respectivamente. De la

misma manera para obtener la función de autocorrelación del proceso AR(p), basta dividir todos los elementos de (2.9) por $\gamma(0)$, esto es:

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2) + \dots + \phi_p \rho(h-p) \quad (2.10)$$

Tomando $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p-1}$ como condiciones iniciales, determinadas a partir de los coeficientes $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p$, la solución de la ecuación (2.10) permite calcular los valores de $\rho(h)$, para $h \geq p$.

Particularizando (2.10) para $h = 1, 2, \dots, p$ se obtiene el sistema de ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \rho_p \end{aligned} \quad (2.11)$$

Resolviendo el anterior sistema resulta que:

$$\phi_p = P_p^{-1} \rho_p \quad (2.12)$$

Donde $\mathbf{P}_p = [\rho_{ij}]$ con $\rho_{ij} = \rho_{|i-j|}$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, $\phi_p = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$,

$$\rho_p = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)'$$

La ecuación (2.12) puede ser utilizada para obtener estimadores de los parámetros ϕ_j 's, sustituyendo las funciones de autocorrelación por sus estimativas. Estos estimadores usualmente son llamados estimadores de Yule-Walker. Una solución general de (2.10), nos permite concluir que la función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de orden p es una mezcla de funciones exponenciales y senoidales amortiguadas.

2.6.3 Procesos de Medias Móviles MA(q)

Decimos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de medias móviles de orden q , se denota por

$\{X_t\} \sim MA(q)$, si satisface la ecuación de diferencias:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.13)$$

Donde $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son parámetros del modelo y $\{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma^2)$. X_t es estacionario con media $E(X_t) = \mu$, y como ε_t son no correlacionados, podemos obtener fácilmente la varianza del proceso:

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \quad (2.14)$$

Sin perder la generalidad supongamos $\mu = 0$, entonces la función de autocovarianza del proceso es:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & \text{si } |h| \leq q \\ 0, & \text{si } |h| > q \end{cases} \quad (2.15)$$

Donde $\theta_0 = 1$, consecutivamente se puede obtener la función de autocorrelación $\rho(h)$ como la razón de $\gamma(h)/\sigma_x$, en particular $\rho(h) = 0$, si $|h| > q$. De manera general el proceso (2.13) puede ser escrito como:

$$X_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad (2.16)$$

Donde $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$ es el operador de media móvil o polinomio de media móvil de orden q , al proponer una solución para (2.16) del siguiente modo:

$$X_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \theta(B)^{-1} X_t = \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \pi(B) X_t = \varepsilon_t$$

Así la solución es:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \varepsilon_t, \quad \pi_0 = 1 \quad (2.17)$$

Donde $\pi(B) = 1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots$, tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, de modo que $\pi(B) = \theta(B)^{-1}$, por tanto los coeficientes π_j pueden ser obtenidos mediante $\pi(B)\theta(B) = 1$, y para satisfacer la condición de invertibilidad, necesitamos que todas las raíces de $\theta(B) = 0$ deben estar fuera del círculo unitario.

2.6.4 Procesos Autorregresivos de Medias Móviles ARMA(p,q)

Decimos que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autoregresivos de medias móviles de orden (p, q) y se denota por $\{X_t\} \sim \text{ARMA}(p, q)$, si para cada $t \in \mathbb{Z}$:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.18)$$

Donde $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son parámetros del modelo, y $\{\varepsilon_t\} \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$, Usando los operadores autoregresivos y de media móvil, definidos anteriormente, podemos escribir (2.18) de la forma siguiente:

$$\phi(B) \tilde{X}_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad (2.19)$$

Donde $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, en adelante se asume que $\mu = 0$; para un proceso $\text{ARMA}(p, q)$ genérico una condición de estacionariedad es la misma que para los procesos $\text{AR}(p)$, esto es, que las raíces de $\phi(B) = 0$ deben estar fuera del círculo unitario, del mismo modo una condición de invertibilidad es la misma que para los procesos $\text{MA}(q)$, esto es, que las raíces de $\theta(B) = 0$, deben estar fuera del círculo unitario.

Considerando $\mu = 0$, luego multiplicando (2.18), por X_{t-h} , y tomando esperanzas obtenemos la función de autocovarianza:

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \dots + \phi_p\gamma(h-p) + \gamma_{x\varepsilon}(h) + \theta_1\gamma_{x\varepsilon}(h-1) + \dots + \theta_q\gamma_{x\varepsilon}(h-q) \quad (2.20)$$

Donde $\gamma_{x\varepsilon}(h)$, es la covarianza cruzada de X_t y ε_t , definida por $\gamma_{x\varepsilon}(h) = E(\varepsilon_t X_{t-h})$, como X_{t-h} sólo depende de los choques ε_t ocurridos hasta el instante $t-h$, tenemos que esta covarianza cruzada sólo es diferente de cero para $h \leq 0$, luego:

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \dots + \phi_p\gamma(h-p), \quad h > q \quad (2.21)$$

Esto es que las autocovarianzas y por tanto las autocorrelaciones, de retardos 1, 2, ..., q , son afectados por los parámetros de medias móviles, pero para $h > q$, tienen el mismo comportamiento que los modelos autorregresivos, una enumeración explícita de la función de autocorrelación para un proceso ARMA(p,q) se puede encontrar en Ramírez y Sastri (1997), en esta publicación se muestra que la función de autocorrelación para un proceso ARMA(q,q) es la función de los θ', ϕ' y σ^2 .

2.7 Procesos Lineales no Estacionarios

La mayoría de series de tiempo presentan una no estacionariedad en media y algunas una no estacionariedad en varianza; esto es, varían sobre translaciones del tiempo. Una de las estrategias para expresar un modelo no estacionario, consiste en tomar diferencias regulares, y/ o diferencias estacionales. En otras ocasiones se requieren de transformaciones no lineales sobre la serie observada, y algunas veces las dos operaciones juntas, siendo el objetivo principal obtener una serie estacionaria que permita la estimación de los parámetros basado en una realización del proceso. Dentro de esta clase de modelos se encuentran los procesos autoregresivos integrados de medias móviles, $ARIMA(p,d,q)$ y los procesos estacionales autoregresivos integrados de media móviles $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$.

2.7.1 Proceso Autorregresivo Integrado y de Media Móvil ARIMA(p,d,q)

Para convertir una serie de tiempo no estacionaria en una serie estacionaria, típicamente se utiliza el operador ordinario de diferencias.

Definición.- Si $\Delta^d X_t$ es un proceso estacionario, decimos que X_t es integrado de orden d y lo denotamos por $X_t \sim I(d)$, donde Δ^d , es el operador de diferencias regulares de orden d , es tal

que : $\Delta^d X_t = (1-B)^d X_t$, $d \in \mathbb{Z}_0^+$,

Definición.- Si $\Delta^d X_t$ sigue un proceso $ARMA(p,q)$, decimos que X_t sigue un modelo $ARIMA(p,d,q)$, esto es:

$$\phi(B)\Delta^d(X_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t \quad (2.22)$$

Sin perder la generalidad, consideramos $\mu = 0$, así (2.22), se reduce a

$$\phi(B)\Delta^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (2.23)$$

De modo equivalente (2.23), se puede escribir como $\phi(B)W_t = \theta(B)\varepsilon_t$, con $W_t = \Delta^d X_t$

observamos que $W_t = \Delta^d X_t \Leftrightarrow X_t = S^d W_t$, donde S es el operador Suma o Integral, tal que

$S = (1-B)^{-1} = \Delta^{-1}$. Así X_t puede ser obtenido sumando o integrando el proceso estacionario

W_t , d veces.

2.7.2 Proceso Estacional Autorregresivo Integrado y de Media Móvil SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s

Cuando una serie de tiempo en estudio tiene intervalos de observación menores a un año, entonces es frecuente que estas tengan variaciones ó patrones sistemáticos cada cierto

periodo, estas variaciones sistemáticas inferiores a un año por ejemplo semestral, mensual, diario, etc. Deben ser captadas en los llamados Factores Estacionales, dentro de la estructura del modelo a construirse.

Las series de tiempo estacionales pueden ser de dos tipos:

- Aditivas.
- Multiplicativas.

Y al mismo tiempo cada una de estas series pueden ser estacionarias o no estacionarias.

Usualmente se presentan con mayor frecuencia los modelos multiplicativos comparados con los modelos aditivos, de esta manera se combinan términos ordinarios del proceso *ARMA* y términos estacionales, así como diferencias regulares y diferencias estacionales; por lo tanto la estructura general de un modelo *SARIMA*(p, d, q)(P, D, Q)_s, es:

$$\phi(B)\Phi(B^s)\Delta^d\Delta_s^D(X_t - \mu) = \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t \quad (2.24)$$

Donde:

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, es el polinomio autorregresivo estacionario de orden p .

$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$, es el polinomio de medias móviles invertible de orden q .

$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{sp}$, es el polinomio autorregresivo estacional de orden

P , estacionario.

$\Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{sQ}$, es el polinomio de medias móviles estacional de

Orden Q , invertible.

$\Delta_s^D = (1 - B^s)^D$, es el operador de diferencias estacionales, con $D \in \mathbb{Z}_0^+$ indicando el número de diferencias estacionales.

s , es el periodo del proceso; y μ es la media del proceso.

Sin perder la generalidad consideramos $\mu = 0$ y $Y_t = (1-B)^d (1-B^s)^D X_t$, entonces (2.24)

queda expresado como:

$$\phi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t \quad (2.25)$$

Así Y_t constituye un proceso $ARMA(p + sP, q + sQ)$.

2.8 Modelamiento de un Proceso $ARIMA(p,d,q)$

En esta parte trataremos de modelar series temporales por medio de procesos autorregresivos integrados de medias móviles $ARIMA(p,d,q)$.

Dado que los procesos estocásticos $ARIMA(p,d,q)$ pertenecen a una familia amplia de procesos lineales, se hace necesario el uso de una estrategia de construcción de modelos, el cual esta constituido de las siguientes etapas:

- ◆ Identificación de la Estructura,
- ◆ Estimación de los Parámetros,
- ◆ Diagnóstico del Modelo.

Este ciclo iterativo fue descrito y popularizado por *Box and Jenkins* (1976), para el estudio de los modelos de series de tiempo que siguen un comportamiento de los procesos $ARIMA(p,d,q)$, y generalizados para los modelos $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$.

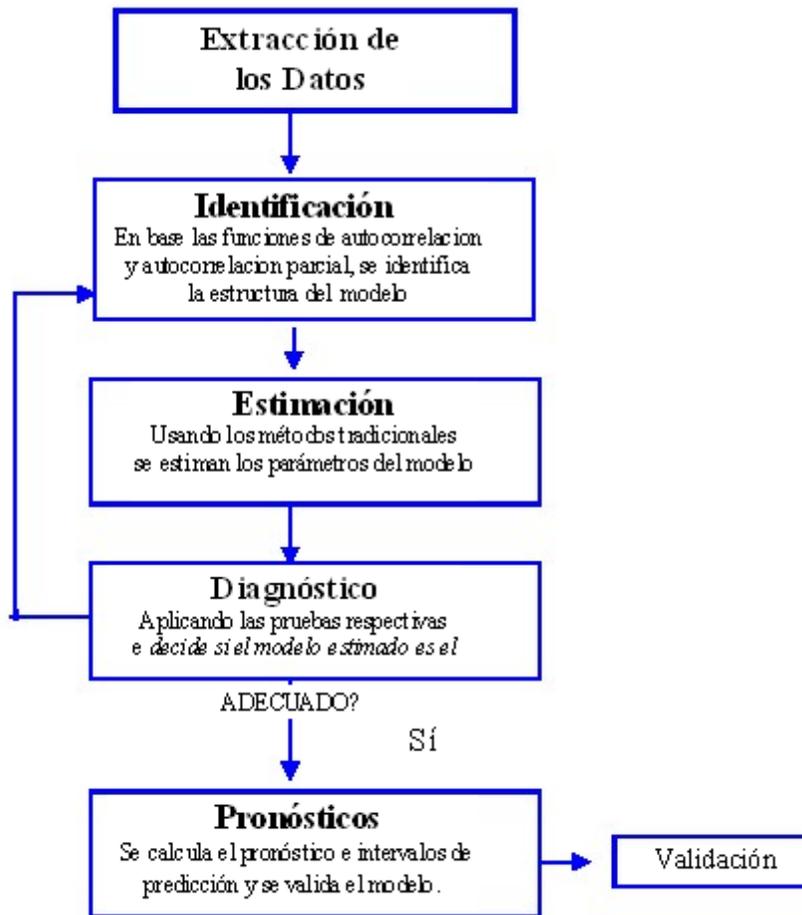


Figura 2.3 Ciclo iterativo básico de *Box y Jenkins*

Cada etapa tiene la respectiva importancia, pero la etapa crucial es la de identificación, ya que requiere mucha experiencia en el análisis exploratorio de los datos, y por lo general se busca identificar modelos parsimoniosos, es decir modelos con el menor número de parámetros. Una vez que el modelaje de las tres etapas ha concluido, se procede a realizar pronósticos con el mejor modelo que se ha identificado. Dentro de la clase amplia de procesos lineales, los procesos que están en equilibrio; esto es, mantienen la misma distribución de probabilidades en todo el intervalo de observación, son los llamados procesos estacionarios, y bajo la literatura de *Box y Jenkins* se denominan, Procesos $ARMA(p,q)$

2.8.1 Identificación de un Modelo ARIMA(p,d,q)

La identificación de un modelo $ARIMA(p,d,q)$ en particular, para el modelamiento de nuestra serie de tiempo, es la fase más crítica del proceso iterativo descrito, así habiendo formulado una clase amplia de procesos estocásticos para las series de tiempo no estacionarias, ahora se deseara fijar o seleccionar valores de d y D diferencias regular y estacional respectivamente, que hacen que la serie de tiempo se vuelva estacionaria, y consecuentemente proponer valores de p, q, P, Q . Sin embargo se recomienda seguir primero el análisis de estabilización en la varianza, mediante la transformación de Box y Cox La cual se puede expresar como:

$$f_{\lambda}(X_t) = \begin{cases} \frac{X_t^{\lambda}}{\lambda}, & \text{si } X_t \geq 0, \lambda > 0 \\ \ln(X_t), & \text{si } X_t > 0, \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Donde λ es el parámetro de transformación, de esta forma se verifica si existe la necesidad de transformar la serie original con el objetivo de estabilizar su varianza. Consecutivamente se toman diferencias regulares o estacionales, según sea el caso, tantas veces sea necesario para obtener una serie estacionaria, de modo que el proceso $\Delta^d \Delta^D X_t$ sea reducido a un $ARMA(p+sP, q+sQ)$ el numero de diferencias d y D , necesarias para que el proceso se torne estacionario es alcanzado cuando la función de autocorrelación muestral y la función de autocorrelación parcial muestral, de $Y_t = \Delta^d \Delta^D X_t$, decrece rápidamente a cero. En las siguientes fases se considera únicamente en caso regular; ya que el caso estacional es una simple generalización del estudio $ARIMA(p,d,q)$.

La identificación en particular de un modelo $ARIMA$ es hecha principalmente en base a las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales muestrales, que se espera representen adecuadamente las respectivas cantidades teóricas, que son desconocidas. Sabemos que la

función de autocorrelación $\rho(h)$ es estimada por:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} = r_h = \frac{c_h}{c_0} \text{ con } h = 0, 1, \dots, T-1 \quad (2.27)$$

Donde $\hat{\gamma}(h) = c_h$ es la estimación de la función de autocovarianza $\gamma(h)$.

$$c_h = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}), \quad h = 0, 1, \dots, T-1 \quad (2.28)$$

Donde $\bar{x} = 1/T \sum_{j=1}^T x_j$, es la media muestral de la serie, una expresión aproximada para la

varianza de r_h , para un proceso estacionario normal esta dado por:

$$\text{var}(r_h) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\rho_j^2 + \rho_{j+h}\rho_{j-h} - 4\rho_h\rho_j\rho_{j-h} + 2\rho_j^2\rho_h^2] \quad (2.29)$$

Para un proceso $MA(q)$ en que las autocorrelaciones son nulas para $j > q$, todos los términos del lado derecho de (2.29) se anulan para $h > q$, excepto el primero, obteniéndose:

$$\text{var}(r_h) = \frac{1}{T} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2 \right], \quad h > q \quad (2.30)$$

Como desconocemos las autocorrelaciones ρ_j las sustituimos por r_j , obteniendo el estimado de (2.30) como:

$$\hat{\sigma}^2(r_h) = \frac{1}{T} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^q r_j^2 \right], \quad h > q \quad (2.31)$$

Para T suficientemente grande y sobre la hipótesis que $\rho(h) = 0$, para $h > q$, la distribución de r_j es aproximadamente normal, con media igual a cero y varianza dada por (2.30), *Jenkins y Watts* (1968). Así es posible construir un intervalo de confianza aproximado para las autocorrelaciones dado por:

$$r_h \pm t_{\gamma} \hat{\sigma}(r_h) \quad (2.32)$$

Donde t_γ es el valor de la estadística t de Student con $T-1$ grados de libertad. En la practica usualmente se asume que $t_\gamma=2$ correspondiendo a $\gamma = 0.95$ aproximadamente, de modo que podemos considerad $\rho(h)$ como significativamente diferente de cero si $|r_h| > 2\hat{\sigma}(r_h)$, para $h>q$. De esta forma podemos caracterizar los diferentes procesos autorregresivos, medias móviles y la combinación de estos dos, y posteriormente identificar sus respectivos órdenes del siguiente modo:

- I. Un proceso $AR(p)$ tiene la función de autocorrelación que decae de acuerdo a una exponencial ó senosoides amortiguadas, extensas.
- II. Un proceso $MA(q)$ tiene la función de autocorrelación finita y presenta un corte en el orden del modelo q , es decir toma valores de cero para $h > q$.
- III. Un proceso $ARMA(p,q)$ tiene la función de autocorrelación que decae de acuerdo a una exponencial ó senosoides amortiguadas extensas en el retardo $q-p$.

Análogamente *Box Jenkins y Reinsel* (1994), proponen la utilización de otro instrumento para facilitar el procedimiento de identificación, la función de autocorrelación parcial, denotemos por ϕ_{pj} el j-ésimo coeficiente de un modelo $AR(p)$ de tal modo que ϕ_{pp} sea el último coeficiente, por (2.10), y por la ecuaciones de *Yule Walker* (2.11), resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

En general:

$$\phi_{pp} = \frac{|\mathbf{P}_p^*|}{|\mathbf{P}_p|} \quad (2.33)$$

Donde \mathbf{P}_p es la matriz de autocorrelaciones, y \mathbf{P}_p^* es la matriz \mathbf{P}_p con la última columna sustituida por el vector de autocorrelaciones. La cantidad ϕ_{pp} que ésta en función de p , es llamada función de autocorrelación parcial, esto es: $Corr(X_{t+h}, X_t | X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$, que es la correlación entre X_{t+h} y X_t después de que sus dependencias lineales sobre las variables que intervienen $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ haya sido removida. Una forma de encontrar las estimaciones de la función de autocorrelación parcial, es sustituyendo en (2.33), los ϕ_{pj} , por sus estimativas

$$\hat{\phi}_{pj}, \rho_j \text{ por sus estimativas } r_j, \text{ obteniendo así: } \hat{\phi}_{pp} = \frac{|\hat{\mathbf{P}}_p^*|}{|\hat{\mathbf{P}}_p|}.$$

Si el número de observaciones n , es suficientemente grande, $\hat{\phi}_{pp}$ tiene una distribución aproximadamente normal, para un proceso $AR(p)$, con varianza dada por:

$$\text{var}(\hat{\phi}_{pp}) = \frac{1}{T} \quad , p \geq p+1 \quad (2.34)$$

De esta forma podemos caracterizar los diferentes procesos autorregresivos, medias móviles y la combinación de estos dos, y posteriormente identificar sus respectivos ordenes del siguiente modo:

- I. Un proceso $AR(p)$ tiene la función de autocorrelación parcial $\phi_{kk} \neq 0$, para $k \leq p$ y $\phi_{kk} = 0$ para $k > p$.
- II. Un proceso $MA(q)$ tiene la función de autocorrelación parcial similar a la función

de autocorrelación de un $AR(p)$, dominada especialmente por comportamientos exponenciales y senoidales amortiguadas.

- III. Un proceso $ARMA(p,q)$ tiene el comportamiento de la función de autocorrelación parcial similar a la función de autocorrelación parcial de un media móvil puro [Morettin, 2004].

Así mismo para T grande y sobre la hipótesis que un proceso sea $AR(p)$, $\hat{\phi}_{jj}$ tiene distribución aproximadamente normal, con media cero y varianza dado por (2.34), de modo que consideramos $\hat{\phi}_{jj}$ significativamente diferente de cero, si:

$$|\hat{\phi}_{jj}| > \frac{1.96}{\sqrt{T}} \approx \frac{2}{\sqrt{T}}, \text{ para } j > p \quad (2.35)$$

Así queda determinado los intervalos de confianza para los estimadores de la función de autocorrelación parcial.

Existen formas alternativas de identificación de modelos $ARMA(p,q)$, la idea es escoger los órdenes p y q que minimicen una cantidad:

$$P(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + (p+q) \frac{C(n)}{n} \quad (2.36)$$

Donde $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ es el estimado de la varianza residual obtenida ajustando un modelo $ARMA(p,q)$,

$C(n)$ es una función de tamaño de la serie, la cantidad $(p+q) \frac{C(n)}{n}$, es denominado término penalizador, que aumenta cuando el número de parámetros aumenta y cuando la varianza residual disminuye. Existen algunos procedimientos de identificación que minimizan las funciones penalizadoras particulares así tenemos:

- Criterio de Información Akaike (AIC) *Akaike*, sugiere escoger un modelo cuyos

órdenes p y q minimizan: $AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{2(p+q)}{n}$, donde $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ es el estimador de

máxima verosimilitud de la varianza residual bajo el modelo $ARMA(p, q)$. Existen correcciones para mejorar el comportamiento del AIC, en el sentido de disminuir la probabilidad de seleccionar un orden mayor que el verdadero, [Morettin,

2004].

- Criterio de Información de Akaike Corregido (AICC) *Hurvich and Tsai* (1989) proponen una corrección para el AIC que en el caso de un proceso autorregresivo esta dado por:

$$AICC(p) = AIC(p) + \frac{2(p+1)(p+2)}{n-p+2}, \text{ con } 0 \leq p \leq p_{\max}. \text{ Este resultado se puede generalizar}$$

para un modelo autorregresivo estacional [Morettin, 2004].

- Criterio de Información Bayesiano (BIC) Sugiere minimizar el criterio de

información bayesiano dado por: $BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + (p+q) \frac{\ln n}{n}$ [Morettin, 2004].

2.8.2 Estimación de un Modelo ARIMA(p,d,q)

Teniendo identificado un modelo tentativo para nuestra serie temporal, el siguiente paso es estimar sus parámetros, los métodos de mínimos cuadrados y máxima verosimilitud pueden ser usados para este propósito.

Para un modelo general estacionario $ARMA(p, q)$, dado por:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

donde $\mu, \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)'$ son parámetros del modelo, $\{\varepsilon_t\} \sim N^{iid}(0, \sigma^2)$

ruido blanco, la función de densidad de probabilidad conjunta de $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$, esta dado por:

$$f(\varepsilon | \mu, \phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2\right] \quad (2.37)$$

Reescribiendo el modelo $ARMA(p, q)$ como:

$$\varepsilon_t = (X_t - \mu) - \phi_1(X_{t-1} - \mu) - \phi_2(X_{t-2} - \mu) - \dots - \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

podemos escribir la función de verosimilitud de los parámetros $(\phi, \mu, \theta, \sigma^2)$. Sea

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)', \text{ y asumimos que las condiciones iniciales } \mathbf{X}_* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)', \text{ y}$$

$$\varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)', \text{ la función condicional Log-verosimilitud ésta dada por:}$$

$$\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma^2) = \frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{S_*(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma^2} \quad (2.38)$$

Donde $S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\phi, \mu, \theta | \mathbf{X}_*, \varepsilon_*, \mathbf{X})$, es la función condicional de la suma de

cuadrados. Las cantidades $\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$ las cuales maximizan la ecuación (2.38) son llamados

estimadores de máxima verosimilitud condicionales. Desde que $\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma^2)$ envuelve la

data solamente a través de $S_*(\phi, \mu, \theta)$, estos estimadores son los mismos que los

estimadores de mínimos cuadrados condicionales, obtenidos de minimizar la función suma de

cuadrados condicionales $S_*(\phi, \mu, \theta)$.

Hay pocas alternativas para especificar los valores iniciales \mathbf{X}_* y ε_* . Basados en la

presunción que $\{X_t\}$ es estacionario y $\{\varepsilon_t\} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, podemos reemplazar el X_t desconocido por la media muestral \bar{X} , y el ε_t desconocido por su valor esperado cero. Para el modelo $ARMA(p, q)$ también podemos asumir que $\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1} = \dots = \varepsilon_{p+1-q} = 0$ y calcular ε_t para $t \geq p+1$, así la función condicional de suma de cuadrados se simplifica en:

$$S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2(\phi, \mu, \theta | X), \text{ el cual es usado por la mayoría de programas de}$$

computadoras. Luego de obtener los estimadores de los parámetros $\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$, el estimador de

$$\sigma^2, \text{ esta dado por: } \hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta})}{n - (2p + q + 1)}. \text{ Para tratar los modelos } SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s, \text{ la}$$

estimación de los parámetros se comporta de manera analógica a lo presentado, únicamente ingresando en el modelo parámetros estacionales [Morettin, 2004].

2.8.3 Diagnóstico de un Modelo ARIMA(p,d,q)

Luego de la estimación de los parámetros la tarea se centra en verificar si el modelo representa ó no adecuadamente los datos. Una técnica que puede ser utilizada es el superajustamiento que consiste en estimar un modelo con parámetros extras y examinamos si estos son significativos, y también si, su inclusión disminuye significativamente la varianza residual. Este método está basado en la experiencia. Así mismo existen técnicas alternativas como las que se describe a continuación:

- Test de Autocorrelación Residual. luego de estimar los parámetros, los

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\Theta}^{-1}(B)\phi(B)\Phi(B)Y_t, \text{ son llamados residuos, si el modelo es adecuado, los } \hat{\varepsilon}_t$$

deben estar próximos a ε_t , y por tanto deben ser aproximadamente no correlacionados; si

indicamos que \hat{r}_k , son las autocorrelaciones de los residuos $\hat{\varepsilon}_t$, deberíamos tener $\hat{r}_k = 0$, en

particular $\hat{r}_k \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, donde n es el número efectivo de observaciones. De este modo, una

comparación de \hat{r}_k con los límites aproximados $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$, muestran una indicación general de

un posible comportamiento de un ruido blanco en ε_t .

- Test de Ljung-Box (1978). Es una prueba para las autocorrelaciones de los residuos estimados, que a pesar de no detectar ciertas especificaciones en el comportamiento de ruido blanco, puede indicar que esos valores son muy altos; esta prueba es una variante de la versión original del test de *Box and Pierce*. Si el modelo es apropiado, la estadística de prueba

es: $Q(K) = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{r}_k^2}{(n-k)}$, tiene una distribución Chi-cuadrado con $K-p-q$ grados de

libertad (χ_{K-p-q}^2) , la hipótesis de ruido blanco para los residuos es rechazada para valores altos

de $Q(\cdot)$. La mayoría de programas de computadoras utilizan este test.

Finalmente si se cumple con los pasos anteriores realizando un análisis exhaustivo en cada uno de ellos, el próximo paso es poder realizar pronósticos [Uriel, 1985].

2.8.4 Predicciones con Modelos ARIMA(p,d,q)

Queremos pronosticar valores X_{T+h} , teniendo observaciones hasta el instante T , usando un

modelo *ARIMA*; sea $\varphi(B) = \phi(B)\Delta^d = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}$, llamemos $\hat{X}_T(h)$ a la predicción de X_{T+h} , con origen en T y h pasos adelante. Se puede probar que la predicción con error cuadrático medio mínimo esta dada por la esperanza condicional de X_{T+h} dado el pasado $X_T, X_{T-1}, X_{T-2}, \dots$, esto es :

$$X_T(h) = E\left(\varphi_1 X_{T+h-1} + \dots + \varphi_{p+d} X_{T+h-p-d} + \theta_0 + a_{T+h} + \theta_1 a_{T+h-1} + \dots + \theta_q a_{T+h-q} \mid X_T, X_{T-1}, \dots\right) \quad (2.39)$$

Donde $a_{T+h}, a_{T+h-1}, \dots, a_{T+h-q}$, representan los residuales de la serie diferenciada [Morettin, 2004]. Para calcular las predicciones usamos los hechos:

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X_{T+j} \mid X_T, X_{T-1}, \dots) &= \begin{cases} X_{T+j}, & \text{si } j \leq 0 \\ \hat{X}_T(j), & \text{si } j > 0 \end{cases} \\ \text{b) } E(\varepsilon_{T+j} \mid X_T, X_{T-1}, \dots) &= \begin{cases} \varepsilon_{T+j}, & \text{si } j \leq 0 \\ 0, & \text{si } j > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego para calcular las predicciones tenemos que

- Sustituir las esperanzas pasadas ($j \leq 0$) por los valores conocidos X_{T+j} y ε_{T+j}
- Sustituir las esperanzas futuras ($j > 0$) por las predicciones $\hat{X}_T(j)$ y 0.

Escribiendo el modelo en la forma infinita de medias móviles, se prueba que el error predicción está dado por:

$$e_T(h) = X_{T+h} - \hat{X}_T(h) = \varepsilon_{T+h} + \psi_1 \varepsilon_{T+h-1} + \dots + \psi_{h-1} \varepsilon_{T+1} \quad (2.40)$$

Donde los coeficientes ψ_j provienen de $\psi(B) = \varphi^{-1}(B)\theta(B)$, así la varianza del error de predicción está dada por:

$$V(h) = \text{var}(e_T(h)) = \sigma^2(1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{h-1}^2) \quad (2.41)$$

Como $e_T(1) = X_{T+1} - \hat{X}_T(1) = \varepsilon_{T+1}$, los errores de predicción a un paso adelante son no correlacionados, suponiendo que todos los parámetros del modelo son conocidos. En la práctica se utiliza el modelo estimado para realizar las predicciones, así (2.41) es

$$\hat{V}(h) = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2 \right).$$

Finalmente para determinar un intervalo de confianza para X_{1+h} será necesario hacer una suposición adicional para los residuos, esto es: $E(\varepsilon_t) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$, para todo t y $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$, $t \neq s$, además $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, para cada t . Se sigue que dados los valores pasados y presentes de la serie $X_T, X_{T-1}, X_{T-2}, \dots$, la distribución condicional de X_{T+h} será

$$N\left(\hat{X}_T(h), V(h)\right). \text{ Así } Z = \frac{X_{T+h} - \hat{X}_T(h)}{[V(h)]^{1/2}} \sim N(0,1); \text{ fijando un coeficiente de confianza } \gamma,$$

podemos encontrar un valor $Z_{\alpha/2}$, tal que $P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = \gamma$, así

$$\hat{X}_T(h) - Z_{\alpha/2} [V(h)]^{1/2} \leq X_{T+h} \leq \hat{X}_T(h) + Z_{\alpha/2} [V(h)]^{1/2}, \text{ es el intervalo de confianza para}$$

predicción X_{T+h} . Sustituyendo $V(h)$ por su estimación $\hat{V}(h)$, tenemos:

$$\hat{X}_T(h) - Z_{\alpha/2} \hat{\sigma}^2 \left[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2 \right]^{1/2} \leq X_{T+h} \leq \hat{X}_T(h) + Z_{\alpha/2} \hat{\sigma}^2 \left[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2 \right]^{1/2} \quad (2.42)$$

Así tenemos construido el intervalo de confianza para la predicción X_{T+h} .

3. ASPECTOS METODOLOGICOS

La caracterización de este panel de series en ganancias _ netas en la venta de recarga electrónica a celulares, como bien es sabido, la información que aquí se maneja(ver anexo_5) es una medida numérica que en términos de ganancias _ netas reflejan una magnitud física de la materia que aquí se describe, caracterizado por una magnitud matemática, que análogamente tratamos mediante el análisis de series de tiempo estadístico, esto nos lleva a procesos que en síntesis se realizan en el orden siguiente: “Fuente de dólares electrónicos (distribuidor principal)”, “canal de comunicación”, “emisor (punto de venta del servicio)” y receptor (cliente que solicita el servicio)” que hace que la naturaleza física de este proceso se exprese mediante estados de evolución aleatoria, es decir estocásticos.

3.1 Descripción de la muestra y del procesamiento de la base de datos

El presente trabajo asume que todas las series de tiempo en ganancias _ netas (variable en estudio) son continuas, registradas en tiempo discreto, y por ser unidimensionales representan en promedio una misma área de trabajo. En la obtención de los datos (ver anexo _6) se presentan días de corte de ventas por los servicios emisores (no se registro ventas en la base de datos electrónica) lo que se solucionó tomando el promedio del vecino mas cercano para cada observación no registrada; en virtud de aquellas series que se presentaron cortes los primeros días en el servicio, y ante la falta de información que compensara este ajuste se decidió eliminar las cuatro primeras observaciones cronológicas de las series, y de esta manera se solucionó el problema de valores perdidos en 67.73% de las series.

La muestra representa el 19.2% (9 servidores) de la población de emisores de la fuente distribuidor _ principal (47 servidores) del periodo de enero _ junio 2008. La construcción de la base de datos, se realizo con rutinas en Excel (ver anexo_5) para la edición y análisis en SPSS y MINITAD versión 15 para los resultados. El estudio es retrospectivo, basado en la comercialización de telecomunicaciones de tiempo aire (dólares) de celulares, de la empresa Claro – Enitel móvil, León, Nic.

3.2 Conjunto de datos

La base de datos para el presente análisis proviene de un sistema de registro electrónico continuo, es decir activo en todo momento, que registró el comportamiento de las ventas _ netas en dólares durante el periodo de enero_ junio 2008, de la muestra de servicios emisores.

3.3 Codificación

La codificación utilizada se presenta en la tabla siguiente:

Tabla 1.0_ La asignación aleatoria a la serie codificada señala el tipo de negocio

SERVIDOR	TIPO DE NEGOCIO	UBICACIÓN
S-1	PULPERIA	Empalme quezalguaque 2 Km. hacia al sur
S-2	CYBER	Panadería león dorado 1c arriba.
S-3	PULPERIA	Ig. Ermita de Dolores 1c abajo, 1c al sur
S-4	DOMESTICO	Restaurante el capote 1c abajo
S-5	DOMESTICO	Antigua Texaco Guido 2c abajo
S-6	PULPERIA	Colonia Avellán
S-7	DOMESTICO	Empalme de telica 2 Km. hacia carretera Chinandega
S-8	PULPERIA	Ig. Ermita 2c abajo, ½ c al sur
S-9	DOMESTICO	De donde fue migracion ½ c al norte

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

3.4 Análisis descriptivo

El análisis descriptivo se lleva a cabo utilizando software de distribución libre no paramétricas (ver Anexo_2) debido a falta de normalidad de todas las series (ver anexo_1).

3.5 Análisis de series de tiempo estadístico (modelamiento de Box y Jenkins)

Previamente consideramos procesos estacionarios auto regresivos e integrados de media móvil en sentido estricto o débil con ajuste correctivo por transformación y diferenciación previa, para aproximar nuestras series de tiempo de ganancias netas mediante la metodología Box y Jenkins que se describe (ver figura 1.9) paso a paso en el análisis de resultado.

4. RESULTADOS – DISCUSIONES

Modelamiento Box y Jenkins

Para aproximar los resultados descritos en anexo _3 se representara las 9 series con ajuste correctivo de cortes de venta. Mediante este tratado que se describe paso a paso a continuación.

- **Visualización:** Se presentan las series descritas en la tabla 1.0 en ganancias _netas. La figura 1.9 presenta a las series de tiempo con sus componentes regulares y el componente estocástico presente en todas las series con ganancias _netas (véase Fig. de 1.1 a 1.4).

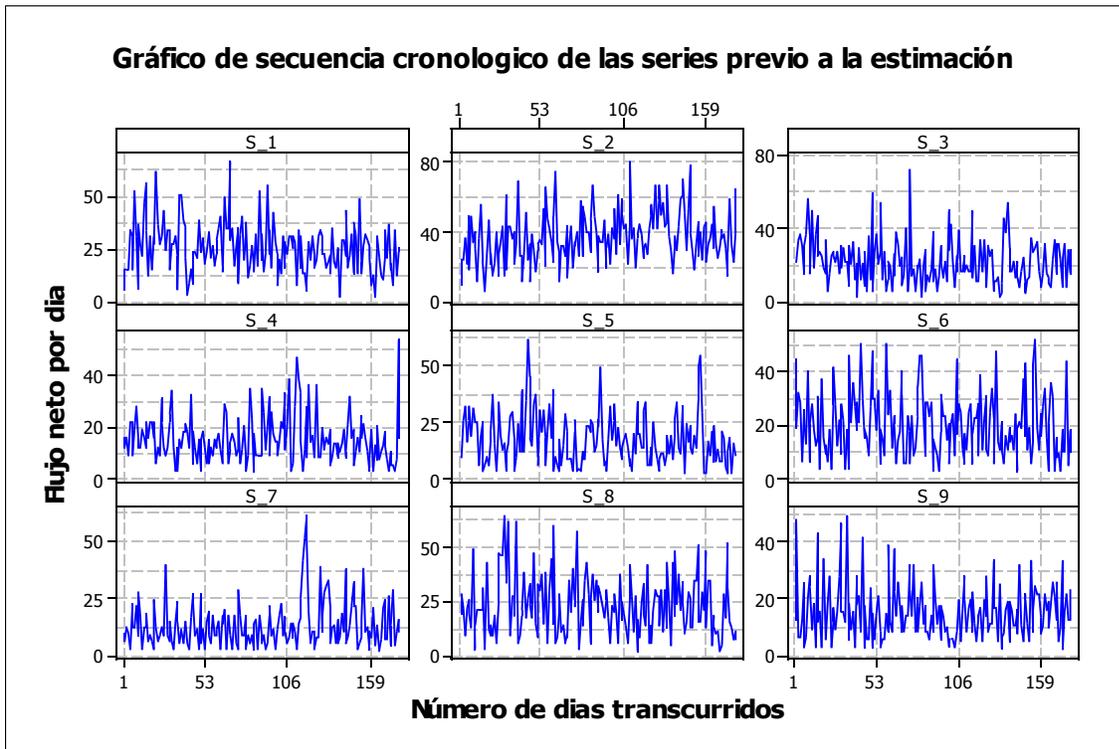


Figura 1.9 Gráfico de frecuencia cronológico enero/08 – junio/08.

- **Identificación:** Las 9 series son identificadas utilizando las diferentes técnicas descritas en el ciclo iterativo de Box y Jenkins. La función de auto correlación muestral presentada en la figura 2.0 para $K = N/4$, presenta intervalos de confianza al 95% con una desviación típica asociada a cada coeficiente con varianza no constante (véase Fig. 1.5).

Las series 2, 3, 4, 5, 7 y 9 revelan coeficientes no nulos con un co-movimiento significativo, implicando que las series de tiempo pudieran no ser completamente aleatoria

(ruido blanco), en cambio las series 1, 6 y 8 si presentan este comportamiento. Sin embargo examinando las auto correlaciones excesivas y aleatoriedad (véase anexo 3 y 4) presentadas por las series 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 confirmamos que el comportamiento de estas series es completamente aleatorio(ruido blanco), es decir que las series 3, 4, 5, 7 y 9 presentan un escenario con aparentes coeficientes no nulos o retardos atípicos, de modelos ARIMA (p,d,q) de la forma (0,0,0); utilizando los procedimientos convencionales y alternativos para conocer los ordenes en primera instancia del modelo ARIMA (p,d,q) de la forma $\phi(B)\Delta^d(X_i-\mu) = \theta(B)\varepsilon_i$ de la serie S – 2 con periodicidad 24.

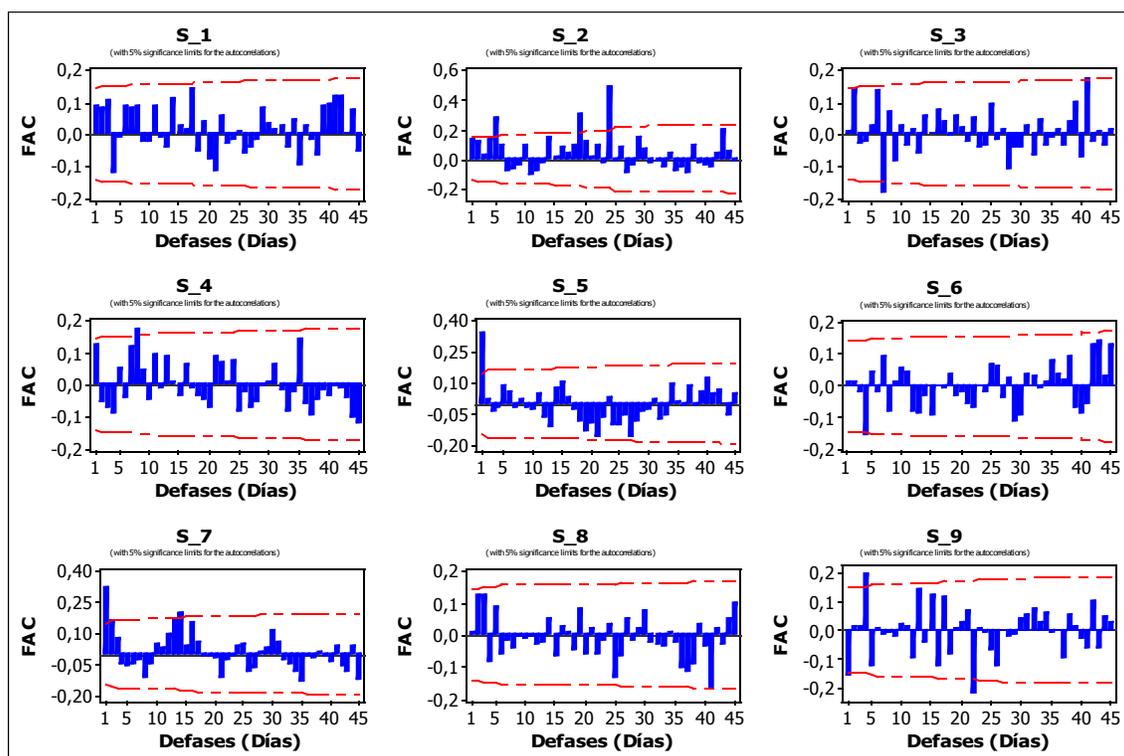


Figura 2.0: Función de Autocorrelación Muestral(FAC).

Se obtienen los resultados generales, descritos en la tabla 1.1, donde se presenta lo siguiente:

Las series de tiempo necesitaban una transformación adecuada Box y Cox descrita en (2.26) y

detallada en apéndice_3, mediante el parámetro de transformación λ .

Que estabilizara la varianza (homocedasticidad) y

Que corrigiera la asimetría (normalidad).

Las series de tiempo necesitan ser estacionarias en sentido estricto o débil, para ello se verifica mediante la prueba descrita por Shapiro – Wilks apéndice_1.

Note que las series no necesitan un termino constante en el modelo paramétrico que relaciona el valor más reciente con los valores y ruido previos del proceso, es decir que ($\mu = 0$) y el termino libre queda nulo ($r_0 = 0$) dado que la series son centradas o de desviaciones respecto a su nivel μ .

Tabla 1.1 Identificación de los modelos ARIMA (p, d, q) de todas las series de tiempo en ganancias _ netas del periodo ene/08 – jun/08.

MODELOS BOX JENKINS						
<i>Series</i>	<i>Transformación Box & Cox</i>	<i>Mean</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>q</i>	RMSE
S_1	0,620	0	0	0	0	2,13776
S_2	0,507	0	6	1	0	0,022
S_3	0,367	0	0	0	0	0,640709
S_4	0,277	0	0	0	0	0,34136
S_5	0,390	0	0	0	0	0,732672
S_6	0,468	0	0	0	0	1,10941
S_7	0,135	0	0	0	0	0,121692
S_8	0,443	0	0	0	0	1,07495
S_9	0,241	0	0	0	0	0,625505

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

Finalmente los órdenes de las series de tiempo estacionarias p, q se identifican mediante el estudio de la función de autocorrelación y autocorrelación parcial muestrales de las series estacionarias, así como también un criterio de selección alternativo como es la raíz del error cuadrático promedio RMSE.

Nótese que en el caso de la serie $S - 2$, tras un ajuste por transformación $T 1/x T (\tilde{y}_t^\lambda)$, la serie presenta un comportamiento de ruido blanco, es decir que el modelo con su pasado no posee memoria. Sin embargo se intentó trabajar con diferenciación estacional de primer orden a longitud 24 que no obtuvo mejores resultados que mediante un media móvil simple a longitud 24 ($MAS^{(24)}$), donde la serie responde a un mejor modelo para representarla $\nabla^1 1/2(\tilde{y}_t) = 1.268\tilde{y}_{t-1} - 1.226\tilde{y}_{t-2} + 1.222\tilde{y}_{t-3} - 0.857\tilde{y}_{t-4} + 0.679\tilde{y}_{t-5} - 0.473\tilde{y}_{t-6} + 0.022$, de esta manera se determinó que no era necesaria una diferenciación estacional. Este modelo nos permite explicar el comportamiento de las ganancias netas de REC para este servicio que dependen directamente de lo que sucede cada 24 días, es decir que la correlación entre la información separada k unidades de tiempo mas allá hace posible hacer previsiones directamente hasta la distancia temporal de 24 días sin que afecte el comportamiento de los días normales, así pues una vez ajustada la serie con MAS^{24} y ∇^1 se puede decir que se repite la estructura separada en no mas de $K=6$ unidades de tiempo del ultimo momento de recogida de los datos.

- **Estimación:** luego de la identificación de los órdenes, un apropiado método de estimación (mínimos cuadrados condicionales), se estiman los parámetros de los modelos identificados en la tabla 1.1.

Tabla 1.2 Estimación de los coeficientes ARIMA (p, d, q) de todas las series de tiempo en ganancias _ netas del periodo ene/08 – jun/08.

COEFICIENTES ARMA REGUALES Y PARÁMETROS ALTERNANTES										
<i>Series</i>	<i>p</i>						<i>d</i>	<i>q</i>	Varianza estimada de ruido blanco	Desviación estándar estimada de ruido blanco
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>				
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	4,57003	2,13776
S_2	1,268	-1,226	1,222	-0,857	0,679	-0,473	1	0	0,000473633	0,0217631
S_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,410509	0,640709
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0,116527	0,34136
S_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,536808	0,732672
S_6	0	0	0	0	0	0	0	0	1,23079	1,10941
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0148088	0,121692
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1,15552	1,07495
S_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0840286	0,289877

Nótese que las series 2, 5, 6 y 7 fueron estimadas con 147, 152, 163 y 161 gl.

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

- **Diagnostico:** Esta fase esta dedicada íntegramente a los residuales de los modelos ajustados en las fases anteriores, los resultados se presentan en la tabla 1.3, donde se presentan los promedios de los residuales, los promedios de los errores absolutos *MAE*, los errores estándar estimados de los residuales *SE (res)*, los grados de libertad efectivos para estimar los errores estándar, los estadísticos *Box – Pierce* para las 45 primeras auto correlaciones *Q (45)* y sus respectivos *P – valores*.

Tabla 1.3 Diagnostico de los modelos ARIMA (p,d,q) identificado de todas las series de tiempo en ganancias _ netas del periodo ene/08 – jun/08.

ESTADÍSTICOS DE LOS RESIDUOS						
<i>Series</i>	<i>Mean</i>	<i>MAE</i>	<i>SE(res)</i>	<i>DF</i>	<i>BOX-PIERCE Q(45)</i>	<i>p-valor</i>
S_1	0,000	1,70583	0,161	178	38,3531	0,74768
S_2	0.002	0,016049	0.021	154	34,9211	0,860436
S_3	0,000	0,520438	0,048	178	24,2578	0,446938
S_4	0,000	0,265674	0,026	178	21,6496	0,600174
S_5	-0,048	0,603079	0,730	152	37,6458	0,773562
S_6	0,034	0,903104	1,109	163	42,7093	0,569474
S_7	0,008	0,099577	0,122	161	26,7587	0,985963
S_8	0,000	0,877438	0,081	178	0,208459	0,834866
S_9	0,000	0,237202	0,022	178	0,148899	0,881628

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

Por otro lado en la figura 2.4 se muestran los histogramas de los residuales, para los modelos ajustados, presentando varios tipos de estos un comportamiento simétrico.

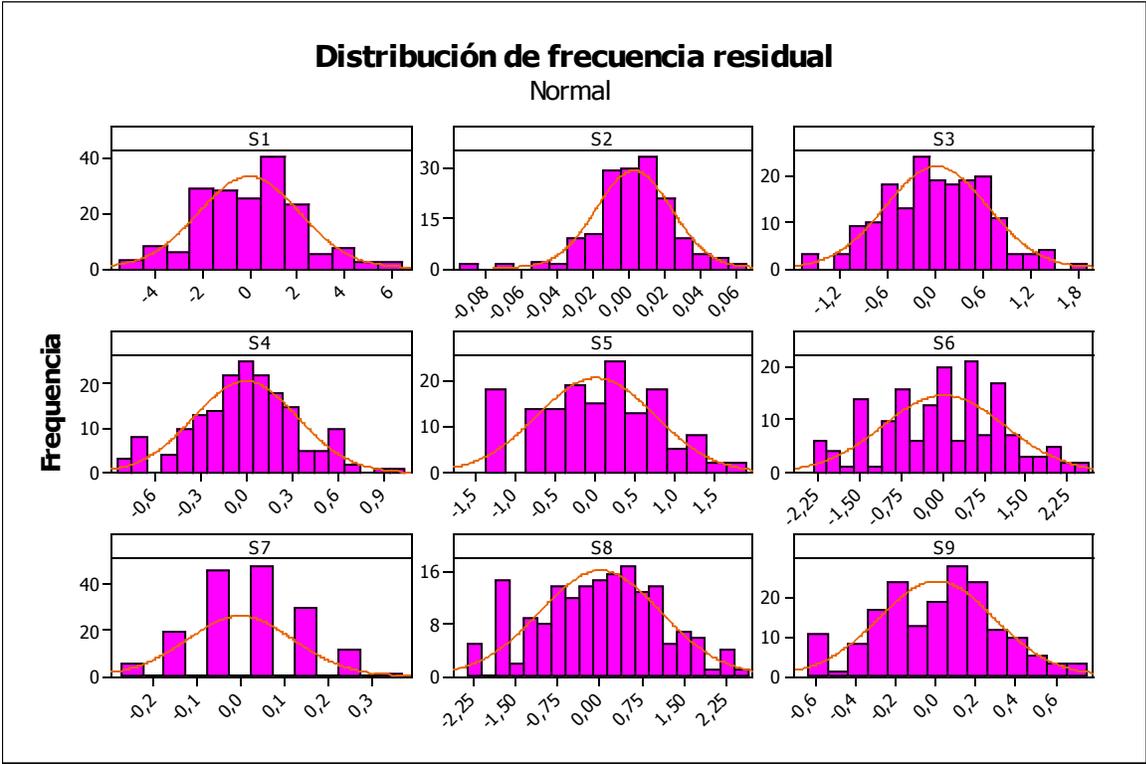


Figura 2.4 Histogramas de Residuos de los Modelos Ajustados para las series de venta de recarga electrónica en ganancias netas.

Para comprobar si verdaderamente los residuos no están distribuidos según una distribución normal, en la tabla 1.4 nos muestra la prueba de normalidad de Shapiro – Wilks, donde la hipótesis nula se refiere a que los datos siguen una distribución normal, mientras que la alternativa dice lo contrario.

Tabla 1.4 Prueba de normalidad de Shapiro – Wilks para los modelos ARIMA (p, d, q).

Series	Shapiro - Wilks	P - Valor
S_1	0,990	0,242
S_2	0,968	0,001
S_3	0,993	0,557
S_4	0,987	0,087
S_5	0,986	0,007
S_6	0,984	0,06
S_7	0,989	0,001
S_8	0,989	0,195
S_9	0,986	0,066

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

Los residuos de las series 1, 3, 4, 6, 8 y 9, siguen una distribución normal bajo la prueba de *Shapiro – Wilks* con un nivel de significación de 5%.

La metodología *Box y Jenkins* mostrada para las 9 series de tiempo representa modelos adecuados para describir los datos, consecuentemente bajo ciclo iterativo se pueden obtener predicciones a h pasos adelante, donde $h \in \mathbb{N}$.

Usualmente como se describe en la metodología *Box Jenkins*, estos modelos son buenos

predictores a periodos cortos, por tal motivo se debe escoger un h adecuado para las predicciones. No obstante previamente se realiza una validación para el modelo propuesto ARIMA(6,1,0) de la tabla 1.1 de la S – 2 , para finalmente realizar el objetivo principal de la metodología *Box Jenkins* de realizar predicciones 6 periodos hacia delante como una muestra de prueba n =6; que comprende del 1jul/08 al 6jul/08 para la predicción. La tabla 1.5 muestra los resultados tras validar los últimos 6 periodos.

Tabla 1.5 Validación del modelo representivo ARIMA (6, 1, 0)

	<i>Periodo de</i>	<i>Periodo de</i>
<i>Estadístico</i>	<i>Estimación</i>	<i>Validación</i>
RMSE	0,0176764	0,0394039
MAE	0,0130353	0,031976
MAPE		
ME	0,00371134	-0,00684679
MPE		

Fuente: El registro electrónico de ventas de los servidores públicos del periodo de enero _junio 2008.

Esta tabla también resume el desempeño del modelo actualmente seleccionado en ajustar datos históricos. Se muestra:

- (1) la raíz del error cuadrado medio (RMSE)
- (2) el error absoluto medio (MAE)
- (3) el porcentaje de error absoluto medio (MAPE)
- (4) el error medio (ME)
- (5) el porcentaje de error medio (MPE)

Cada uno de los estadísticos está basado en los errores de pronóstico uno-adelante, los cuales son las diferencias entre los datos al tiempo t y el valor pronosticado al tiempo t-1. Los primeros tres estadísticos miden la magnitud de los errores. Un mejor modelo daría un valor más pequeño. Los últimos dos estadísticos miden el bias. En este caso, el modelo fue estimado a partir de los primeros 154 datos; 6 datos al final de la serie de tiempo fueron retenido para validar el modelo.

La tabla muestra los estadísticos de error tanto para los periodos de estimación como de validación.

Si los resultados son considerablemente peores en el periodo de validación, esto significa no parece que el modelo se desempeñará tan bien como se esperaría de otra manera, para pronosticar el futuro. NOTA: el MAPE y el MPE no fueron calculados debido a que el valor más pequeño es menor o igual a 0. Por lo tanto el modelo es valido para realizar pronósticos, que a continuación se muestran en la figura 2.5.

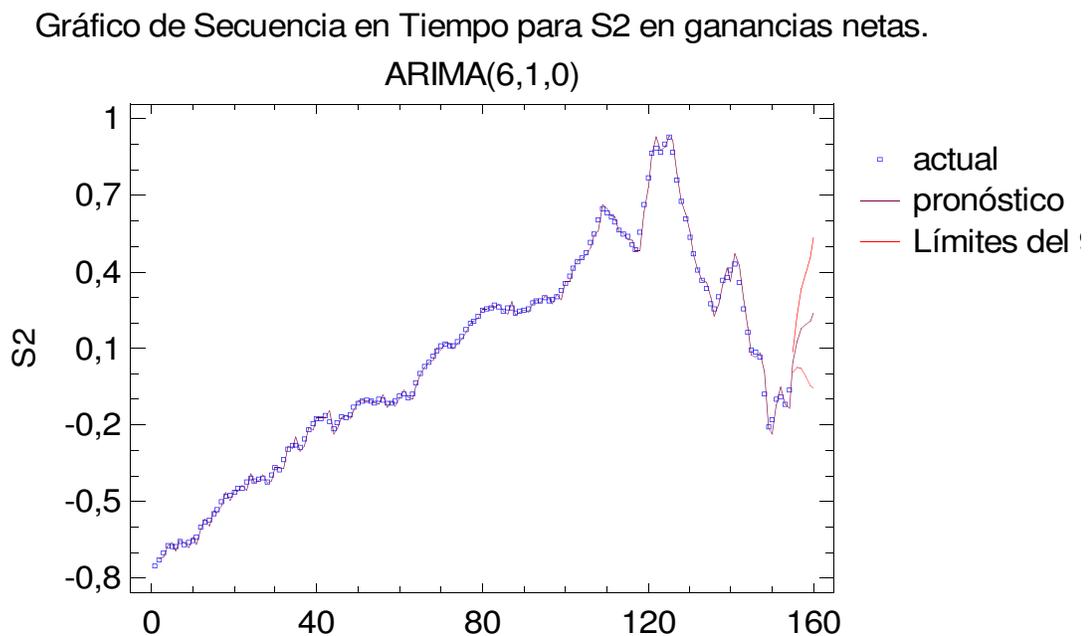


Figura 2.5 Gráfico de pronósticos ARIMA (6, 1, 0) para 6 periodos adelante de 1jul/08 a 6jul/08.

En la figura 2.5 se realizan las predicciones con sus respectivos intervalos de confianza con un nivel de significancia de 5% para los periodos 1-jul/08 a 6-jul/08, bajo el modelo ajustado, estas predicciones aparentemente siguen un patrón determinista.

- **Previsión**

Precisión de un intervalo de predicción.

La precisión de un intervalo de predicción, se estima usando el porcentaje de cobertura de las observaciones, dado por: $C_S = \# \{Q_S (\alpha/2) \leq X_{T+h} \leq Q_S (1 - \alpha/2)\} / h$, simultáneamente se puede calcular la amplitud del intervalo de predicción, usando $L_S = Q_S (1 - \alpha/2) - Q_S (\alpha/2)$, donde S representa la serie utilizada. Para nuestro conjunto de datos se evaluara la precisión y amplitud de cada intervalo de predicción las diferentes series. Ya comprobado esto, se destaca para cada modelo final su aprobación, consecuentemente en todos los casos se centraron los residuales, teniendo así media cero y varianza constante.

La cobertura del intervalo de predicción obtenido, se encuentra en la tabla 1.6; las diferentes coberturas se hicieron con $h = 6$, reteniendo $R = 6$ y $R = 12$ observaciones respectivamente, donde R es el numero de observaciones retenidas para pronosticar con 6 días adelante.

Tabla 1.6 Cobertura de los Intervalos de Predicción de 95 % de los Modelos Box – Jenkins, con R = 6, 6 y h = 6.

PORCENTAJE DE CORBERTURAS DE INTERVALOS DE PREDICCIÓN AL 95% DE CONFIANZA DE LOS MODELOS BOX – JENKINS, CON h = 6		
<i>Series</i>	MODELOS BOX – JENKINS	
	R = 6	R = 12
S_1	-	-
S_2	100.0	100.0
S_3	-	-
S_4	-	-
S_5	-	-
S_6	-	-
S_7	-	-
S_8	-	-
S_9	-	-

La tabla 1.6 presenta el porcentaje de cobertura de los intervalos de predicción al 95 % de confianza, observando los resultados la cobertura de los modelos ajustados mediante la metodología Box – Jenkins presenta una buena cobertura. Validando así las predicciones para los periodos 1-jul/08 a 6-jul/08.

Finalmente se muestran las amplitudes promedios de los intervalos de predicción al 95 % de confianza de los modelos Box Jenkins.

Tabla 1.7 Amplitud de Intervalos de Predicción de los Modelos Box – Jenkins, con R = 6, 12 y h = 6.

PROMEDIOS DE AMPLITUDES DE INTERVALOS DE PREDICCIÓN AL 95% DE CONFIANZA DE LOS MODELOS BOX – JENKINS, CON h = 6		
Series	MODELOS BOX – JENKINS	
	R = 6	R = 12
S_1	-	-
S_2	0.18063957	0.17516569
S_3	-	-
S_4	-	-
S_5	-	-
S_6	-	-
S_7	-	-
S_8	-	-
S_9	-	-

De acuerdo al argumento anterior, las ganancias netas del servicio S – 2 con transformación de potencia lambda y con ajuste temporal MAS²⁴,

son razonablemente un proceso autoregresivo integrado de orden (1), es decir MAS²⁴ $\nabla^1 T$ (1/2) $\{\tilde{y}_t\} = 1.268\tilde{y}_{t-1}-1,226\tilde{y}_{t-2}+1,222\tilde{y}_{t-3}-0,857\tilde{y}_{t-4}+0,679\tilde{y}_{t-5}-0,473\tilde{y}_{t-6}+0.022$, que nos indica que las ganancias netas obtenidas a una distancia temporal de cada 24 días regularmente o periódicamente, depende directamente de lo que se venda los últimos 6 días.

5. CONCLUSIONES

Conclusiones:

La caracterización de las ganancias netas diarias, obtenidas durante el periodo de enero – junio 2008 por servicios de telefonía móvil de la empresa CLARO de recarga electrónica de celulares (REC) en la ciudad de León, se llevo a cabo a través de una metodología mixta, que, por una parte su enfoque principal nos permitió distinguir de forma objetiva los mecanismos de ajuste que tienden a eliminar muchas de las dificultades y problemas básicos que en forma relativamente fácil sin perder estadísticamente muchos rasgos de la teoría usual se abordan; y de una manera mas remota describir el fenómeno. Que presenta las siguientes características.

- 1_ El comportamiento de las ganancias netas en el servicio de REC, nos indica al 95% de confianza que existen 6 grupos homogéneos, es decir que las ganancias netas obtenidas con valores que oscilan entre 12 córdobas y 16 córdobas con 20 centavos netos, 16 córdobas con 80 centavos y 25 córdobas con 21 centavos netos, etc, son estadísticamente significativas para un 19,4%; dicho de otro modo las ganancias netas obtenidas diariamente durante el periodo de enero – junio 2008 difieren en un 80.55% de los servicios al 95% de confianza.
- 2_ El comportamiento que rige en los datos es un ruido blanco gaussiano en el 90% de las series, es decir que su tendencia estocástica esta guiada por un proceso puramente aleatorio invariante en el tiempo, ya sea por simetría, o estrictamente normal mediante la prueba de Shapiro – Wilks. Es de notar que la estructura de los datos disponibles de estos servicios no transmiten ninguna información relevante a una distancia como la considerada, ya que la historia de los datos con su pasado no posee memoria en el

100% de su estructura.

Por otra lado los patrones de co – movimiento mostrado por el servicio S – 2, presentan un ruido blanco gaussiano por simetría, además no captura toda estructura que genera a los datos, por correspondencia entre funciones lo proyectamos con el co – movimiento revelado en la muestra presentado a futuro; del cual se determinó que las ganancias netas de cada 24 días dependen directamente de lo que se vende los últimos 6 días.

Finalmente el mejor modelo de predicción temporal que representa el comportamiento de las ganancias netas, es generalmente un ruido blanco gaussiano.

$$T(\lambda) \sim \text{NID}(0, \sigma^2 I) \tilde{Y}_t = \epsilon_{k+n}$$

De esta forma hemos concluido la caracterización del comportamiento de las ganancias netas a través de una metodología constructiva (Box – Jenkins), o sea no se trata de decir que existe un modelo y ya, sino de mostrar como se establece esta representación, la cual debe ser mejorada para futuras aplicaciones en otros campos de servicios a la población.

6. ANEXO

A_1 PRUEBA DE NORMALIDAD DE SHAPIRO Y WILKS

Resultado de la evaluación de la estacionariedad de segundo orden $Z_t \sim \text{NINEP}(0, \sigma^2 I)$, en sentido Estricto o Debil de n observaciones para $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$, a través de la prueba de Shapiro – Wilks.

Tabla 1.8_ Prueba de normalidad de Shapiro – Wilks.

Función estabilizadora de la σ_t^2	S	Estadísticas simples	Prueba de Shapiro-Wilk
		Transformación	P-valor ($\alpha = 0.05$)
Ninguna	1a		0,001
	2a		0,012
	3a		0,000
	4a		0,000
	5		0,000
	6		0,000
	7		0,000
	8a		0,000
	9a		0,000
	S	λ	
Transformación de potencia Z_t^λ	1a	0,620	0,241
	2a	0,507	0,946
	3a	0,367	0,557
	4a	0,277	0,087
	5	0,390	0,013
	6	0,468	0,052
	7	0,135	0,006
	8a	0,443	0,196
	9a	0,241	0,066
	S		
B (backward) $\nabla = 1 - L$	1a	1	0,291
	2a	1	0,193
	3a	1	0,239
	4a	1	0,008
	5	1	0,409
	6	1	0,256
	7	1	0,236
	8a	1	0,106
	9a	1	0,111

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

Observación: como se logra observar las series son estacionarias en sentido estricto o segundo orden dado que se distribuyen normalmente, la cual exigimos a las series que cumplan la condición $Z_t \sim \text{NINEP}(0, \sigma^2 I)$.

Donde: “a” representa el ajuste en las series, en cobertura de los días de corte de servicio.

ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS DE LAS GANANCIAS _NETAS.

Variable dependiente: Ganancia _neta

Factor: SERVIDORES

Número de observaciones: 1534

Número de servicios: 9

Este procedimiento ejecuta un análisis de varianza de un factor para la ganancia _neta sin ajuste de corte de venta, además de diferenciarlos significativamente comparando los valores medios de las ganancias _netas para los 9 diferentes niveles de SERVIDOR.

Tabla 1.9 Estadísticas Simples de la tendencia de las ganancias _netas de los servicios públicos de recarga electrónica

<i>SERVIDOR</i>	<i>Recuento</i>	<i>Mediana</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Cuartil Inferior</i>	<i>Cuartil Superior</i>	<i>Sesgo Estandarizado</i>	<i>Curtosis Estandarizada</i>
S_1	178	25,0	2,6	66,7	16,8	32,4	3,33116	1,97219
S_2	182	36,2	6,2	81,2	27,0	44,8	2,81305	0,369906
S_3	175	21,0	2,7	72,5	13,5	30,8	5,84241	4,10586
S_4	178	13,5	2,6	54,6	8,7	19,6	6,60897	5,86413
S_5	154	14,0	2,6	49,3	8,4	20,8	4,1392	1,3538
S_6	167	18,6	2,6	51,0	10,8	27,0	3,52791	0,109948
S_7	164	11,0	2,6	48,0	6,2	16,8	7,78154	7,21383
S_8	164	21,7	2,6	62,0	13,25	31,1	3,29271	-0,196793
S_9	172	14,5	2,6	49,6	8,55	20,3	5,94667	3,29253
Total	1534	18,2	2,6	81,2	10,8	29,0	16,4956	8,67852

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

La tabla 1.9 provee información vital de los diferentes servicios públicos REC, que reflejan las características elementales entorno a las ganancias netas obtenidas por cada muestra, donde se observa por ejemplo para el servicio S₂ con un rango de valores que oscilan entre 6,20 y 81,20 córdobas con centavos netos, que la mitad de las ganancias netas son de al menos 27 córdobas netos por día y que el 25% de estas obtienen mas de 44,8 córdobas con centavos netos por día. EL sesgo estandarizado y la curtosis estandarizada muestran que los valores del rango se encuentra fuera del intervalo [-2, 2] para los 9 niveles de servidor, indicando significativamente falta de normalidad en los datos, lo cual viola el supuesto de que los datos provienen de

distribuciones normales (ver anexo 1). Se evalúa de este modo a través de las estadísticas de distribución libre.

Tabla 2.0 Prueba de Kruskal-Wallis

Estadístico = 403,521 Valor-P = 0,0

SERVIDOR	Tamaño Muestra	Rango Promedio
S_1	178	962,396
S_2	182	1230,12
S_3	175	832,583
S_4	178	577,48
S_5	154	590,198
S_6	167	740,895
S_7	164	463,046
S_8	164	854,265
S_9	172	598,866

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

La prueba de Kruskal-Wallis evalúa la hipótesis de que las medianas de las ganancias _netas dentro de cada uno de los 9 niveles de SERVIDOR son iguales. Primero se combinan los datos de todos los niveles y se ordenan de menor a mayor. Luego se calcula el rango (rank) promedio para los datos de cada nivel. Puesto que el valor-P es menor que 0,05 en ambos casos, existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medianas con un nivel del 95,0% de confianza. Para determinar cuáles medianas son significativamente diferentes de otras, se presenta el contraste de mediana Mod o extendida.

Tabla 2.1 Prueba de la Mediana de Mood

Estadístico = 293,163 Valor-P = 0,0 Gran mediana = 18,2

SERVIDOR	Tamaño de Muestra	n<=	n>	Mediana	LC inferior 95,0%	LC superior 95,0%
S_1	178	54	124	25,0	22,4	28,0
S_2	182	15	167	36,2	33,1603	39,1466
S_3	175	78	97	21,0	16,8	23,1627
S_4	178	128	50	13,5	12,1628	15,0
S_5	154	100	54	14,0	12,0	16,6068
S_6	167	83	84	18,6	16,2	21,0
S_7	164	133	31	11,0	9,0	12,4
S_8	164	65	99	21,7	18,889	25,2147
S_9	172	114	58	14,5	12,4	16,2

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

La prueba de medianas de Mood evalúa la hipótesis de que las medianas de todas las 9 muestras son iguales. Lo hace contando el número de observaciones en cada muestra, a cada lado de la mediana global, la cual es igual a 18 córdobas con 20 centavos netos, en ambos casos. Puesto que el valor-P para la prueba de Chi-cuadrada es menor que 0,05, las medianas de las muestras son significativamente diferentes con un nivel de confianza del 95,0%. Donde también se incluyen (están disponibles) los intervalos del 95,0% de confianza para mediana, basados en los estadísticos de orden de cada muestra. Para finalizar y determinar que medianas son significativamente diferentes de otras, realizamos los estadísticos de Múltiples rangos de Newman-Keuls.

Tabla 2.2 Pruebas de Múltiples Rangos de Newman-Keuls

Método: 95,0 porcentaje Newman-Keuls

	\$ Casos	Media	Grupos Homogéneos
S 7	164	12,6604	X
S 4	178	15,1989	XX
S 5	154	15,5448	XX
S 9	172	15,8733	X
S 6	167	19,588	X
S 3	175	22,5726	X
S 8	164	23,4445	XX
S 1	178	25,6669	X
S 2	182	37,1533	X

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

Tabla 2.3_ Resumen del contraste de múltiples de rangos de Newman- Keuls.

<i>Contraste</i>	<i>Sig.</i>	<i>Diferencia</i>
S 1 - S 2	*	-11,4864
S 1 - S 3	*	3,09428
S 1 - S 4	*	10,468
S 1 - S 5	*	10,122
S 1 - S 6	*	6,07883
S 1 - S 7	*	13,0065
S 1 - S 8		2,22234
S 1 - S 9	*	9,7936
S 2 - S 3	*	14,5807
S 2 - S 4	*	21,9544
S 2 - S 5	*	21,6085
S 2 - S 6	*	17,5653
S 2 - S 7	*	24,4929
S 2 - S 8	*	13,7088
S 2 - S 9	*	21,28
S 3 - S 4	*	7,3737
S 3 - S 5	*	7,02777
S 3 - S 6	*	2,98455
S 3 - S 7	*	9,91221
S 3 - S 8		-0,871941
S 3 - S 9	*	6,69932
S 4 - S 5		-0,345929
S 4 - S 6	*	-4,38915
S 4 - S 7		2,53851
S 4 - S 8	*	-8,24564
S 4 - S 9		-0,674379
S 5 - S 6	*	-4,04322
S 5 - S 7		2,88444
S 5 - S 8	*	-7,89971
S 5 - S 9		-0,328451
S 6 - S 7	*	6,92766
S 6 - S 8	*	-3,85649
S 6 - S 9	*	3,71477
S 7 - S 8	*	-10,7841
S 7 - S 9	*	-3,21289
S 8 - S 9	*	7,57126

* indica una diferencia significativa.

Estas tablas aplican un procedimiento de comparación múltiple para determinar cuáles medias son significativamente diferentes de otras. La mitad inferior de la salida muestra las diferencias estimadas entre cada par de medias. El asterisco que se encuentra al lado de los 29 pares indica que estos pares muestran diferencias estadísticamente significativas con un nivel del 95,0% de confianza. En la parte superior de la tabla 2.2, se han identificado 6 grupos homogéneos según la alineación de las X's en columnas. No existen diferencias estadísticamente significativas entre aquellos niveles que compartan una misma columna de X's. El método empleado actualmente para discriminar entre las medias es el

procedimiento de comparación múltiple de Newman-Keuls. Con este método hay un riesgo del 5,0% al decir que uno o más pares son significativamente diferentes, cuando la diferencia real es igual a 0.

DIAGNOSTICO : Basados en los contrastes exhibidos en la tabla 2.1, la cual indica una X al grupo de medias en ganancias netas dentro de las cuales no hay diferencia estadísticamente significativa. La primera columna contiene una X para las ganancias netas de los servicios S-4 al S-7, indicando que ganancias medias no son significativamente diferentes. De igual modo, las ganancias netas de los servicios S-4 al S-5 no muestran diferencias significativas. Por otro lado, la ganancia media del servicio S – 2, es significativamente mayor que la ganancia media de cualquier otro servicio. Para mayores detalles ver figura 1.6.

Dado que se han ordenado las medias en orden creciente y luego se han separado en grupos de acuerdo con valores de la distribución de rangos estudentizados. Al final, las medias se separan en grupos homogéneos dentro de los cuales no hay diferencias significativas.

ESTADISTICAS DESCRIPTIVAS DE LAS GANANCIAS _NETAS DE LAS SERIES AJUSTADAS.

**Tabla 2.4 _Prueba de rangos asignados de Wilcoxon o Prueba U de muestras pareadas¹.
SERVIDOR, Recuento y P-valor (bilateral)²**

SERVIDOR	Recuento	P-valor (bilateral) ³
S_1 – S_1a	178	1,000
S_2 – S_2a	178	1,000
S_3 – S_3a	178	1,000
S_4 – S_4a	178	1,000
S_5 – S_5a	178	< 0,0001
S_6 – S_6a	178	< 0,0001
S_7 – S_7a	178	< 0,0001
S_8 – S_8a	178	1,000
S_9 – S_9a	178	1,000
Total	1602	

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

Esto significa que hay una diferencia significativa en el ajuste correctivo de ganancias netas en un 33.33% de las series ajustadas, implicando una falta ajuste para las series S = 5, 6 y 7.

¹ Hipótesis nula: Es que la suma de los rangos es nula. Esto es, que la diferencia entre un sentido y otro es la misma, es decir, que son equivalentes, tienen la misma mediana y la misma distribución continua

² $\alpha = 0.05$

³ $\alpha = 0.05$

Tabla 2.5 Prueba de autocorrelación excesiva de Box – Pierce⁴ (modificada Ljung – Box) SERVIDOR, Recuento y P-valor (bilateral)⁵

SERVIDOR	Recuento	P-valor (bilateral) ⁶	
Z _t ^λ	S 1a	178	0,749576
	S 2a	178	1,9691E-11
	S 3a	178	0,795742
	S 4a	178	0,861896
	S 5	152	0,721869
	S 6	163	0,569474
	S 7	161	0,996405
	S 8a	178	0,914902
	S 9a	178	0,29595
Z _t ~ NID(0, σ ² l)			
∇	S 1a	177	6,48227E-7
	S 2a	177	0,0
	S 3a	177	3,33189E-12
	S 4a	177	0,0000245105
	S 5	151	0,00164329
	S 6	162	0,0000818183
	S 7	160	0,00175576
	S 8a	177	0,00000154496
	S 9a	177	1,429E-11

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

Esta prueba está basada en la suma de cuadrados de los primeros 40 a 45 coeficientes de autocorrelación. Puesto que para el valor-P menor que 0,05, se puede rechazar la hipótesis de que la serie es aleatoria, con un nivel de confianza del 95,0%. La series ajustadas sin corte de venta en ganancias netas de REC con transformación de potencia lambda, revelan un patrón de comportamiento de ruido blanco excepto S - 2; en cambio las series desfasada de primer orden sugieren que la series de tiempo pudieran no ser completamente aleatoria.

⁴ H₀: ρ_{1K} = ρ_{2K} = ρ_{3K} = = ρ_{nK} = 0; P ≥ 0.05

⁵ α = 0.05 y K = N/4

⁶ α = 0.05 y K = N/4

Tabla 2.6 Nivel de variabilidad requerido por la series.

SERVIDOR		Recuento	DESVIACIÓN ESTANDAR MUESTRAL	SERVIDOR		Recuento	DESVIACIÓN ESTANDAR MUESTRAL
T(Y _t ^λ)	S_1a	178	2,138	∇(T(Y _t ^λ))	S_1a	177	2,871
	S_2a	178	1,256		S_2a	177	3,274
	S_3a	178	0,641		S_3a	177	3,468
	S_4a	178	0,341		S_4a	177	0,455
	S_5	152	0,733		S_5	151	0,988
	S_6	163	1,109		S_6	162	1,669
	S_7	161	0,122		S_7	160	0,182
	S_8a	178	1,075		S_8a	177	1,505
	S_9a	178	0,291		S_9a	177	1,565
$Y_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2 I)$				$Y_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2 I)$			
∇	S_1a	177	15,626	∇ ²	S_1a	176	27,074
	S_2a	177	18,947		S_2a	176	41,590
	S_3a	177	17,277		S_3a	176	54,409
	S_4a	177	11,886		S_4a	176	19,751
	S_5	151	13,096		S_5	150	21,948
	S_6	162	16,903		S_6	161	29,864
	S_7	160	11,792		S_7	159	20,418
	S_8a	177	19,187		S_8a	176	33,961
	S_9a	177	14,626		S_9a	176	42,604

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

Esta herramienta complementaria de la función de autocorrelación muestral (FAC) revela una alteración de la varianza en las series con primeras y segundas diferencias, que podría indicar la presencia de factores sistemáticos, es decir, tendencias, estacionalidad o ciclos espurios (Maddala, 1996). En cambio la transformación de potencia presenta un escenario estable en las series. Esto podría indicar que las series con diferencias presentan un efecto sluky o ciclos espurios que hacen que las autocorrelaciones se han mas complicadas, y que de esta forma se pierda información valiosa que podría manifestarse en la FAC.

DIAGNOSTICO: En primera instancia se determinó que el 33,33% de las series ejercen un efecto significativo tras un ajuste correctivo de las ganancias netas obtenidas durante el periodo de enero – junio 2008. Por otra parte queda demostrado que debe evitarse diferenciar las series porque podría causar problemas al tratar de identificar un posible proceso generador de la serie observada.

De otro modo se consolida lo anterior a través del análisis de secuencias (véase A_4 y AP. 2 para mayores detalles).

Este procedimiento se usa para examinar los datos en busca de tendencias u otros patrones en el tiempo. Cuatro tipos de patrones no aleatorios pueden identificarse en ocasiones:

1. Mezcla – demasiadas corridas arriba o abajo de la mediana
2. Agrupamiento – muy pocas corridas arriba o abajo de la mediana
3. Oscilación – demasiadas corridas arriba y abajo
4. Tendencia – muy pocas corridas arriba y abajo

Tabla 2.7 Pruebas de corridas de secuencias individuales para cada servicio representado, con $\alpha = 0.025$.

	S S	Corridas arriba y abajo de la mediana (A)			Corridas arriba y abajo (B)			P - VALOR			
		Observados	Esperados	Más Largo	Observados	Esperados	Más Largo	(A)		(B)	
								(1) $P(>=)$	(2) $P(<=)$	(3) $P(>=)$	(4) $P(<=)$
$T(S_t^\lambda)$	1a	90	90,0	11	113	109,0	4	0,50	0,50	0,21	0,79
	2a	84	87,474	14	113	114,333	4	0,73	0,27	0,63	0,37
	3a	95	90,0	7	124	112,333	4	0,19	0,79	0,02	0,98
	4a	83	87,4971	8	111	109,0	4	0,78	0,22	0,32	0,68
	5	67	70,4101	7	94	90,3333	3	0,74	0,26	0,25	0,75
	6	84	77,7922	8	113	102,333	3	0,17	0,83	0,03	0,97
	7	53	54,0526	13	102	86,3333	3	0,62	0,38	0,00	0,99
	8a	91	87,4971	8	120	111,0	4	0,30	0,70	0,06	0,94
	9a	104	86,9884	9	117	108,333	4	0,00	0,99	0,06	0,96
∇^1	1a	113	82,4969	4	127	111,667	4	0,00	0,99	0,00	0,99
	2a	115	87,9885	4	136	114,333	3	0,00	0,99	0,00	0,99
	3a	124	84,9524	4	131	112,333	4	0,00	1,0	0,00	1,0
	4a	111	82,4724	4	122	107,667	3	0,00	0,99	0,00	0,99
	5	94	68,8676	5	101	93,0	3	0,00	0,99	0,06	0,94
	6	117	81,4969	4	120	107,0	3	0,00	1,0	0,01	0,99
	7	108	73,469	5	117	101,667	3	0,00	1,0	0,00	0,99
	8a	120	83,988	6	131	113,667	3	0,00	1,0	0,00	0,99
	9a	117	81,8889	4	136	113,667	3	0,00	1,0	0,00	0,99

Fuente: Los registros de ventas de los servicios públicos de REC durante el periodo de enero _ junio 2008

OBSERVACION: Por una parte se debe de recordar que las series exhibían varianza no constante (véase Fig. 1.5), la cual se estabilizo antes de cancelar cualquier tendencia o factor semideterminista presente en las series. De otra manera las series con diferencias presentan un comportamiento altamente alternante debido a la alteración de la varianza, que sin duda alguna revela un efecto espurio o cíclico a causa de este fenómeno. Las series con transformación de

potencia lambda revelan un patrón de co – movimiento de observaciones debidas puramente al azar, es decir que son solo innovaciones, que al no depender de su pasado las nuevas observaciones no poseen memoria, excepto para el caso de las serie S – 2.

DIAGNOSTICO: Las series con transformación son más estables, y por consiguiente representamos a través del modelamiento Box – Jenkins.

A_5 DESCRIPCION DE LA BASE DE INFORMACION MANEJADA

Paso 1. Diferenciar la tasa de cambio

<i>FECHA</i>	<i>C\$ por USD</i>
<i>01-Ene-08</i>	<i>18.9055</i>
<i>02-Ene-08</i>	<i>18.9080</i>
<i>03-Ene-08</i>	<i>18.9105</i>
<i>04-Ene-08</i>	<i>18.9130</i>
<i>05-Ene-08</i>	<i>18.9156</i>

Designando cada instante a toda la serie.

<i>FECHA</i>	<i>C\$ por USD</i>
<i>t₀ 01-Ene-08</i>	<i>18.9055</i>
<i>t₁ 02-Ene-08</i>	<i>18.9080</i>
<i>t₂ 03-Ene-08</i>	<i>18.9055</i>
<i>t₃ 04-Ene-08</i>	<i>18.9080</i>
<i>t₄ 05-Ene-08</i>	<i>18.9055</i>

Diferenciando toda la serie, se obtiene:

La devaluación de la moneda respecto al cambio unitario del dolar (Dmd)

<i>t₀ 01-Ene-08</i>	<i>d = t₀ - t₀</i>	<i>0</i>
<i>t₁ 02-Ene-08</i>	<i>d = t₁ - t₀</i>	<i>0,0025</i>
<i>t₂ 03-Ene-08</i>	<i>d = t₂ - t₀</i>	<i>0,005</i>
<i>t₃ 04-Ene-08</i>	<i>d = t₃ - t₀</i>	<i>0,0075</i>
<i>t₄ 05-Ene-08</i>	<i>d = t₄ - t₀</i>	<i>0,0101</i>

Paso 2. Obtener la ganancia bruta

\$(Cantidad de dólares vendidos en cada instante en córdobas)

OFD (Registro de las ofertas mantenidas entre el distribuidor principal y cada punto de servicio desde el periodo de enero – junio 2008)

OFC (Registro de las ofertas mantenidas hasta la fecha por cada punto de servicio público, desde el periodo antes mencionado, obtenida mediante una encuesta a los servicios)

$$\text{Ganancia bruta} = \text{OFC} * (\$) - \text{OFD} * (\text{V}\$)$$

*Para el punto de servicio *S - I* el 2/1/08/ obtuvo:*

$$\$ = 8$$

$$\text{OFC} = 21 \text{ córdobas}$$

$$\text{OFD} = 17,90$$

$$\text{Ganancia bruta} = 8 * (21) - 8 * (17,90) = 27.9 \text{ córdobas}$$

$$\text{Ganancia neta} = \text{GB} - 8 * (\text{Dmd}) = 27,8775 \text{ córdobas el día 2/1/08/}$$

A_6 DESCRIPCION DE LOS PUNTOS DE RUPTURA

Recuento de los días con corte de ventas que manifestaron el 90% de los servidores, representados en la siguiente tabla con una amplitud del intervalo = recorrido/ Log (n+1) = 22.5 ~ 23 días.

Tabla 2.8 Porcentaje de corte de venta presentado por los servidores.

SERVIDORES										
Días	% relativo a N = 1638									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T
0 - 23	0,06	0	0	0	0,31	0,18	0,06	0,12	0,12	0,85
24 - 47	0,12	0	0,06	0	0,37	0,18	0,06	0,18	0,06	1,03
48 - 70	0	0	0,12	0	0,18	0	0,12	0,06	0,06	0,54
71 - 92	0	0	0,12	0	0,18	0,24	0,06	0,18	0	0,78
93 - 116	0	0	0	0,12	0,18	0,06	0,06	0,18	0,12	0,72
117 - 139	0	0	0,06	0	0,18	0,06	0,43	0,12	0,18	1,03
140 - 162	0,06	0	0,06	0,12	0,24	0,06	0,12	0,06	0	0,72
163 - 182	0	0	0	0	0,06	0,12	0,18	0,18	0,06	0,6
T	0,24	0	0,42	0,24	1,17	0,01444	0,9	0,01736	1,09	6,27%

Fuente: Los registros de ventas de enero – junio 2008 de los servidores asociados al distribuidor principal Ing. Mario Berbis.

Recuento de los días con corte de ventas que manifestaron los servicios emisores de recarga electrónica de celulares, tras el ajuste correctivo representado con una amplitud igual a 23 días.

Tabla 2.9 Porcentaje con ajuste corte de venta presentado por los servidores.

SERVIDORES										
Días	% relativo a N = 1638									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T
0 - 23	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2,2
24 - 47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48 - 70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71 - 92	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
93 - 116	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
117 - 139	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
140 - 162	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
163 - 182	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2,2%

Fuente: Los registros de ventas de enero – junio 2008 de los servidores asociados al distribuidor principal Ing. Mario Berbis.

Donde: “T” representa el total

APENDICES

HERRAMIENTAS Y CONCEPTOS DEL ANALISIS DE SERIES DE TIEMPO

Este apéndice detalla brevemente algunas herramientas y conceptos utilizados en el desarrollo práctico de la exposición de todo el estudio. Para una introducción formal ver (Guerrero 1993, y José Vila y Iván Arribas 2001, Hamilton 1994 y Moretin 2004).

La sección AP.1 introduce una prueba de diagnóstico importante en el análisis de series de tiempo como es la suposición de normalidad. La sección AP.2 Provee una herramienta de diagnóstico vital para examinar la estructura de las series, que de una u otra forma evalúa tanto la aleatoriedad como la presencia de componentes. La sección AP.3 introduce una metodología de ajuste previo, utilizando transformaciones de la familia BOX – COX equivalente a los operadores de series de tiempo, que tomando primera diferencia se obtiene una media constante y utilizando transformaciones una varianza acotada, aunque prácticamente en ocasiones se utilizan combinaciones de ambas técnicas. En la sección AP.4 se expone la metodología aplicada del análisis de serie estadístico prospectivo a través del enfoque Box – Jenkins (1984), en última sección AP.5 se introduce la herramienta fundamental del análisis del dominio del tiempo, a través de los procesos aquí tratados.

AP.1 EL PROCESO ESTOCÁSTICO SE DISTRIBUYE NORMALMENTE

Dado que la distribución normal caracteriza totalmente los primeros dos momentos, se puede demostrar que un proceso estocástico estacionario que se distribuye normalmente es de hecho, estacionario en sentido estricto. Es decir la distribución conjunta es normal multivariada y invariante a traslaciones en el tiempo, lo cual garantiza que las transformaciones también serán estacionarias.

El fundamento teórico de la modelación de series de tiempo, utilizando modelos lineales, está dado por el siguiente resultado:

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE WOLD

Toda serie estacionaria en covarianza puede ser expresada como la suma de una función determinística, $c(t)$; y una sucesión infinita de variables aleatorias no correlacionadas, ε_t :

$$\begin{aligned}x_t &= c(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \\x_t &= c(t) + \psi(L)\varepsilon_t\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$\text{donde } \psi_0 = 1 \text{ y } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

Ya que siempre se puede calcular la media de un proceso estacionario, el problema de caracterizar una serie de tiempo es equivalente a estimar los coeficientes del polinomio $\psi(L)\varepsilon_t$. El problema con esta estrategia es que se trata de un polinomio infinito. Por ello, en la modelación de series de tiempo usualmente se utilizan procesos estocásticos autor regresivos

de media móvil (ARMA por sus siglas en inglés). Los procesos ARMA pueden ser interpretados como una aproximación a la parte estocástica del teorema de descomposición de Wold.

Antes de describir las herramientas básicas de análisis de series de tiempo, a continuación se describen algunas pruebas de diagnóstico utilizadas en el análisis y verificación del supuesto de normalidad y aleatoriedad.

PRUEBA DE NORMALIDAD DE SHAPIRO Y WILKS 1965

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una función de distribución F . Sean $\mathbf{X} = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, el vector de estadísticos de orden de la muestra, $\mathbf{m} \in \mathfrak{R}^n$ el vector de medias y V_0 la matriz $n \times n$ de covarianzas de los estadísticos de orden de una muestra de tamaño n de una $N(0,1)$. Se obtiene un test de normalidad considerando el cuadrado del coeficiente de correlación de los pares $(X_{(i)}, m_j)$.

$$W = \frac{(\mathbf{X}'\mathbf{m})^2}{(\mathbf{m}'\mathbf{m}) \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}. \quad (2.44)$$

En (2.45) el vector de medias ósea \mathbf{m} se reemplaza por una aproximación adecuada. El estadístico W' es, a su vez, una aproximación del estadístico W de Shapiro y Wilks (1965).

$$W = \frac{(\mathbf{X}'V_0^{-1}\mathbf{m})^2 / (\mathbf{m}'V_0^{-2}\mathbf{m})}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}. \quad (2.45)$$

Con esta herramienta se determinará si la serie es estacionariedad en sentido estricto o de segundo orden, además de validación y diagnóstico de los residuos del modelo.

Procedimiento para su obtención:

H_0 : “La muestra procede de una población normal”

H_1 : “La muestra no procede de una población normal”

1) Se ordena la muestra de menor a mayor, obteniendo el vector muestral, $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$, siendo $x_{(i)}$ el i -ésimo valor muestral tras la ordenación.

2) Se estima el estadístico D según la expresión: $D = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, donde

x_i : la observación i , que se obtiene restando a cada valor su respectiva media aritmética dentro de cada concentración evaluada

\bar{x} : La media total de todas las observaciones centradas (de todas las concentraciones)

n : el total de las observaciones centradas

3) Se calcula el estadístico de contraste y se sustituye D por la expresión ns^2 en formula:

$$W = \frac{1}{ns^2} \left[\sum_{i=1}^h a_{in} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2, \text{ siendo } s^2 \text{ la varianza muestral } h = \begin{cases} \frac{n}{2}, n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2}, n \text{ es impar} \end{cases} \text{ para cada}$$

coeficiente a_{in} y el estadístico W tabulado. Considerándose aceptable para tamaños muestrales entre 3 y 5000.

AP.2 PRUEBA DE RACHAS O SECUENCIAS.

Todos los métodos que se han estudiados se basan en la suposición de que las muestras son aleatorias; no obstante, existen muchas aplicaciones donde resulta difícil decidir si esta suposición es justificable, por ejemplo cuando se utilizan registros de ventas de servidores de recarga electrónica de celulares, y se quiere pronosticar las ganancias_ netas. Esta no se limita a demostraciones de aleatoriedad de series de atributos, de forma análoga se representa para observaciones numéricas a través de la mediana muestral.

Si existen muy pocas corridas se podría sospechar de una agrupación o aglutinamiento definido, o bien, quizás de una inclinación o tendencia; si existen demasiadas corridas, podríamos sospechar de alguna clase de alternación repetitiva o modelo cíclico (pero si se sigue observando y es significativo se puede atribuir a la oportunidad).

Este procedimiento se usa para examinar los datos en busca de tendencias u otros patrones en el tiempo. Cuatro tipos de patrones no aleatorios pueden identificarse en ocasiones:

1. Mezcla – demasiadas corridas arriba o abajo de la mediana
2. Agrupamiento – muy pocas corridas arriba o abajo de la mediana
3. Oscilación – demasiadas corridas arriba y abajo
4. Tendencia – muy pocas corridas arriba y abajo

Los resultados son importantes ya que proveen una prueba inicial que si los datos provienen o no de un proceso estable.

La tabla 2.6 presenta la siguiente información:

- **Observados:** el número observado de secuencias k .
- **Esperados:** el número esperado de secuencias E (*secuencias*).
- **Más largo:** la secuencia más grande observada en el gráfico.
- **$P (>=)$:** la probabilidad de observar k o más secuencias si los datos fueran aleatorios.
- **$P (<=)$:** la probabilidad de observar k o menos secuencias si los datos fueran aleatorios.

Si $P (>=)$ es pequeña para la prueba de secuencias arriba y debajo de la mediana, entonces hay evidencia significativa de **mezcla** en los datos, ya que el proceso cruza la línea de la mediana más frecuentemente que lo esperado. Si $P (<=)$ es pequeña, entonces hay evidencia significativa de **agrupamiento** en los datos, ya que el proceso no cruza la línea de la mediana tan frecuentemente como lo esperado.

Si $P (>=)$ es pequeña para la prueba de secuencias hacia arriba y hacia abajo, entonces hay evidencia significativa de **oscilación** en los datos, ya que el proceso cambia de dirección más frecuentemente que lo esperado. Si $P (<=)$ es pequeña, entonces hay evidencia significativa de **tendencia** en los datos, ya que el proceso no cambia de dirección tan frecuentemente como lo esperado.

Si cualquier valor de P menor que 0.025, podemos rechazar la hipótesis de que los datos son muestras aleatorias al nivel de significancia del 5%.

A continuación se presentan los detalles de cómo se conducen las pruebas.

Prueba #1: secuencias arriba y debajo de la mediana

Esta prueba se basa en el número de veces que la secuencia de valores de los datos permanece por arriba o por debajo de la mediana. Una secuencia se define como una serie de valores consecutivos todos por arriba o todos por debajo de la mediana. (Nota: se ignoran los valores exactamente iguales a la mediana cuando se cuentan las secuencias). La prueba se realiza como sigue:

1. Calcule n_1 y n_2 , el número de observaciones arriba y debajo de la mediana, respectivamente. La suma de estos dos valores es

$$N = n_1 + n_2 \quad (2.46)$$

2. Calcule k , el número de secuencias arriba y debajo de la mediana.
3. Calcule el número esperado de secuencias arriba y debajo de la mediana si los datos fueran una serie aleatoria:

$$E(\text{secuencias}) = 1 + \frac{2n_1n_2}{N} \quad (2.47)$$

4. Calcule la varianza del número de secuencias arriba y debajo de la mediana si los datos fueran una serie aleatoria:

$$V(\text{secuencias}) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - N)}{N^2(N-1)} \quad (2.48)$$

5. Calcule la probabilidad de observar al menos k secuencias:

$$P(>=) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - E(\text{secuencias})}{\sqrt{V(\text{secuencias})}}\right) \quad (2.49)$$

Donde $\Phi(z)$ es la función de distribución acumulada normal estándar.

6. Calcule la probabilidad de observar k o menos secuencias:

$$P(<=) = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - E(\text{secuencias})}{\sqrt{V(\text{secuencias})}}\right) \quad (2.50)$$

Prueba #2: secuencias hacia arriba y hacia abajo

Esta prueba se basa en el número de veces que la secuencia de valores de los datos se eleva o cae. Una secuencia se define como una serie de valores consecutivos yendo todos hacia arriba o todos hacia abajo. (Nota: se ignoran los valores de datos exactamente iguales al valor previo cuando se cuentan las secuencias). La prueba se realiza como sigue:

1. Calcule n_1 y n_2 , el número de observaciones mayores o menores que el valor previo, respectivamente. La suma de estos dos valores es

$$N = n_1 + n_2 \quad (2.51)$$

2. Calcule k , el número de secuencias hacia arriba y hacia abajo.
3. Calcule el número esperado de secuencias hacia arriba y hacia abajo si los datos fueran una serie aleatoria:

$$E(\text{secuencias}) = \frac{2N - 1}{3} \quad (2.52)$$

4. Calcule la varianza del número de secuencias hacia arriba y hacia abajo si los datos fueran una serie aleatoria:

$$V(\text{secuencias}) = \frac{16N - 29}{90} \quad (2.53)$$

5. Calcule la probabilidad de observar al menos k secuencias:

$$P(\geq) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - E(\text{secuencias})}{\sqrt{V(\text{secuencias})}}\right) \quad (2.54)$$

Donde $\Phi(z)$ es la función de distribución acumulada normal estándar.

6. Calcule la probabilidad de observar k o menos secuencias:

$$P(\leq) = \Phi \left(\frac{k + 0.5 - E(\text{secuencias})}{\sqrt{V(\text{secuencias})}} \right) \quad (2.55)$$

AP.3 TRANSFORMACIÓN DE POTENCIA λ

Con el fin de volver estacionaria la serie, lo primero que se podría hacer sería utilizar el método para seleccionar una transformación estabilizadora de la varianza (heterocedasticidad) y falta de normalidad (asimetría) que consiste en elegir la potencia λ de tal manera que satisfaga la relación:

$$\sigma^t / \mu_t^{1-\lambda} = \text{constante para } t = 1, 2, \dots, N \quad (2.56)$$

En donde σ^t y μ_t representa a la desviación estándar y μ la media de la variable Z_t , y N es el número de observaciones que se tienen para la serie $\{Z_t\}$. Como es sabido, en cada momento t se hace solamente una observación de Y_t y, por tanto, no es posible obtener una estimación de σ^t para cada t . Sin embargo Guerrero (1993) sugiere que el método para transformar las observaciones sea el siguiente llevado a cabo.

Paso 1:

Para encontrar el mejor valor de λ que estabilice la varianza y a su vez normalice su comportamiento, a través de la transformación Z^λ . Aplicamos la formula (2.56) descrita por

Box – Cox a cada Z_i y formamos el vector $V = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ y luego ajustamos un modelo lineal de la forma $V = X\beta + \varepsilon$ por MC para cada valor específico de λ , mas precisamente se debe estimar a λ como a β . Esto se hace aplicando el método de máxima verosimilitud bajo el supuesto que $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$ para la seleccionada λ .

$$V = \begin{cases} \frac{Y^{\lambda-1}}{\lambda} & , si \lambda \neq 0 \\ \ln Y & , \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Paso 2.

Al obtener el λ adecuado, un modelo aditivo con error normalmente distribuido, independientemente y varianza homogénea, podría ser ajustado por el método de máxima verosimilitud, pero un método mas sencillo consiste en tomar un numero adecuados de valores de λ equiespaciados en el intervalo $-2 \leq \lambda \leq 2$ susceptible a contener el λ optimo, sigue los siguientes pasos.

1 – seleccionar el valor de λ usualmente de un rango (-2,2)

2 – para cada valor de λ obtenga los datos transformados para obtener el vector de respuestas $V = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, y utilice $V = \ln Y$, cuando $\lambda = 0$, o evite seleccionar este valor.

3 – Para los datos transformados ajuste el modelo $V = X\beta + \varepsilon$ por MC y registre la suma de

cuadrados del error, $S(\lambda, V)$.

4 – Dibuje CME (ordenada) VS. Los valores del λ (abcisa) y seleccione el valor de λ para el cual sea mínimo el valor del CME, de esta manera habrá estimado el valor de máxima verosimilitud. Ver figura 1.7 del ajuste de una serie.

AP.4 METODOLOGÍA DE BOX Y JENKINS (AMPLIACIÓN PRÁCTICA)

Box y Jenkins desarrollaron a principios de los años 70 (ver Box y Jenkins 1984) una metodología general para modelar procesos ARIMA, a la cual en secciones anteriores describimos teóricamente. Básicamente la metodología consiste un proceso recursivo de tres etapas:

Identificación.

En la primera etapa se determinan tanto el orden de integración de la serie de tiempo X_t , como el orden de los polinomios AR y MA regulares y estacionales. Para ello la principal herramienta es el análisis de la función de autocovarianza del proceso, la cual se discute con más detalle en la sección Ap.5, mas adelante.

Una ves que el orden de integración ha sido identificado, el modelo ARIMA se puede interpretar como un modelo ARMA para la transformación estacionaria $\Delta^d x_t$ de la serie. A continuación se describe el método mas utilizado de identificación y estimación de coeficientes de un modelo ARMA.

El Método de Hannan-Rissanen

El método de identificación y estimación desarrollado por Hannan y Rissanen (1982), parte de la estimación preliminar de un modelo AR_(k) para obtener un estimador de las innovaciones del proceso ε_t .

Utilizando esta estimación $\hat{\varepsilon}_t$, se busca el orden de los polinomios AR y MA por mínimos cuadrados utilizando los criterios de información de Akaike y de Schwartz descritos en la sección teórica.

El método consiste en los siguientes pasos:

1_ Multiplicando a ambos lados de la ecuación (2.58), por x_t y tomando las expectativas se obtienen un conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Yule-Walker (2.11):

$$\begin{aligned} x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p} &= \varepsilon_t \\ \phi(L)x_t &= \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-k_{\max}} \\ \sigma^2 &= \gamma_0 - \phi_1 \gamma_1 - \dots - \phi_{k_{\max}} \gamma_{k_{\max}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde γ_k es la k - ésima autocovarianza y $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$. una vez que se resuelven las ecuaciones de Yule-Walker, se obtienen los coeficientes de un modelo AR (k_{\max}).

2_ A continuación se estima el criterio de información de Akaike para cada uno de los modelos AR estimados, y se escoge el modelo AR (k) que tenga el menor criterio de información.

3_ Se estiman los residuales del modelo escogido.

4_ Se estiman los coeficientes de modelos ARMA (p, q) por mínimos cuadrados hasta el orden $p \leq \text{Min}(p_{\text{máx}}, k)$ y $q \leq q_{\text{máx}}$,

donde $p_{\text{máx}}$ y $q_{\text{máx}}$ son valores definidos a priori.

5_ A partir de los residuales de los modelos ARMA (p, q) estimados en el paso anterior se estima el criterio de información de Schwartz para cada modelo ajustado y se escoge el modelo con el menor criterio de información.

Estimación.

Normalmente para estimar el modelo recién identificado se utiliza el método de mínimos cuadrados o el método de máxima verosimilitud. A continuación se ilustra la metodología para el caso más sencillo, para una introducción detallada ver Hamilton (1994).

En una muestra aleatoria de observaciones, la probabilidad de cada observación esta dada por $f(x_j, \Psi)$. En virtud de la independencia de cada observación, la probabilidad conjunta es igual a:

$$f(x_1, \dots, x_T, \psi) = f(x_1, \psi) \dots f(x_T, \psi)$$

$$L(\psi) = \prod_{j=1}^T f(x_j, \psi) \quad (2.60)$$

Esta función es conocida como la función de verosimilitud del conjunto de parámetros dado el conjunto de observaciones X_t

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar el conjunto de parámetros que maximizan la función de verosimilitud (2.60), de la serie de tiempo; la cual se supone obedece un proceso ARIMA como el de la ecuación (2.23).

Bajo los supuestos de que las innovaciones en (2.23) son independientes, distribuidas normalmente con varianza σ^2 , y que los valores iniciales del proceso son conocidos, el logaritmo de la función de verosimilitud esta dado por:

$$\ln L(\psi, \sigma^2) = -\frac{1}{2} T \ln(2\pi) - T \ln(\sigma^2) - \frac{S(\psi)}{2\sigma^2} \quad (2.61)$$

donde:

$$S(\psi) = \sum_{j=1}^T \varepsilon_j^2 \quad (2.62)$$

es la suma cuadrática de las innovaciones en (2.23).

Si se “concentra” el estimador de la varianza fuera de la ecuación (2.61) utilizando $\hat{\sigma}^2 = \frac{s\psi}{T}$ la función a maximizar se convierte en:

$$-\frac{S(\psi)}{2\sigma^2} \quad (2.63)$$

Donde se omite una constante que desaparece en la optimización de la expresión (2.63) resulta claro que bajo los supuestos realizados la maximización de la función de verosimilitud es equivalente a la minimización de la suma de cuadrados.

Una vez que los parámetros del modelo han sido estimados, el siguiente paso es realizar una evaluación del modelo recién ajustado. Bajo los supuestos realizados, los residuales de la ecuación estimada deben de comportarse como variables independientes que obedecen una distribución normal idéntica.

Por ello, de la diversidad de diagnósticos existentes los más frecuentemente utilizados tienen que ver con la independencia de los residuales, la normalidad de su distribución y la constancia de la varianza. Adicionalmente existen diagnósticos para determinar si existen quiebres estructurales, evaluando la significancia de la regresión, etc. Para una introducción detallada de los diagnósticos de modelos ARIMA ver Hamilton (1994).

Inferencia.

Una vez que los diagnósticos del modelo tentativo satisfacen ciertos criterios, se puede proceder a la fase de inferencia. A continuación se describe brevemente como se utilizan los modelos ARIMA para realizar pronósticos; la cual es, sin duda, la aplicación mas utilizada de los modelos ARIMA.

Sea $\hat{x}_{T+k|T}$ el pronóstico del valor \hat{x}_{T+k} obtenido a partir de las observaciones (x_1, \dots, x_T) . Claramente el objetivo al realizar el pronóstico es que este sea tan cercano al valor verdadero como sea posible, por ello la certeza de los pronósticos se evalúa utilizando el criterio de error cuadrático medio (MSE), dado por:

$$MSE(\hat{x}_{T+k|T}) = E[(x_{T+k} - \hat{x}_{T+k|T})^2] \quad (2.64)$$

donde es $E[.]$ es el operador de esperanza.

Se puede demostrar que el pronóstico con MSE mínimo se obtiene a partir de la esperanza de $\hat{x}_{T+k|T}$ condicional en el conjunto (x_1, \dots, x_T) . Bajo el supuesto de normalidad la esperanza condicional es una combinación lineal de los elementos en (x_1, \dots, x_T) , que para un modelo ARIMA (p, d, q) como (2.23) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{T+q/T} &= \delta_1 \phi_1 \hat{x}_{T+q-1/T} + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} \hat{x}_{T+q-p-d} + \theta_q \varepsilon_T \\ \hat{x}_{T+k/T} &= \delta_1 \phi_1 \hat{x}_{T+k-1/T} + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} \hat{x}_{T+k-p-d} + \theta_q \varepsilon_T \text{ para } k > d\end{aligned}$$

Donde los pronósticos de j pasos adelante ($j = 1, 2, \dots, k$), se obtienen recursivamente a partir de :

$$\hat{x}_{T+q/T} = \delta_1 \phi_1 \hat{x}_T + \dots + \delta_{p+d} \phi_{p+d} x_{T-q-d+1} + \theta_1 \varepsilon_T + \dots + \theta_q \varepsilon_{T-q+1}$$

Alternativamente utilizando el teorema de descomposición de Wold (2.43) el pronóstico de k pasos adelante se puede escribir como:

$$\hat{x}_{T+k/T} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+k} \varepsilon_{t-j}$$

donde

$$\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\delta(L)\phi(L)}.$$

Por lo tanto el error del pronóstico se puede escribir como:

$$x_{T+k} - \hat{x}_{T+k/T} = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \varepsilon_{T+k-j}$$

Se puede demostrar fácilmente que independientemente del modelo utilizado, ϕ_1 siempre, por lo que el error de un paso adelante siempre es igual ε_{T+1} , por ello es que a la sucesión de $\{\varepsilon_t\}_t$ se le conoce como también innovaciones.

Ya que las innovaciones son independientes con media cero y varianza σ^2 , el error cuadrático medio de los pronósticos pasos adelante es igual a:

$$MSE(\hat{x}_{T+k|T}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2$$

Finalmente explotando el supuesto de normalidad, el intervalo de confianza para el pronóstico de k pasos adelante se puede construir como:

$$\left[\hat{x}_{T+k|T} - C_{1-\alpha/2} \sqrt{MSE(\hat{x}_{T+k|T})}, \hat{x}_{T+k|T} + C_{1-\alpha/2} \sqrt{MSE(\hat{x}_{T+k|T})} \right]$$

donde $C_{1-\alpha/2}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar que se excede con probabilidad $(1-\alpha/2)$.

bajo los supuestos el análisis de series de tiempo presentamos el siguiente apéndice que generaliza el análisis del dominio del tiempo.

AP.5 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

El segundo momento de un proceso estocástico estacionario esta dado, en términos generales, por la función de autocovarianza:

$$g(L) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (L^k + L^{-k}) \quad (2.65)$$

Para un proceso estacionario que ha sido parametrizado, la función de autocovarianza (2.65), es una función de k y de los parámetros que caracterizan al proceso estocástico.

Resulta conveniente contar con una medida del segundo momento que no tenga escala, para ello se normaliza la función de autocovarianza dividiendo por la varianza del proceso, lo cual permite obtener la función de auto correlación:

$$r(L) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (L^k + L^{-k}) \quad (2.66)$$

donde

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \in [-1, 1], \text{ y en particular } \rho_0 = 1$$

Una de las características básicas de una serie de tiempo estacionaria es que su función de auto

correlación; o alternativamente su contraparte muestral, el correlograma⁷, eventualmente tiende a cero.

La función de auto correlación de un proceso AR (p) estacionario puede decaer hacia cero de manera monótonica u oscilando como una función sinusoidal, por lo que dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio $\phi(L) = 0$, para toda $k > p$;

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (2.67)$$

Para un proceso MA (q) la -ésima autocovarianza se puede expresar como:

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-k} \theta_{k-i} \theta_i \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, q$$

$\gamma_k = 0$ para $k > p$

donde σ^2 es la varianza del proceso $\{\epsilon_t\}$ en (2.13). Por lo tanto la función de auto correlación de un proceso MA (q) se corta abruptamente después del -ésimo rezago.

⁷ El correlograma esta dado por $\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$

Para un proceso ARIMA (p, q) la k -ésima auto correlación es una función de los parámetros de los polinomios $\phi(L)$ y $\theta(L)$ hasta el k -ésimo rezago a partir del cual la función de auto correlación se comporta como la ecuación (2.67).

En general para un proceso ARMA (p, q) estacionario la función de autocovarianza esta dada por:

$$g(L) = \sigma^2 \frac{\theta(L)\theta(L^{-1})}{\phi(L)\phi(L^{-1})}$$

Dado que el análisis de las autocovarianzas de una serie de tiempo estacionaria permiten caracterizarla de manera análoga a la caracterización de la distribución de una variable aleatoria utilizando los momentos de la distribución, la función de autocovarianza es la herramienta básica de análisis en el dominio del tiempo.

FIGURAS.

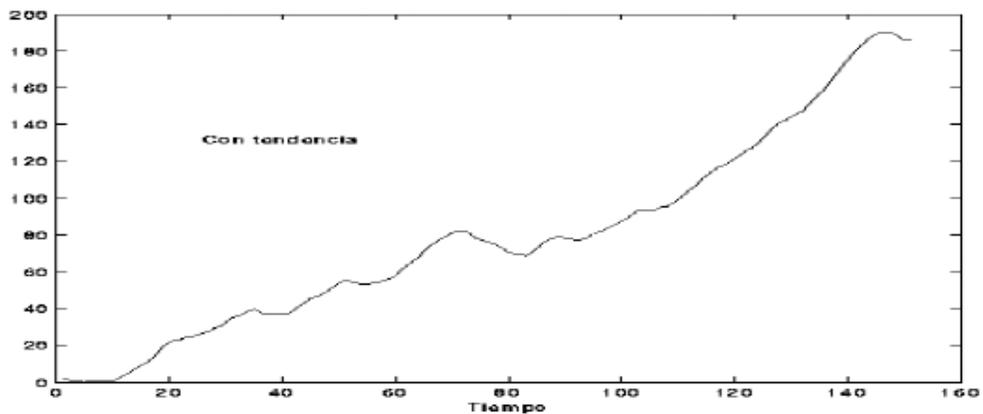


FIGURA 1.1 SERIE CON TENDENCIA HOMOCEDASTICA

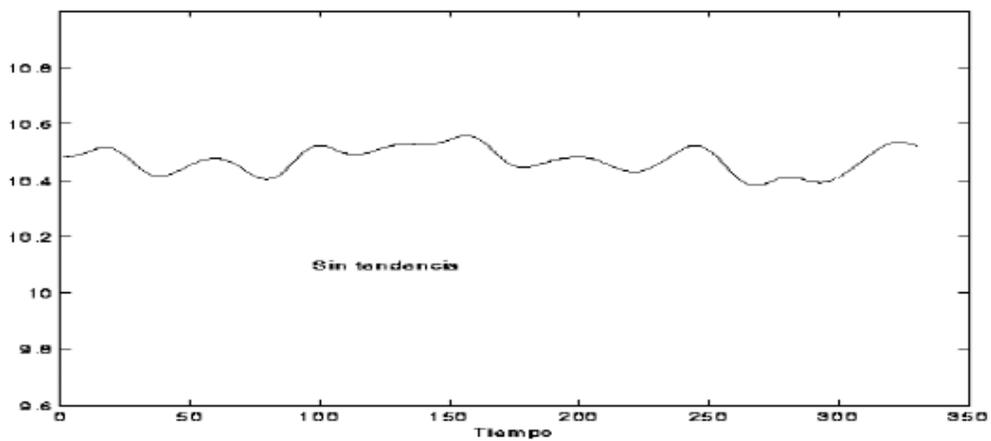


FIGURA 1.2 SERIE SIN TENDENCIA HOMOCEDASTICA

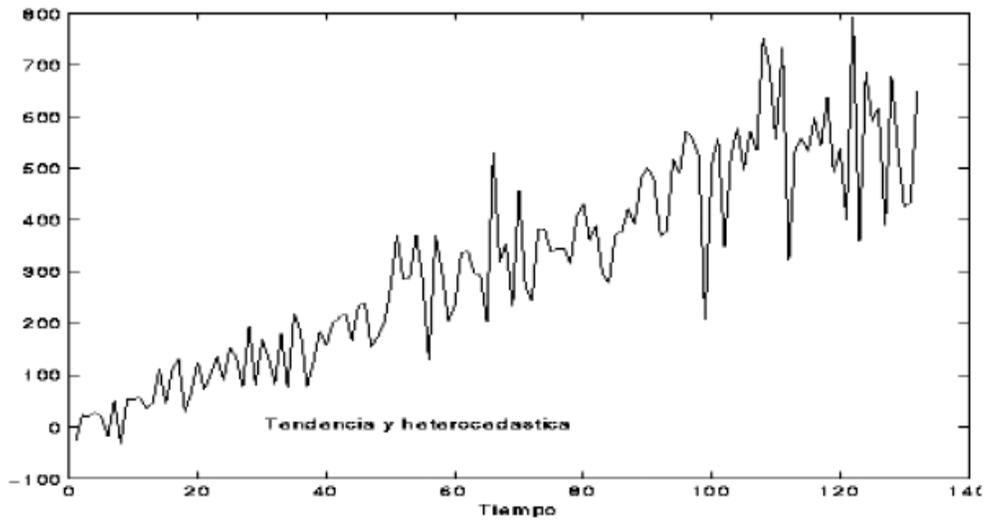


FIGURA 1.3 SERIE CON TENDENCIA HETEROCEDASTICA

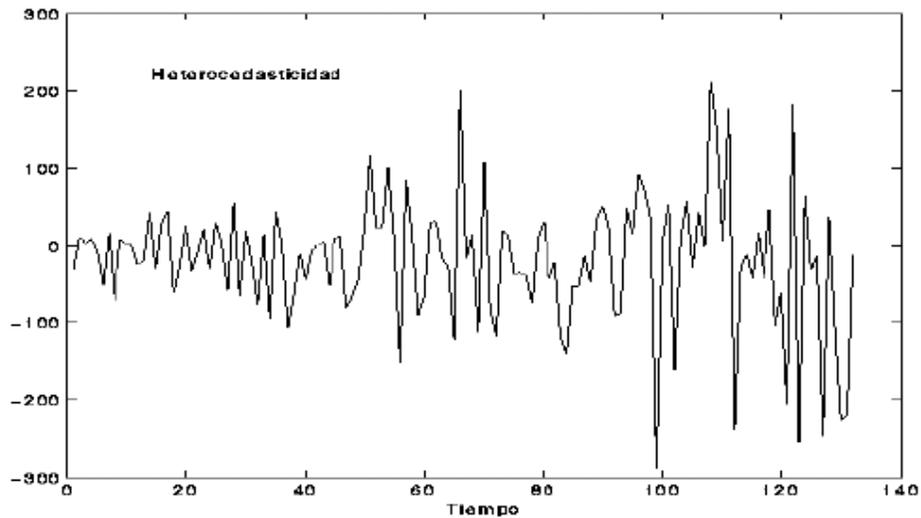


FIGURA 1.4 SERIE SIN TENDENCIA HETEROCEDASTICA

Como hemos visto la representación grafica de las series anteriores, son la principal característica que presentan las series en estudio, es decir que delimitando sus componentes, estas se comportan de una forma parecida ha las anteriores descritas con el fenómeno presente en la figura 1.5.

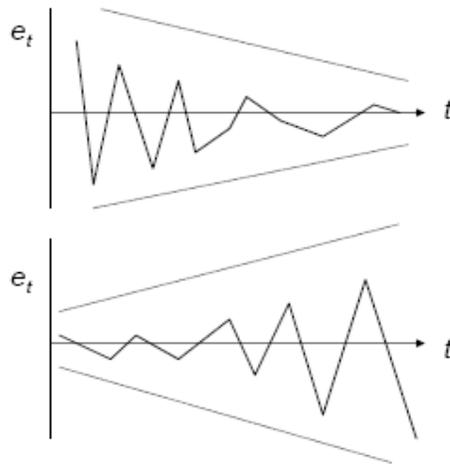
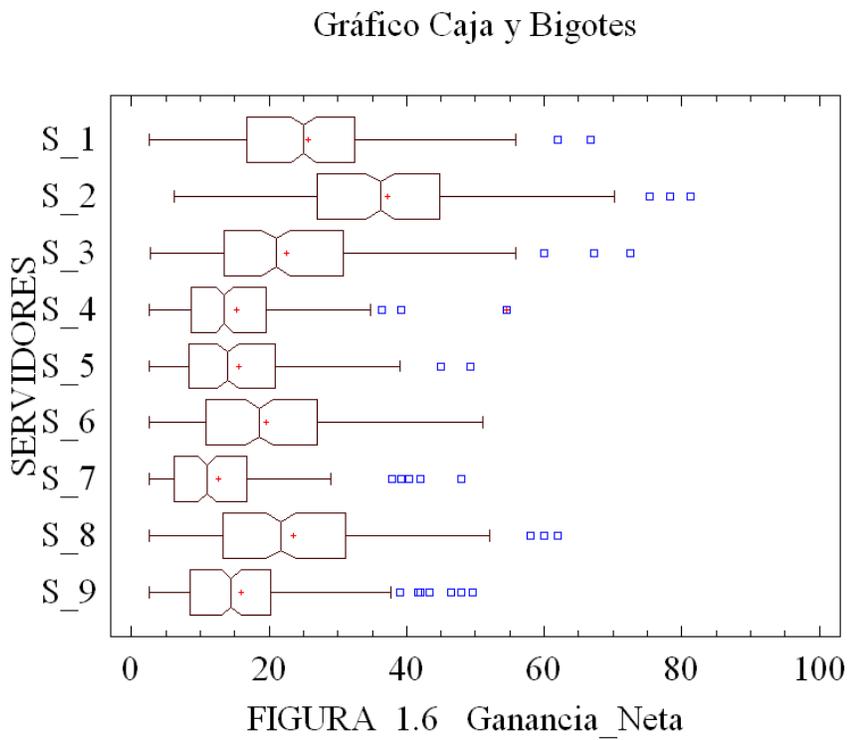


FIGURA 1.5 COMPORTAMIENTO TIPICO DE LA VARIANZA RESIDUAL, CRE IENTE Y DECRECIENTE HETEROCEDASTICA.



Esta gráfica despliega 9 diagramas de caja y bigote para cada nivel de servicio sin ajuste correctivo de días de corte de venta. La parte rectangular de la gráfica se extiende desde el Cuartil inferior hasta el Cuartil superior. La línea central dentro de cada caja indica la localización de la mediana de cada muestra. Los bigotes se extienden desde la caja hasta los valores mínimo y máximo de cada muestra, excepto para cualquier punto alejado ó muy alejado, los cuales se grafican en forma individual. El signo más indica la localización de la media de cada muestra. Puntos alejados son aquellos que quedan a más de 1,5 veces el rango intercuartílico por arriba ó por debajo de la caja y se muestran como pequeños cuadrados. Puntos muy alejados son aquellos que quedan a más de 3,0 veces el rango intercuartílico por arriba ó por abajo de la caja, y se muestran como pequeños cuadrados con un signo más en su interior. En este caso, hay 32 puntos alejados y 3 puntos muy alejados. La presencia de puntos muy alejados puede indicar valores aberrantes ó una distribución altamente sesgada. Las distribuciones están posicionadas en el 100% de los servicios de manera diferente, siendo el S_2 la que obtiene mayor ganancias obtiene, seguido de los S_3, S_1, S_8, S_6, S_9, S_5, S_4 y finalmente S_7, otro hecho que puede observarse es que la variación va incrementándose a medida que aumenta el promedio. Un tercer hecho es que la distribución es asimétrica con valores extremos o muy extremos solo a la derecha de la media. Por otra parte la asimetría tiende a disminuir con el aumento de las ganancias _netas, esto indica que la distribución es mas asimétrica en las que obtienen menos ganancias.

Comparación del CME S-1 en la determinación de Lambda Optimo

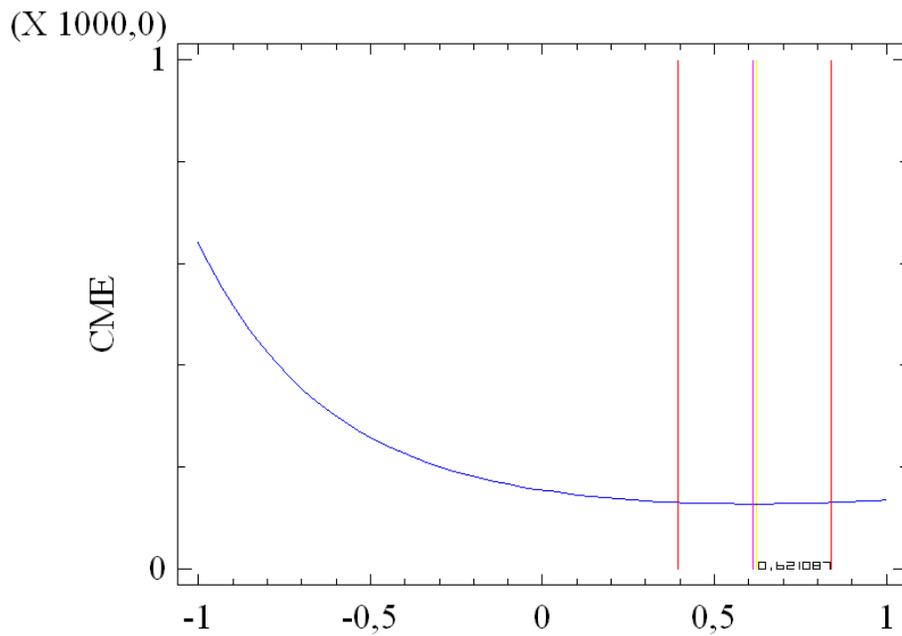


FIGURA 1.7 Lambda Optimo

Muestra el ajuste de la serie S_1 mediante transformación de potencia Lambda; como se observa el menor valor de lambda es 0.621 generada para el V de respuestas por la expresión (2.51) es $S_1 = (1 + S_1^{0,621 - 1}) / (0,621 * 22,6466^{-0,368})$ para el modelo estimado $S_1 = 37,8635 - 0,0453773 * \text{TIEMPO}$.

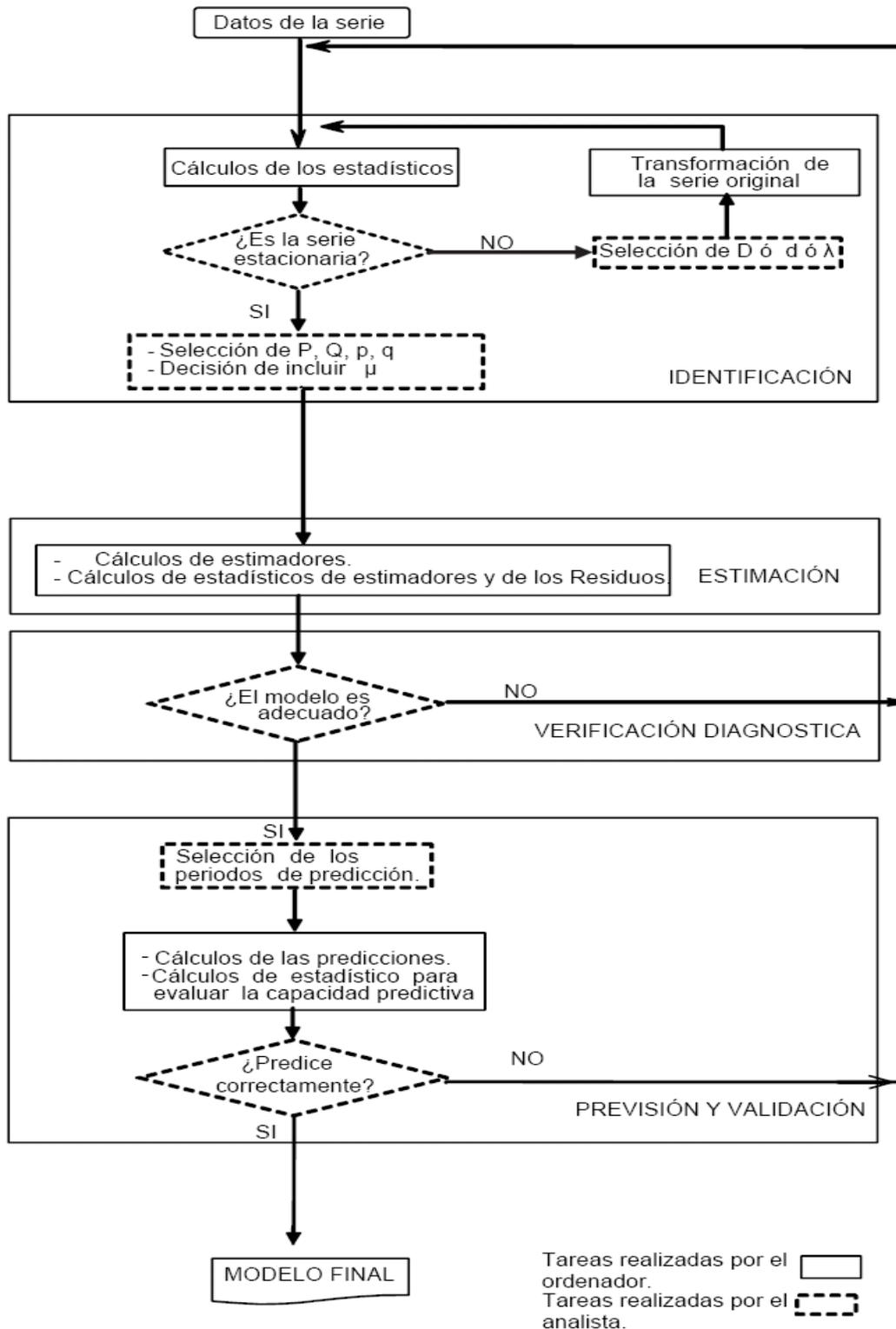


FIGURA 1.8 Flujograma de las etapas del desarrollo Box – Jenkins (modificados por Uriel y Peiro, 2000; Box y Jenkins, 1994 y chatfield 1996).

REFERENCIAS

[1] Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. y Reinsel, G. (1984). *Time Series Análisis Forecasting and Control. Third Edition. Englewood Cliffs: Prince Hall.*

[2] Guerrero, V.M. (1991). *Análisis Estadístico de Series de tiempo Económicas, primera edición, colección CBI. México.*

[3] George C. Canavos (1988). *Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos*, Virginia Commonweal University.

[4] Hamilton, J.D (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press

[5] Li, H. y Maddala, G.S. (1996). Bootstrapping time series models. *Econometric Reviews*, 15, 115 – 158.

[6] Morettin, P.A. y Toloí, C.M.C. (2004). *Análisis de series Temporales.*

